Resumo

Matrizes

Introdução às matrizes

Podemos representar uma matriz tanto com colchetes "[ ]" quanto com parênteses "( )".
Matriz de **dimensão** **m** × **n**: **m linhas** e **n colunas**.
Elemento a_{ij}: o **primeiro índice** representa a **linha** e o **segundo índice** representa a **coluna**.

Representação de uma matriz pela lei de formação

Cada elemento da matriz deve ser calculado por meio de uma fórmula apresentada.

Tipos de matrizes

Matriz linha: apresenta apenas uma linha. Dimensão da forma **1** × n.
Matriz coluna: apresenta apenas uma coluna. Dimensão da forma m × **1**.
Matriz quadrada: apresenta o mesmo número de linhas e de colunas. Dimensão da forma **n × n**.

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 11 & 15 & 2\% \\ \sqrt{7} & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Diagonal Secundária
$i + j = n + 1$

Diagonal Principal
$i = j$

Matriz Retangular: número de linhas é diferente do número de colunas.
Matriz Diagonal: **matriz quadrada** em que todos os **elementos que <u>não</u> pertencem à diagonal principal** são iguais a **zero.**
Matriz Triangular: **matriz quadrada** em que todos os elementos <u>acima</u> <u>ou</u> <u>abaixo</u> de sua **diagonal principal** são nulos.

- **Matriz Triangular <u>Superior</u>:** todos os elementos **<u>abaixo</u>** da diagonal principal são nulos.
- **Matriz Triangular <u>Inferior</u>:** todos os elementos **<u>acima</u>** da diagonal principal são nulos.

Matriz Identidade: elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os elementos fora da diagonal principal são zero.
Matriz Nula: todos os elementos são iguais a zero. É comum representar uma matriz nula quadrada pela letra O acrescida de um índice que indica a ordem da matriz. Ex: O_3 → matriz **<u>nula</u>** **<u>quadrada</u>** de **<u>ordem 3</u>**.

Operações com matrizes

Igualdade entre matrizes: duas matrizes são iguais quando <u>apresentam a mesma dimensão</u> **m×n** e <u>seus elementos são</u> **<u>idênticos</u>** <u>e estão nas</u> **<u>mesmas posições</u>**.
Adição e subtração de matrizes: é necessário que as matrizes tenham a <u>mesma dimensão</u> **m×n**. Para realizar a operação, basta somar/subtrair os termos que estão na mesma posição.
Multiplicação da matriz por um número real: multiplicar todos os elementos da matriz pelo número real.

<u>Multiplicação de matrizes</u>

1. Verificar se o **número de colunas da primeira** matriz é igual ao **número de linhas da segunda**. Se essa igualdade não se verificar, não é possível realizar o produto das matrizes.

2. Obter o esquema geral da matriz-produto, que apresenta a seguinte dimensão:

Número de linhas da primeira × Número de colunas da segunda

Colunas da 1ª = Linhas da 2ª

$$A_{2\times 3} \quad B_{3\times 4}$$

Produto: Linhas da 1ª e Colunas da 2ª

$$C_{2\times 4}$$

3. Obter os elementos da matriz resultante a partir das **linhas da primeira matriz** e das **colunas da segunda matriz**.

O elemento c_{ij} da matriz-produto C é obtido por meio da **linha i da primeira matriz** e da **coluna j da segunda matriz**.

Propriedades da multiplicação de matrizes

A propriedade comutativa não vale para matrizes: $AB \neq BA$.
Propriedade associativa entre matrizes: $(AB)C = A(BC)$
Propriedade associativa entre matrizes e um número real: $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
Propriedade distributiva: $\boldsymbol{A}(B + C) = \boldsymbol{A}B + \boldsymbol{A}C$; $(B + C)\boldsymbol{A} = B\boldsymbol{A} + C\boldsymbol{A}$
Elemento neutro da multiplicação de matrizes: $\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{I}A = \boldsymbol{A}$

Traço de uma matriz quadrada

O **traço** de uma **matriz quadrada** é a **soma dos elementos da sua diagonal principal**. Se A é uma matriz quadrada, então o seu traço é representado por $tr(A)$.

- $tr\ (A + B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr\ (A - B) = tr(A) - tr(B)$
- $tr(\alpha A) = \alpha\ tr(A)$
- $tr\ (AB) = tr(BA)$

Matriz oposta

A **matriz oposta** de A é $-A$.

Matriz transposta, simétrica e antissimétrica

A **transposta** de uma matriz A (notação: A^t) corresponde à matriz cujas <u>linhas foram transformadas em colunas</u>.

$$(A^t)^t = A$$
$$(\alpha A)^t = \alpha A^t$$
$$(\boldsymbol{AB})^t = \boldsymbol{B}^t\boldsymbol{A}^t$$
$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

Matriz Simétrica: a matriz é igual a sua transposta → $A = A^t$

- É quadrada; e
- Os **elementos simétricos com relação à diagonal principal são** **iguais**.

Matriz antissimétrica: $A^t = -A$

- É quadrada;
- A diagonal principal é nula; e
- Os **elementos simétricos com relação à diagonal principal são** **opostos**.

Matriz inversa

A **inversa** de uma matriz A (notação: A^{-1}) é aquela matriz que, quando multiplicada pela matriz A, tem como resultado a matriz identidade:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Uma matriz que **não possui inversa** é denominada **singular**.

Propriedades:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$
$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$
$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$$
$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$
$$(\boldsymbol{ABC})^{-1} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

Matriz inversa como análogo da divisão: pode-se multiplicar ambos os lados de uma equação matricial pela inversa de uma matriz (A^{-1}) e, na sequência, usar a propriedade $A^{-1}A = I$.

Matriz ortogonal

Uma matriz A é dita **ortogonal** quando a sua inversa é igual a sua transposta:

$$A \text{ é ortogonal} \leftrightarrow A^{-1} = A^t$$

Determinantes

Noção básica e representação

Um **determinante** é um <u>**número**</u> calculado a partir de uma **matriz quadrada**. Representado por duas barras "| |".

Determinante de matriz de ordem 1

O determinante de uma matriz de ordem 1 é o próprio elemento da matriz.

Determinante de matriz de ordem 2

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix} \rightarrow \det A = \boldsymbol{ad} - \boldsymbol{bc}$$

(Produto dos elementos da diagonal principal) − (Produto dos elementos da diagonal secundária)

Determinante de matriz de ordem 3

<u>**Regra de Sarrus**</u>

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$\mathbf{det}\, \boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}}] - [\boldsymbol{a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}}]$$

Obtenção do determinante de matrizes de qualquer ordem

Menor complementar

O **menor complementar** <u>**de um elemento**</u> a_{ij} de uma matriz A é o <u>**determinante**</u> $\boldsymbol{D_{ij}}$ da matriz obtida <u>eliminando-se a linha i e a coluna j da matriz A</u>.

Cofator ou complemento algébrico

O **cofator** <u>**do elemento**</u> a_{ij} de uma matriz A é um <u>**número**</u> representado por A_{ij} calculado do seguinte modo:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

Teorema de Laplace

O **determinante** de uma matriz A é a <u>**soma**</u> dos **produtos** <u>**dos elementos**</u> de uma fila qualquer (linha ou coluna) <u>**pelos seus respectivos cofatores**</u>.

1. Escolher uma fila (linha ou coluna), preferencialmente a que tiver mais zeros;

2. Realizar o produto de cada elemento da fila pelo seu respectivo cofator; e

3. Somar os produtos obtidos.

Propriedades dos determinantes

- **Teorema de Binet**: $\det(AB) = \det A \times \det B$
- **Determinante da matriz inversa:** $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$
- **Determinante da matriz transposta:** $\det A^t = \det A$
- **Multiplicação de uma fila por uma constante:** ao **multiplicar uma fila** (**linha ou coluna**) de uma matriz **por uma constante k**, o **determinante** dessa nova matriz **também fica multiplicado por k**.
- **Multiplicação da matriz por uma constante:** $\det(kA) = k^n \det A$
- **Determinante de matriz triangular ou de matriz diagonal:** o determinante é o produto dos elementos da diagonal principal.
- **Fila nula:** uma matriz que apresenta uma **fila** (linha ou coluna) **cujos elementos são todos zero** apresenta **determinante zero.**
- **Filas paralelas iguais:** uma matriz com **filas paralelas iguais** (linhas ou colunas) apresenta **determinante zero.**
- **Filas paralelas proporcionais:** uma matriz com **filas paralelas proporcionais** (linhas ou colunas) apresenta **determinante zero.**
- **Troca de filas paralelas:** ao trocarmos uma fila (linha ou coluna) de lugar com outra fila paralela, **o determinante muda de sinal**.
- **Combinação linear de filas:** quando uma matriz apresenta uma fila (linha ou coluna) que é combinação linear de outras filas, o seu **determinante é zero.**

Teorema de Jacobi

Ao **multiplicar uma fila por qualquer número** e **somar esse resultado a uma outra fila paralela qualquer**, o valor do **determinante não se altera**. Em outras palavras, **podemos trocar uma fila qualquer por uma combinação linear que contenha a fila original**.

Regra de Chió

- Fazer com que o elemento a_{11} seja igual a 1;
- **Zerar todos os elementos da primeira linha**, **à exceção de a_{11}**, **fazendo uso da primeira coluna**;
- Feita a operação anterior, o determinante em questão é igual ao **menor complementar D_{11}**;
- Repita o processo, se necessário, para reduzir a ordem do determinante mais uma vez.

Matriz inversa

$$\text{A é inversível} \leftrightarrow \det \text{A} \neq 0$$
$$\text{A é singular} \leftrightarrow \det \text{A} = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$