

# RESUMO

## Matrizes

### Introdução às matrizes

Podemos representar uma matriz tanto com colchetes "[ ]" quanto com parênteses "( )".

Matriz de **dimensão  $m \times n$** :  **$m$  linhas** e  **$n$  colunas**.

Elemento  $a_{ij}$ : o **primeiro índice** representa a **linha** e o **segundo índice** representa a **coluna**.

### Representação de uma matriz pela lei de formação

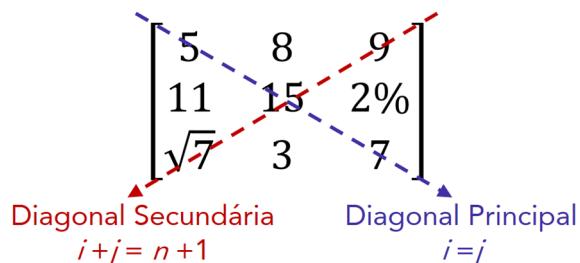
Cada elemento da matriz deve ser calculado por meio de uma fórmula apresentada.

### Tipos de matrizes

**Matriz linha:** apresenta apenas uma linha. Dimensão da forma  **$1 \times n$** .

**Matriz coluna:** apresenta apenas uma coluna. Dimensão da forma  **$m \times 1$** .

**Matriz quadrada:** apresenta o mesmo número de linhas e de colunas. Dimensão da forma  **$n \times n$** .



**Matriz Retangular:** número de linhas é diferente do número de colunas.

**Matriz Diagonal:** **matriz quadrada** em que todos os **elementos que não pertencem à diagonal principal** são iguais a **zero**.

**Matriz Triangular:** **matriz quadrada** em que todos os elementos acima ou abaixo de sua **diagonal principal** são nulos.

- **Matriz Triangular Superior:** todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos.
- **Matriz Triangular Inferior:** todos os elementos acima da diagonal principal são nulos.

**Matriz Identidade:** elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os elementos fora da diagonal principal são zero.

**Matriz Nula:** todos os elementos são iguais a zero. É comum representar uma matriz nula quadrada pela letra  $O$  acrescida de um índice que indica a ordem da matriz. Ex:  $O_3 \rightarrow$  matriz **nula quadrada de ordem 3**.

### Operações com matrizes

**Igualdade entre matrizes:** duas matrizes são iguais quando apresentam a mesma dimensão  $m \times n$  e seus elementos são idênticos e estão nas mesmas posições.

**Adição e subtração de matrizes:** é necessário que as matrizes tenham a mesma dimensão  $m \times n$ . Para realizar a operação, basta somar/subtrair os termos que estão na mesma posição.

**Multiplicação da matriz por um número real:** multiplicar todos os elementos da matriz pelo número real.

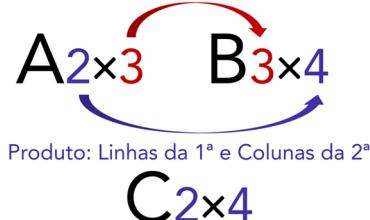
### Multiplicação de matrizes

1. Verificar se o **número de colunas** da **primeira** matriz é igual ao **número de linhas** da **segunda**. Se essa igualdade não se verificar, não é possível realizar o produto das matrizes.

2. Obter o esquema geral da matriz-produto, que apresenta a seguinte dimensão:

Número de **linhas** da **primeira** × Número de **colunas** da **segunda**

Colunas da 1<sup>a</sup> = Linhas da 2<sup>a</sup>



3. Obter os elementos da matriz resultante a partir das **linhas da primeira matriz** e das **colunas da segunda matriz**.

O elemento  $c_{ij}$  da matriz-produto  $C$  é obtido por meio da **linha  $i$  da primeira matriz** e da **coluna  $j$  da segunda matriz**.

### Propriedades da multiplicação de matrizes

A **propriedade comutativa** **não vale** para matrizes:  $AB \neq BA$ .

**Propriedade associativa entre matrizes:**  $(AB)C = A(BC)$

**Propriedade associativa entre matrizes e um número real:**  $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

**Propriedade distributiva:**  $A(B + C) = AB + AC; (B + C)A = BA + CA$

**Elemento neutro da multiplicação de matrizes:**  $AI = IA = A$

### Traço de uma matriz quadrada

O **traço** de uma **matriz quadrada** é a **soma dos elementos da sua diagonal principal**. Se  $A$  é uma matriz quadrada, então o seu traço é representado por  $tr(A)$ .

- $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(A - B) = tr(A) - tr(B)$
- $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$
- $tr(AB) = tr(BA)$

### Matriz oposta

A **matriz oposta** de  $A$  é  $-A$ .

### Matriz transposta, simétrica e antissimétrica

A **transposta** de uma matriz  $A$  (notação:  $A^t$ ) corresponde à matriz cujas linhas foram transformadas em colunas.

$$\begin{aligned}(A^t)^t &= A \\ (\alpha A)^t &= \alpha A^t \\ (AB)^t &= B^t A^t \\ (A + B)^t &= A^t + B^t\end{aligned}$$

**Matriz Simétrica:** a matriz é igual a sua transposta  $\rightarrow A = A^t$

- É quadrada; e
- Os **elementos simétricos com relação à diagonal principal são iguais.**

**Matriz antissimétrica:**  $A^t = -A$

- É quadrada;
- A diagonal principal é nula; e
- Os **elementos simétricos com relação à diagonal principal são opostos.**

### Matriz inversa

A **inversa** de uma matriz  $A$  (notação:  $A^{-1}$ ) é aquela matriz que, quando multiplicada pela matriz  $A$ , tem como resultado a matriz identidade:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Uma matriz que **não possui inversa** é denominada **singular**.

**Propriedades:**

$$\begin{aligned}(A^{-1})^{-1} &= A \\ (A^{-1})^t &= (A^t)^{-1} \\ (\alpha A)^{-1} &= \frac{1}{\alpha} A^{-1} \\ (\mathbf{AB})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \\ (\mathbf{ABC})^{-1} &= \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}\end{aligned}$$

**Matriz inversa como análogo da divisão:** pode-se multiplicar ambos os lados de uma equação matricial pela inversa de uma matriz ( $A^{-1}$ ) e, na sequência, usar a propriedade  $A^{-1}A = I$ .

### Matriz ortogonal

Uma matriz  $A$  é dita **ortogonal** quando a sua inversa é igual a sua transposta:

$$A \text{ é ortogonal} \leftrightarrow A^{-1} = A^t$$

## Determinantes

### Noção básica e representação

Um **determinante** é um número calculado a partir de uma **matriz quadrada**. Representado por duas barras " $| |$ ".

### Determinante de matriz de ordem 1

O determinante de uma matriz de ordem 1 é o próprio elemento da matriz.

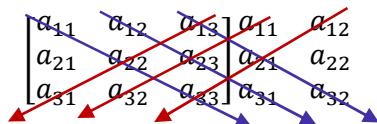
### Determinante de matriz de ordem 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \det A = ad - bc$$

(Produto dos elementos da diagonal principal) – (Produto dos elementos da diagonal secundária)

### Determinante de matriz de ordem 3

#### Regra de Sarrus



Parte Negativa      Parte Positiva

$$\det A = [a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}] - [a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}]$$

### Obtenção do determinante de matrizes de qualquer ordem

#### Menor complementar

O **menor complementar de um elemento**  $a_{ij}$  de uma matriz  $A$  é o **determinante**  $D_{ij}$  da matriz obtida eliminando-se a linha  $i$  e a coluna  $j$  da matriz  $A$ .

#### Cofator ou complemento algébrico

O **cofator do elemento**  $a_{ij}$  de uma matriz  $A$  é um número representado por  $A_{ij}$  calculado do seguinte modo:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

#### Teorema de Laplace

O **determinante** de uma matriz  $A$  é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos seus respectivos cofatores.

1. Escolher uma fila (linha ou coluna), preferencialmente a que tiver mais zeros;
2. Realizar o produto de cada elemento da fila pelo seu respectivo cofator; e
3. Somar os produtos obtidos.

## Propriedades dos determinantes

- **Teorema de Binet:**  $\det(AB) = \det A \times \det B$
- **Determinante da matriz inversa:**  $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$
- **Determinante da matriz transposta:**  $\det A^t = \det A$
- **Multiplicação de uma fila por uma constante:** ao multiplicar uma fila (linha ou coluna) de uma matriz por uma constante  $k$ , o determinante dessa nova matriz também fica multiplicado por  $k$ .
- **Multiplicação da matriz por uma constante:**  $\det(kA) = k^n \det A$
- **Determinante de matriz triangular ou de matriz diagonal:** o determinante é o produto dos elementos da diagonal principal.
- **Fila nula:** uma matriz que apresenta uma fila (linha ou coluna) cujos elementos são todos zero apresenta determinante zero.
- **Filas paralelas iguais:** uma matriz com filas paralelas iguais (linhas ou colunas) apresenta determinante zero.
- **Filas paralelas proporcionais:** uma matriz com filas paralelas proporcionais (linhas ou colunas) apresenta determinante zero.
- **Troca de filas paralelas:** ao trocarmos uma fila (linha ou coluna) de lugar com outra fila paralela, o determinante muda de sinal.
- **Combinação linear de filas:** quando uma matriz apresenta uma fila (linha ou coluna) que é combinação linear de outras filas, o seu determinante é zero.

## Teorema de Jacobi

Ao multiplicar uma fila por qualquer número e somar esse resultado a uma outra fila paralela qualquer, o valor do determinante não se altera. Em outras palavras, podemos trocar uma fila qualquer por uma combinação linear que contenha a fila original.

## Regra de Chió

- Fazer com que o elemento  $a_{11}$  seja igual a 1;
- Zerar todos os elementos da primeira linha, à exceção de  $a_{11}$ , fazendo uso da primeira coluna;
- Feita a operação anterior, o determinante em questão é igual ao menor complementar  $D_{11}$ ;
- Repita o processo, se necessário, para reduzir a ordem do determinante mais uma vez.

## Matriz inversa

$A$  é inversível  $\leftrightarrow \det A \neq 0$

$A$  é singular  $\leftrightarrow \det A = 0$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$