# RACIOCÍNIO LÓGICO

## Diagramas Lógicos

Livro Eletrônico

GRAN CURSOS ONLINE

# Sumário

## Apresentação

Olá, seja bem-vindo(a) a mais uma aula de Matemática. Nesta aula, vamos falar sobre Noções de Conjuntos e Diagramas Lógicos.

Esse é um dos assuntos mais importantes da Matemática.

Os conjuntos são parte importantíssima do raciocínio verbal, pois o tempo inteiro estamos nos referindo a expressões como "algum A é B", "algum A não é B" ou "todo A é B". Sempre que aparecem essas palavras chaves, estamos construindo conjuntos mentalmente.

Por conta disso, esse assunto é bastante cobrado diretamente nas provas de Raciocínio Lógico.

Também é essencial para entender assuntos mais avançados, como Funções e Probabilidade. Constitui um dos assuntos base mais importantes para o estudo da Matemática em si.

Por isso, essa é uma das aulas mais importantes do nosso curso.

Além disso, eu gostaria de te passar meus contatos, caso você tenha dúvidas.

**E-mail:** thiagofernando.pe@gmail.com

Feitas essas orientações iniciais, vamos começar?

# DIAGRAMAS LÓGICOS

## 1. Noções de Conjuntos

O conjunto é uma noção primitiva, ou seja, não existe uma definição clara do que seja um conjunto.

Normalmente, é entendido como uma **reunião de elementos.**

Os elementos de um conjunto podem ser listados dentro de um par de chaves. Vejamos exemplos:

$$A = \{1,2,3,4\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$C = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}\}$$

$$D = \{Rio\ de\ Janeiro, São\ Paulo, Brasília, Recife\}$$

Muitas vezes, trabalhamos com conjuntos numéricos, ou seja, conjuntos, cujos elementos são números, como os conjuntos A e B.

Porém, os elementos podem ser de qualquer classe. Podemos falar de conjuntos de letras, conjuntos de pessoas, conjuntos de cidades. E, assim, por diante.

É interessante observar que também existe o **conjunto vazio**, cuja representação é:

$$\phi = \{\ \}$$

O conjunto vazio é aquele que não possui nenhum elemento.

### 1.1. Diagrama de Venn-Euler

É um diagrama que representa visualmente vários conjuntos e seus possíveis elementos em comum. É muitas vezes chamado simplesmente de Diagrama de Venn.

O Conjunto Universo corresponde ao conjunto de todos os elementos de uma amostra ou pesquisa.

Por exemplo, suponha que foi feita uma pesquisa com 100 pessoas. Dessas pessoas:

- 30 gostam apenas de Matemática;
- 22 gostam apenas de Português;
- 28 gostam tanto de Matemática como Português;
- 20 pessoas não gostam de nenhuma das duas matérias.

Podemos representar essa situação no seguinte diagrama.

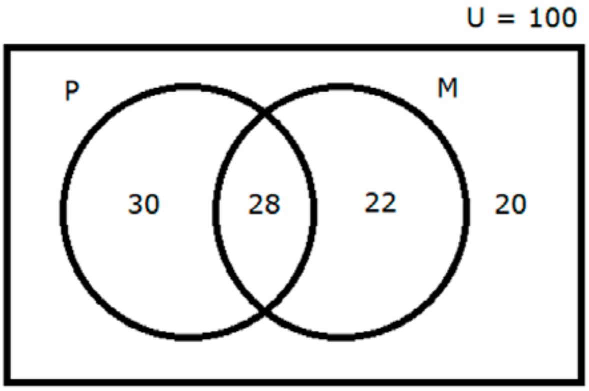



*Figura 1: Diagrama de Venn*

O Diagrama de Venn nos informa ainda que:

- 58 pessoas gostam de Português – note que são duas regiões no gráfico das pessoas que gostam de Português, pois 30 delas gostam exclusivamente de Português e 28 gostam de Português e também de Matemática;
- 50 pessoas gostam de Matemática – 22 delas gostam exclusivamente de Matemática e outras 28 gostam também de Português.

Cabe destacar também que o conjunto Universo não é fixo e que varia conforme o interesse do seu estudo.

Por exemplo, se, nesse mesmo estudo, mas, em outro momento, quiséssemos detalhar melhor as pessoas que gostam de Matemática e chegássemos ao seguinte:

- 8 gostam exclusivamente de Matemática Financeira;
- 4 gostam exclusivamente de Estatística;
- 3 gostam exclusivamente de Português;
- 10 gostam exclusivamente de Matemática Financeira e Estatística;
- 12 gostam exclusivamente de Português e Estatística;
- 7 gostam exclusivamente de Matemática Financeira e Português;
- 6 gostam exclusivamente de todas as matérias;

Nesse caso, podemos desenhar o seguinte Diagrama de Venn.

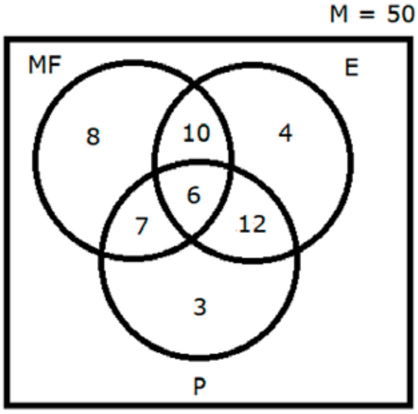



*Figura 2: Diagrama de Venn com três conjuntos*

É interessante notar que, nesse caso, estamos considerando como o conjunto universo apenas os alunos que gostam de Matemática. Por isso, o conjunto Português deixou de ser o que foi definido na Figura 1. Como mudamos o conjunto Universo, aqueles alunos que gostam de Português, mas não gostam de Matemática, não interessam mais a esse estudo.

Por isso, temos apenas em foco os 28 estudantes da intersecção entre Português e Matemática.

É interessante mostrar que podemos calcular o número de estudantes que gostam de qualquer uma das matérias do diagrama da Figura 2. Por exemplo, os alunos que gostam de Matemática Financeira podem ser assinalados em verde.

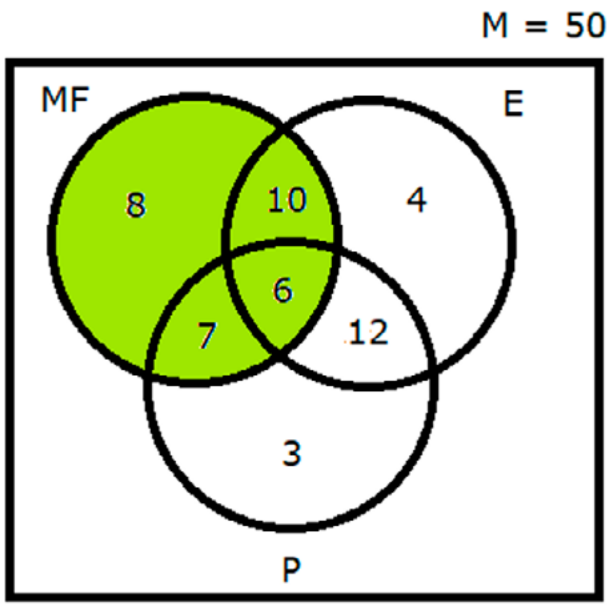



*Figura 3: Destacando o conjunto dos alunos que gostam de Matemática Financeira*

O total de elementos pertencentes ao conjunto MF é, portanto:

$$\#MF = 8 + 10 + 6 + 7 = 31$$

É importante relembrar que as regiões coloridas devem ser assim entendidas:

- 8 elementos gostam exclusivamente de Matemática Financeira;
- 7 elementos gostam exclusivamente de Matemática Financeira e Português – ou pertencem à intersecção exclusiva entre MF e P;
- 10 elementos gostam exclusivamente de Matemática Financeira e Estatística – ou pertencem à intersecção exclusiva entre MF e E;
- 6 elementos gostam de todas as matérias – ou pertencem à intersecção tripla.

Da mesma forma, podemos avaliar o total de elementos pertencentes ao conjunto E (gostam de Estatística) e ao conjunto P (gostam de Português) dentro do conjunto Universo M (gostam de Matemática).

$$\#E = 10 + 6 + 12 + 4 = 32$$

$$\#P = 3 + 7 + 6 + 12 = 28$$

Ambos os conjuntos e seus totais de elementos podem ser visualizados nos diagramas coloridos a seguir. O conjunto Estatística foi colorido na figura à esquerda e o conjunto Português foi colorido na figura à direita.

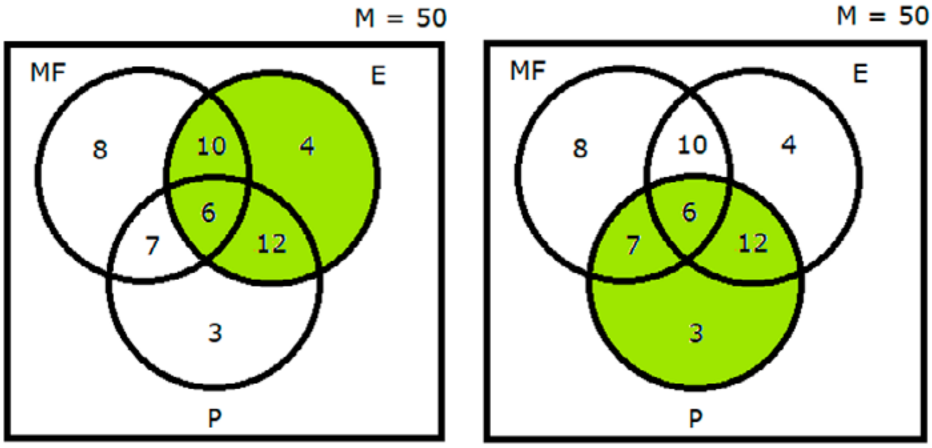



*Figura 4: Elementos pertencentes aos conjuntos que gostam de Estatística (E) e gostam de Português (P) dentro do Universo M*

Caso os conjuntos sejam dados em porcentagem, o conjunto universo sempre corresponderá a 100%.

## 1.2. Conjuntos Enumeráveis

A definição mais precisa de um conjunto enumerável é: aquele que é possível de se construir por meio de uma função dos números naturais. Mas, você não vai precisar desse nível de refinamento.

Apresentaremos uma noção mais intuitiva de conjunto enumerável. São os conjuntos cujos elementos podem ser contados. Portanto, existe o primeiro, o segundo, o terceiro etc.

Esses conjuntos podem ser finitos.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \sqrt{3}\right\}$$

E podem ser também infinitos, como o conjunto dos números pares.

$$C = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$$

Muitas vezes, os conjuntos aparecem com uma definição formal. Vejamos.

$$D = \left\{x, x \in R \mid x = \frac{1}{n}, n \in N^*\right\}$$

Tente entender o que significa esse conjunto antes de prosseguir a leitura.

Já tentou?

Para decifrar o conjunto D, devemos variar o valor de n por todo o conjunto de números naturais e obter os valores correspondentes no conjunto D.

Tabela 1: Cálculo dos Elementos do Conjunto D

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{x = \frac{1}{1}}$ | $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$ | $\boldsymbol{x = \frac{1}{3}}$ | $\boldsymbol{x = \frac{1}{4}}$ |
| $\boldsymbol{n = 1}$ | $n = 2$ | $n = 3$ | $n = 4$ |

*Tabela 1: Cálculo dos Elementos do Conjunto D*

Veja que os elementos do conjunto D são reais e que correspondem ao inverso de n, em que n é um número natural.

Sendo assim, D é o conjunto dos inversos dos números naturais.

$$D = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$$

## 1.3. Relação entre Proposições e Diagramas Lógicos

É muito comum vermos em questões termos como “algum” ou “todo”, portanto, nós devemos saber construir os diagramas lógicos correspondentes a esse tipo de proposição.

E, por isso, precisamos aprender três categorias de proposições: as subalternas, contrárias e subcontrárias.

### 1.3.1. Proposições Subalternas

Vamos estudar alguns conceitos importantes. Para que duas proposições categóricas sejam classificadas como subalternas, contraditórias, contrárias e subcontrárias, primeiramente, **elas devem possuir o mesmo sujeito e o mesmo predicado**.

Se elas possuírem sujeitos ou predicados diferentes, essas classificações não fazem sentido.

Uma proposição universal é sempre uma proposição mais forte que uma proposição particular.

Quando temos duas proposições com o mesmo sujeito e o mesmo predicado, temos duas possibilidades:

| Superalterna | Subalterna |
|---|---|
| Universal Afirmativa | Particular Afirmativa |
| Universal Negativa | Particular Negativa |

Perceba que são várias as condições para que tenhamos um par de proposição subalterna e superalterna:

- devem possuir o mesmo sujeito e o mesmo predicado;
- devem ser ambas afirmativas ou ambas negativas;
- uma deve ser universal e a outra é particular.

**Exemplo:**
"Algum Auditor é engenheiro" **(subalterna)**
"Todo Auditor é engenheiro" **(superalterna)**

Façamos também uma representação no Diagrama de Venn para essas duas afirmações juntas. Pintamos de verde as regiões que temos certeza que possuem pelo menos um elemento e deixamos uma interrogação vermelha nas regiões que são incertas, ou seja, não sabemos se possuem ou não algum elemento.

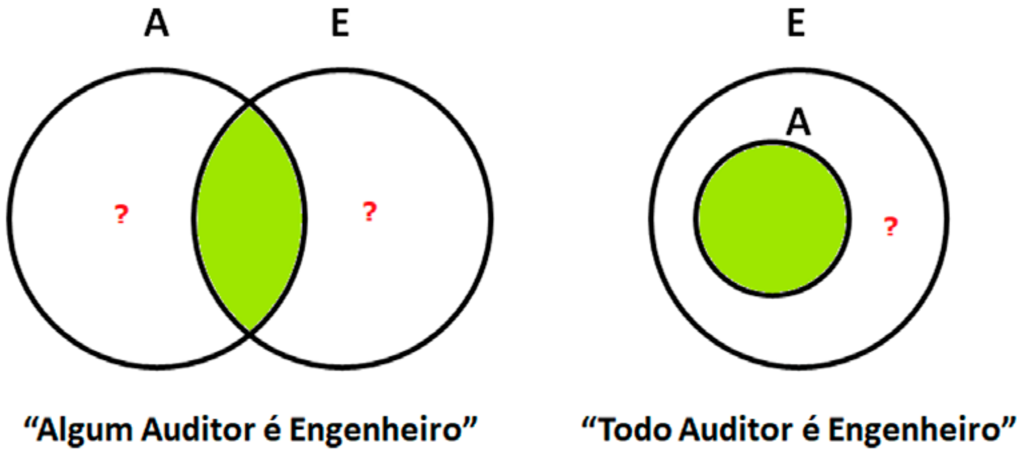



*Figura 6: Proposições Subalternas e Superalternas*

A proposição universal (superalterna) é **mais forte** que a proposição particular (subalterna). Isso significa que, quando falamos de uma proposição universal, **basta encontra uma única exceção** para que ela seja **falsa.**

Outro ponto importante é que, se for provado que a proposição subalterna é FALSA, então necessariamente a proposição superalterna é FALSA.

Por exemplo, vamos considerar a seguinte lista de auditores.

| Auditor | É Estrangeiro? |
|---|---|
| Alberto | Não |
| Bruna | Não |
| Carlos | Não |
| Diego | Não |
| Érica | Não |
| Francisco | Não |

*Tabela 3: Lista de Auditores*

Nesse caso, a proporção "Algum auditor é estrangeiro" é FALSA. Portanto, necessariamente, "Todo auditor é estrangeiro" também é FALSA.

### 1.3.2. Proposições Contraditórias

Uma proposição é a negação da outra. É importante registrar que a negação de uma proposição universal é sempre uma proposição particular.

Por outro lado, comparemos as proposições.

"Todos os auditores são engenheiros."
"Algum auditor não é engenheiro."

Tomemos a primeira proposição. Se João é auditor e todos os auditores são engenheiros, então João é engenheiro. Logo, não é possível encontrar um auditor que não seja engenheiro. Portanto, a primeira proposição nega a segunda.

Da mesma forma, se a segunda proposição for verdadeira e Pedro for auditor, mas não engenheiro, automaticamente Pedro é uma prova de que a primeira proposição está falsa.

Sendo assim, uma proposição nega a outra. Portanto, diz-se que elas são **contraditórias.**

### 1.3.3. Proposições Contrárias e Subcontrárias

Essa classificação só pode se referir a proposições que tenham o mesmo sujeito e o mesmo predicado.

**Proposições Subcontrárias:** duas proposições são **subcontrárias** quando elas podem ser ambas verdadeiras, mas nunca ambas falsas.

Isso acontece quando se tem duas proposições particulares, sendo uma afirmativa e outra negativa.

**A:** "Algum auditor é engenheiro"

**B:** "Algum auditor não é engenheiro"

| A | B | possível |
|---|---|---|
| Verdadeira | Verdadeira | Sim |
| Verdadeira | Falsa | Sim |
| Falsa | Verdadeira | Sim |
| Falsa | Falsa | Não |

Vejamos uma representação no Diagrama de Venn para essas duas afirmações juntas. Em verde, marcamos as regiões, em que temos certeza que há um elemento.

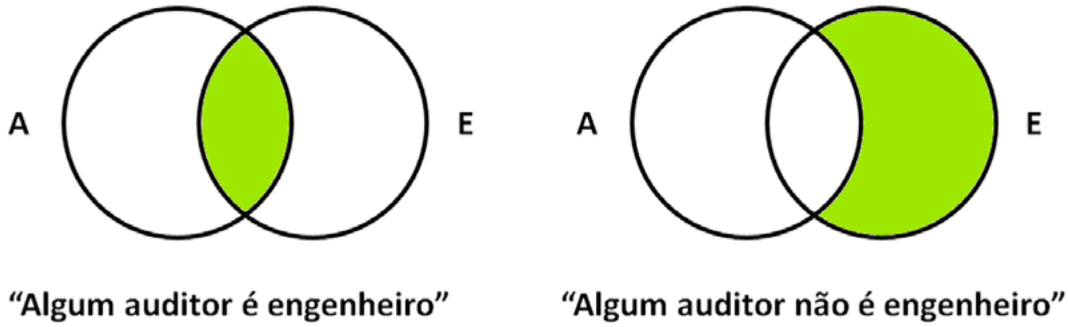



*Figura 6: Proposições Subcontrárias*

Diz-se, portanto, que essas proposições são **subcontrárias.** Isso acontece porque elas falam coisas diferentes sobre o mesmo sujeito e o mesmo predicado. No entanto, elas são compatíveis, ou seja, podem ser simultaneamente verdadeiras.

Por exemplo, voltemos à nossa lista inicial.

| Auditor | É Engenheiro? | É Brasileiro? | É Estrangeiro? |
|---|---|---|---|
| Alberto | Sim | Sim | Não |
| Bruna | Não | Sim | Não |
| Carlos | Sim | Sim | Não |
| Diego | Sim | Sim | Não |
| Érica | Sim | Sim | Não |
| Francisco | Sim | Sim | Não |

*Tabela 5: Lista de Auditores*

Nessa situação, Alberto é um exemplo de auditor que é engenheiro e Bruna é um exemplo de auditora que não é engenheira.

Portanto, nessa situação, ambas as afirmações "algum auditor é engenheiro" e "algum auditor não é engenheiro" são simultaneamente verdadeiras.

Observe, ainda, que "algum auditor é brasileiro" é verdadeira, mas "algum auditor não é brasileiro" é falsa.

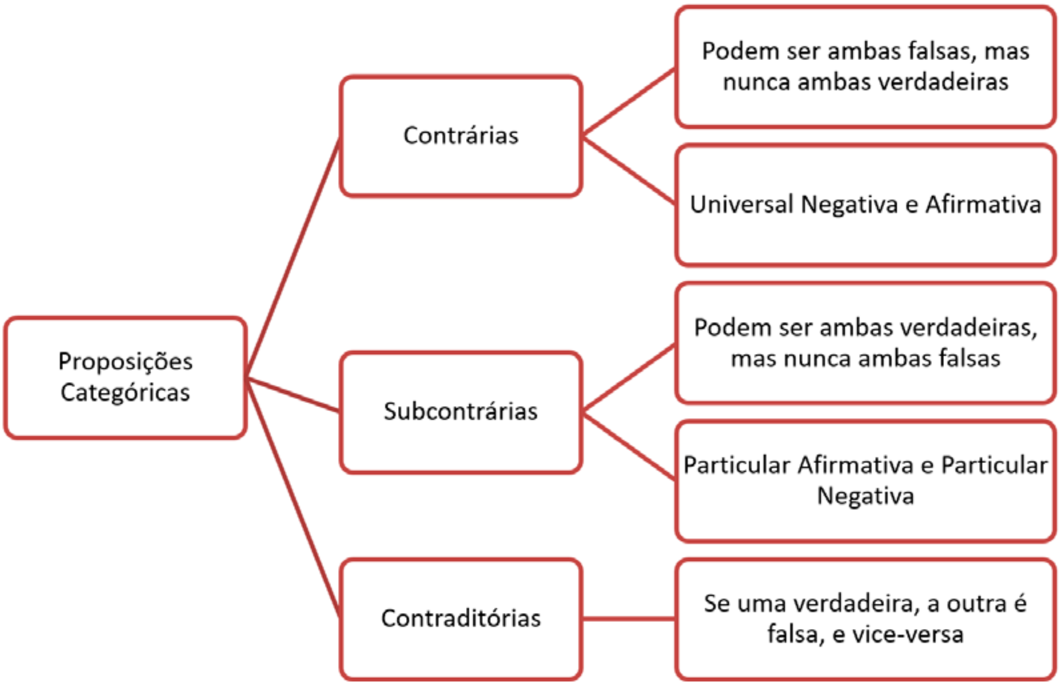
**Proposições Contrárias:** quando duas proposições categóricas não podem ser ambas verdadeiras, mas podem ser ambas falsas. Isso acontece entre proposições universais.

**Exemplo:**
"Todos os auditores são engenheiros"
"Nenhum auditor é engenheiro"

Agora, suponha que João é auditor, mas não é engenheiro e que Paulo é auditor e engenheiro.

Dessa maneira, a existência de João e Paulo prova que ambas as afirmações são falsas. Como elas podem ser simultaneamente falsas, elas são chamadas de proposições contrárias.

Vamos a um esquema.



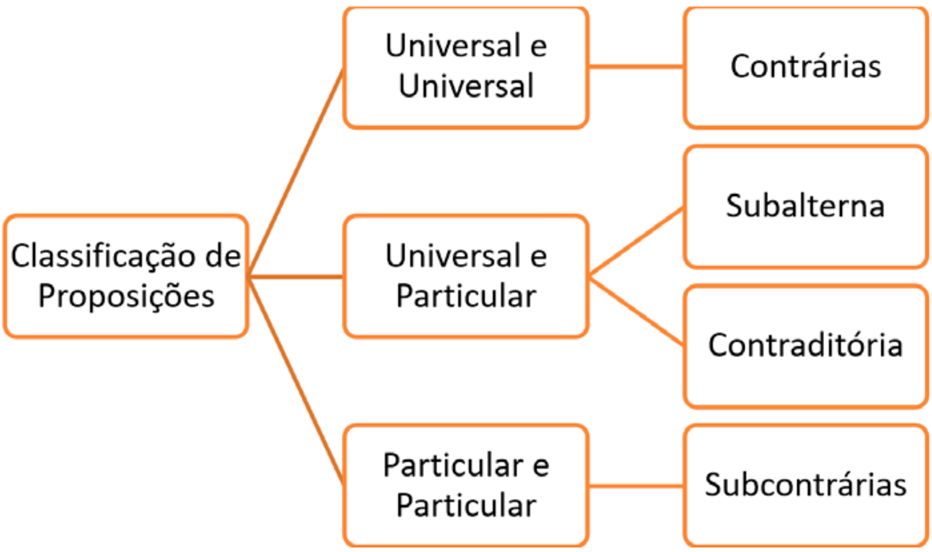




*Figura 7: Classificação das Proposições Categóricas*

## Direto do Concurso

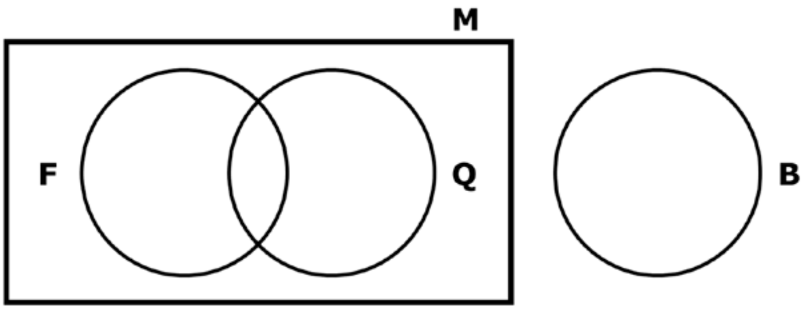
**001.** (FCC/PREFEITURA DE MANAUS-AM/2019/ASSISTENTE TÉCNICO FAZENDÁRIO) Em um curso preparatório para vestibulares, todos os professores que ensinam física ou química ensinam também matemática, e nenhum dos professores que ensinam biologia ensina também matemática. Logo,

a) nenhum dos professores que ensinam física ensina também biologia.
b) todos os professores que ensinam tanto física quanto química ensinam também biologia.
c) há professores que ensinam química e biologia.
d) todos os professores que ensinam matemática e não ensinam química ensinam biologia.
e) há professores que ensinam física e biologia.

Vamos interpretar as informações do enunciado:

- "todos os professores que ensinam física ou química ensinam também matemática": significa que o conjunto $F \cup Q$ é um subconjunto de *M*;
- "nenhum dos professores que ensinam biologia ensina também matemática": significa que os conjuntos B e M são disjuntos.

Vamos, então, desenhar o Diagrama de Venn correspondente a essa situação.




Note, portanto, que não é possível que um professor de Física seja também professor de Biologia.

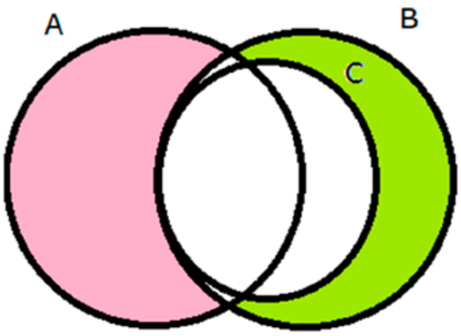
**Letra a.**

**002.** (FGV/TRT-12ª REGIÃO/SC/2017/TÉCNICO JUDICIÁRIO) Todas as pessoas que conhecem os irmãos Bernardo e Bianca gostam de Bianca. Entretanto, algumas pessoas que conhecem Bianca não gostam dela.

É correto concluir que:

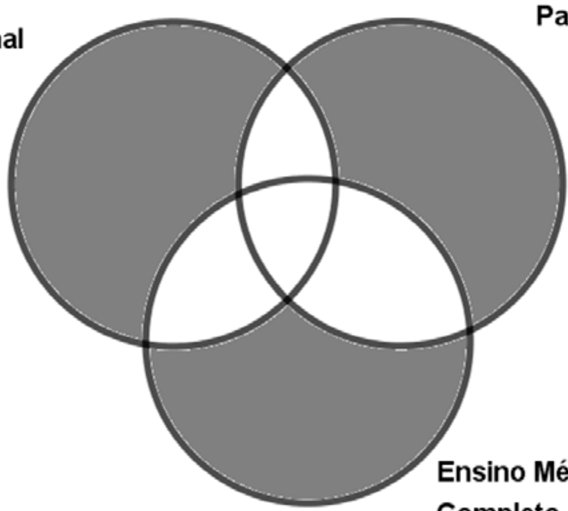
a) todos os que conhecem Bianca gostam dela;
b) ninguém gosta de Bianca;
c) alguns que conhecem Bianca não conhecem Bernardo;
d) quem conhece Bernardo gosta de Bianca;
e) só quem conhece Bernardo e Bianca conhece Bianca.

Uma questão clássica de Diagrama de Venn ou Diagramas Lógicos.
Considere os conjuntos: A, as pessoas que conhecem os irmãos de Bernardo; B, as pessoas que conhecem Bianca e C, as pessoas que gostam de Bianca.
O enunciado nos diz que $A \cap B$ é um subconjunto de C. Prestemos atenção: "Todos os que conhecem os irmãos de Bernardo E Bianca" – o E indica intersecção e o todos indica subconjunto.
Além disso, é razoável supor que C é um subconjunto de B. Uma pessoa que gosta de Bianca necessariamente deve conhecê-la.
Temos, portanto, a seguinte representação.




Representamos duas regiões – uma à esquerda e outra à direita. Existe uma diferença importante entre essas duas regiões.
A região à direita destacada foi expressamente prevista pelo enunciado: "algumas pessoas que conhecem Bianca não gostam dela".
Porém, a região rosa à esquerda não foi prevista pelo enunciado. Portanto, não podemos garantir que ela existe. Assim, não podemos garantir que algumas pessoas que conhecem Bernardo não gostam de Bianca ou que não conhecem Bianca.
Agora, note que os elementos da área verde à direita conhecem Bianca, mas não gostam dela e, portanto, não conhecem os irmãos de Bernardo. Isso garante nossa resposta.
Vamos comentar sobre as outras afirmativas:
a) Errada. O enunciado garantiu expressamente que algumas pessoas que conhecem Bianca não gostam dela.
b) Errada. Não há como garantir que ninguém gosta de Bianca.
d) Errada. Existe a possibilidade de termos uma região rosa, como mostrada à esquerda. Nesse caso, essas pessoas conhecem Bernardo, mas não gostam de Bianca.
e) Errada. Temos o contrário que todas as pessoas que conhecem Bernardo e Bianca gostam de Bianca. Além disso, é possível ver que é possível existir uma região no Diagrama de Venn com algumas pessoas que gostam de Bianca, mas não conhecem Bernardo.
**Letra c.**

**003.** (FUNDATEC/PC-RS/2018/ESCRIVÃO E INSPETOR DE POLÍCIA) O diagrama abaixo representa no universo dos adolescentes os indivíduos que possuem carteira nacional de habilitação, ensino médio completo e passaporte.




A alternativa que representa os indivíduos correspondentes às regiões sombreadas é:

a) Os adolescentes que possuem carteira nacional de habilitação, ensino médio completo e passaporte.

b) Os adolescentes que possuem carteira nacional de habilitação, ensino médio completo ou passaporte.

c) Os adolescentes que possuem carteira nacional de habilitação e ensino médio completo, mas não possuem passaporte.

d) Os adolescentes que possuem somente carteira nacional de habilitação ou somente ensino médio completo ou somente passaporte.

e) Os adolescentes que possuem somente carteira nacional de habilitação ou somente ensino médio completo, mas não possuem passaporte.

As regiões destacadas correspondem às regiões de exclusividade. Portanto, a primeira região à esquerda corresponde aos indivíduos que possuem exclusivamente CNH, a segunda região à direita corresponde aos indivíduos que possuem exclusivamente passaporte e a região inferior corresponde aos indivíduos que possuem exclusivamente Ensino Médio Completo.

**Letra d.**

## 2. Intersecção

Essa é uma seção de extrema importância. Os conceitos aqui delineados serão fundamentais para outras áreas da Matemática, como o Raciocínio Lógico, na parte de Diagramas Lógicos, Funções e Probabilidade.

A intersecção é normalmente associada à palavra E.

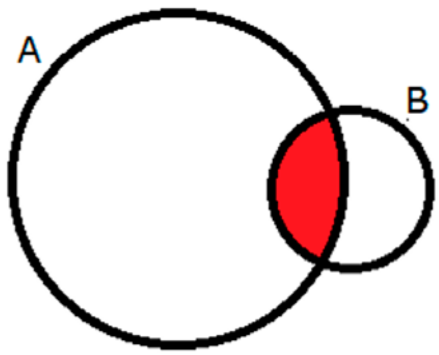
A união de dois conjuntos corresponde aos elementos que pertencem a todos eles **simultaneamente.**

Por exemplo, considere A o conjunto dos possíveis resultados de lançamentos de dados superiores a 5 e B o conjunto dos possíveis resultados ímpares de lançamentos dados.

Temos, portanto, A = {5, 6} e B = {1, 3, 5}. A intersecção desses dois conjuntos corresponde a:

$$A \cap B = \{5\}$$

A intersecção é bastante citada em questões da seguinte forma: "Algum B é A". Pintamos a intersecção em vermelho.




É interessante citar que existem dois casos particulares de interseçção que são os chamados subconjuntos. Quando dizemos: "Algum B é A" não podemos excluir as seguintes possibilidades.

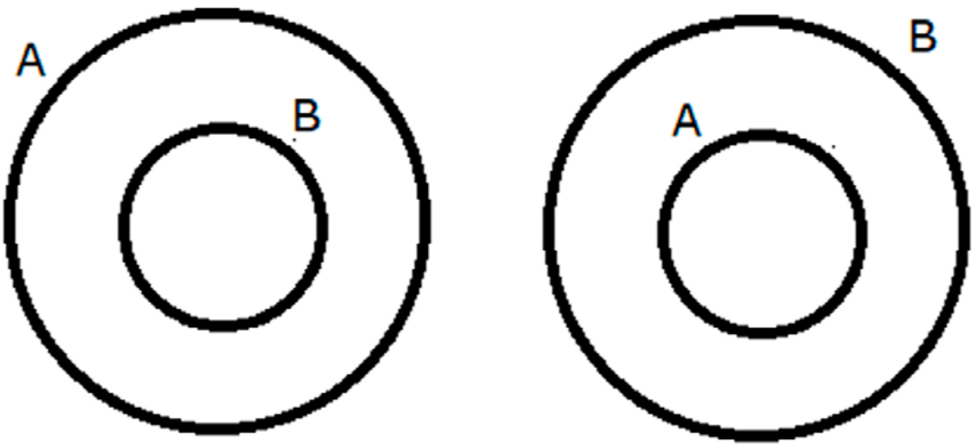



*Figura 5: Subconjuntos como um caso particular da intersecção*

## 2.1. Diferença de Dois Conjuntos

A diferença entre os conjuntos A e B, representada por A – B ou por A\B, é composta pelos elementos de A que não pertencem a B.

Supondo que A = {5, 6} e B = {1, 3, 5}. As diferenças entre desses dois conjuntos corresponde a:

$$A \backslash B = \{6\}$$

$$B \backslash A = \{1,3\}$$

É interessante notar que é possível calcular tanto a diferença A\B como a diferença B – A. Perceba também que os conjuntos A\B e B\A **são disjuntos**, ou seja, não possuem nenhum elemento em comum.

**Obs.:** a diferença entre dois conjuntos é comumente referenciada em questões da seguinte forma: "Algum B não é A".

É possível enxergar também graficamente no Diagrama de Venn. Representaremos em verde à esquerda o conjunto A\B e em azul à direita o conjunto B\A. No centro, ficará a intersecção entre os dois conjuntos.

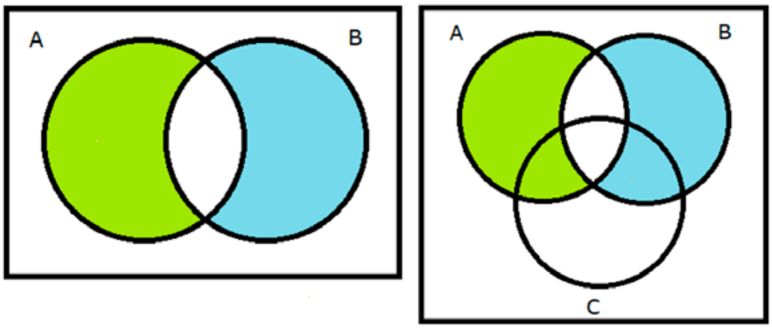



*Figura 6: Diferenças entre dois conjuntos no Diagrama de Venn*

Vejamos algumas linguagens frequentemente usadas para se referir ao conjunto diferença:

- 15 pessoas gostam de açaí (A), mas não gostam de cupuaçu (C). Em linguagem matemática, queremos dizer que A\C = 15.
- Algumas pessoas estudam Português (P), mas não estudam Matemática (M). Em linguagem matemática, estamos afirmando que existe um elemento no conjunto P\M. Na hora de resolver uma questão, devemos fazer.

No Diagrama de Venn mostrado, deixamos claro que existe um elemento que estuda Português, mas não estuda Matemática. E não sabemos se existem elementos nos outros pedaços do Diagrama.

## Direto do Concurso

**004.** (CESPE/TRF-1ª REGIÃO/2017) Em uma reunião de colegiado, após a aprovação de uma matéria polêmica pelo placar de 6 votos a favor e 5 contra, um dos 11 presentes fez a seguinte afirmação: "Basta um de nós mudar de ideia e a decisão será totalmente modificada."
Considerando a situação apresentada e a proposição correspondente à afirmação feita, julgue o próximo item.
Se A for o conjunto dos presentes que votaram a favor e B for o conjunto dos presentes que votaram contra, então o conjunto diferença A\B terá exatamente um elemento.

Suponha que os ministros que tenham votado a favor sejam A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e que os ministros que tenham votado contra sejam B = {7, 8, 9, 10, 11}.
Os conjuntos A e B são disjuntos, pois um ministro não pode votar ao mesmo tempo a favor e contra. Sendo assim, a diferença entre esses conjuntos será igual ao próprio conjunto. Logo, A\B = A e B\A = B. Dessa forma, o conjunto diferença A\B terá os mesmos 6 elementos de A.
**Errado.**

## 2.2. Conjunto Complementar

O conjunto complementar de A é composto pelos elementos do conjunto universo que não pertencem ao conjunto A. As duas representações matemáticas mais comuns são $\bar{A}$ e $A^C$.

O conjunto complementar é citado em provas como: "algum elemento não pertence a A". A palavra chave para o complementar é NÃO.

Podemos visualizar no Diagrama de Euler-Venn o complementar do conjunto A em vermelho.

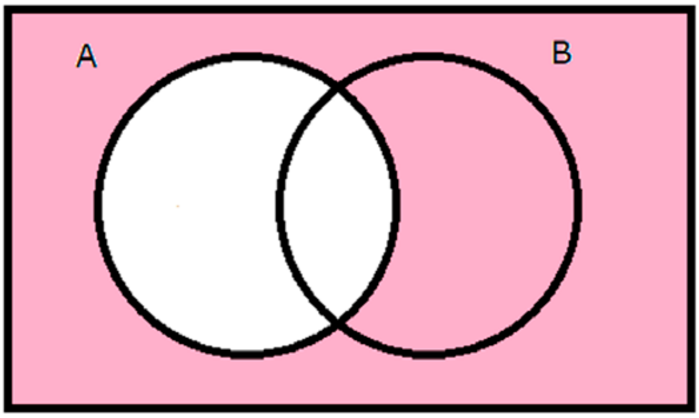



*Figura 7: Conjunto Complementar no Diagrama de Venn*

É interessante destacar que é muito comum nas questões de prova, o seguinte enunciado: "10 pessoas não estudam nem Matemática nem Direito."

Nesse caso, estamos falando dos elementos que não pertencem a nenhum dos dois conjuntos.

Essa região é representada matematicamente pelo complementar da união, que é a intersecção dos complementares:

$$(M \cup D)^C = (M^C \cap D^C)$$

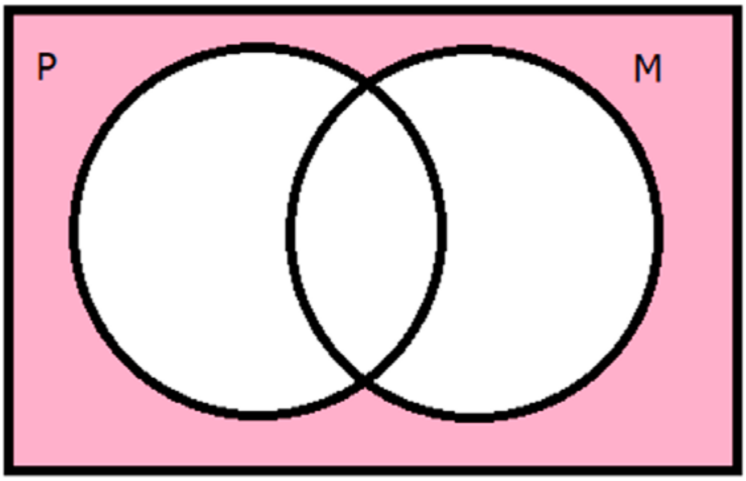



*Figura 8: Complementar da União no Diagrama de Venn*

É interessante observar que do número de elementos do complementar é facilmente calculado a parte do número de elementos do conjunto e do conjunto universo.

$$\#A^C = \#U - \#A$$

## Direto do Concurso

**005.** (ESAF/DNIT/2013/TÉCNICO ADMINISTRATIVO) Uma escola oferece reforço escolar em todas as disciplinas. No mês passado, dos 100 alunos que fizeram reforço escolar nessa escola, 50 fizeram reforço em Matemática, 25 fizeram reforço em Português e 10 fizeram reforço em Matemática e Português. Então, é correto afirmar que, no mês passado, desses 100 alunos, os que não fizeram reforço em Matemática e nem em Português é igual a:

a) 15
b) 35
c) 20
d) 30
e) 25

A união entre os conjuntos Matemática (M) e Português (P) representa os alunos que fizeram reforço em alguma das duas matérias.

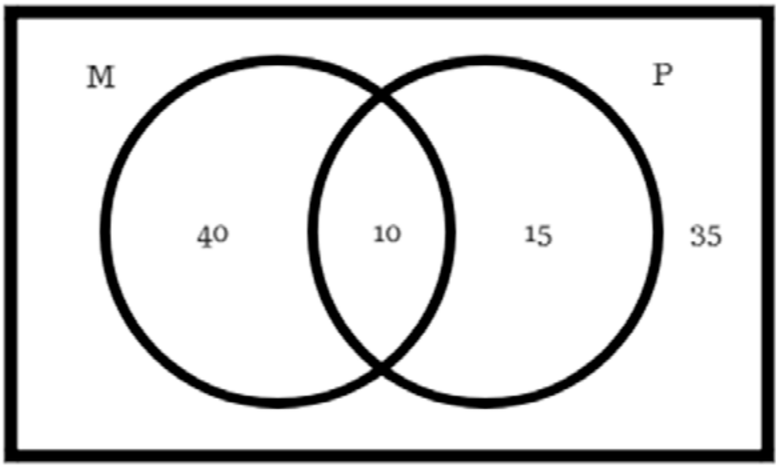
$$\#(M \cup P) = \#M + \#P - \#(M \cap P)$$

$$\#(M \cup P) = 50 + 25 - 10 = 65$$

Sendo assim, podemos dizer que o número de alunos que não fizeram reforço em nenhuma das duas matérias corresponde ao complementar da união.

$$\#(M \cup P)^C = 100 - 65 = 35$$

Podemos representar também graficamente essa situação.



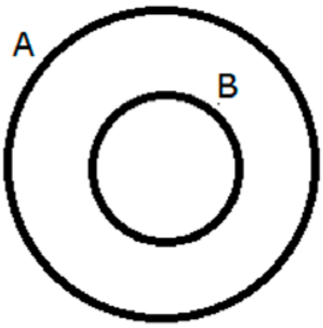

**Letra b.**

## 2.3. Subconjuntos

Diz-se que B é um subconjunto de A quando todos os elementos de B pertencem também a A.

Vejamos um exemplo. Seja o conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} e o conjunto B = {2, 4, 6, 8}. Perceba que B é um subconjunto de A.

Uma maneira de representar subconjuntos é “Todo B é A” ou pelo diagrama.



Outra forma de representar os conjuntos citados é dizer que o conjunto B está contido no conjunto A. Em notação matemática, tem-se:

$$B \subset A$$

O primeiro ponto a se notar é que todos os conjuntos serão subconjuntos do conjunto universo.

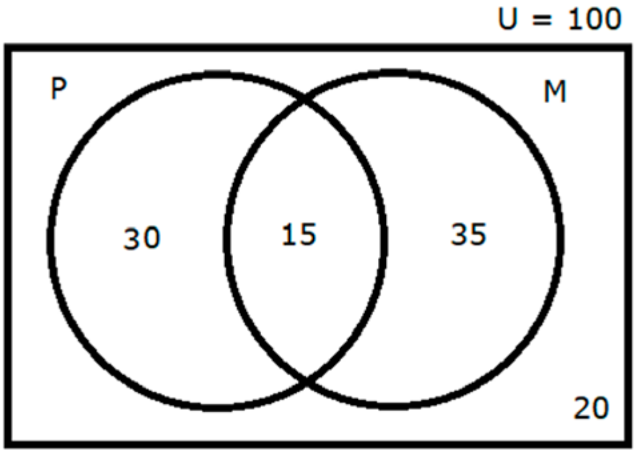



*Figura 9: Todo conjunto é subconjunto do Conjunto Universo*

É fundamental que você reconheça numa questão quando um conjunto necessariamente é subconjunto de outro.

Por exemplo, considere que você esteja fazendo uma pesquisa sobre pessoas que estudam Matemática e Direito. Algumas pessoas estudam Estatística e outras estudam Contabilidade.

As pessoas que estudam Estatística necessariamente estudam Matemática. Em outras palavras, Estatística é um subconjunto de Matemática.

Por outro lado, as pessoas que estudam Contabilidade necessariamente estudam Matemática e Direito. Portanto, Contabilidade é um subconjunto de Matemática e Direito, ou seja, da intersecção $M \cap D$. Algum aluno de Contabilidade discorda desse exemplo?

Sendo assim, poderíamos construir o seguinte Diagrama de Venn mais geral.

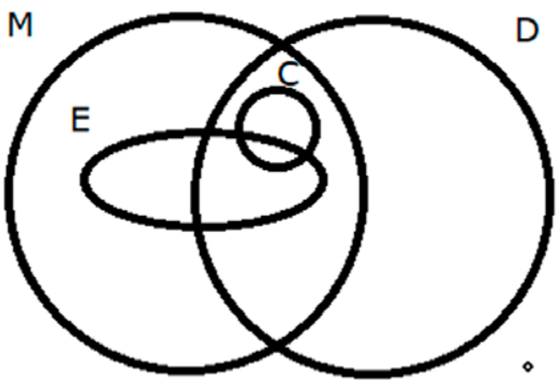



*Figura 10: Diagrama de Venn Geral*

É importante deixar claro que não podemos garantir que realmente exista uma pessoa que estude Estatística e Contabilidade ao mesmo tempo. Nem mesmo podemos garantir que exista um aluno de Estatística que estude Direito. Portanto, temos mais algumas possibilidades de Diagramas que não podem ser descartadas somente com os dados fornecidos.

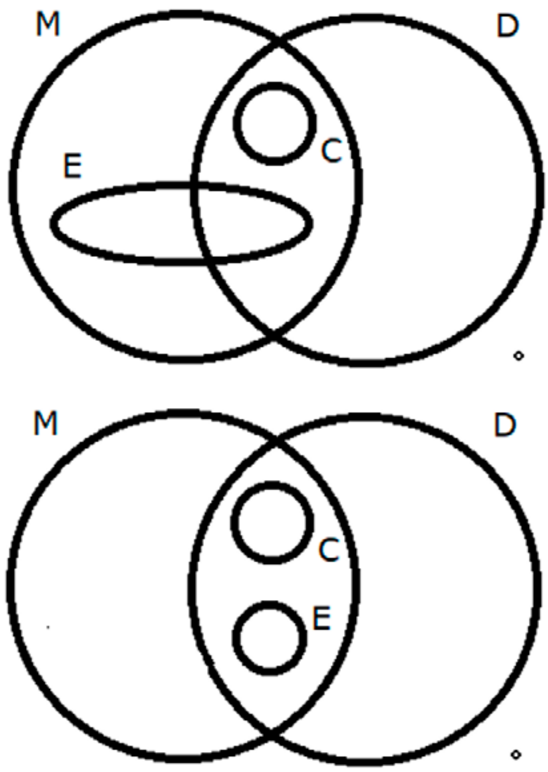



*Figura 11: Outras Possibilidades de Diagrama de Venn a serem explorados em questões de prova*

Certamente, é também possível que Matemática seja um subconjunto de Direito ou que Direito seja um subconjunto de Matemática. Sendo assim, na verdade, existem várias possibilidades para montar o Diagrama de Venn nessa situação.

Por isso, o que eu recomendo que meus alunos façam é marcar as regiões que **garantidamente** existem.

Vejamos. Até o momento, nós sabemos que:

- todos os alunos de Estatística são alunos de Matemática. Em linguagem matemática, $E \subset M$
- todos os alunos de Contabilidade são alunos de Matemática e de Direito.

Sendo assim, desenharemos o Diagrama mais geral, ou seja, o diagrama da Figura 3 e marcaremos nele as regiões que temos a total certeza de que existem.

Vejamos um exemplo bem realista do que pode aparecer em questões de prova:

- todos os alunos de Estatística são alunos de Matemática. Em linguagem matemática, $E \subset M$
- todos os alunos de Contabilidade são alunos de Matemática e de Direito ao mesmo tempo. Em linguagem matemática, $C \subset (M \cap D)$

- algum aluno de Estatística não estuda Direito. Em linguagem matemática, podemos escrever $E - D \neq \phi$. Outra forma de escrever matemática é: $\exists\ x, x \in E\ e\ x \notin D$, que, lendo em português, seria: existe um elemento (x), de modo que x pertence ao conjunto Estatística, mas não pertence ao conjunto Direito.
- com base nessas informações, o que podemos concluir?
- ora, o problema nos garantiu que existe um aluno de Estatística que não estuda Direito, então podemos colocar em verde essa região do diagrama.

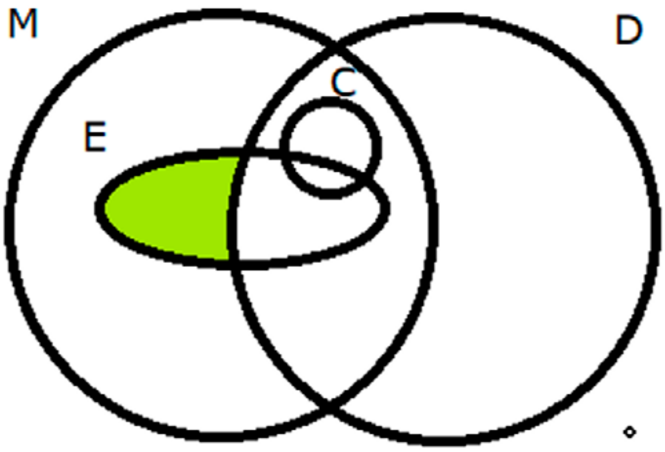



*Figura 12: Diagrama de Venn ilustrando uma região em que temos certeza de que existe um elemento*

Com base nas informações que temos, podemos garantir que existe um aluno que estuda Estatística, mas não Direito. Suponha que ele se chama João.

Sabemos que João estuda Matemática, porque todos os alunos de Estatística também são alunos de Matemática. Sendo assim, João estuda Matemática, mas não estuda Direito.

Portanto, podemos concluir que: "algum aluno de Matemática não estuda Direito."

Outra conclusão interessante a que podemos chegar é que, como João não estuda Direito, ele também não pode estudar Contabilidade. Portanto, também podemos concluir que: "algum aluno de Matemática não estuda Contabilidade."

Um fato interessante é que, apesar de o Diagrama de Venn detalhar várias regiões, a única que podemos garantir que realmente possui pelo menos um elemento é a região verde.

Agora, vamos analisar algumas pegadinhas que poderiam aparecer em questões de prova:

- algum aluno de Matemática não estuda Estatística. Sabemos que Estatística é um subconjunto de Matemática, porém, não temos como garantir que existe um elemento de fora. Com base nas informações que temos, não podemos garantir que existe um aluno de Matemática que não estuda Estatística;
- nenhum aluno de Estatística estuda Direito. Sabemos que existe um aluno de Estatística que não estuda Direito, mas isso não quer dizer nada sobre todos os demais;
- algum aluno de Estatística estuda Direito. Sabemos que existe um aluno de Estatística que não estuda Direito, mas isso não quer dizer nada sobre todos os demais.

O interessante é que, apenas com base no que temos do enunciado, a região da intersecção entre Estatística e Direito é uma incógnita. Não podemos garantir se ela tem ou não tem algum elemento. Não há informações suficientes.

Portanto, você deve tomar atenção redobrada nas questões de Diagramas Lógicas que informam que "algum A pertence a B" ou que "algum A não pertence a B".

Nessas questões, é preciso entender quais regiões realmente existem, ou seja, realmente possuem pelo menos um elemento. É muito interessante marcar, assim como fizemos na Figura 5.

## 2.4. Conjuntos Disjuntos

Dois conjuntos são disjuntos quando não existe nenhum elemento comum entre eles. Portanto, a intersecção entre esses dois conjuntos é o conjunto vazio.

$$A \cap B = \phi$$

É comumente referido em questões: "Nenhum B é A". Nesse caso, os diagramas são desenhados da seguinte forma.

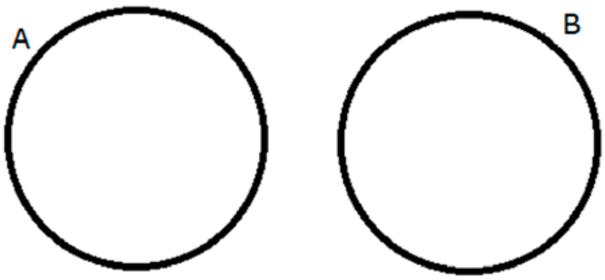



*Figura 13: Conjuntos Disjuntos*

É muito importante para você reconhecer conjuntos disjuntos.

Por exemplo, considere que foi feita uma pesquisa a respeito do estado civil de 100 pessoas. 60 pessoas responderam que eram casadas e 40 pessoas responderam que eram solteiras.

Como não é possível que uma pessoa seja casada e solteira ao mesmo tempo, os dois conjuntos são disjuntos, portanto, devemos representar da seguinte forma o Diagrama de Venn.

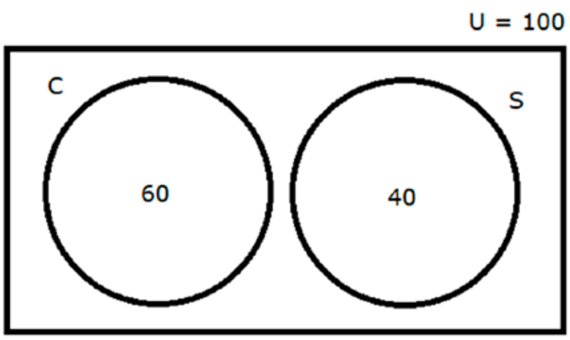


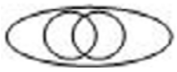

*Figura 14: Conjuntos de Pessoas Casadas e Solteiras*

## Direto do Concurso

**006.** (FGV/SEFAZ-RJ/2011/ANALISTA DE CONTROLE INTERNO) Qual dos diagramas abaixo representa melhor a relação entre mulheres, mães e profissionais de contabilidade?

a) 

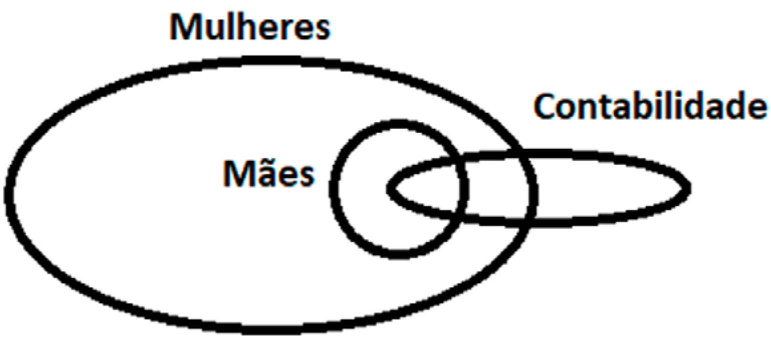
b) 

c) 

d) 

e) 

Todas as mães são mulheres. Portanto, mães deve ser um subconjunto de mulheres.
Alguns profissionais de contabilidade são mulheres e mães, outros não.



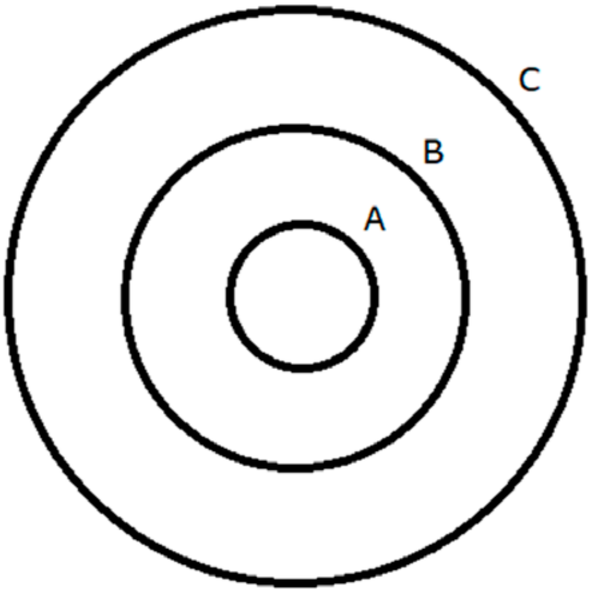

O diagrama que melhor representa a situação é exatamente e o da letra A.
**Letra a.**

**007.** (FGV/CAERN/2010/ADMINISTRADOR) A, B e C são três conjuntos. Com base nessa informação, analise as afirmativas a seguir:
I – Se todos os elementos de A pertencem a B, então A e B são o mesmo conjunto.
II – Se A e C não possuem elementos em comum, então um dos dois é um conjunto vazio.
III – Se todos os elementos de A pertencem a B e todos os elementos de B pertencem a C, então todos os elementos de A pertencem a C.
Assinale:
**a)** se somente a afirmativa I estiver correta.
**b)** se somente a afirmativa II estiver correta.

**c)** se somente a afirmativa III estiver correta.
**d)** se somente as afirmativas I e III estiverem corretas.
**e)** se somente as afirmativas II e III estiverem corretas.

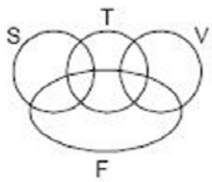
---

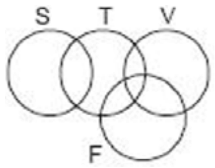
I – Podemos dizer que A é um subconjunto de B, mas é possível haver elementos de B fora de A e, portanto, sejam conjuntos diferentes. Pensemos nos conjuntos A = {1} e B = {1, 2}. Item errado.
II – A e C podem ser disjuntos, por exemplo A = {1} e C = {3}. Temos que não possuem elementos em comum, mas nenhum deles é vazio. Item errado.
III – De fato, $A \subset B \subset C \therefore A \subset C$. Podemos visualizar isso por um diagrama de Venn.

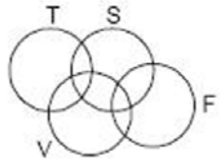


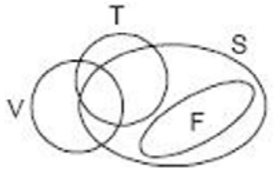

**Letra c.**

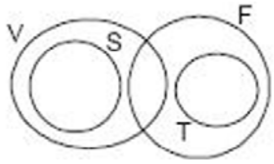
---

**008.** (FCC/BAHIAGÁS/2010/TÉCNICO DE PROCESSOS ORGANIZACIONAIS) Admita as frases seguintes como verdadeiras.
I – Existem futebolistas (F) que surfam (S) e alguns desses futebolistas também são tenistas (T).
II – Alguns tenistas e futebolistas também jogam vôlei (V).
III – Nenhum jogador de vôlei surfa.
A representação que admite a veracidade das frases é:
A representação que admite a veracidade das frases é:
**a)**


b) 


c) 


d) 

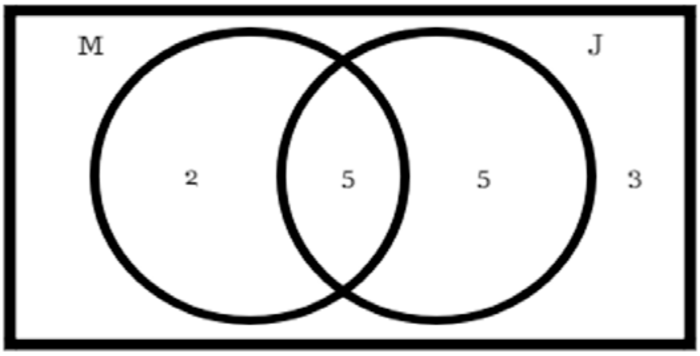

e) 


As premissas I e II mostram que deve haver intersecção entre futebolistas (F) e todos os demais conjuntos. Somente isso já elimina todas as demais alternativas.
b) Não há intersecção entre futebolistas e surfistas, o que está em desacordo com a premissa I.
c) Não há intersecção entre futebolistas e tenistas, em desacordo com a premissa I.
d) Não há intersecção entre futebolistas e jogadores de vôlei, em desacordo com a premissa II.
e) Não há intersecção entre futebolistas e jogadores de vôlei, em desacordo com a premissa II.
Na letra A, realmente podemos ver que nenhum jogador de vôlei (V) surfa (S), de acordo com a premissa III. Portanto, a intersecção entre esses dois conjuntos realmente é nula.
**Letra a.**

---

**009.** (FEPESE/PC-SC/2017/AGENTE DE POLÍCIA CIVIL) Uma reunião conta com X pessoas. Destas, 7 usam seus celulares para enviar mensagens, 10 usam o celular para jogar, 5 usam o celular para enviar mensagem e jogar e 3 não usam o celular. Portanto, X é igual a:
a) 12
b) 15
c) 20
d) 22
e) 25

Essa situação pode ser representada pelo Diagrama de Venn.




O total de elementos do conjunto universo é, portanto:

$$X = 2 + 5 + 5 + 3 = 15$$

**Letra b.**

**010.** (FGV/PREFEITURA DE SALVADOR-BA/2017/TÉCNICO DE NÍVEL SUPERIOR I) Em certo concurso, inscreveram-se 80 candidatos. Sabe-se que, desses candidatos, 50 são baianos, 22 possuem curso superior e 26 são de outros estados e não possuem curso superior. O número de candidatos baianos com curso superior é:

**a)** 16.
**b)** 18.
**c)** 20.
**d)** 22.
**e)** 24.

Nessa questão, temos dois grupos de conjuntos bem disjuntos: baianos (B) e pessoas de outros estados (E); possuem curso superior (S) e não possuem ensino superior (M).
As informações fornecidas são:

| | **Baianos** | **Outros Estados** | **Total** |
|---|---|---|---|
| **Ensino Superior** | | | 22 |
| **Não possui Ensino Superior** | | 26 | |
| | 50 | 30 | |

Já podemos saber quantas pessoas de outros estados possuem Ensino Superior. São 30 pessoas de outros estados no total, porém, 26 delas não possuem Ensino Superior. Portanto, apenas 4 pessoas de outros estados possuem Ensino Superior.

| | Baianos | Outros Estados | Total |
|---|---|---|---|
| **Ensino Superior** | | 4 | 22 |
| **Não possui Ensino Superior** | | 26 | |
| | 50 | 30 | |

Agora, podemos obter o número de baianos com Ensino Superior. Se o total de pessoas com Ensino Superior é 22 e 4 deles já são de outros estados, então, são 18 baianos com Ensino Superior.

| | Baianos | Outros Estados | Total |
|---|---|---|---|
| **Ensino Superior** | 18 | 4 | 22 |
| **Não possui Ensino Superior** | | 26 | |
| | 50 | 30 | |

Finalmente, podemos completar a tabela. Podemos reconhecer que, se no total são 50 baianos e 18 deles possuem Ensino Superior, então, 32 não possuem Ensino Superior.
Dessa forma, podemos ver que os números batem. Portanto, há realmente 80 pessoas no total.

| | Baianos | Outros Estados | Total |
|---|---|---|---|
| **Ensino Superior** | 18 | 4 | 22 |
| **Não possui Ensino Superior** | 32 | 26 | 58 |
| | 50 | 30 | 80 |

**Letra b.**

## 3. União

A união ou reunião é normalmente associada à palavra OU.
A união de dois conjuntos corresponde aos elementos que pertencem a qualquer um deles.
Sejam A = {5, 6} e B = {1, 3, 5}. A união desses dois conjuntos corresponde a:

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 6\}$$

## 3.1. Número de Elementos da União

Trata-se de um assunto amplamente explorado em provas.

Para entender melhor a expressão que vai ser deduzida, vamos representar os eventos A e B por meio de diagramas.

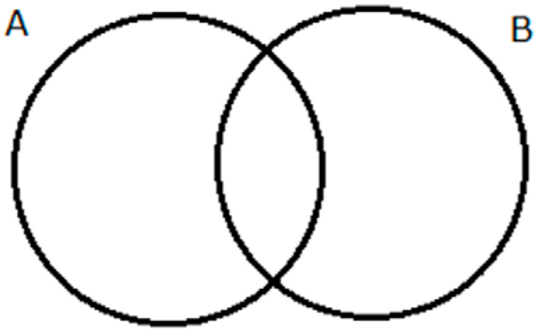
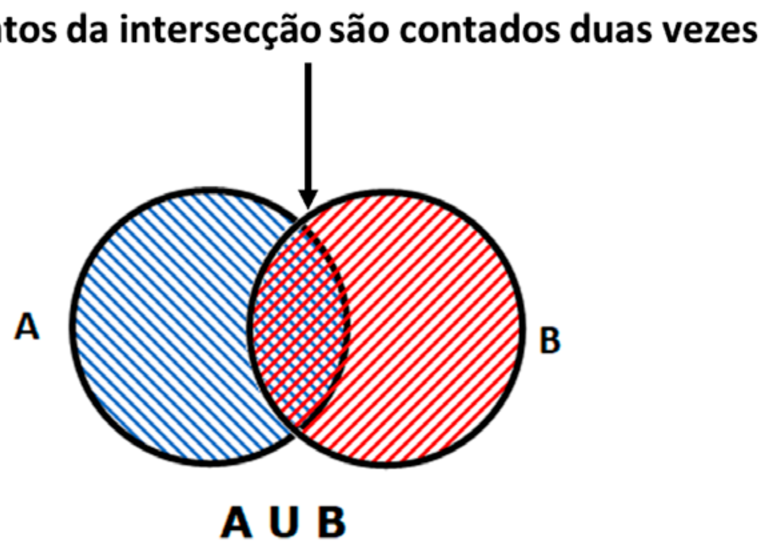



*Figura 15: Diagrama da União de Dois Eventos*

Para calcular a probabilidade da união de dois eventos, devemos calcular o número de elementos dessa união.

Podemos começar somando os elementos de A com os elementos de B. Marcaremos os elementos de A com linhas horizontais verdes e os de B com linhas diagonais azuis.




Perceba, no entanto, que os elementos da intersecção foram contados duas vezes. Por isso, precisamos retirá-los, de modo que eles sejam contados apenas uma vez.

Dessa maneira, temos que o número de elementos da união é:

**Obs.:** $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$

Podemos generalizar essa expressão para três conjuntos. Caso tenha curiosidade, você poderá tentar deduzir, porém isso vai dar um pouco de trabalho.

$$\#(A \cup B \cup C)$$
$$= \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$$

Há uma lógica relativamente simples para lembrar essa expressão. Perceba que:

$$\#(A \cup B \cup C)$$
$$= Soma\ das\ Conjuntos\ Um\ a\ Um - Conjuntos\ Dois\ a\ Dois$$
$$+ Conjuntos\ Três\ a\ Três$$

É só você se lembrar que o sinal vai alternando. 1 a 1 é positivo, as probabilidades 2 a 2 entram com sinal negativo; 3 a 3 positivo. E, assim, por diante, eu nunca vi em provas de concurso, mas se a questão colocar uma união de quatro ou mais eventos, você pode continuar: as intersecções 4 a 4 entram com sinal negativo, as 5 a 5, com sinal positivo e, por aí, vai.

## Direto do Concurso

**011.** (CESPE/2019/SEFAZ-RS/TÉCNICO TRIBUTÁRIO DA RECEITA ESTADUAL) Em determinado dia, os órgãos responsáveis atenderam 50 contribuintes para resolver pendências relativas ao IPTU, ao IPVA e a outros tributos. Sabe-se que foram atendidos:

- 18 contribuintes com pendências de IPTU;
- 23 contribuintes com pendências de IPVA;
- 8 contribuintes com pendências de IPTU e IPVA.

Nesse caso, a quantidade de contribuintes atendidos cujas pendências não se referiam a IPTU nem a IPVA foi igual a

**a)** 9.
**b)** 10.
**c)** 15.
**d)** 17.
**e)** 25.

---

Seja T o conjunto dos contribuintes com pendências no IPTU e P o conjunto dos contribuintes com pendências no IPVA, podemos escrever para o conjunto união:

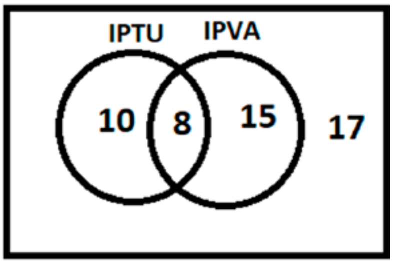
$$\#(P \cup T) = \#P + \#T - \#(P \cap T)$$

$$\#(P \cup T) = 18 + 23 - 8 = 33$$

Sendo assim, houve um total de 33 contribuintes com pendências em algum dos dois impostos. A questão pediu o total de contribuintes não tinham pendências. É, portanto, o complementar.

$$\#(P \cup T)^C = 50 - 33 = 17$$

Para melhorar seu entendimento, podemos desenhar o diagrama de Venn correspondente à situação apresentada.



Total de Atendimentos = 50

**Letra d.**

---

**012.** (FGV/IBGE/2017/AGENTE CENSITÁRIO MUNICIPAL E SUPERVISOR) Na assembleia de um condomínio, duas questões independentes foram colocadas em votação para aprovação. Dos 200 condôminos presentes, 125 votaram a favor da primeira questão, 110 votaram a favor da segunda questão e 45 votaram contra as duas questões.
Não houve votos em branco ou anulados.
O número de condôminos que votaram a favor das duas questões foi:
**a)** 80;
**b)** 75;
**c)** 70;
**d)** 65;
**e)** 60.

---

Seja A a primeira questão e B a segunda questão, temos que:

$$\#A = 125, \#B = 110$$

Além disso, ao afirmar que 45 votaram contra as duas questões, o enunciado nos mostra que o total de condôminos que votaram a favor de pelo menos uma das duas questões é:

$$\#(A \cup B) = 200 - 45 = 155$$

Os condôminos que votaram a favor das duas questões correspondem à intersecção entre os dois conjuntos. Dessa forma, podemos escrever para a união:

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$
$$155 = 110 + 125 - \#(A \cap B)$$
$$155 = 235 - \#(A \cap B)$$
$$\therefore \#(A \cap B) = 235 - 155 = 80$$

**Letra a.**

## 3.2. Limites para o Tamanho da União de Dois Conjuntos

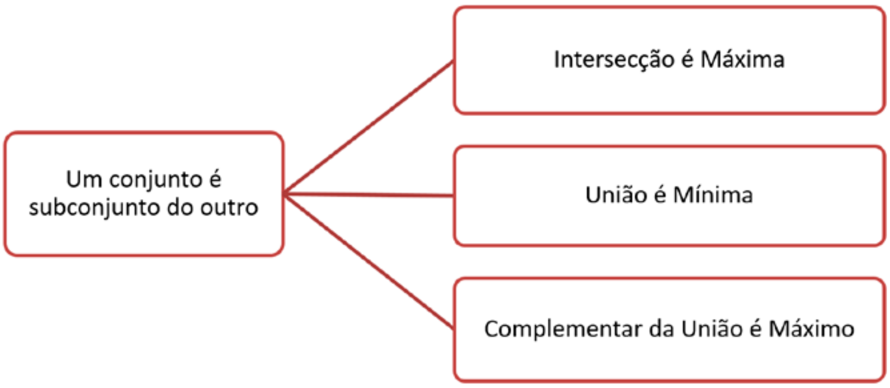
É muito comum questões apresentarem a seguinte situação:

"Em um conjunto pesquisado de 100 pessoas, 60 gostam de Matemática e 50 gostam de Português, qual o número mínimo de pessoas que gostam das duas matérias?"

Assim, a questão não forneceu expressamente quantas pessoas gostam de Matemática e de Português, mas pediu um limite mínimo para as pessoas da intersecção.

O aluno deve ter em mente o seguinte:

- a união é mínima quando a intersecção é máxima e a intersecção é mínima quando a união é máxima;
- a intersecção é máxima quando um dos conjuntos é subconjunto do outro;
- a união é máxima quando os dois conjuntos são disjuntos, a não ser que a soma dos elementos individualmente exceda o conjunto universo. Nesse caso, a união máxima será o próprio conjunto universo.



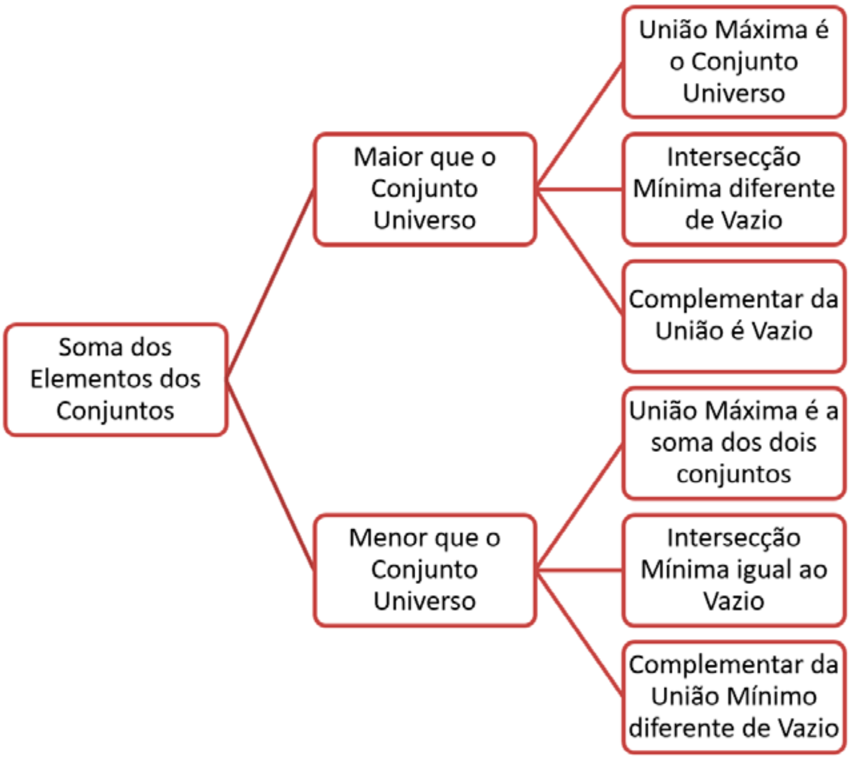



*Figura 16: Regras para Reconhecer os Limites da União e Intersecção de Dois Conjuntos*

Dessa forma, podemos responder a algumas perguntas sobre a situação apresentada.

**Qual o número mínimo de pessoas que gostam das duas matérias?**

A intersecção é mínima quando os conjuntos são disjuntos ou quando a União corresponde ao conjunto universo.

Perceba que, se os dois conjuntos fossem disjuntos, a soma dos seus elementos seria 60 + 50 = 110 > 100, portanto, excederia o conjunto universo.

Sendo assim, a intersecção mínima ocorrerá quando a união for máxima, no caso, quando a união dos dois conjuntos será todo o conjunto universo.

$$\#A + \#B - \#(A \cap B) = \#(A \cup B)$$

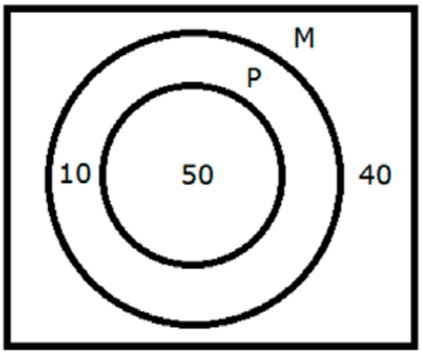
$$60 + 50 - \#(A \cap B) \leq 100$$

$$\therefore \#(A \cap B) \geq 60 + 50 - 100 = 10$$

Dessa forma, pelo menos dez pessoas gostam das duas matérias.

**Qual o número máximo de pessoas que gostam das duas matérias?**

A intersecção máxima ocorrerá quando um conjunto for subconjunto do outro. Nesse caso, podemos representar.




Nesse caso, perceba que temos 50 pessoas que gostam das duas matérias.

É interessante reparar também que, nessa situação, temos a união mínima, no caso, formada por apenas 60 pessoas.

Podemos resumir as duas situações extremo nos seguintes diagramas.

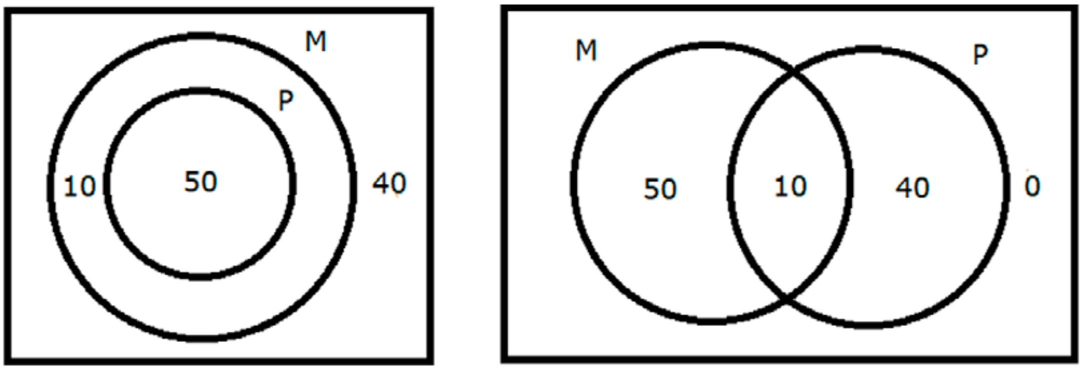



*Figura 17: Limites para a União e Intersecção quando a Soma do Número de Elementos dos Dois Conjuntos é maior que o Conjunto Universo*

Temos, portanto, para a intersecção:

$$10 \leq \#(M \cap P) \leq 50$$

Sendo assim, pelo menos 10 e no máximo 50 pessoas gostam tanto de Matemática como de Português.

Reunindo o que vimos nas duas seções, podemos falar sobre a união e sobre seu complementar:

$$60 \leq \#(M \cup P) \leq 100$$

$$\therefore 100 - 100 \leq \#(M \cup P)^C \leq 100 - 60$$

$$\therefore 0 \leq \#(M \cup P)^C \leq 40$$

Sendo assim, pelo menos 60 e no máximo 100 pessoas gostam de pelo menos uma das duas matérias. E também podemos dizer que pelo menos 0 e no máximo 40 pessoas não gostam de nenhuma das duas matérias.

Agora, vejamos outra situação em que a soma do número dos elementos dos dois conjuntos é menor que o conjunto Universo.

Suponha que, numa pesquisa com 70 pessoas, 35 delas gostam de sorvete de morango e 25 delas gostam de sorvete de chocolate. Qual é o número mínimo de pessoas que não gostam de nenhum dos dois sabores?

Analisaremos novamente as duas situações chave.

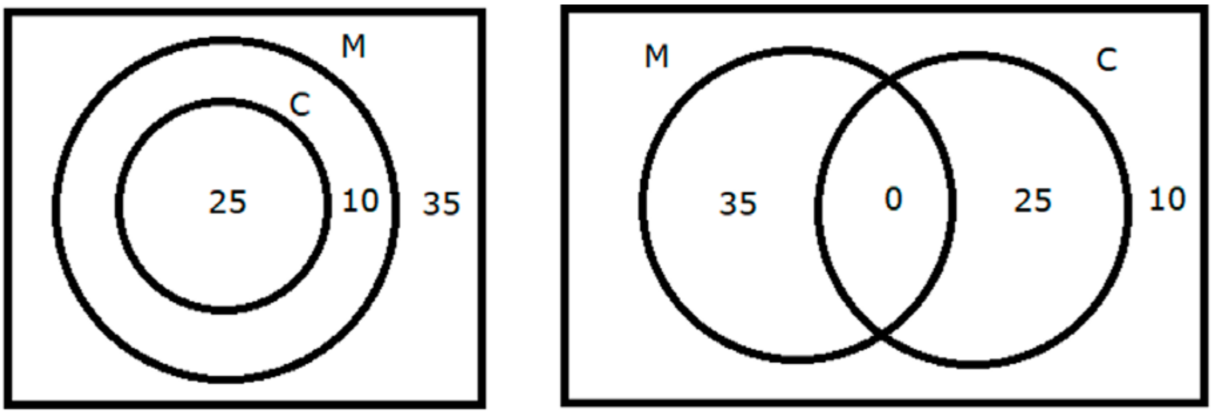



*Figura 18: Limites para o Conjunto União e Intersecção quando a Soma do Número de Elementos dos dois conjuntos é menor que o Conjunto Universo*

Nesse caso, podemos dizer para a intersecção:

$$0 \leq \#(M \cap C) \leq 25$$

Sendo assim, pelo menos nenhuma e, no máximo, 25 pessoas gostam dos dois sabores simultaneamente. Para a união, podemos dizer:

$$25 + 10 \leq \#(M \cup C) \leq 35 + 25$$

$$\therefore 35 \leq \#(M \cup C) \leq 60$$

Sendo assim, pelo menos 35 e no máximo 60 pessoas gostam de pelo menos um dos sabores.

Por fim, para o complementar da União, temos:

$$10 \leq \#(M \cup C)^C \leq 35$$

Sendo assim, pelo menos 10 pessoas e no máximo 35 pessoas não gostam de nenhum dos dois sabores.

## Direto do Concurso

**013.** (CESPE/ANVISA/2016/TÉCNICO ADMINISTRATIVO) Situação hipotética: A ANVISA realizará inspeções em estabelecimentos comerciais que são classificados como Bar ou Restaurante e naqueles que são considerados ao mesmo tempo Bar e Restaurante. Sabe-se que, ao todo, são 96 estabelecimentos a serem visitados, dos quais 49 são classificados como Bar e 60 são classificados como Restaurante. **Assertiva:** Nessa situação, há mais de 15 estabelecimentos que são classificados como Bar e como Restaurante ao mesmo tempo.

---

Questão bastante direta. A inspeção abrangeu o total de 96 estabelecimentos. O tamanho máximo da união entre bares e restaurantes é exatamente esse conjunto universo.

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cup B)$$

$$49 + 60 - \#(A \cup B) \leq 96$$

$$\#(A \cup B) \geq 49 + 60 - 96 = 13$$

Sendo assim, há pelo menos 13 estabelecimentos que são classificados simultaneamente como bar e restaurante. Não há como garantir que são mais de 15.
**Errado.**

---

## 4. Intervalos

Se os números reais correspondem a uma reta, um intervalo corresponde a um segmento de reta.

Existem dois tipos de intervalos:

- **Fechados:** incluem as suas extremidades – representado por um colchete voltado para o dentro;
- **Abertos:** não incluem as suas extremidades – representado por um parêntese ou por um colchete virado para fora.

Nas provas de concursos, isso é suficiente para saber se um conjunto é aberto ou fechado.

Vejamos alguns exemplos.

O intervalo [2,4] é um intervalo fechado em 2 e fechado 4, ou seja, inclui o 2, o 4 e todos os números reais nesse intervalo.

O intervalo [1,3[ é um intervalo aberto em 3 e fechado em 1, portanto, não inclui o 3, mas inclui todos os números entre 1 e 3.

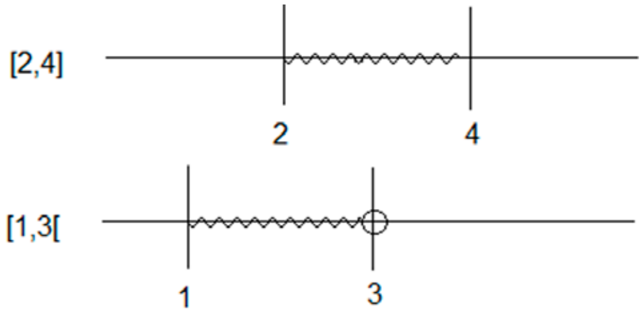



*Figura 19: Exemplos de Intervalos*

Existe também uma maneira analítica e mais formal de representar os intervalos citados. Vale a pena conhecer.

$$[2,4]: \{x, x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$$

$$[1,3[: \{x, x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3\}$$

Em outras palavras, o conjunto [2,4] corresponde a todos os elementos x, de modo que x seja real e que seja maior ou igual a 2 e menor ou igual a 4. Já o conjunto [1,3[ corresponde a todos os elementos x, de modo que x seja real e que seja maior ou igual a 1 e menor que 3.

Qualquer intervalo que inclua alguma das infinidades será aberto nessa infinidade. Por exemplo, o conjunto dos reais positivos é dado por $(0, \infty)$, portanto, é aberto em 0 e vai até o mais infinito. Também ilustramos o conjunto $(-\infty, -1)$.

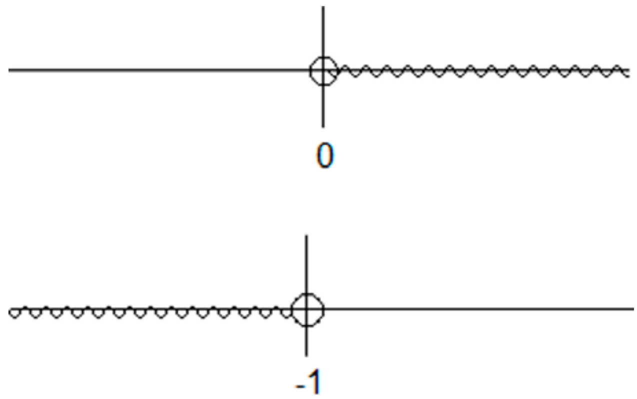



*Figura 20: Intervalos incluindo infinidades*

Vale a pena aprender também as seguintes representações para esses intervalos.

$$[0, \infty]: \{x, x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

$$(-\infty, -1) : \{x, x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$$

## 4.1. Intersecção

A intersecção também pode ser feita com intervalos. Consideremos os intervalos:

$$A = ]1,3]\ e\ B = [2,4]$$

A maneira mais simples é desenhar graficamente os intervalos e sua união, como ilustrado na Figura 21.

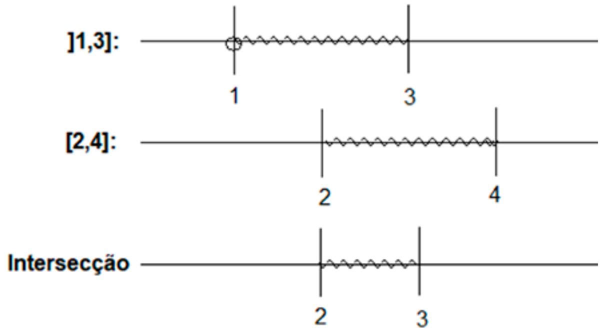



*Figura 21: Intersecção em Intervalos*

## 4.2. União

A união também pode ser feita com intervalos. Consideremos os intervalos:

$$A = ]1,3]\ e\ B = [2,4]$$

A maneira mais simples é desenhar graficamente os intervalos e sua união, como ilustrado na Figura 7.

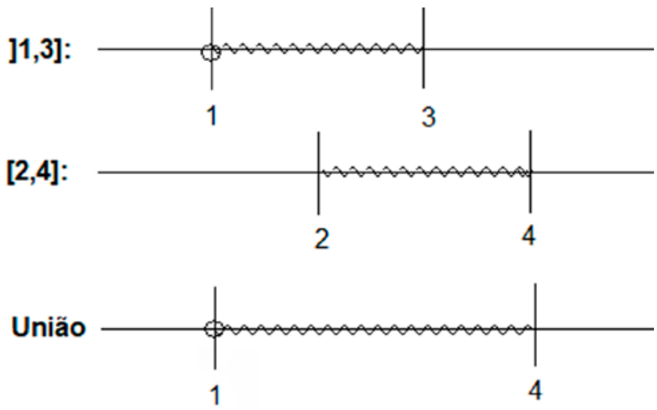



*Figura 22: União de Intervalos*

É importante prestar atenção especial aos extremos. O elemento 1 não pertence ao conjunto A, portanto, não pertencerá à união. Já o elemento 4 pertence ao conjunto B, portanto, pertencerá à união.

Chegamos ao final da parte teórica dessa aula. Agora, vamos reforçar os nossos aprendizados com o resumo e uma bateria de exercícios.

# RESUMO

Palavras-Chave nos Diagramas Lógicos. **Proposições Subalternas e Superalternas:** para que a superalterna seja verdadeira, é necessário que a subalterna seja verdadeira.

“Todo auditor é engenheiro” **(superalterna)**
“Algum auditor é engenheiro” **(subalterna)**

Proposições Contraditórias: uma é a negação da outra.

“Todo auditor é engenheiro” (universal afirmativa)
“Algum auditor não é engenheiro” (particular negativa)

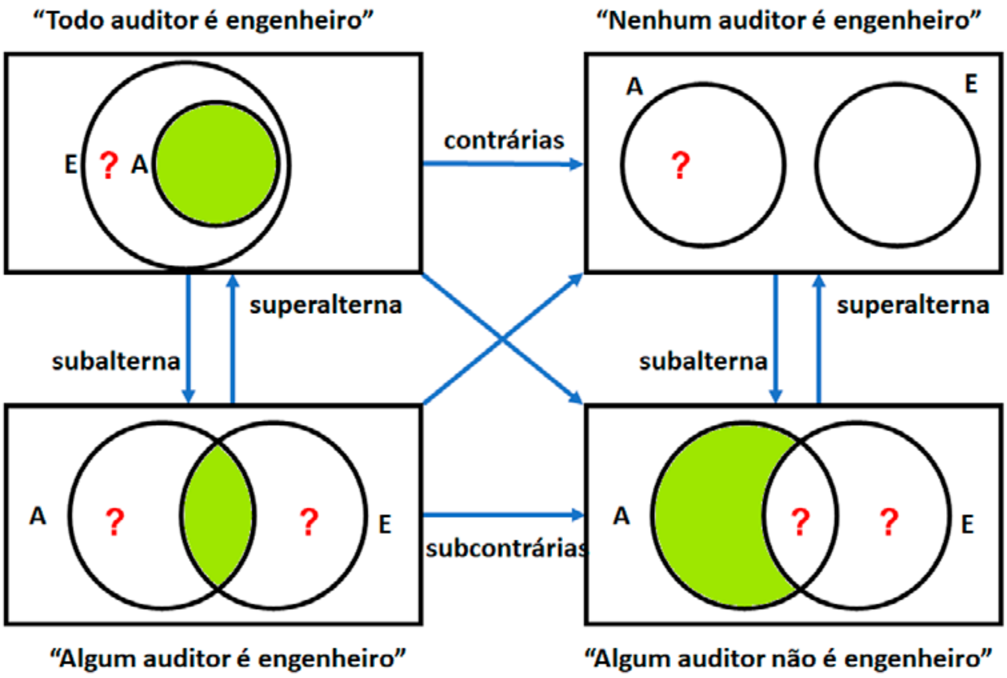
**Proposições Contrárias:** podem ser ambas falsas, mas nunca ambas verdadeiras.

“Todo auditor é engenheiro” **(universal afirmativa)**
“Nenhum auditor é engenheiro” **(universal negativa)**

**Proposições Subcontrárias:** podem ser ambas verdadeiras, mas nunca ambas falsas.

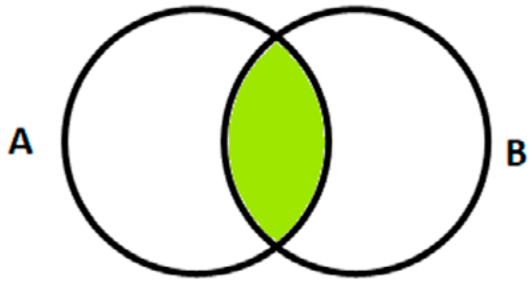
“Algum auditor é engenheiro” **(particular afirmativa)**
“Algum auditor não é engenheiro” **(particular negativa)**

Devemos prestar atenção, pois o enunciado deixa clara a existência de algumas regiões, mas não de outras:

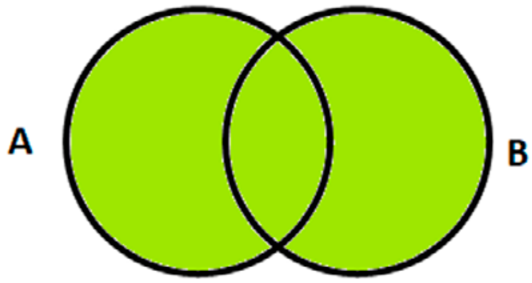


**Operações entre dois Conjuntos:**

- **Intersecção (A ∩ B):** são os elementos comuns aos dois conjuntos;
- **União (A ∪ B):** são os elementos que pertencem a qualquer um dos dois conjuntos;

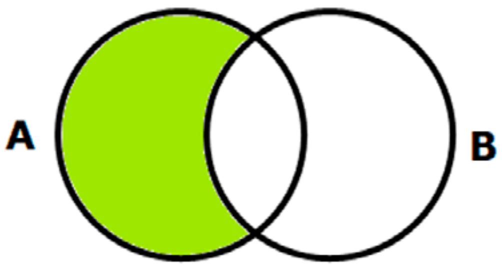



**A ∩ B**

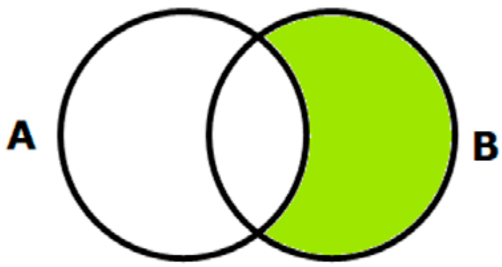



**A U B**

- **Diferença (A\B):** são os elementos de A que não estão em B;




**A\B**




**B\A**

**Número de Elementos da União:**

- **Dois Conjuntos:** devemos somar o número de elementos de ambos os conjuntos e subtrair a intersecção, porque esses elementos foram considerados duas vezes:

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

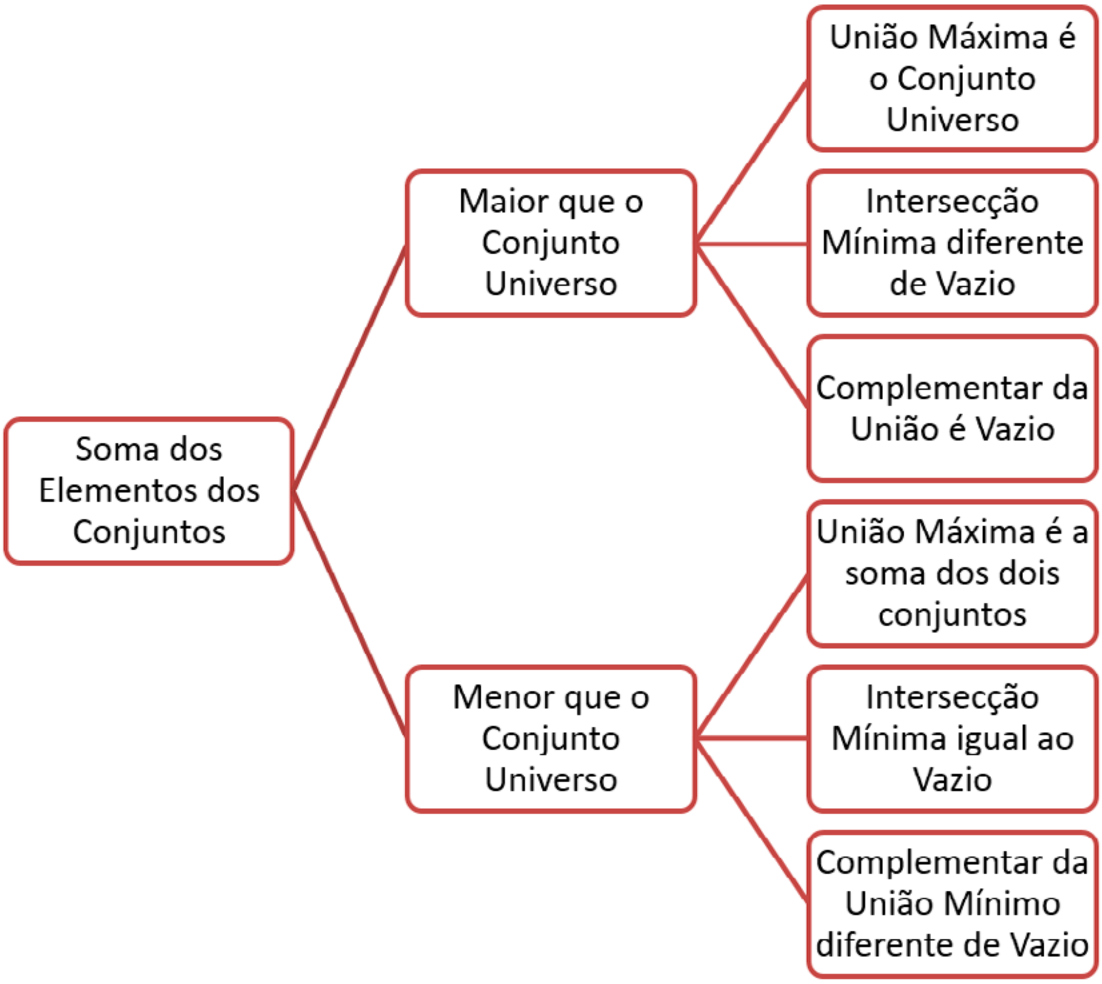
- **Três Conjuntos:** subtrair a intersecção, porque esses elementos foram considerados duas vezes:

$$\#(A \cup B \cup C)$$
$$= \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$$

Há uma lógica relativamente simples para lembrar essa expressão. Perceba que:

$$\#(A \cup B \cup C)$$
$$= Soma\ das\ Conjuntos\ Um\ a\ Um - Conjuntos\ Dois\ a\ Dois$$
$$+ Conjuntos\ Três\ a\ Três$$

## Limites para o Tamanho da União de Dois Conjuntos:

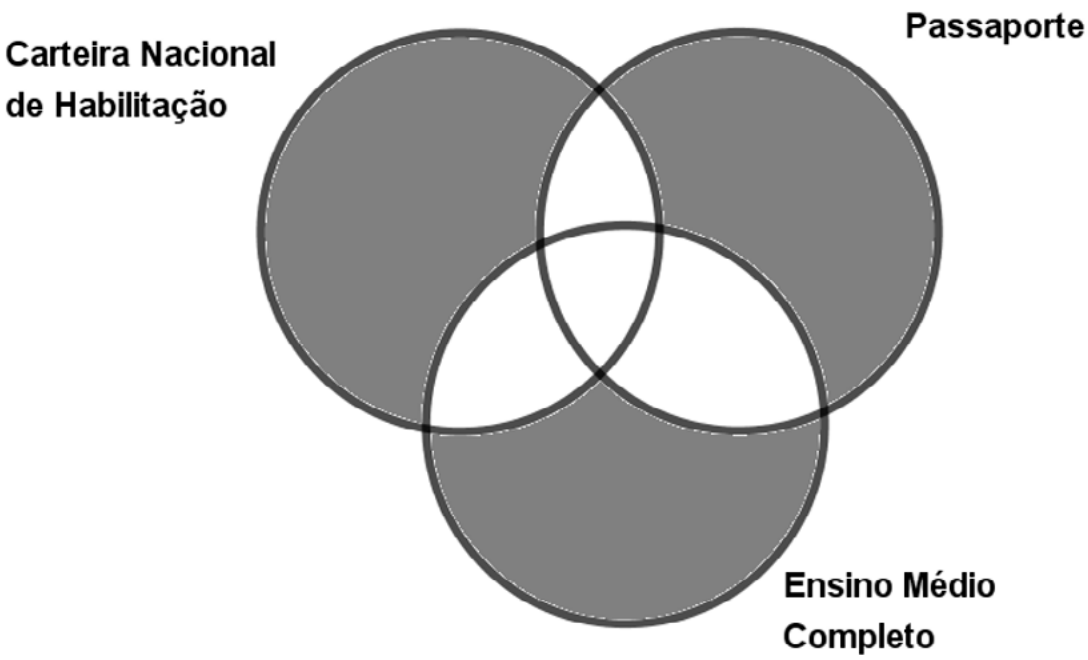



# QUESTÕES COMENTADAS EM AULA

**001.** (FCC/PREFEITURA DE MANAUS-AM/2019/ASSISTENTE TÉCNICO FAZENDÁRIO) Em um curso preparatório para vestibulares, todos os professores que ensinam física ou química ensinam também matemática, e nenhum dos professores que ensinam biologia ensina também matemática. Logo,
a) nenhum dos professores que ensinam física ensina também biologia.
b) todos os professores que ensinam tanto física quanto química ensinam também biologia.
c) há professores que ensinam química e biologia.
d) todos os professores que ensinam matemática e não ensinam química ensinam biologia.
e) há professores que ensinam física e biologia.

**002.** (FGV/TRT-12ª REGIÃO-SC/2017/TÉCNICO JUDICIÁRIO) Todas as pessoas que conhecem os irmãos Bernardo e Bianca gostam de Bianca. Entretanto, algumas pessoas que conhecem Bianca não gostam dela.
É correto concluir que:
a) todos os que conhecem Bianca gostam dela;
b) ninguém gosta de Bianca;
c) alguns que conhecem Bianca não conhecem Bernardo;
d) quem conhece Bernardo gosta de Bianca;
e) só quem conhece Bernardo e Bianca conhece Bianca.

**003.** (FUNDATEC/PC-RS/2018/ESCRIVÃO E INSPETOR DE POLÍCIA) O diagrama abaixo representa no universo dos adolescentes os indivíduos que possuem carteira nacional de habilitação, ensino médio completo e passaporte.



A alternativa que representa os indivíduos correspondentes às regiões sombreadas é:

a) Os adolescentes que possuem carteira nacional de habilitação, ensino médio completo e passaporte.

b) Os adolescentes que possuem carteira nacional de habilitação, ensino médio completo ou passaporte.

c) Os adolescentes que possuem carteira nacional de habilitação e ensino médio completo, mas não possuem passaporte.

d) Os adolescentes que possuem somente carteira nacional de habilitação ou somente ensino médio completo ou somente passaporte.

e) Os adolescentes que possuem somente carteira nacional de habilitação ou somente ensino médio completo, mas não possuem passaporte.

**004.** (CESPE/TRF-1ª REGIÃO/2017) Em uma reunião de colegiado, após a aprovação de uma matéria polêmica pelo placar de 6 votos a favor e 5 contra, um dos 11 presentes fez a seguinte afirmação: "Basta um de nós mudar de ideia e a decisão será totalmente modificada."

Considerando a situação apresentada e a proposição correspondente à afirmação feita, julgue o próximo item.

Se A for o conjunto dos presentes que votaram a favor e B for o conjunto dos presentes que votaram contra, então o conjunto diferença A\B terá exatamente um elemento.

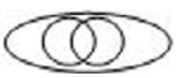
**005.** (ESAF/DNIT/2013/TÉCNICO ADMINISTRATIVO) Uma escola oferece reforço escolar em todas as disciplinas. No mês passado, dos 100 alunos que fizeram reforço escolar nessa escola, 50 fizeram reforço em Matemática, 25 fizeram reforço em Português e 10 fizeram reforço em Matemática e Português. Então, é correto afirmar que, no mês passado, desses 100 alunos, os que não fizeram reforço em Matemática e nem em Português é igual a:

a) 15
b) 35
c) 20
d) 30
e) 25

**006.** (FGV/SEFAZ-RJ/2011/ANALISTA DE CONTROLE INTERNO) Qual dos diagramas abaixo representa melhor a relação entre mulheres, mães e profissionais de contabilidade?

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

**007.** (FGV/CAERN/2010/ADMINISTRADOR) A, B e C são três conjuntos. Com base nessa informação, analise as afirmativas a seguir:

I – Se todos os elementos de A pertencem a B, então A e B são o mesmo conjunto. II. Se A e C não possuem elementos em comum, então um dos dois é um conjunto vazio.

III – Se todos os elementos de A pertencem a B e todos os elementos de B pertencem a C, então todos os elementos de A pertencem a C.

Assinale:

a) se somente a afirmativa I estiver correta.
b) se somente a afirmativa II estiver correta.
c) se somente a afirmativa III estiver correta.
d) se somente as afirmativas I e III estiverem corretas.
e) se somente as afirmativas II e III estiverem corretas.

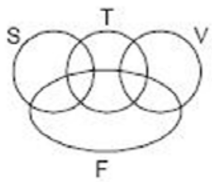
**008.** (FCC/BAHIAGÁS/2010/TÉCNICO DE PROCESSOS ORGANIZACIONAIS) Admita as frases seguintes como verdadeiras.

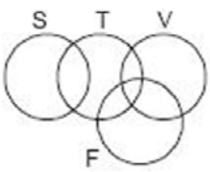
I – Existem futebolistas (F) que surfam (S) e alguns desses futebolistas também são tenistas (T).

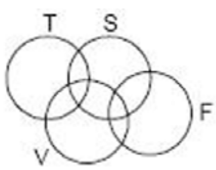
II – Alguns tenistas e futebolistas também jogam vôlei (V).

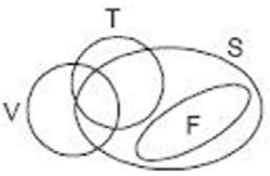
III – Nenhum jogador de vôlei surfa.

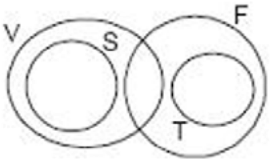
A representação que admite a veracidade das frases é:

a) 


b) 


c) 

d) 


e) 


**009.** (FEPESE/PC-SC/2017/AGENTE DE POLÍCIA CIVIL) Uma reunião conta com X pessoas. Destas, 7 usam seus celulares para enviar mensagens, 10 usam o celular para jogar, 5 usam o celular para enviar mensagem e jogar e 3 não usam o celular. Portanto, X é igual a:

a) 12
b) 15
c) 20
d) 22
e) 25

**010.** (FGV/PREFEITURA DE SALVADOR-BA/2017/TÉCNICO DE NÍVEL SUPERIOR I) Em certo concurso, inscreveram-se 80 candidatos. Sabe-se que, desses candidatos, 50 são baianos, 22 possuem curso superior e 26 são de outros estados e não possuem curso superior. O número de candidatos baianos com curso superior é:

a) 16.
b) 18.
c) 20.
d) 22.
e) 24.

**011.** (CESPE/2019/SEFAZ-RS/TÉCNICO TRIBUTÁRIO DA RECEITA ESTADUAL) Em determinado dia, os órgãos responsáveis atenderam 50 contribuintes para resolver pendências relativas ao IPTU, ao IPVA e a outros tributos. Sabe-se que foram atendidos:

- 18 contribuintes com pendências de IPTU;
- 23 contribuintes com pendências de IPVA;
- 8 contribuintes com pendências de IPTU e IPVA.

Nesse caso, a quantidade de contribuintes atendidos cujas pendências não se referiam a IPTU nem a IPVA foi igual a

a) 9.
b) 10.
c) 15.
d) 17.
e) 25.

**012.** (FGV/IBGE/2017/AGENTE CENSITÁRIO MUNICIPAL E SUPERVISOR) Na assembleia de um condomínio, duas questões independentes foram colocadas em votação para aprovação. Dos 200 condôminos presentes, 125 votaram a favor da primeira questão, 110 votaram a favor da segunda questão e 45 votaram contra as duas questões.

Não houve votos em branco ou anulados.

O número de condôminos que votaram a favor das duas questões foi:

**a)** 80;

**b)** 75;

**c)** 70;

**d)** 65;

**e)** 60.

**013.** (CESPE/ANVISA/2016/TÉCNICO ADMINISTRATIVO) Situação hipotética: A ANVISA realizará inspeções em estabelecimentos comerciais que são classificados como Bar ou Restaurante e naqueles que são considerados ao mesmo tempo Bar e Restaurante. Sabe-se que, ao todo, são 96 estabelecimentos a serem visitados, dos quais 49 são classificados como Bar e 60 são classificados como Restaurante. Assertiva: Nessa situação, há mais de 15 estabelecimentos que são classificados como Bar e como Restaurante ao mesmo tempo.

# QUESTÕES DE CONCURSO

**014.** (FCC/PREFEITURA DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO-SP/2019/TÉCNICO DE SOM) Luísa tem 20 pares de meias de quatro cores diferentes, brancas, pretas, cinzas e verdes. Sabe-se que exatamente 17 pares de meias não são pretas, 5 são verdes e exatamente 12 não são brancas. O número de pares de meias cinzas de Luísa é:

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

---

Segundo o enunciado, 12 meias não são brancas. Portanto, 8 meias são brancas. Além disso, 17 meias não são pretas, portanto, 3 meias são pretas. Assim, temos:

$$B + P + C + V = 20$$

Mas já sabemos que são 5 pares de meias verdes.

$$8 + 3 + C + 5 = 20$$

$$16 + C = 20 \therefore C = 20 - 16 = 4$$

**Letra b.**

---

**015.** (ESAF/ATRFB/2009) Uma escola para filhos de estrangeiros oferece cursos de idiomas estrangeiros para seus alunos. Em uma determinada série, 30 alunos estudam francês, 45 estudam inglês, e 40, espanhol. Dos alunos que estudam francês, 12 estudam também inglês e 3 estudam também espanhol. Dos alunos que estudam inglês, 7 estudam também espanhol e desses 7 alunos que estudam inglês e espanhol, 3 estudam também francês. Por fim, há 10 alunos que estudam apenas alemão. Não sendo oferecidos outros idiomas e sabendo-se que todos os alunos dessa série devem estudar pelo menos um idioma estrangeiro, quantos alunos dessa série estudam nessa escola?

a) 96.
b) 100.
c) 125.
d) 115.
e) 106.

Como os alunos de alemão estão separados, basta aplicar a união tripla:

$$\#(F \cup I \cup E) = \#F + \#I + \#E - \#(F \cap I) - \#(F \cap E) - \#(I \cap E) + \#(F \cap I \cap E)$$

$$\#(F \cup I \cup E) = 30 + 45 + 40 - 12 - 3 - 7 + 3 = 118 - 22 = 96$$

Para saber a quantidade de alunos que estudam pelo menos uma língua, precisamos incluir também os alunos de alemão. São, portanto, 96+10=106 alunos.

**Letra e.**

---

**016.** (VUNESP/TCE-SP/2017/AGENTE DA FISCALIZAÇÃO) Considere verdadeiras as afirmações:

- Todos os administradores são especialistas em informática.
- Alguns especialistas em informática são atores.
- Samuel é administrador.

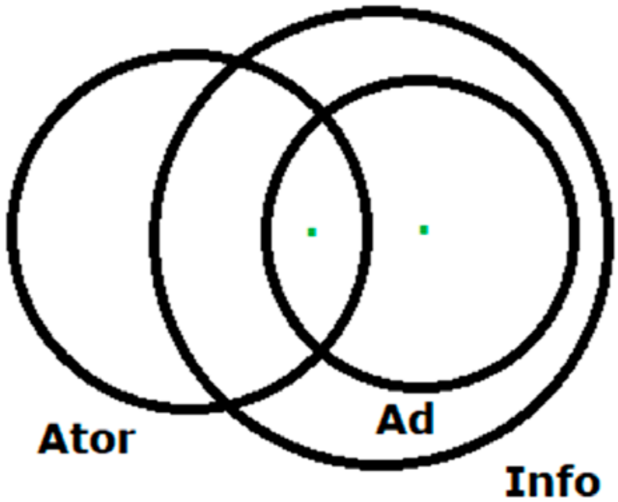
A partir dessas informações, é correto concluir que:

a) Samuel é administrador e ator.
b) Samuel não é especialista em informática.
c) Os atores que são especialistas em informática são administradores.
d) Samuel é ator, mas não é especialista em informática.
e) Samuel não é ator ou é especialista em informática

---

Como sabemos que todos os administradores são especialistas em informática, temos que administradores (Adm) é um subconjunto de especialistas em informática (Info).

Além disso, sabemos que há intersecção entre Info e atores. De maneira geral, podemos escrever da seguinte forma. Porém, não há garantia de que haja intersecção entre Atores e Adm.



Samuel é administrador, mas não sabemos se ele é ator, pois ele pode ser representado por qualquer um dos pontos verdes. Isso invalida as letras A e D.
Observe que não há garantia de que os atores especialistas em informática sejam também administradores, portanto, a C está errada.
Temos, por certeza, de que Samuel é especialista em informática, porque ele precisa ao subconjunto de administradores. Portanto, a letra E está garantidamente correta, tendo em vista que o operador OU requer que apenas uma das proposições esteja correta.
**Letra e.**

**017.** (FGV/CODEBA/2016/GUARDA PORTUÁRIO) Certo concurso oferecia vagas para candidatos com ensino médio completo e vagas para candidatos com nível superior. Nesse concurso inscreveram-se 1050 candidatos sendo 580 homens.
Entre os inscritos, 210 tinham nível superior e 380 mulheres tinham apenas ensino médio completo.
O número de inscritos homens com nível superior é
a) 95.
b) 100.
c) 105.
d) 120.
e) 125.

Podemos notar duas classes de conjuntos disjuntos: homens e mulheres – ninguém pode ser homem e mulher ao mesmo tempo; pessoas que possuem Ensino Superior e outras que possuem apenas Ensino Médio.

| | **Homens** | **Mulheres** | **Total** |
|---|---|---|---|
| **Superior** | | | 210 |
| **Médio** | | 380 | |
| | 580 | | 1050 |

Podemos obter o número de mulheres e o número de pessoas que possuem apenas Ensino Médio.

$$M = 1050 - 580 = 470$$
$$EM = 1050 - 210 = 840$$

| | **Homens** | **Mulheres** | **Total** |
|---|---|---|---|
| **Superior** | | | 210 |
| **Médio** | | 380 | 840 |
| | 580 | 470 | 1050 |

Agora, podemos calcular as mulheres com ensino superior. Como são 470 mulheres no total e 380 delas possuem apenas Ensino Médio, então, 90 mulheres possuem Ensino Superior.

| | Homens | Mulheres | Total |
|---|---|---|---|
| **Superior** | | 90 | 210 |
| **Médio** | | 380 | 840 |
| | 580 | 470 | 1050 |

Por fim, basta completar o quadro com os homens, tanto com Ensino Superior e Ensino Médio.

| | Homens | Mulheres | Total |
|---|---|---|---|
| **Superior** | 120 | 90 | 210 |
| **Médio** | 460 | 380 | 840 |
| | 580 | 470 | 1050 |

**Letra d.**

---

**018.** (FGV/PC-MA/2012/AUXILIAR DE PERÍCIA MÉDICO-LEGAL) De um conjunto de vinte policiais civis, quinze são do sexo masculino e doze são casados. A quantidade mínima de policiais civis desse conjunto que são simultaneamente do sexo masculino e casados é:

**a)** 3
**b)** 5
**c)** 7
**d)** 8
**e)** 12

---

Montemos o diagrama com as informações fornecidas.

| | Homens | Mulheres | Total |
|---|---|---|---|
| **Casados** | | | 12 |
| **Solteiros** | | | |
| | 15 | | 20 |

Agora, vamos completar com o número de mulheres e o número de solteiros.

| | Homens | Mulheres | Total |
|---|---|---|---|
| **Casados** | | | 12 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Solteiros** | | | 8 |
| | 15 | 5 | 20 |

Façamos x o número de homens casados

| | **Homens** | **Mulheres** | **Total** |
|---|---|---|---|
| **Casados** | x | 12 – x | 12 |
| **Solteiros** | 15 – x | | 8 |
| | 15 | 5 | 20 |

Podemos escrever também o número de mulheres solteiras.

$$y + 12 - x = 5 \therefore y = 5 - 12 + x = x - 7$$

| | **Homens** | **Mulheres** | **Total** |
|---|---|---|---|
| **Casados** | x | 12 – x | 12 |
| **Solteiros** | 15 – x | x – 7 | 8 |
| | 15 | 5 | 20 |

Agora, precisamos que todos os números na tabela sejam maiores ou iguais a zero, pois não é possível haver um número negativo de mulheres solteiras, por exemplo. Sendo assim:

$$x - 7 \geq 0 \therefore x \geq 7$$

Como x é a quantidade de homens casados, temos que **a quantidade mínima é realmente igual a 7.**
Também poderíamos impor que o número de mulheres casadas é maior ou igual a zero.

$$12 - x \geq 0 \therefore x \leq 12$$

Dessa forma, a quantidade máxima de homens casados seria 12.
Como o enunciado pediu a quantidade mínima, a resposta é 7.
**Letra c.**

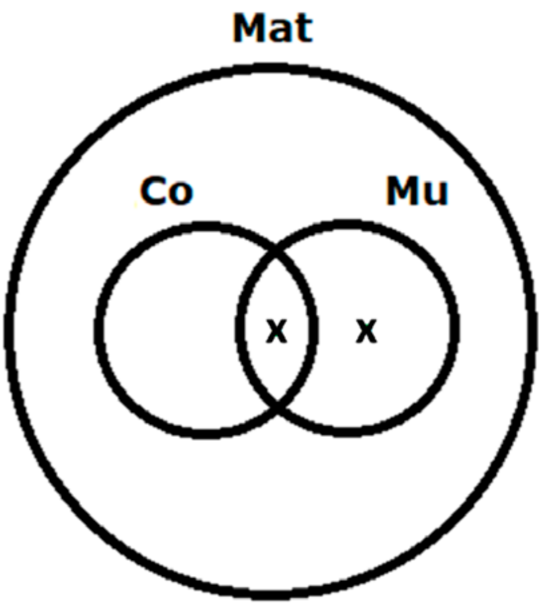
---

**019.** (VUNESP/TCE-SP/2017/AGENTE DA FISCALIZAÇÃO) Considere verdadeiras as afirmações:

- Todo contador é matemático.
- Não há músico que não seja matemático.
- Carlos é músico.

A partir dessas afirmações, é correto concluir que:
a) Não é possível Carlos ser matemático.
b) Se Carlos é músico, então ele é contador.
c) Carlos não é contador.
d) Se Carlos é músico, então ele é matemático.
e) Qualquer contador é músico.

Ao afirmar que todo contador é matemático, temos que Contador (Co) é um subconjunto dos matemáticos (Mat).
Da mesma forma, quando se diz que "não há músico que não seja matemático", estamos dizendo que todo músico é matemático. Portanto, Músico (Mu) é um subconjunto de matemáticos (Mat).
A situação descrita pode ser representada pelo Diagrama de Venn.




Sabemos que Carlos é músico, porém, não podemos afirmar que ele seja contador, já que ele pode ser representado por qualquer uma das marcações em "X" no diagrama.
No entanto, podemos afirmar certamente que Carlos é matemático. Dessa forma, a afirmação D é um condicional formado por duas alternativas verdadeiras.
"Se Carlos é músico (V), então ele é matemático (V)."
Portanto, essa afirmação está verdadeira.
**Letra d.**

**020.** (FCC/TRF-3ª REGIÃO/2016/ANALISTA JUDICIÁRIO) Considere verdadeiras as afirmações abaixo.
I – Todos os analistas que são advogados, são contadores também.
II – Nem todos os contadores que são advogados, são analistas também.

III – Há advogados que são apenas advogados e isso também acontece com alguns analistas, mas não acontece com qualquer um dos contadores.

A partir dessas afirmações, é possível concluir corretamente que

**a)** todo analista é advogado e é também contador.
**b)** qualquer contador que seja analista é advogado também.
**c)** existe analista que é advogado e não é contador.
**d)** todo contador que é advogado é também analista.
**e)** existe analista que não é advogado e existe contador que é analista.

Vamos traduzir as informações fornecidas em um diagrama de Venn. Nomearemos A o conjunto de advogados, B o conjunto de analistas e C o conjunto de contadores.

I – Todos os analistas (B) que são advogados (A), são contadores (C) também.

Isso significa que a região de intersecção exclusiva entre A e B é nula, ou seja, não apresenta nenhum elemento. Portanto, marcaremos com um 0 essa região.

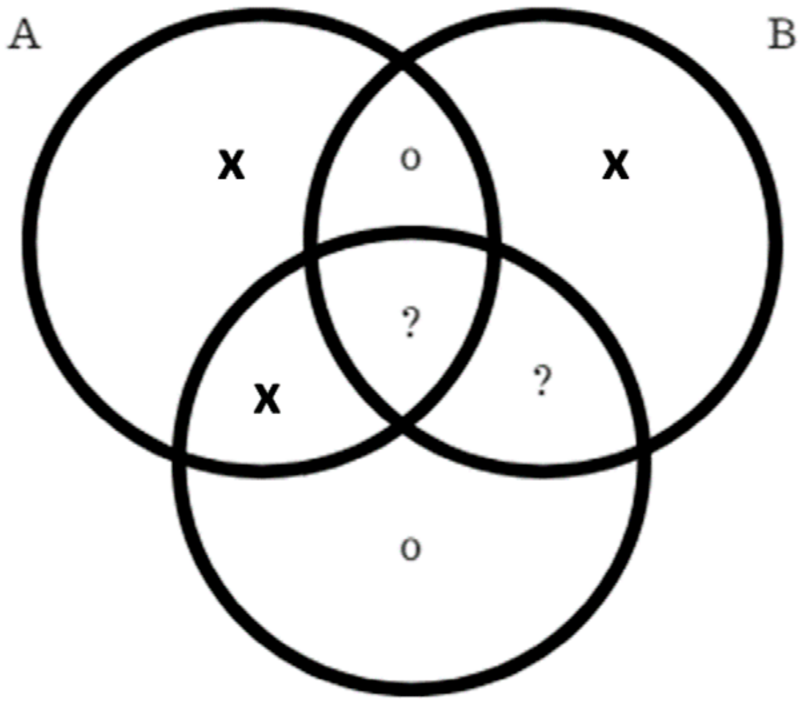
II – Nem todos os contadores que são advogados, são analistas também.

Isso significa que existe um elemento na intersecção exclusiva entre A (advogados) e C (contadores). Portanto, marcaremos com um X essa região.

III – Há advogados que são apenas advogados e isso também acontece com alguns analistas, mas não acontece com qualquer um dos contadores.

Isso significa que existe um elemento na região exclusiva de A e outro elemento na região exclusiva de B e que a região exclusiva de C é vazia. Por isso, marcaremos com um X as regiões exclusivas de A e B e marcaremos com um 0 a região exclusiva de C.

Não temos informações sobre a intersecção nem sobre a intersecção exclusiva entre B e C.



Dessa maneira, podemos ver que realmente existe analista que não é advogado (existe uma pessoa que é exclusivamente analista). No entanto, eu não vejo razão para dizer, com certeza, que há um contador que é analista. É possível que as duas regiões marcadas com interrogação estejam realmente vazias.

Por isso, a meu ver, essa questão deveria ser nula.

Porém, é verdade que todas as demais alternativas são bastante erradas. E a letra E é a única possível de se marcar.

Vamos lá.

a) O próprio enunciado nos garante que existem alguns analistas que são apenas analistas. Portanto, está errada a letra A.

b) Isso equivale a dizer que a intersecção exclusiva entre B e C é nula, ou seja, que não existem pessoas que são contadores e analistas, mas não são advogados. Já vimos que não é possível afirmar isso. Portanto, a letra B está errada.

c) O próprio enunciado fala que todos os analistas que são advogados são também contadores.

d) O enunciado garante que existe um elemento na intersecção exclusiva entre advogados (A) e contadores (C).

e) Para entender essa letra como correta, é preciso que, pelo menos uma das interrogações esteja preenchida com um elemento. Para concluir isso, é necessário fazer uma das duas interpretações a seguir.

"Há alguns analistas que são apenas analistas": o enunciado estaria dizendo que deve existir, pelo menos, um analista que não seja exclusivamente analista.

"Todos os analistas que são advogados são também contadores": o enunciado estaria dizendo que deve existir pelo menos uma pessoa que se enquadrada nessa situação, ou seja, que essa pessoa está na intersecção tripla.

Certamente, eu não concordo com essa afirmação. E, por isso, defendo a anulação dessa questão.

Como falamos, é possível que todos os analistas estejam na região de exclusivamente analistas.

**Letra e.**

---

**021.** (ESAF/AFRFB/2014) Se é verdade que alguns adultos são felizes e que nenhum aluno de matemática é feliz, então é necessariamente verdade que:

a) algum adulto é aluno de matemática.

b) nenhum adulto é aluno de matemática.

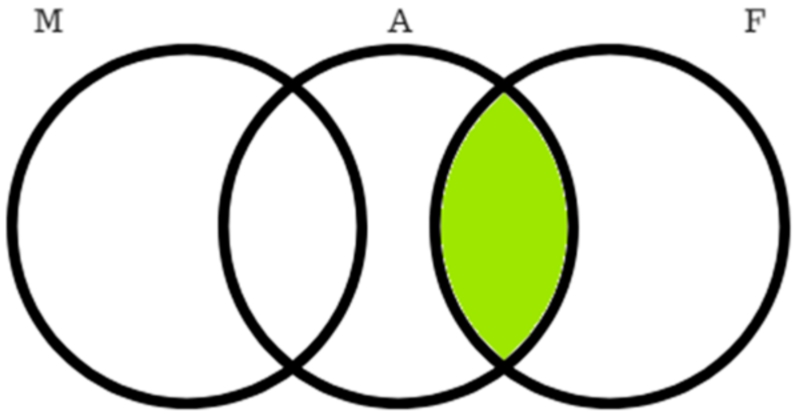
c) algum adulto não é aluno de matemática.

d) algum aluno de matemática é adulto.

e) nenhum aluno de matemática é adulto

Temos três conjuntos interessantes: alunos de Matemática (M), adultos (A) e pessoas felizes (F). O enunciado nos garantiu que os conjuntos M e F são disjuntos e que existem adultos felizes. Logo, existem elementos na intersecção entre adultos e felizes.

Portanto, podemos desenhar o diagrama de Venn destacando em verde essa informação de que existem adultos felizes.




Observe que, se João é adulto e feliz, então João não pode ser aluno de Matemática, porque nenhum aluno de Matemática é feliz. Sendo assim, algum adulto não é aluno de matemática. Exatamente o que está mostrado na área verde.

É interessante que não podemos garantir as demais áreas. Sendo assim, não podemos garantir nem que existem alunos de matemática que são adultos nem que não sejam.

É possível que alunos de matemática seja um subconjunto de adultos ou que seja disjunto. Não há absolutamente nenhuma garantia do enunciado.

Também não podemos garantir que existe a intersecção entre adultos e alunos de matemática. Logo, não podemos garantir que algum adulto seja aluno de matemática.

**Letra c.**

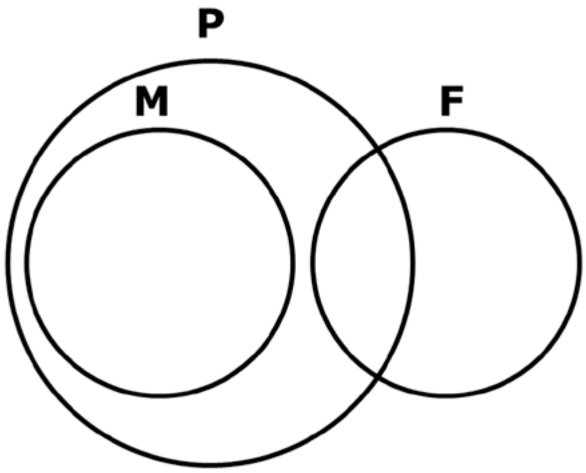
---

**022.** (FCC/AL-AP/2020/ASSISTENTE LEGISLATIVO) Em um grupo de 50 amigos, todos os que gostam de macarrão, gostam, também de pizza; e nenhum dos que gosta de feijoada gosta, também, de macarrão; mas cada um dos amigos gosta de, pelo menos, um desses pratos. Dentre os amigos, 38 gostam de pizza e 19 gostam de feijoada. Sabendo que 10 gostam só de pizza, é correto concluir que os que gostam de macarrão são em número de:

a) 18
b) 20
c) 19
d) 21
e) 17

Primeiramente, vamos desenhar o Diagrama de Venn correspondente à situação apresentada no problema. Para isso, precisamos interpretar os pedaços do enunciado com cuidado.

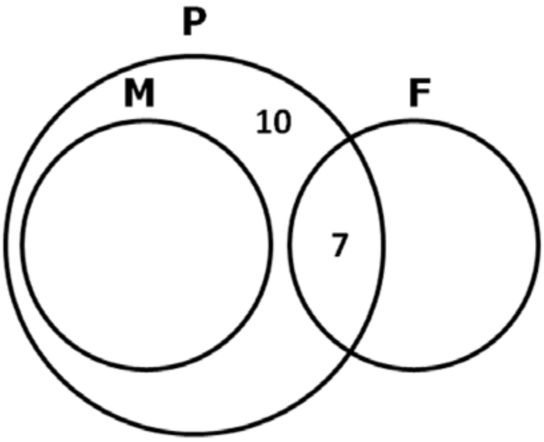
- “todos os que gostam de macarrão, gostam, também de pizza”: implica que os conjuntos **M** (macarrão) está contido no conjunto **P** (pizza);
- “nenhum dos que gosta de feijoada gosta, também, de macarrão”: implica que os conjuntos **M** (macarrão) e **F** (feijoada) são disjuntos.

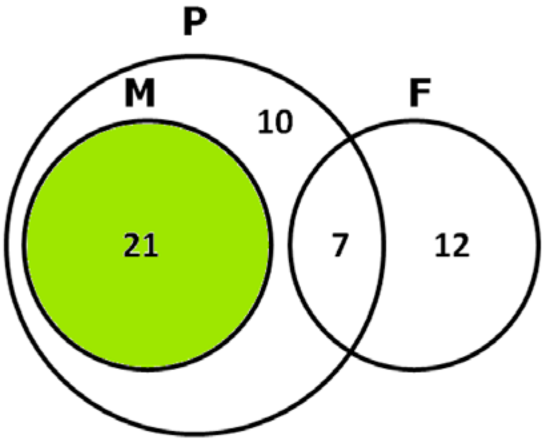



Outra informação importante é que todos os 50 amigos gostam de pelo menos um dos pratos. Portanto, a união dos três conjuntos será igual a 50. Mas, notemos que, como o conjunto de macarrão é um subconjunto de pizza, basta tomarmos a união entre os conjuntos P e F (pizza e feijoada).

$$\#(P \cup F) = \#P + \#F - \#(P \cap F)$$
$$50 = 38 + 19 - \#(P \cap F)$$
$$50 = 57 - \#(P \cap F)$$
$$\therefore \#(P \cap F) = 57 - 50 = 7$$

Dessa forma, podemos preencher as regiões de intersecção entre os conjuntos P e F. Também sabemos que o número de pessoas que gostam só de pizza é igual a 10.




Podemos calcular o número de pessoas que gostam de macarrão como a diferença entre o total de pessoas que gostam de pizza (39) e as pessoas que já foram alocadas na figura apresentada à esquerda.

$$\#M = 39 - 10 - 7 = 21$$

**Letra d.**

---

**023.** (FCC/SABESP/2019/ESTAGIÁRIO DE ENSINO MÉDIO TÉCNICO) Um grupo é formado por 410 ciclistas. Desses ciclistas 260 praticam natação e 330 correm regularmente. Sabendo que 30 ciclistas não nadam e não correm regularmente, o número de ciclistas que praticam natação e correm regularmente é:

a) 170.
b) 150.
c) 130.
d) 190.
e) 210.

---

Tomemos o conjunto universo de ciclos que nadam ou correm. Sabemos que 30 ciclistas não nadam e não correm. Portanto, o total de ciclistas que desempenham mais um esporte é igual a 380.

Dessa forma, podemos obter a união entre os conjuntos dos ciclistas que nadam **(N)** e os ciclistas que correm **(C).**

$$\#(N \cup C) = \#N + \#C - \#(N \cap C)$$

$$380 = 260 + 330 - \#(N \cap C)$$

$$380 = 590 - \#(N \cap C)$$

$$\therefore \#(N \cap C) = 590 - 380 = 210$$

**Letra e.**

---

**024.** (CESPE/DPU/2016/AGENTE ADMINISTRATIVO) Em uma festa com 15 convidados, foram servidos 30 bombons: 10 de morango, 10 de cereja e 10 de pistache. Ao final da festa, não sobrou nenhum bombom e

- quem comeu bombom de morango comeu também bombom de pistache;
- quem comeu dois ou mais bombons de pistache comeu também bombom de cereja;
- quem comeu bombom de cereja não comeu de morango.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item a seguir.
É possível que um mesmo convidado tenha comido todos os 10 bombons de pistache.

Veja a resolução da próxima questão.
**Errado.**

**025.** (CESPE/DPU/2016/AGENTE ADMINISTRATIVO) Em uma festa com 15 convidados, foram servidos 30 bombons: 10 de morango, 10 de cereja e 10 de pistache. Ao final da festa, não sobrou nenhum bombom e

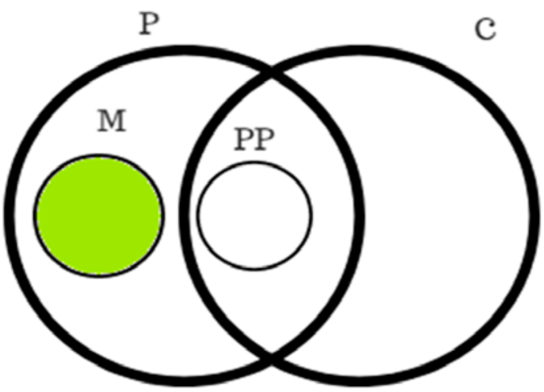
- quem comeu bombom de morango comeu também bombom de pistache;
- quem comeu dois ou mais bombons de pistache comeu também bombom de cereja;
- quem comeu bombom de cereja não comeu de morango.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item a seguir.
Quem comeu bombom de morango comeu somente um bombom de pistache.

Questão bastante inteligente (e dá fome só de pensar nela, não é?).
Com base nas informações fornecidas, temos quatro conjuntos relevantes:

- convidados que comeram bombons de morango (M);
- convidados que comeram bombons de pistache (P);
- convidados que comeram mais de um bombom de pistache (PP);
- convidados que comeram bombons de cereja (C).

Note que PP deve ser um subconjunto de P. Quem comeu mais de um bombom de pistache certamente comeu bombom de pistache.
M também é um subconjunto de P, pois quem comeu bombom de morango também comeu de pistache.
Por outro lado, PP também deve ser um subconjunto de C. Além disso, C deve ser um conjunto disjunto de M – ninguém comeu cereja e morango ao mesmo tempo.
Temos, portanto, o seguinte diagrama de Venn. Como sabemos que foram comidos bombons de morango e de cereja, podemos colorir de verde a região do morango.




A figura mostra que M é disjunto de PP. Portanto, quem comeu bombom de morango não pode ter comido mais de um bombom de pistache. Isso acontece porque as pessoas do conjunto PP necessariamente também comeram cereja e há a garantia no enunciado de que ninguém pode ter comido bombons cereja e morango.

Sendo assim, se João comeu bombons de Morango, podemos garantir que ele comeu bombons de pistache, mas que ele só comeu apenas um bombom de pistache.

Sendo assim, não é possível que uma única pessoa tenha comido todos os dez bombons de pistache.

**Certo.**

---

**026.** (CESPE/BNB/2018/ESPECIALISTA TÉCNICO) Um banco comercial realizou um evento de negócios na cidade de Fortaleza – CE. Após as reuniões, os participantes do evento visitaram pontos turísticos da cidade: 95 dos participantes visitaram o Mercado Central, 80 visitaram o Espigão de Iracema e 90 visitaram o Centro Cultural Dragão do Mar. Do total de participantes, 30 visitaram somente o Mercado Central, 50 visitaram o Espigão de Iracema e o Centro Cultural Dragão do Mar, 35 visitaram o Mercado Central e o Espigão de Iracema, e 20 visitaram esses três pontos turísticos. Considerando que todos os participantes tenham visitado, pelo menos, um desses três pontos turísticos, julgue o item subsequente.

Menos de 180 pessoas participaram do evento.

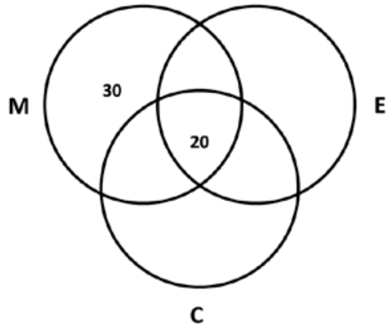
---

Questão bem interessante. Vamos chamar de:

- **M:** o Mercado Central;
- **E:** o Espigão de Iracema;
- **C:** o Centro Cultural do Dragão.

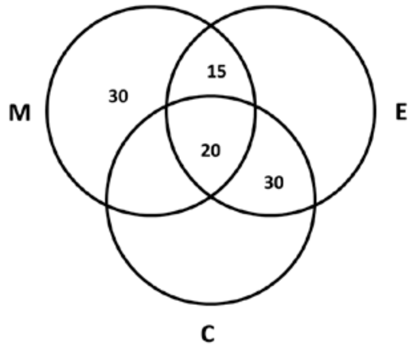
Vamos montar o Diagrama de Venn. Observe duas informações dadas pelo enunciado:

- 30 pessoas visitaram somente o **M**;
- 20 pessoas visitaram os três lugares.

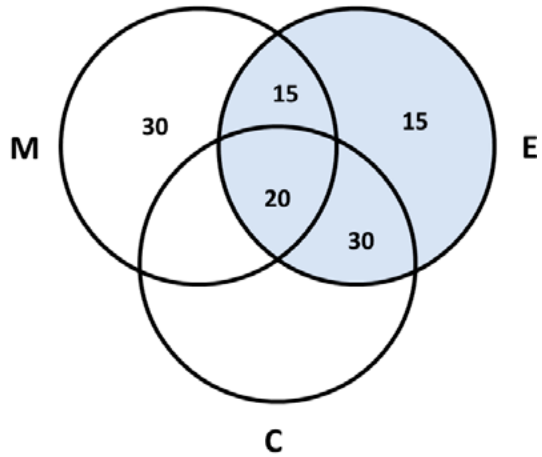



Sabemos ainda que 50 pessoas visitam **E** e **C** ao mesmo tempo. Sendo que 20 delas já estão representadas por terem visitado os três lugares. Logo, faltam apenas 30 na região em comum entre **E** e **C.**

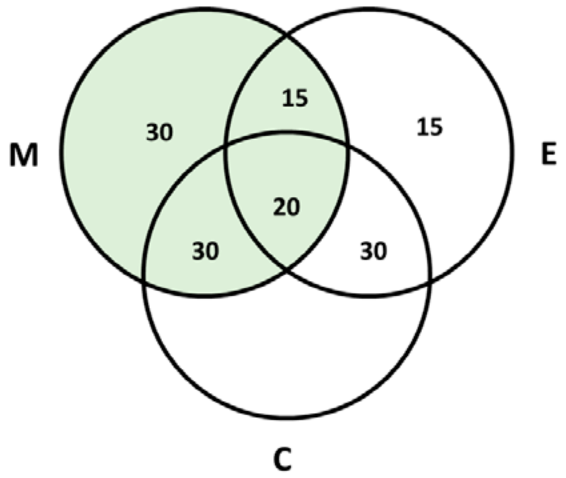
Sabemos também que 35 pessoas visitam o Mercado e o Espigão de Iracema. Dessas 35 pessoas, 20 já estão representadas por terem visitado os três lugares. Logo, faltam apenas 15.



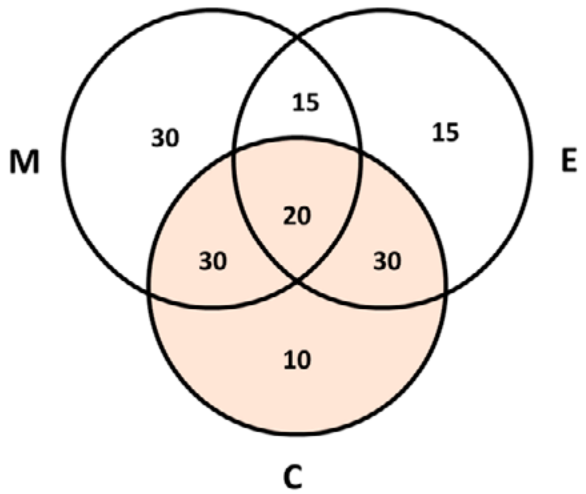

Sabemos que o total de visitas no Espigão é igual a 80. Nas regiões do Espigão, já temos 65 visitantes (15 + 20 + 30). Faltam, portanto, 15. Para facilitar a sua visualização, vamos pintar de azul.




O enunciado informou também que foram 95 visitantes no Mercado Central. Já estão representados 65 (30 + 20 + 15). Portanto, faltam 30 visitantes.




Por fim, para complementar, foram 90 pessoas que visitam o Centro Cultural. Já estão representadas no Diagrama de Venn 80 (30 + 20 + 30).




Agora que já temos o Diagrama de Venn completo.

$$S = 20 + 30 + 30 + 15 + 10 + 30 + 15 = 150$$

Portanto, foram menos de 180 pessoas mesmo.

**Certo.**

---

**027.** (CESPE/BNB/2018/ESPECIALISTA TÉCNICO) Um banco comercial realizou um evento de negócios na cidade de Fortaleza – CE. Após as reuniões, os participantes do evento visitaram pontos turísticos da cidade: 95 dos participantes visitaram o Mercado Central, 80 visitaram o Espigão de Iracema e 90 visitaram o Centro Cultural Dragão do Mar. Do total de participantes, 30 visitaram somente o Mercado Central, 50 visitaram o Espigão de Iracema e o Centro Cultural Dragão do Mar, 35 visitaram o Mercado Central e o Espigão de Iracema, e 20 visitaram esses três pontos turísticos.

Considerando que todos os participantes tenham visitado, pelo menos, um desses três pontos turísticos, julgue o item subsequente.

Mais de 50 dos participantes do evento não visitaram o Centro Cultural Dragão do Mar.

Vimos que 150 pessoas fizeram o passeio. Dessas, 90 visitaram o Centro Cultural Dragão do Mar. Portanto, o número de pessoas que não visitam é:

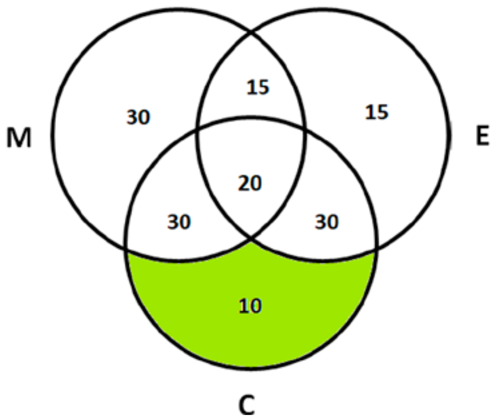
$$N = 150 - 90 = 60$$

Mais de 50 pessoas não visitaram o espaço.

**Certo.**

**028.** (CESPE/BNB/2018/ESPECIALISTA TÉCNICO) Mais de 15 dos participantes do evento visitaram somente o Centro Cultural Dragão do Mar.

Voltemos ao Diagrama de Venn descoberto no enunciado. Vamos destacar a região das pessoas que visitaram **apenas** o Centro Cultural Dragão do Mar.

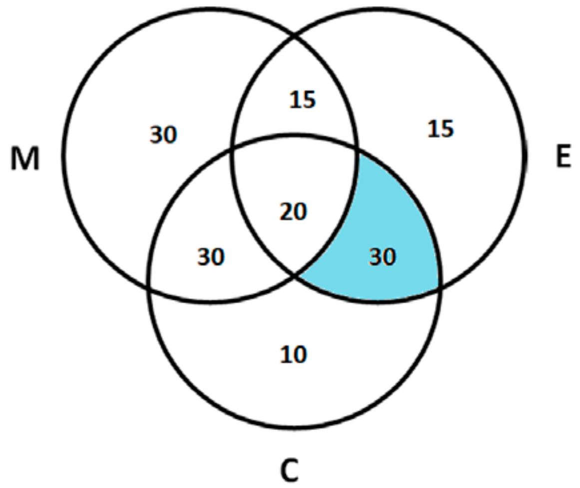



Portanto, foram apenas 10 pessoas, o que dá menos de 15.

**Errado.**

**029.** (CESPE/BNB/2018/ESPECIALISTA TÉCNICO) Menos de 12 dos participantes do evento visitaram somente o Espigão de Iracema e o Mercado Central.

Voltemos ao Diagrama de Venn descoberto no enunciado. Vamos destacar a região das pessoas que visitaram **apenas** o Centro Cultural Dragão do Mar e o Espigão de Iracema.




Portanto, foram 30, o que é bem mais de 12.

**Errado.**

---

**030.** (FGV/MRE/2016/OFICIAL DE CHANCELARIA) Uma turma do curso de Relações Internacionais tem 28 alunos e todos falam inglês. Sabe-se que 17 alunos falam espanhol e que 15 alunos falam francês. O número mínimo de estudantes dessa turma que falam esses três idiomas é:

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

---

Como todos os alunos do curso falam inglês, não precisamos nos preocupar com essa língua. Sejam os conjuntos E e F os conjuntos dos alunos que falam espanhol e dos alunos que falam francês.

Já temos que:

$$\#E = 17, \#F = 15$$

A dimensão máxima da união entre esses dois conjuntos é o conjunto universo ou a soma dos números de elementos dois conjuntos. Note que 17+15=32>28. Portanto, necessariamente existe uma intersecção entre os alunos que falam espanhol e falam francês.

$$\#(E \cup F) = \#E + \#F - \#(E \cap F)$$
$$28 = 17 + 15 - \#(E \cap F)$$
$$28 = 32 - \#(E \cap F) \therefore \#(E \cap F) = 32 - 28 = 4$$

Já sabemos que todos os elementos que estudam espanhol e francês também estudam inglês. Portanto, o número mínimo de alunos que falam os três idiomas é 4.

**Letra a.**

---

**031.** (ESAF/SUSEP/2006/AGENTE EXECUTIVO) Dados o conjunto A={2,4,6,8,10} e o conjunto B={x | x∈Z, 0 < x <10}, onde Z é o conjunto dos números inteiros, obtenha o conjunto C=A∩B.

**a)** C=A

**b)** C={2,4,6,8}

**c)** C={x | x∈Z, x?≤ 10}

**d)** C={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

**e)** C= Φ onde Φ é o conjunto vazio

---

É importante reparar que o conjunto B não contém os elementos 0 e 10, pois o sinal utilizado é menor ou maior. Dessa forma, temos que B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Dessa forma, a intersecção é C = {2, 4, 6, 8}.

**Letra b.**

---

**032.** (CESPE/INSS/2016/ANALISTA DO SEGURO SOCIAL) Uma população de 1.000 pessoas acima de 60 anos de idade foi dividida nos seguintes dois grupos:

A: aqueles que já sofreram infarto (totalizando 400 pessoas); e

B: aqueles que nunca sofreram infarto (totalizando 600 pessoas).

Cada uma das 400 pessoas do grupo A é ou diabética ou fumante ou ambos (diabética e fumante).

A população do grupo B é constituída por três conjuntos de indivíduos: fumantes, ex-fumantes e pessoas que nunca fumaram (não fumantes).

Com base nessas informações, julgue o item subsecutivo.

Se, das pessoas do grupo A, 280 são fumantes e 195 são diabéticas, então 120 pessoas desse grupo são diabéticas e não são fumantes.

---

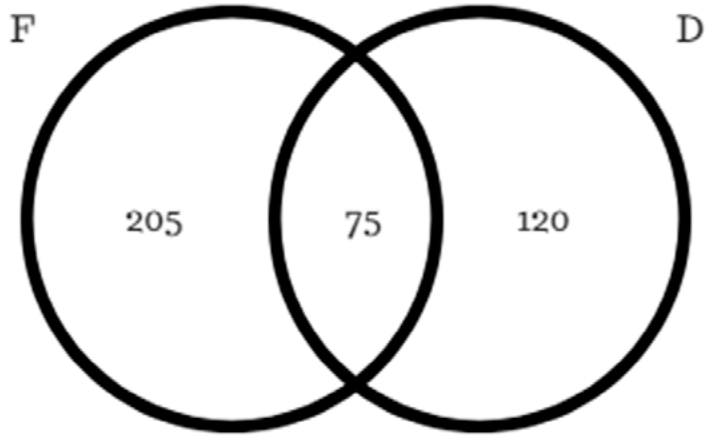
Pelas informações do enunciado, todas as pessoas do grupo A são diabéticas ou fumantes (ou ambos). Sendo assim, a união entre esses dois conjuntos resulta em exatamente 400 elementos, que é o número de elementos no conjunto A.

$$\#(D \cup F) = \#D + \#F - \#(D \cap F)$$

$$400 = 280 + 195 - \#(D \cap F)$$

$$\therefore \#(D \cap F) = 280 + 195 - 400 = 475 - 400 = 75$$

De posse desse dado, podemos montar o diagrama de Venn para os fumantes e diabéticos do grupo A.




Como são 195 diabéticos, dos quais 75 também são fumantes, temos que 120 diabéticos não são fumantes. Exatamente como dito no enunciado e como mostrado no diagrama anterior.
Perceba que o diagrama anterior mostra exatamente que há 280 fumantes, 195 diabéticos e uma intersecção de 75 pessoas.
**Certo.**

---

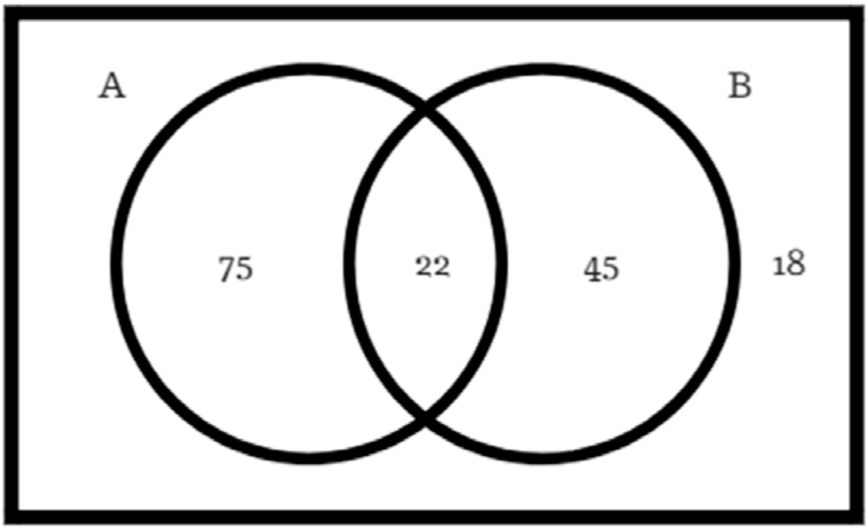
**033.** (FCC/AL-RN/2013/TÉCNICO LEGISLATIVO) Em uma pesquisa sobre o uso de duas marcas (A e B) de alvejante, o entrevistado poderia responder que usa “apenas A”, “apenas B”, “A e B”, ou ainda que “não usa A nem usa B”. Todos os entrevistados responderam corretamente à pesquisa, cujos resultados são apresentados a seguir:

- 75 usam apenas a marca A;
- 67 usam a marca B, dos quais 45 usam apenas a marca B;
- 18 não usam a marca A, nem usam a marca B.

Sorteando-se ao acaso um dos entrevistados, a probabilidade de que ele tenha respondido na pesquisa que usa ambas as marcas é de
**a)** 13,75%.
**b)** 15,75%.
**c)** 12,25%.
**d)** 14,50%.
**e)** 14,25%.

---

Note que 67 pessoas usam a marca B, das quais 45 usam apenas a marca B. Portanto, as demais 22 pessoas usam também a marca A.




Dessa maneira, o número de elementos do conjunto universo é:

$$\#U = 75 + 22 + 45 + 18 = 160$$

Para calcular a probabilidade de que a pessoa use ambas as marcas, devemos dividir a quantidade de pessoas que usam as duas marcas pelo total de pessoas que participaram da pesquisa.

$$P = \frac{22}{160} = \frac{11}{80} = 0{,}1375 = 13{,}75\%$$

**Letra a.**

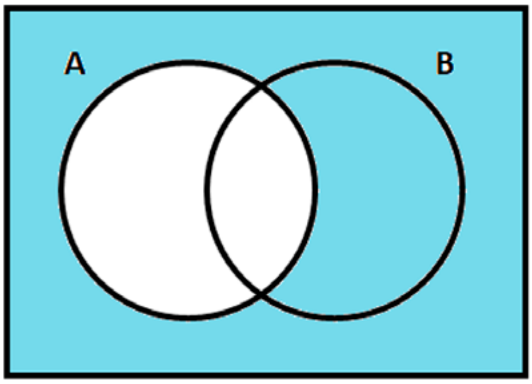
---

**034.** (CESPE/INSS/2016/TÉCNICO DO SEGURO SOCIAL) Se A, B e C forem conjuntos quaisquer tais que A, B $\subset$ C, então (C \ A) $\cap$ (A $\cup$ B) = *C* $\cap$ *B*.

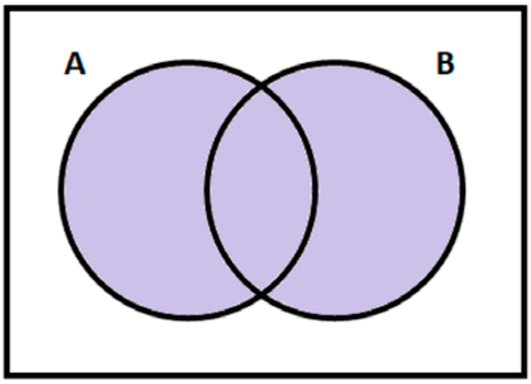
---

Por vezes, o CESPE se revela e traz questões bastante criativas. A banca pediu uma prova matemática numa questão do INSS.

Podemos visualizar de maneira simples da seguinte forma. Construiremos o diagrama de Venn para os três conjuntos A, B e C, considerando que A e B são subconjuntos de C, como informado pelo enunciado. Marcaremos em azul o conjunto C\A, na porção à esquerda da figura posterior, e em roxo o conjunto A união B, na porção à direita da figura posterior.

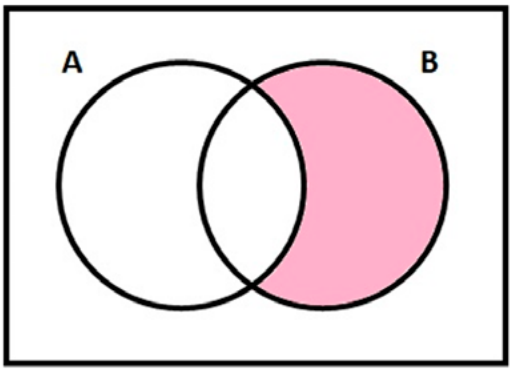



$C \backslash A$



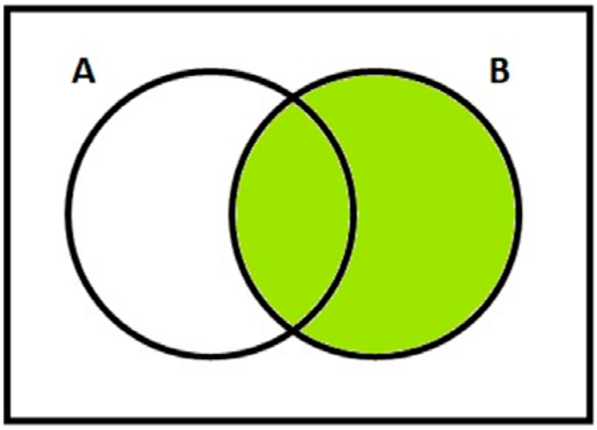

$(A \cup B)$

Como queremos a intersecção $(C \setminus A) \cap (A \cup B)$, estamos à procura das regiões que foram assinaladas duas vezes. Notamos que a única região assinalada duas vezes foi a intersecção exclusiva B e C, como mostrado na figura a seguir à direita.

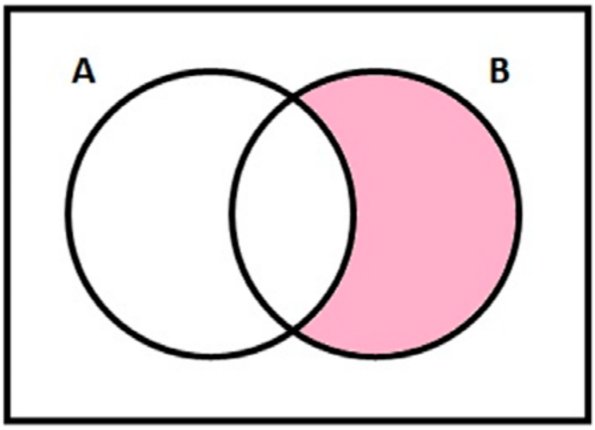



$(C \backslash \mathrm{A}) \cap (A \cup B)$

Vamos agora traçar o conjunto $C \cap B$ que também foi solicitado no enunciado e comparar com a figura obtida anteriormente.




$C \cap B$




$(C \backslash \mathrm{A}) \cap (A \cup B)$

Observe, portanto, que a intersecção $(C \setminus A) \cap (A \cup B)$ é diferente da interseção $C \cap B$.

**Errado.**

**035.** (FUNCAB/SEGEP-MA/2016/AGENTE PENITENCIÁRIO) Considere A e B dois conjuntos. Como se pode escrever o conjunto $(A \cup B)^C$

a) $A^C \cup B^C$

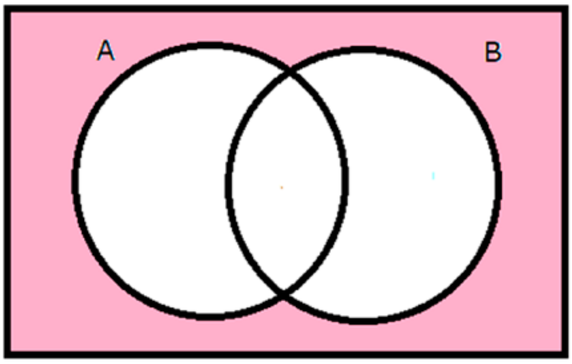
b) $A^C \cup B^C$

c) $A^C \cap B^C$

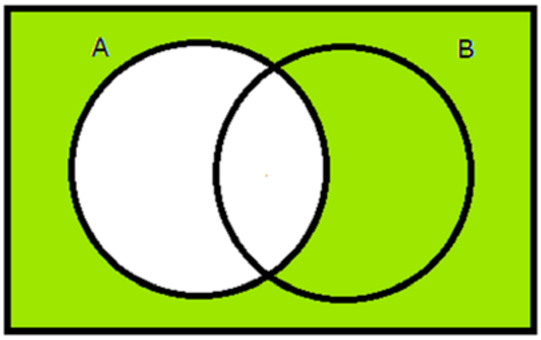
d) $A \cup B$

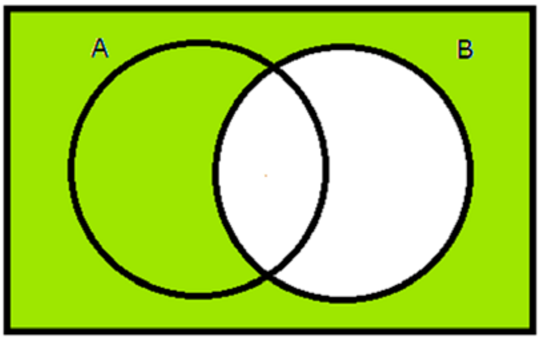
e) $A \cap B$

O complementar da união é igual à intersecção dos complementares. Vejamos.
O complementar da união de dois conjuntos é a região externa que não pertence a nenhum deles.

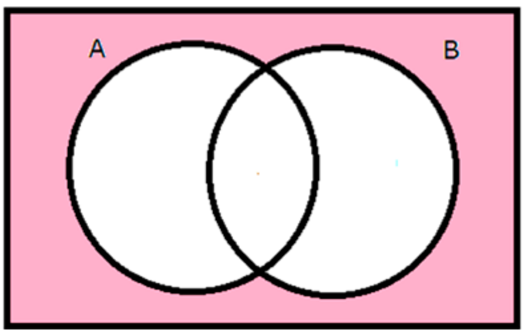



Por outro lado, vejamos os complementares de cada um dos conjuntos A e B.




A intersecção dos complementares corresponde à região que está pintada duas vezes na Figura apresentada. Essa intersecção corresponde exatamente à região rosa que é externa aos dois conjuntos vista lá no começo desta resolução.



Outra forma de resolver o problema consiste em usar a analogia dos conjuntos com os Operadores Lógicos. Nessa analogia, temos que:

| Operador de Conjuntos | Operador Lógico |
|---|---|
| União | OU |
| Intersecção | E |
| Complementar | NÃO |

Dessa forma, podemos escrever que:

$$(A \cup B)^C = \neg(A \vee B)$$

Usando a Lei de Morgan, temos:

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

Transformando novamente para conjuntos, temos:

$$\neg A \wedge \neg B = A^C \cap B^C$$

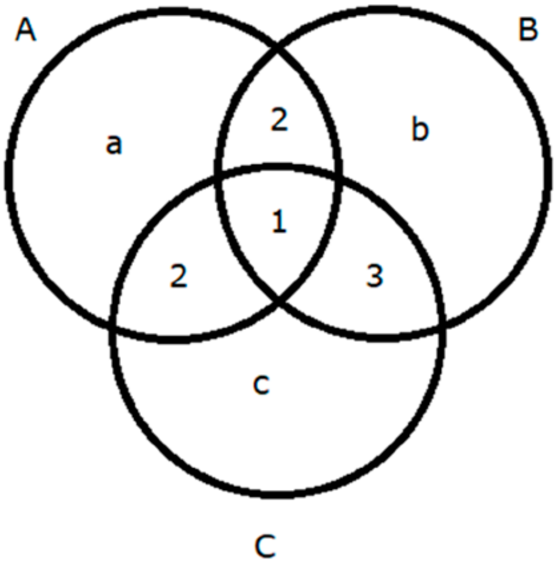
**Letra c.**

---

**036.** (VUNESP/TJ-SP/2017/ESCREVENTE) Carlos é o único atleta que tem patrocínio de 3 empresas: A, B e C. Em se tratando de atletas que recebem patrocínios de apenas 2 dessas empresas, temos: Leandro e Hamilton, das empresas A e B; Marta e Silas, das empresas A e C; e Amanda, Renata e Sérgio, das empresas B e C.
Se esses atletas fazem parte de um grupo contendo, ao todo, 18 atletas que recebem patrocínio das empresas A, B ou C, e cada empresa tem, pelo menos, 1 atleta recebendo patrocínio somente dela, então é correto afirmar que os números mínimo e máximo de atletas que a empresa B pode patrocinar são, respectivamente:
a) 6 e 12
b) 5 e 10
c) 8 e 16
d) 7 e 14
e) 4 e 8

---

Seja A, B e C o conjunto dos atletas patrocinados pelas empresas A, B e C, respectivamente.
As informações fornecidas pelo enunciado nos contam sobre o número de elementos na intersecção dos três conjuntos – 1, pois é apenas Carlos – e também das intersecções dois a dois. Tais informações estão anotadas no Diagrama de Venn a seguir.




Repare que a, b e c correspondem à quantidade de atletas exclusivos das empresas A, B e C, respectivamente.

Conforme informações do enunciado, cada empresa tem pelo menos um atleta exclusivo. Portanto, o menor valor possível para b é 1. Dessa forma, a menor quantidade possível para o número de elementos do conjunto B é:

$$\#B \geq 1 + 2 + 1 + 3 = 7$$

Por outro lado, também sabemos que o total de atletas patrocinados pelas três empresas é 18. Portanto, podemos escrever para o número de elementos da união.

$$\#(A \cup B \cup C) = a + b + c + 2 + 1 + 2 + 3 = a + b + c + 8 = 18$$
$$\therefore b = 18 - 8 - a - c = 10 - a - c$$

O maior valor possível para b ocorreria quando os valores de a e c fossem mínimos. Como dito pelo enunciado, cada empresa tem, pelo menos, um atleta exclusivo. Por isso, a e c são maiores ou iguais a 1. Dessa forma, podemos escrever:

$$b = 10 - a - c \leq 10 - 1 - 1 = 8$$

Agora, o número de elementos de B é:

$$\#B = b + 2 + 1 + 2 \leq 8 + 2 + 1 + 3 = 14$$

Dessa forma, encontramos os limites para o número de elementos de B:

$$7 \leq \#B \leq 14$$

**Letra d.**

**037.** (FGV/PREFEITURA DE CUIABÁ-MT/2015/CONTADOR) Uma empresa exportadora oferece para seus funcionários três cursos de línguas: inglês, mandarim e japonês. No setor A dessa empresa todos os funcionários estudam, pelo menos, uma língua. Entretanto ninguém estuda ao mesmo tempo mandarim e japonês.

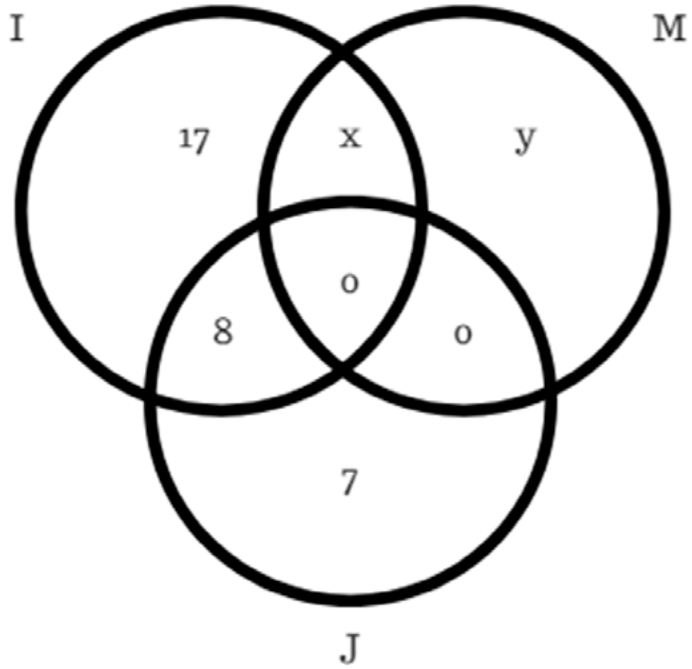
Dos funcionários do setor A, sabe-se ainda que:

- 19 estudam mandarim.
- 15 estudam japonês.
- 31 estudam inglês.
- 17 estudam apenas inglês.
- 7 estudam apenas japonês.

Assinale a opção que indica o número de funcionários do setor A que estuda apenas mandarim.

**a)** 7.
**b)** 9.
**c)** 11.
**d)** 13.
**e)** 15.

Com base nas informações fornecidas no enunciado, vamos plotar o Diagrama de Venn. É interessante observar que não há nenhum aluno nas intersecções entre mandarim e japonês, o que já elimina duas regiões do diagrama.




Note que a única intersecção que existe na língua japonesa é com a língua inglesa. Portanto, se existem 15 alunos de japonês no total, sendo 7 deles exclusivos, podemos obter que a intersecção entre japonês e inglês é de exatamente 8 alunos.

Por enquanto, as únicas incógnitas são x e y. Porém, sabemos o total de alunos que estudam inglês.

$$I = 17 + 8 + x = 31 \therefore 25 + x = 31 \therefore x = 31 - 25 = 6$$

Agora, o número de alunos que estudam mandarim.

$$M = x + y = 6 + y = 19 \therefore y = 19 - 6 = 13$$

Vamos nos lembrar que y corresponde exatamente aos alunos que estudam somente mandarim. Portanto, são 13 alunos que estudam somente essa língua.

**Letra d.**

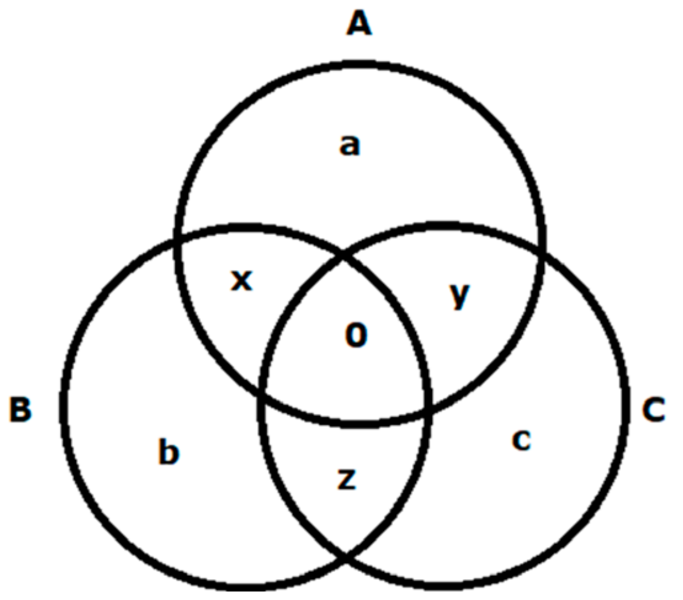
---

**038.** (VUNESP/TCE-SP/2017/AGENTE DA FISCALIZAÇÃO) Considerando os conjuntos A, B e C e suas intersecções, não existem elementos na intersecção dos 3 conjuntos. O número de elementos dos conjuntos A, B e C são respectivamente 35, 32 e 33. O total de elementos que pertencem a apenas um desses conjuntos é igual a 46. O número total de elementos desses 3 conjuntos é:

a) 54
b) 87
c) 73
d) 59
e) 64

---

A situação descrita pode ser representada pelo seguinte Diagrama de Venn.




O número de elementos que pertencem a cada um dos conjuntos A, B e C são:

$$\#\boldsymbol{A}:\quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\ =\mathbf{35}\quad (\boldsymbol{I})$$

$$\#\boldsymbol{B}:\quad b+x+z\ =32\quad (II)$$

$$\#\boldsymbol{C}:\quad c+y+z\ =33\quad (III)$$

É importante lembrar que o enunciado pediu o total de elementos dos três conjuntos, ou seja, o número de elementos da união, que é dado por:

$$\#(A\cup B\cup C)=a+b+c+x+y+z=S$$

Para obter o valor de S, o modo mais fácil é somar as equações (I), (II) e (III), que é uma sacada muito comum em questões da Vunesp.

$$\begin{array}{lll} \#\boldsymbol{A}: & \boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} & =\mathbf{35} \\ \#\boldsymbol{B}: & b+x+z & =32 \\ \#\boldsymbol{C}: & c+y+z & =33 \\ \hline + & a+b+c+2x+2y+2z & =35+32+33 \end{array}$$

$$46+2(x+y+z)=100$$

$$2(x+y+z)=100-46=54$$

$$x+y+z=\frac{54}{2}=27$$

Agora, podemos calcular a soma S:

$$S=a+b+c+x+y+z=46+27=73$$

**Letra c.**

---

**039.** (CESPE/PREFEITURA DE SÃO PAULO-SP/2016/ASSISTENTE DE GESTÃO DE POLÍTICAS PÚBLICAS) Determinado departamento da PMSP recebeu recentemente 120 novos assistentes administrativos. Sabe-se que 70 deles são especialistas na área de gestão de recursos humanos (RH); 50, na área de produção de material de divulgação (MD); e 60, na de administração financeira (AF). Observou-se também que nenhum deles é especialista em mais de duas dessas três atividades; exatamente 25 deles são especialistas tanto em RH quanto em AF e nenhum deles é especialista tanto em AF quanto em MD. Além disso, verificou-se que nenhum deles é especialista em qualquer outra área além dessas três citadas.

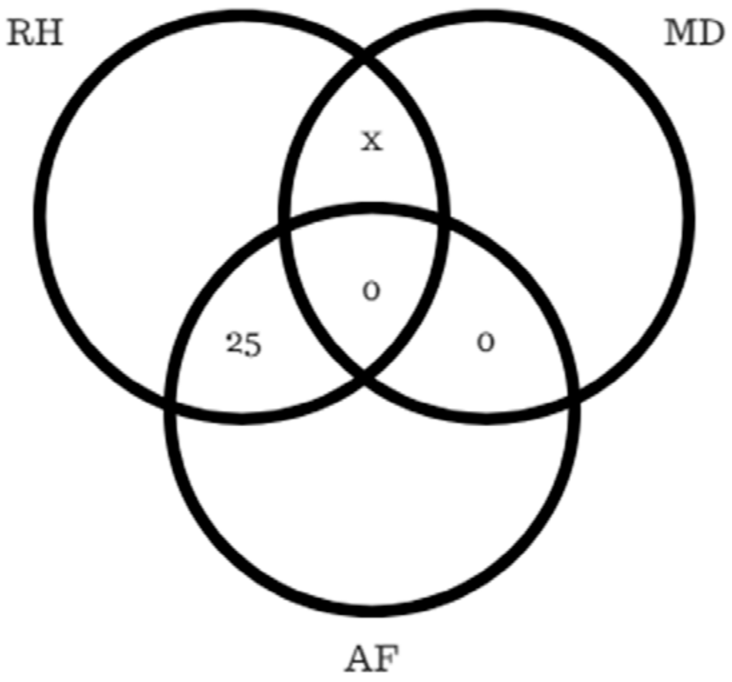
Com base nessas informações, é correto afirmar que a quantidade de novos assistentes administrativos que são especialistas tanto na área de recursos humanos (RH) quanto na área de produção de material de divulgação (MD) é igual a:

a) 5
b) 15
c) 25
d) 35
e) 45

Basta aplicar diretamente a expressão da união de três conjuntos:

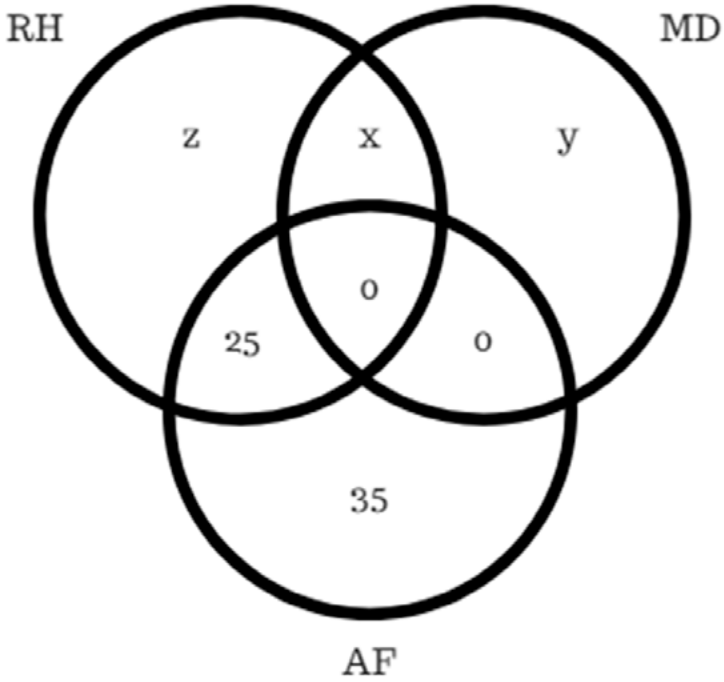
$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$$
$$120 = 70 + 50 + 60 - 25 - 0 - \#(B \cap C) + 0$$
$$120 = 180 - 25 - \#(B \cap C)$$
$$\#(B \cap C) = 180 - 120 - 25 = 180 - 145 = 35$$

Outra maneira de resolver o problema é completando o Diagrama de Venn. As informações dadas no enunciado nos permitem escrever que:



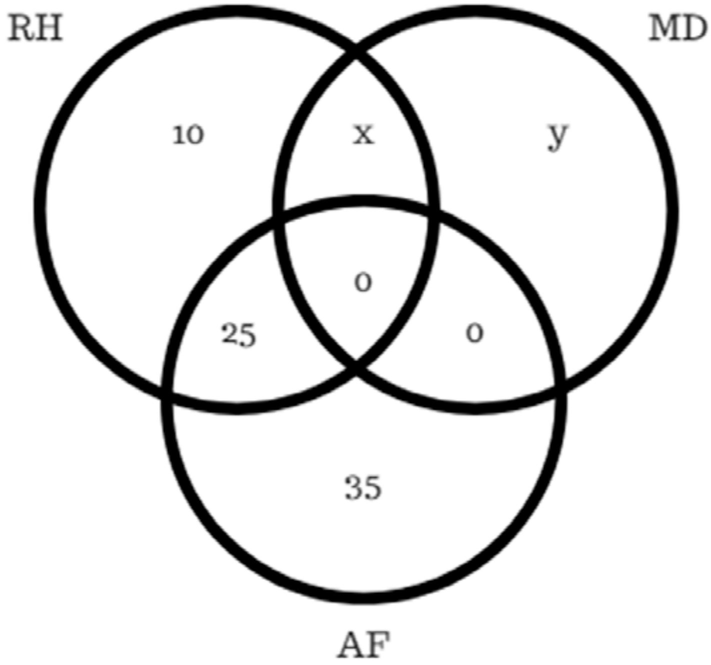

Observe que já podemos calcular quantas pessoas são especialistas exclusivamente em AF. Como são 60 especialistas no total, sendo que 25 deles já apareceram no diagrama. Portanto, 35 pertencem à região de exclusividade.

Com base nisso, vamos completar o diagrama de Venn.




Sabemos que o número de especialistas em MD é 50. Portanto, x + y = 50. Dessa forma, lembrando-nos que o total de especialistas é 120, temos:

$$x + y + z + 25 + 35 = 120$$
$$50 + z + 25 + 35 = 120$$
$$z + 110 = 120 \therefore z = 120 - 110 = 10$$



Até o momento, perceba que temos 35 elementos do RH já escritos no diagrama, faltando apenas x. Como o total de elementos no RH é 70, temos que:

$$10 + 25 + 0 + x = 70 \therefore x = 70 - 10 - 25 = 35$$

**Letra d.**

---

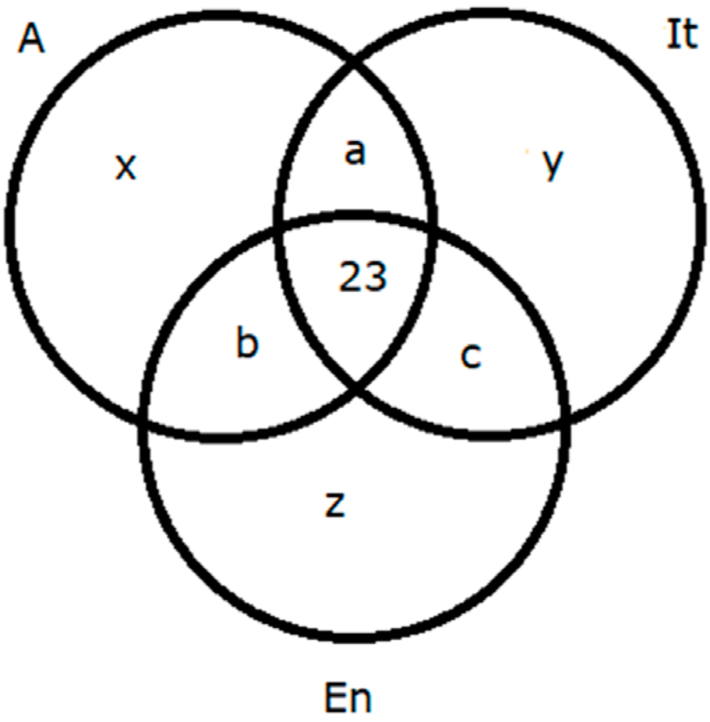
**040.** (VUNESP/MPE-SP/2016/OFICIAL DE PROMOTORIA I) Um curso de idiomas tem 59 alunos inscritos no curso de alemão, 63 inscritos no curso de italiano e 214 no curso de inglês. Desses alunos, 23 cursam as três línguas, e 43 alunos estudam apenas um dos idiomas. O número de alunos que estão cursando exatamente dois idiomas dentre esses três é igual a:

a) 103
b) 106
c) 100
d) 109
e) 112

---

Questão interessante misturando conjuntos e equações.

Reuniremos no Diagrama de Venn as informações fornecidas pelo enunciado. Sabemos exatamente apenas que 23 elementos pertencem à intersecção tripla.




Além disso, foi fornecido que 43 alunos estudam apenas um idioma. As regiões do diagrama que correspondem a essa situação são x, y e z.

$$x + y + z = 43$$

Sabemos também o número de alunos inscritos em cada um dos idiomas.

$$Alemão: x + a + b + 23 = 59 \therefore x + a + b = 59 - 23 = 36$$

$$Italiano: y + a + c + 23 = 63 \therefore y + a + c = 63 - 23 = 40$$

$$Inglês: z + b + c + 23 = 214 \therefore z + b + c = 214 - 23 = 191$$

Note que a questão pediu o número de alunos que estudam exatamente dois idiomas. Correspondem às regiões a, b e c. Dessa maneira, queremos a soma a + b + c. Chamaremos essa soma de S.

Para descobrir essa soma, podemos somar as três equações que descrevem o número de alunos em cada curso.

$$\begin{array}{cccccccc} & \boldsymbol{x} & + & \boldsymbol{a} & + & \boldsymbol{b} & = & \mathbf{36} \\ & y & + & a & + & c & = & 40 \\ + & z & + & b & + & c & = & 191 \\ \hline & x+y+z & + & \multicolumn{3}{c}{2a+2b+2c} & = & 36+40+191 \end{array}$$

Observe que já temos a soma x + y + z = 43. Dessa maneira, podemos escrever:

$$x + y + z + 2S = 267$$

$$43 + 2S = 267 \therefore 2S = 267 - 43 = 224 \therefore S = 112$$

**Letra e.**

---

**041.** (FGV/SEPOG-RO/2017/ANALISTA EM TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO) Cada um dos 40 funcionários de uma empresa tem pelo menos uma das habilidades A, B ou C. Nenhum deles tem as três habilidades. 21 deles não têm a habilidade A, 20 deles não têm a habilidade B e 24 deles não têm a habilidade C.

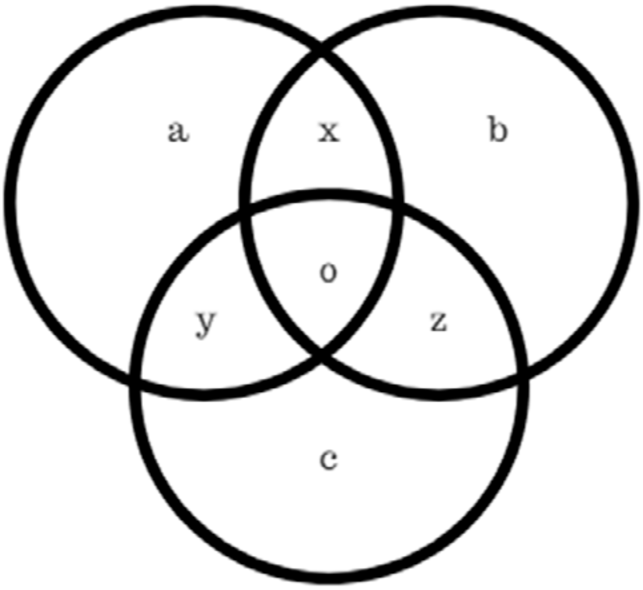
O número de funcionários dessa empresa que têm duas das habilidades A, B ou C é:

a) 11.
b) 13.
c) 15.
d) 17.
e) 19

---

Interessante essa questão por relevar quantos dos funcionários não possuem as habilidades A, B e C.

Montemos o Diagrama de Venn. Por enquanto, a única região em que temos certeza que não há nenhum elemento é a intersecção tripla.




Sabemos que o conjunto universo é composto por 40 funcionários. Temos, portanto:

$$a + b + c + x + y + z = 40\ (I)$$

Agora, vamos anotar os funcionários que não possuem a habilidade A:

$$b + z + c = 21\ (II)$$

Os funcionários que não possuem a habilidade B são:

$$a + y + c = 20\ (III)$$

Os funcionários que não possuem a habilidade C são:

$$a + x + b = 24\ (IV)$$

O enunciado perguntou quantos funcionários possuem exatamente duas das habilidades citadas. Esses são os funcionários das regiões x, y e z. Portanto, desejamos saber a soma S = x + y + z.

Podemos, portanto, somar as equações II, III e IV.

$$\begin{array}{lll} & \boldsymbol{b + z + c} & \boldsymbol{= 21} \\ & a + y + c & = 20 \\ + & a + x + b & = 24 \\ \hline & 2a + 2b + 2c + x + y + z & = 21 + 20 + 24 \end{array}$$

Temos, então que:

$$2a + 2b + 2c + x + y + z = 65$$

$$a + b + c + x + y + z = 40$$

Podemos subtrair as duas equações:

$$a + b + c = 25$$

Agora, basta usar a equação (I):

$$a + b + c + x + y + z = 40$$

$$25 + S = 40 \therefore S = 40 - 25 = 15$$

**Letra c.**

---

**042.** (FCC/DPE-RR/2015/ADMINISTRADOR) Analisando a carteira de vacinação de 112 crianças, um posto de saúde verificou que 74 receberam a vacina A, 48 receberam a vacina B, e 25 não foram vacinadas. Do total das 112 crianças, receberam as duas vacinas (A e B) apenas:

**a)** 32,75%
**b)** 28,75%
**c)** 31,25%
**d)** 34,25%
**e)** 29,75%

---

O conjunto universo é formado pelas 112 crianças. Dessas, 25 não foram vacinadas. Portanto, as outras 87 (112 – 25 = 87) receberam pelo menos uma das duas vacinas (A ou B).
Sendo assim, podemos calcular o número de elementos da união de dois conjuntos.

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

$$87 = 74 + 48 - \#(A \cap B)$$

$$87 = 122 - \#(A \cap B) \therefore \#(A \cap B) = 122 - 87 = 35$$

Sendo assim, o percentual de crianças que receberam as duas vacinas é:

$$\%Vacinas = \frac{35}{112} = \frac{5}{16} = 0{,}3125 = 31{,}25\%$$

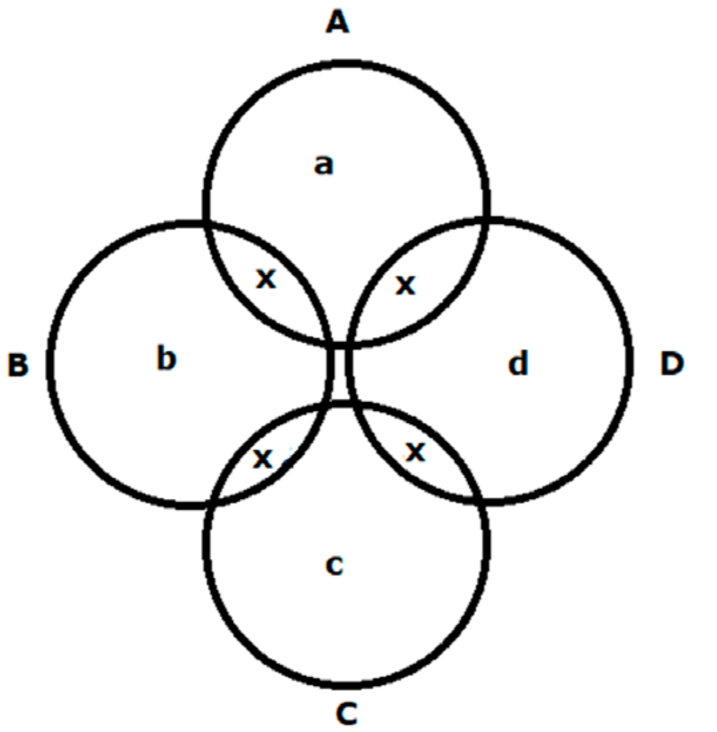
**Letra c.**

---

**043.** (VUNESP/TCE-SP/2017/AGENTE DA FISCALIZAÇÃO) Considerando os conjuntos A, B, C e D e suas intersecções, não existem elementos nas intersecções de 3 ou 4 desses conjuntos. Nas intersecções de exatamente 2 desses conjuntos, existe o mesmo número de elementos em A ∩ B, A ∩ D, B ∩ C e C ∩ D; porém, não existem elementos em A ∩ C e nem em B ∩ D. O número de elementos de cada conjunto A, B, C e D é, respectivamente, 20, 16, 19 e 17. O total de elementos que pertencem a apenas um desses conjuntos é igual a 32. O número de elementos que pertencem apenas ao conjunto A excede o número de elementos que pertencem ao conjunto D em

a) 3
b) 1
c) 2
d) 4
e) 5

A situação descrita pode ser representada pelo seguinte Diagrama de Venn.




Segundo dados do enunciado, o número de elementos pertencentes a cada um desses conjuntos A, B, C e D é:

$$\#\boldsymbol{A}:\quad \boldsymbol{a+x+x} \quad \boldsymbol{=20} \quad (\boldsymbol{I})$$

$$\#\boldsymbol{B}:\quad b+x+x \quad =16 \quad (II)$$

$$\#\boldsymbol{C}:\quad c+x+x \quad =19 \quad (III)$$

$$\#\boldsymbol{D}:\quad d+x+x \quad =17 \quad (IV)$$

Os elementos que pertencem a apenas um dos conjuntos são os elementos que não pertencem a nenhuma das intersecções fornecidas. Logo, são os elementos a, b, c e d.

$$a+b+c+d=32$$

Uma dica boa para calcular resolver esse tipo de sistema é somar todas as equações:

$$
\begin{array}{llr}
\#\boldsymbol{A}: & \boldsymbol{a+2x} & \boldsymbol{=20} \\
\#\boldsymbol{B}: & b+2x & =16 \\
\#\boldsymbol{C}: & c+2x & =19 \\
\#\boldsymbol{D}: & d+2x & =17 \\
\hline
+ & a+b+c+d+8x & =20+16+19+17
\end{array}
$$

$$32+8x=72$$

$$8x=72-32=40$$

$$x=\frac{40}{8}=5$$

Agora, podemos calcular o

$$a+2x=20 \therefore a+2.5=20 \therefore a=20-10=10$$

Portanto, existem apenas 10 elementos que pertencem apenas ao conjunto A, de modo que esse número é menor que o número de elementos que pertencem ao conjunto D.

Acredito, portanto, que houve um erro no enunciado. A questão provavelmente queria saber em quanto o número de elementos pertencentes exclusivamente a A excedia o número de elementos pertencentes exclusivamente a D. Isso sim pode ser calculado.

$$d+2x=17 \therefore d+2.5=17 \therefore d=17-10=7$$

$$a-d=10-7=3$$

Acredito que a intenção original da questão era que o gabarito fosse a letra A (3), porém, do jeito que foi perguntado, a questão está nula. É uma pena, pois a questão era realmente muito boa.
**Anulada.**

---

**044.** (ESAF/ANEEL/2004/TÉCNICO ADMINISTRATIVO) Em grupo de 30 crianças, 16 têm olhos azuis e 20 estudam canto. O número de crianças deste grupo que têm olhos azuis e estudam canto é:

a) Exatamente 16
b) No mínimo 6
c) Exatamente 10
d) No máximo 6
e) Exatamente 6

Tem-se um conjunto universo de 30 crianças e deseja-se saber a intersecção entre as crianças com olhos azuis (A) e as que estudam canto (C).

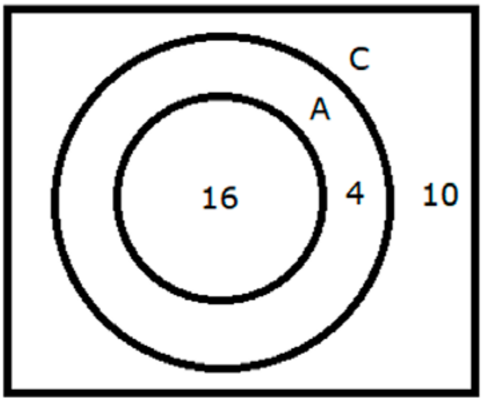
A intersecção é máxima quando um dos elementos é subconjunto do outro e é mínima quando a união for máxima. Nesse caso, o máximo da união é o conjunto universo:

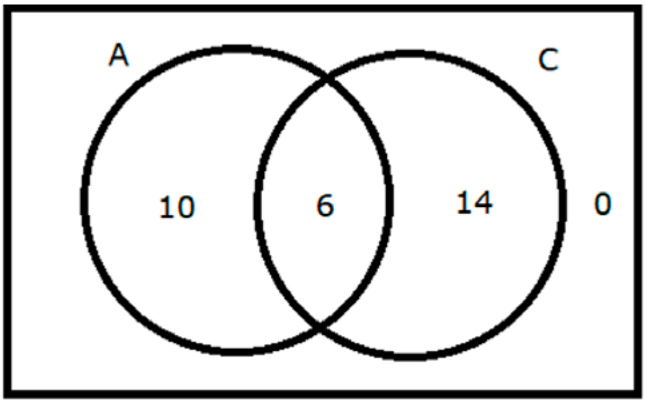
$$\#A + \#C - \#(A \cap C) = \#(A \cup C)$$

$$16 + 20 - \#(A \cap C) \leq 30$$

$$\therefore \#(A \cap C) \geq 16 + 20 - 30 = 36 - 30 = 6$$

Temos as seguintes situações extremo representadas.




Sendo assim, a intersecção é no mínimo 6 e no máximo 16.

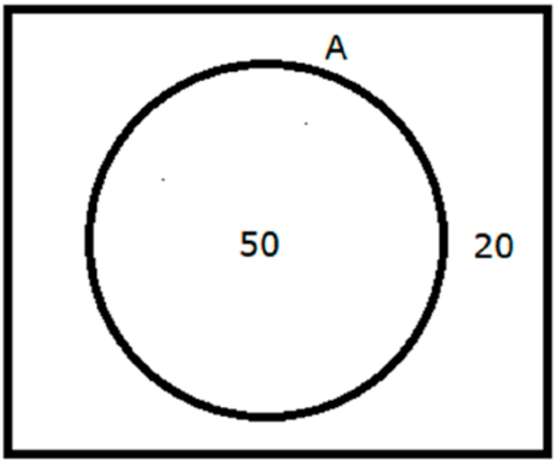
**Letra b.**

**045.** (FGV/CONDER/2013/JORNALISTA) Em uma pesquisa de mercado para o lançamento de uma nova marca de sucos, setenta pessoas foram entrevistadas e deviam responder se gostavam dos sabores graviola e açaí. Trinta pessoas responderam que gostavam do sabor graviola e cinquenta pessoas responderam que gostavam do sabor açaí. Sobre as setenta pessoas entrevistadas, é correto concluir que:

a) no máximo vinte não gostam de graviola nem de açaí.
b) no mínimo dez não gostam de graviola nem de açaí.
c) no máximo dez gostam dos dois sabores.
d) no mínimo trinta gostam dos dois sabores.
e) no máximo vinte gostam dos dois sabores.

Sejam G o conjunto das pessoas que gostam de graviola e A o conjunto das pessoas que gostam de açaí. Temos que as pessoas que gostam de graviola ou de açaí correspondem ao conjunto união.

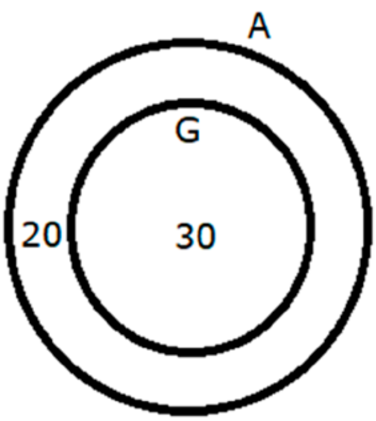
Pesquisando as alternativas essa questão tem uma solução muito rápida. Já sabemos que 50 pessoas certamente gostam de açaí. E o conjunto universo é composto por 70 pessoas.
Dessa forma, no máximo vinte delas podem não gostar nem de açaí nem de graviola. Vejamos graficamente.




Ao introduzir as pessoas que gostam de graviola, podemos reduzir ainda mais o conjunto das pessoas que não gostam de nenhum dos dois sabores. Por isso, é importante a expressão "no máximo."
Porém, é interessante sabermos também uma forma de resolver completamente esse problema. Estudar o problema sem depender das alternativas. Isso trará algumas lições importantes para o estudo de conjuntos.
O número de elementos do conjunto união é expresso por:

$$\#(A \cup G) = \#A + \#G - \#(A \cap G)$$

Para saber o número de pessoas que gostam de algum dos dois sabores da pesquisa, precisamos conhecer a intersecção. Precisamos saber qual a maior quantidade possível de elementos e a menor.
A intersecção será máxima quando um dos conjuntos for contido no outro.



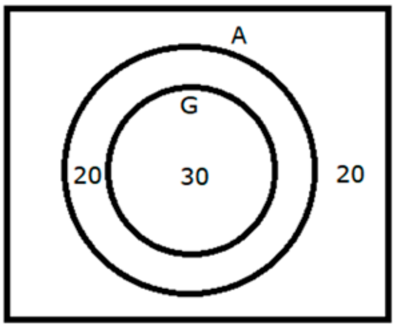

Nesse caso, tem-se que:

$$\#(A \cap G) \leq \ 30$$

A união corresponderá exatamente ao conjunto das pessoas que gostam de açaí (A). Nesse caso, temos:

$$\#(A \cup G) \geq 50$$

Podemos verificar também quantas pessoas não gostam de nenhum dos sabores. Para isso, basta lembrar que o conjunto universo é composto por 70 pessoas.




Dessa maneira, as pessoas externas ao conjunto $A \cup G$ somam 20 pessoas, no máximo. Matematicamente, podemos escrever que:

$$\#(A \cup G) + \#(A \cup G)^C = 70$$
$$\#(A \cup G)^C = 70 - \#(A \cup G)$$

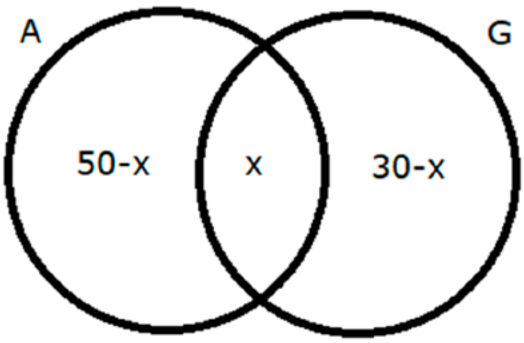
Já conhecemos o máximo valor possível para a quantidade de elementos da união dos dois conjuntos. Portanto, temos:

$$\therefore \#(A \cup G)^C \leq 70 - 20 = 50$$

Por outro lado, a menor quantidade de elementos ocorre quando a união dos dois conjuntos é a máxima possível, no caso, igual ao conjunto universo de 70 pessoas. Nesse caso, podemos escrever:

$$\#(A \cup G) = \#A + \#G - \#(A \cap G)$$
$$70 = 50 + 30 - \#(A \cap G)$$
$$70 = 80 - \#(A \cap G)$$
$$\therefore \#(A \cap G) = 80 - 70 = 10$$

A intersecção também poderia ser representada graficamente:



$$\#(A \cup G) = (50 - x) + x + (30 - x) = 80 - x$$

$$70 = 80 - x \therefore x = 80 - 70 = 10$$

Nesse caso, podemos dizer que nenhuma pessoa está no conjunto das pessoas que não gostam de nem açaí nem de graviola. Em outras palavras:

$$\#(A \cup G) \leq 70 \therefore \#(A \cup G)^C \geq 0$$

Com base em tudo o que mostramos aqui, podemos obter os valores mínimos e máximos para a intersecção $(A \cup G)$ que corresponde ao conjuntos de pessoas que gostam de açaí e de graviola ao mesmo tempo.

$$50 \leq \#(A \cup G) \leq 70$$

Também podemos obter os valores mínimos e máximos do número de elementos possíveis para o conjunto complementar, que corresponde às pessoas que não gostam nem de açaí nem de graviola.

$$0 \leq \#(A \cup G)^C \leq 20$$

Portanto, no máximo vinte pessoas não gostam de nenhum dos dois sabores.
**Letra a.**

---

**046.** (FUNIVERSA/IF-AP/2016/AUXILIAR EM ADMINISTRAÇÃO) Considere que, em um concurso público, os cargos de Técnico em Agropecuária (de nível médio) e de Operador de Máquinas Agrícolas (de nível fundamental) tenham tido, juntos, 140 candidatos inscritos. Sabendo-se que 60 desses candidatos se inscreveram para o cargo de Operador de Máquinas Agrícolas e 40 se inscreveram para os dois cargos, a quantidade de candidatos que se inscreveu para o cargo de Técnico em Agropecuária foi

a) inferior a 100.
b) superior a 100 e inferior a 108.
c) superior a 108 e inferior a 116.
d) superior a 116 e inferior a 124.
e) superior a 124.

---

Sejam O o conjunto de pessoas que se inscreveram para Operador de Máquinas e T o conjunto de pessoas que se inscreveram para Técnico em Agropecuária. A união entre os conjuntos O e T representa o total de candidatos inscritos no concurso.

$$\#(O \cup T) = \#O + \#T - \#(O \cap T)$$

$$140 = 60 + \#T - 40 \therefore \#T = 140 - 20 = 120$$

**Letra d.**

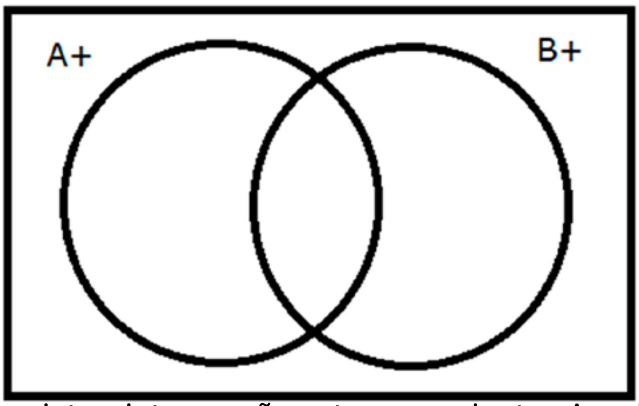
---

**047.** (FGV/FUNDAÇÃO PRÓ SANGUE/2013/ADVOGADO) Os dois mais importantes sistemas de grupos sanguíneos dos humanos são os sistemas ABO e Rh.
No sistema de grupos sanguíneos ABO, os tipos sanguíneos são identificados pela presença ou ausência dos antígenos A e B. Assim, o grupo sanguíneo do tipo A tem unicamente a presença do antígeno A e o grupo sanguíneo do tipo B tem unicamente a presença do antígeno B. O grupo de tipo AB tem a presença simultânea dos dois antígenos e o grupo de tipo O não tem a presença de qualquer dos dois antígenos.
No sistema de grupos sanguíneos Rh, os tipos sanguíneos são identificados pela presença ou ausência do fator Rh. O grupo que tem a presença do fator Rh é chamado de Rh+ (positivo) e o que não tem a presença do fator Rh é chamado de Rh- (negativo). Assim, por exemplo, o grupo sanguíneo identificado por A+ é aquele que tem a presença do antígeno A, ausência do antígeno B e presença do fator Rh.
Em um conjunto de 100 pessoas constatou-se que:

- 47 têm sangue do tipo O;
- 40 têm a presença do antígeno A e também do fator Rh;
- 9 têm a presença do antígeno B e também do fator Rh;
- 85 têm a presença do fator Rh.

A quantidade de pessoas desse conjunto com grupo sanguíneo do tipo O - (O negativo) é:
a) No mínimo dois.
b) No máximo quatro.
c) No mínimo sete.
d) No máximo oito.
e) No mínimo onze.

Uma questão bastante complexa. É curioso que tenha sido cobrada para o cargo de advogado. Examinemos, em primeiro lugar, o conjunto das pessoas que possuem o fator Rh. Esse conjunto universo tem 85 pessoas.




É importante reparar que existe a intersecção entre os conjuntos A+ e B+ que corresponderiam às pessoas de sangue AB+.
Podemos escrever que a união entre os conjuntos A+ e B+ é dada por:

$$\#(A^+ \cup B^+) = \#A^+ + \#B^+ - \#(A^+ \cap B^+)$$

Já vimos que o valor mínimo da união de dois conjuntos ocorre quando um dos conjuntos está contido no outro.

Já o valor máximo ocorre quando a união deles é igual ao conjunto universo, no caso, 85, ou na soma dos elementos de cada conjunto, no caso, 49. Devemos escolher o menor valor. Portanto, nesse caso, o maior valor possível para a união dos dois conjuntos será 49 elementos.

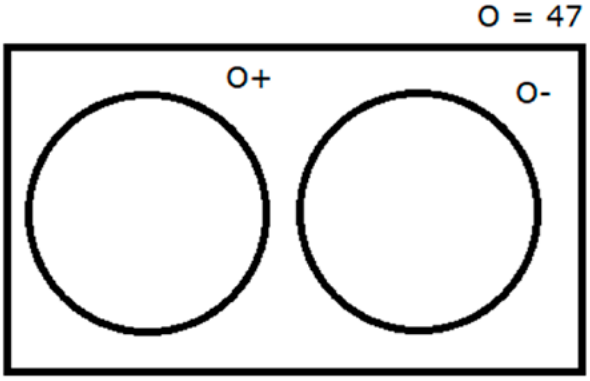
$$40 \leq \#(A^+ \cup B^+) \leq 49$$

Dessa forma, podemos obter os indivíduos que possuem sangue O+ como o complementar dessa união, pois eles não possuem nenhum dos antígenos.

$$85 - 49 \leq \#O^+ \leq 85 - 40$$

$$\therefore 36 \leq \#O^+ \leq 45$$

Sabemos que 47 pessoas têm sangue O. Além disso, temos que os conjuntos $O^+$ e $O^-$ são disjuntos – não é possível que uma pessoa tenha fator Rh e não tenha fator Rh ao mesmo tempo.




Dessa maneira, temos que o número de elementos da união dos conjuntos $O^+$ e $O^-$ é igual à soma dos elementos entre eles. Portanto, podemos escrever que:

$$36 \leq \#O^+ \leq 45$$

$$47 - 45 \leq \#O^+ \leq 47 - 36$$

$$\therefore 2 \leq \#O^+ \leq 11$$

Portanto, no mínimo duas e no máximo onze pessoas possuem tipo sanguíneo O+.

**Letra a.**

---

**048.** (FCC/SEFAZ-RJ/2014/AUDITOR-FISCAL DA RECEITA ESTADUAL) Em uma grande empresa, 50% dos empregados são assinantes da revista X, 40% são assinantes da revista Y e 60% são assinantes da revista Z. Sabe-se que 20% dos empregados assinam as revistas X e Y, 30% assinam as revistas X e Z, 20% assinam as revistas Y e Z e 10% não assinam nenhuma das revistas. Considerando que existam somente as revistas X, Y e Z, obtém-se que a porcentagem dos empregados que assinam mais que uma revista é igual a:

a) 80%
b) 40%
c) 60%
d) 50%
e) 70%

---

Foram dados:

$$\#X = 50\%, \#Y = 40\%, \#Z = 60\%$$

$$\#(X \cap Y) = 20\%, \#(X \cap Z) = 30\%, \#(Y \cap Z) = 20\%$$

Além disso, sabemos que 10% das pessoas não assinam nenhuma das revistas. Portanto, a união entre os três conjuntos é de 90% das pessoas.

$$\#(X \cup Y \cup Z) = 90\%$$

O número de elementos da união tripla é dado por:

$$\#(X \cup Y \cup Z = \#X + \#Y + \#Z - \#(X \cap Y) - \#(X \cap Z) - \#(Y \cap Z) + \#(X \cap Y \cap Z)$$

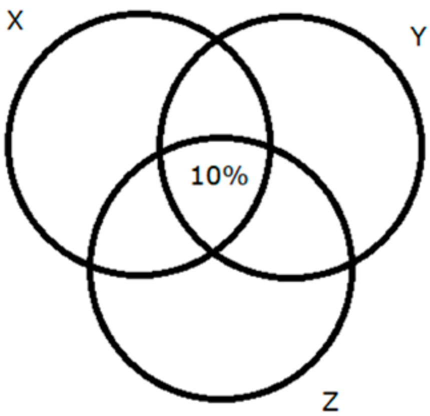
$$90\% = 50\% + 40\% + 60\% - 20\% - 30\% - 20\% + \#(X \cap Y \cap Z)$$

$$90\% = 150\% - 70\% + \#(X \cap Y \cap Z)$$

$$90\% = 80\% + \#(X \cap Y \cap Z)$$

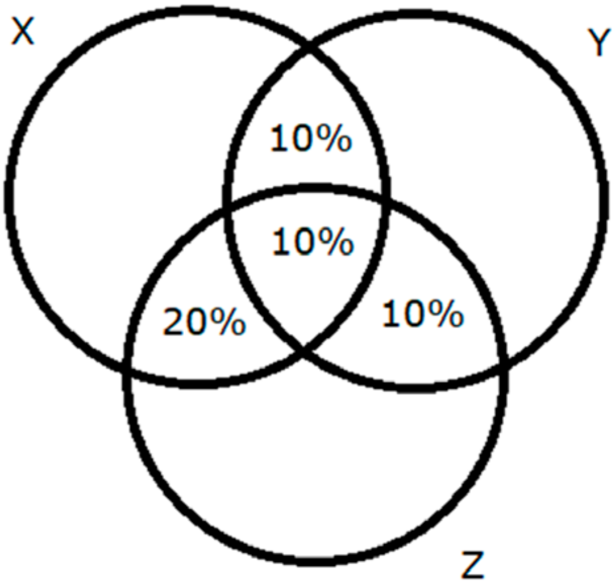
$$\therefore \#(X \cap Y \cap Z) = 90\% - 80\% = 10\%$$

De posse da quantidade de funcionários que assinam as três revistas, podemos começar a desenhar o Diagrama de Venn associado.

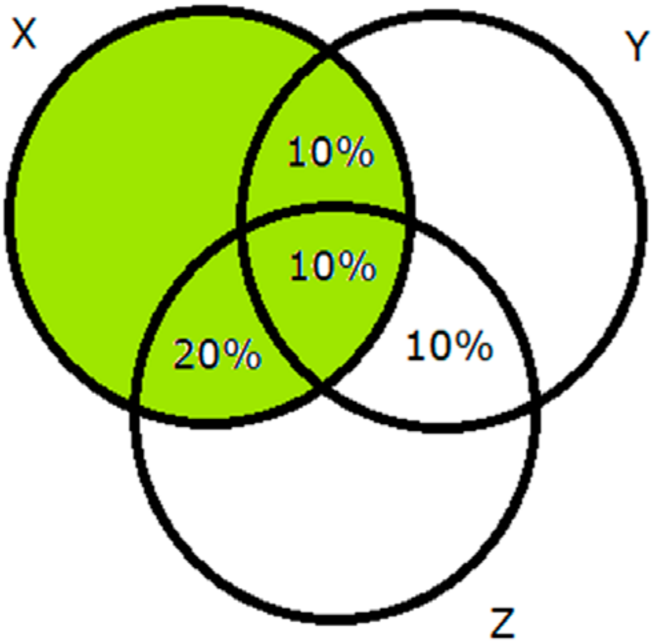


Sabemos também as intersecções duplas, então podemos completar. Lembremos que:

$$\#(X \cap Y) = 20\%, \#(X \cap Z) = 30\%, \#(Y \cap Z) = 20\%$$




Observe que já podemos responder à pergunta do enunciado com base nesse diagrama. O número de empregados que assinam mais de uma revista é: 10%+20%+10%+10%=50%.
Porém, por questões didáticas, continuaremos o problema para descobrir quantos empregados assinam isoladamente as revistas X, Y e Z, respectivamente.
Sabemos que 50% dos empregados assinam a revista X. No diagrama, já estão representados 40%. Pintaremos o conjunto X para facilitar a visualização.




Dessa maneira, as pessoas que assinam exclusivamente X é:

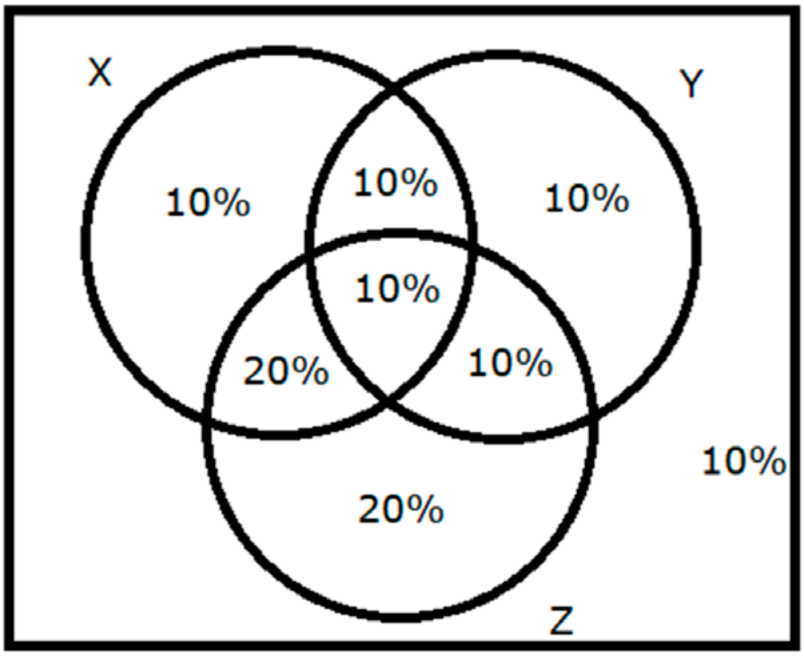
$$x + 20\% + 10\% + 10\% = 50\% \therefore x = 50\% - 40\% = 10\%$$

Também podemos calcular os empregados que assinam somente Y e somente Z:

$$y + 10\% + 10\% + 10\% = 40\% \therefore y = 40\% - 30\% = 10\%$$

$$z + 20\% + 10\% + 10\% = 60\% \therefore z = 60\% - 40\% = 20\%$$

Sendo assim, temos o Diagrama de Venn completo para a situação.




Perceba que o somatório de todas as regiões é de 100% dos funcionários da empresa.
**Letra d.**

---

**049.** (VUNESP/MPE-SP/2016/ANALISTA TÉCNICO CIENTÍFICO) Em um grupo de pessoas, nenhuma delas tem menos que 11 anos, nem mais do que 59 anos. Além disso, nenhuma delas tem uma idade que é um número múltiplo de 10. São 31 dessas pessoas com idades entre 10 e 40 anos. São 27 dessas pessoas com idades entre 20 e 50 anos. São 26 dessas pessoas com idades entre 30 e 60 anos. São 9 dessas pessoas com idades entre 30 e 40 anos. O número de pessoas desse grupo cujas idades são entre 10 e 20 anos ou entre 50 e 60 anos é

**a)** 19.
**b)** 20.
**c)** 21.
**d)** 22.
**e)** 23.

---

Vamos dividir as pessoas em grupos.

A: pessoas entre 10 e 20 anos

B: pessoas entre 20 e 30 anos

C: pessoas entre 30 e 40 anos

D: pessoas entre 40 e 50 anos

E: pessoas entre 50 e 60 anos

O dado de que nenhuma pessoa tem uma idade múltipla de 10 é importante, pois garante que não há intersecções entre os conjuntos anteriores. Temos que:

$$A + B + C = 31$$
$$B + C + D = 27$$
$$C + D + E = 26$$
$$C = 9$$

O problema nos pediu a soma A + E. Vamos substituir o valor de C = 9 fornecido nas equações anteriores.

$$A + B + 9 = 31 \therefore A + B = 22$$
$$B + 9 + D = 27 \therefore B + D = 18$$
$$9 + D + E = 26 \therefore D + E = 17$$

Podemos somar a primeira e a terceira equações, pois fazemos aparecer a soma A + E.

$$\begin{array}{lll} & \boldsymbol{A + B} & \boldsymbol{= 22} \\ + & D + E & = 17 \\ \hline & A + B + D + E & = 22 + 17 = 39 \end{array}$$

Agora, basta trabalhar com a equação a que chegamos.

$$A + B + D + E = 39$$
$$A + (18) + E = 39$$
$$\therefore A + E = 39 - 18 = 21$$

**Letra c.**

---

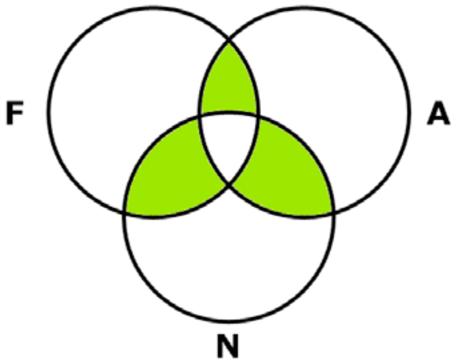
**050.** (FCC/CÂMARA DE FORTALEZA-CE/2019/CONSULTOR TÉCNICO JURÍDICO) Os 72 alunos de uma escola devem, nas aulas de educação física, participar de treinos em uma, duas ou três modalidades esportivas, entre futebol, atletismo e natação. Sabendo que 33 alunos treinam futebol, 34 treinam atletismo e 26 treinam natação, e que 4 alunos treinam as três modalidades, o número de alunos que treinam exatamente duas modalidades é:

a) 27

b) 16

**c)** 19
**d)** 22
**e)** 13

Observe que o enunciado pediu a seguinte região do Diagrama de Venn:




De acordo com os dados no enunciado, podemos escrever a equação para a união dos três conjuntos F (futebol), A (atletismo) e N (natação).

$$\#(F \cup A \cup N) = \#F + \#A + \#N - \#(F \cap A) - \#(F \cap N) - \#(A \cap N) + \#(F \cap A \cap N)$$

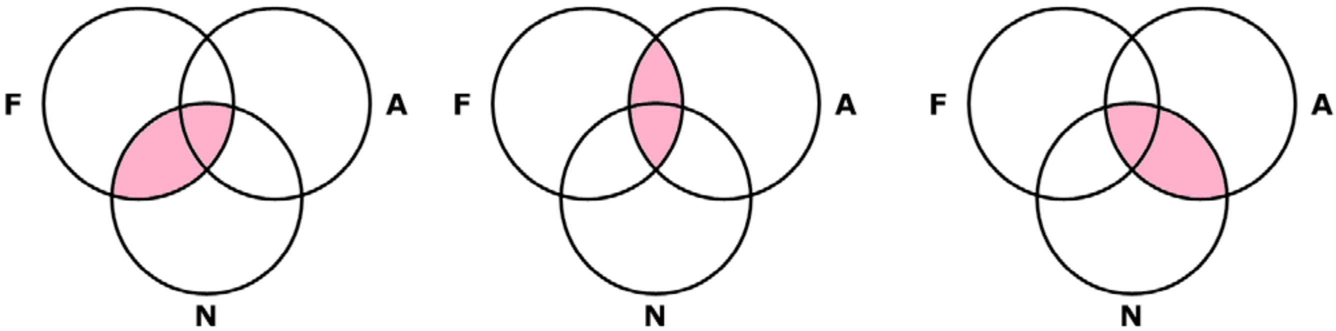
Agora, vamos substituir os dados fornecidos no enunciado.

$$72 = 33 + 34 + 26 - \#(F \cap A) - \#(F \cap N) - \#(A \cap N) + 4$$

Podemos calcular a soma das intersecções duplas.

$$\therefore \#(F \cap A) + \#(F \cap N) + \#(A \cap N) = 33 + 34 + 26 + 4 - 72 = 25$$

Mas, note que isso não corresponde ao que foi pedido no enunciado. Na verdade, essa soma correspondente às seguintes regiões:




Dessa forma, na soma calculada, foi contada 3 vezes a intersecção tripla. Porém, essa região não nos interessa. Portanto, devemos tirar 3 vezes essa intersecção tripla, que contém 4 elementos.

$$S = 25 - 3.4 = 25 - 12 = 13$$

**Letra e.**

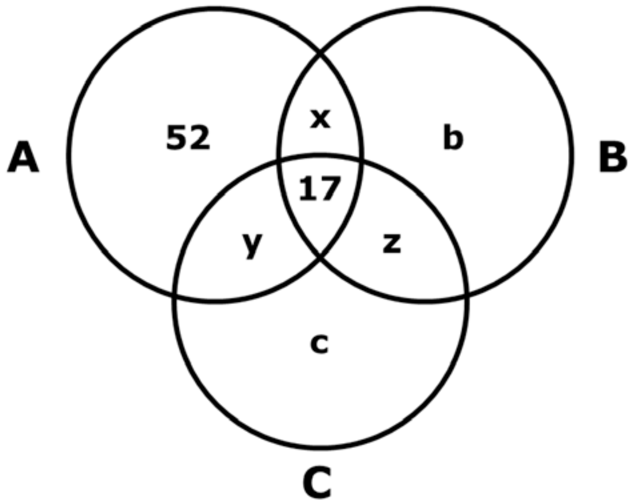
---

**051.** (FCC/SEFAZ-BA/2019/AUDITOR-FISCAL) Os ministérios A, B e C do Governo Federal de determinado país foram fundidos em um só. Para o novo ministério, foram alocados 300 assessores especiais, alguns deles com passagens em mais de um desses três ministérios. Os que haviam trabalhado em exatamente dois dentre os três ministérios antigos eram 171. Os que haviam trabalhado nos três ministérios antigos eram 17. Os que haviam trabalhado apenas no Ministério A eram 52. Os que haviam trabalhado no ministério B e no C eram 84, enquanto os que haviam trabalhado no ministério A e no C eram 64. O número total dos assessores que haviam trabalhado apenas no ministério B ou apenas no C é igual a:

**a)** 23.
**b)** 60.
**c)** 100.
**d)** 112.
**e)** 141.

---

Vamos desenhar o Diagrama de Venn correspondente a essa situação.




O enunciado pediu os assessores que trabalharam apenas em B ou apenas em C. Portanto, ele pediu a soma b + c.

Segundo o enunciado:

- "os que haviam trabalhado em exatamente dois dentre os três ministérios antigos eram 171":

$$x + y + z = 171$$

- "foram alocados 300 assessores especiais": ou seja, o total de assessores em todos os conjuntos:

$$52 + b + c + (x + y + z) + 17 = 300$$
$$52 + b + c + 171 + 17 = 300$$
$$240 + b + c = 300$$
$$\therefore b + c = 300 - 240 = 60$$

**Letra b.**

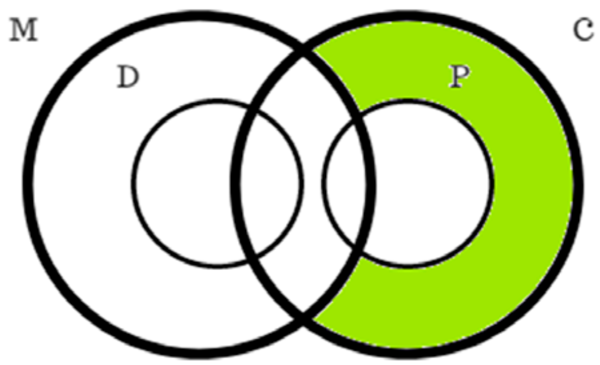
---

**052.** (FCC/SEFAZ-PE/2015/JULGADOR ADMINISTRATIVO TRIBUTÁRIO DO TESOURO ESTADUAL/DESAFIO) Na Escola Recife, todo professor de Desenho Geométrico ensina também Matemática. Alguns coordenadores, mas não todos, são professores de Matemática. Além disso, todos os pedagogos da Escola Recife são coordenadores, mas nenhum deles ensina Desenho Geométrico. Somente com estas informações, é correto concluir que na Escola Recife, necessariamente,

a) pelo menos um pedagogo é professor de Matemática.
b) nem todo pedagogo é professor de Matemática.
c) existe um professor de Desenho Geométrico que não é coordenador.
d) existe um coordenador que não é professor de Desenho Geométrico.
e) todo pedagogo é professor de Desenho Geométrico.

---

Essa é uma questão de nível bem alto. As informações dadas nos permitem concluir o seguinte diagrama.




A região verde se relaciona com a informação de que "alguns coordenadores são professores de Matemática" – existe a interseção –, mas não todos – existe um grupo de coordenadores que não é professor de Matemática.

Suponha que João é coordenador, mas não é professor de Matemática. Podemos concluir, com certeza, que João não é professor de Desenho, afinal Desenho é um subconjunto de Matemática.

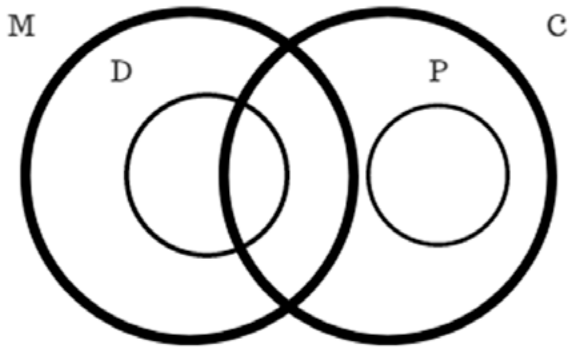
O interessante dessa questão é avaliar as alternativas erradas.

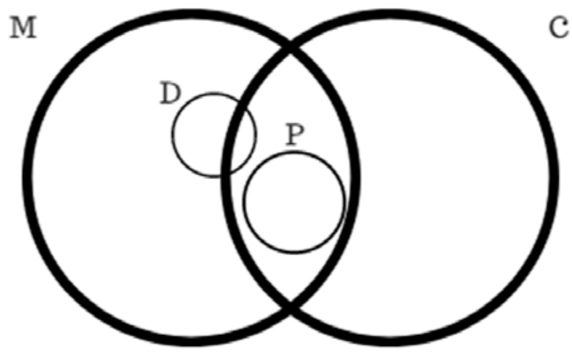
É importante perceber que podemos garantir apenas que alguns coordenadores são professores de Matemática e que alguns coordenadores não são professores de Matemática. Não podemos garantir nada sobre o subconjunto pedagogos.

Portanto, podemos ter que todos os pedagogos sejam professores de Matemática, podemos ter que nenhum seja ou que haja alguns pedagogos professores de Matemática e outros que não sejam.

De qualquer maneira, sempre podemos garantir que, como Pedagogo é um subconjunto de Coordenadores, não existe nenhum Pedagogo que seja professor de Desenho Geométrico.

Vejamos alguns diagramas de Venn que representam essas situações.

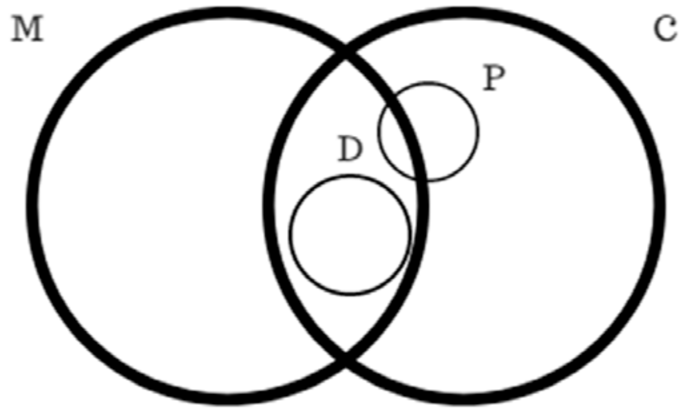



Revendo o enunciado, não há nada que impossibilite os diagramas acima. Portanto, não podemos afirmar a letra a) nem a letra b). Interessantíssimo.

Sobre os professores de Desenho Geométrico, podemos garantir que nenhum deles é pedagogo. Porém, nada impede que todos eles sejam coordenadores, desde que não sejam pedagogos.

O diagrama acima mostra uma situação em que todos os professores de Desenho Geométrico são também coordenadores. Não existe nada no enunciado que impeça isso, portanto a letra c) está errada.




A letra e) é a mais fácil de ser eliminada, pois ela contradiz diretamente o enunciado. Nenhum pedagogo é professor de Desenho.

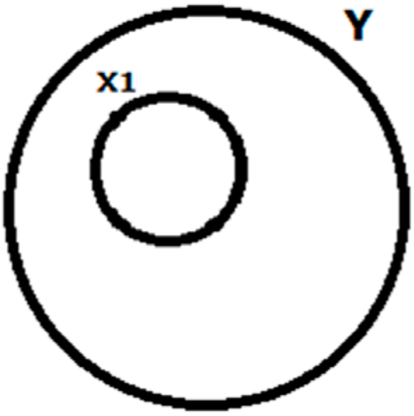
**Letra d.**

**053.** (ESAF/AFRFB/2014/DESAFIO) Ana está realizando um teste e precisa resolver uma questão de raciocínio lógico. No enunciado da questão, é afirmado que: “todo X1 é Y. Todo X2, se não for X3, ou é X1 ou é X4. Após, sem sucesso, tentar encontrar a alternativa correta, ela escuta alguém, acertadamente, afirmar que: não há X3 e não há X4 que não seja Y. A partir disso, Ana conclui, corretamente, que:

a) todo Y é X2.
b) todo Y é X3 ou X4.
c) algum X3 é X4.
d) algum X1 é X3.
e) todo X2 é Y.

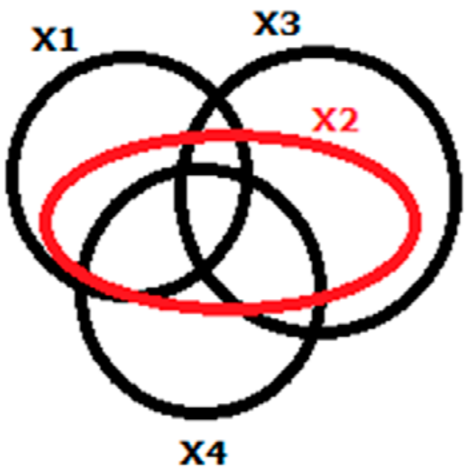
Uma questão muito difícil de desenhar os diagramas, porém, se torna fácil, caso você utilize linguagem matemática.

Do enunciado temos que todo X1 é Y. Portanto, o conjunto X1 é um subconjunto de Y.




$$X_1 \subset Y$$

Podemos, ainda, traduzir a frase: “Todo X2, se não for X3, ou é X1 ou é X4.” Isso pode ser entendido como X2 é um subconjunto da união (X3, X1 ou X4):

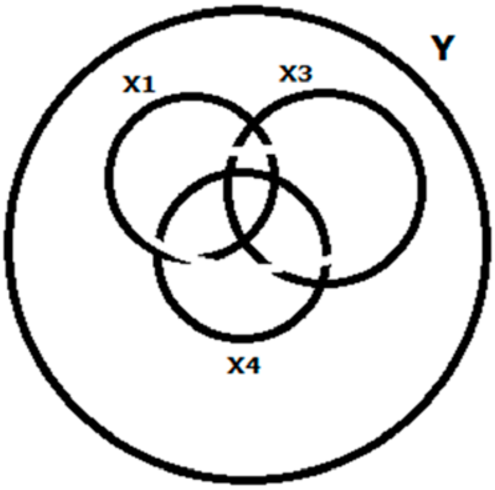


$$X_2 \subset (X_3 \cup X_1 \cup X_4)$$

Por fim, nós sabemos que: “não há X3 e não há X4 que não seja Y” Isso significa que X3 e X4 são subconjuntos de Y (formados em Direito).

$$X_3 \subset Y, X_4 \subset Y$$

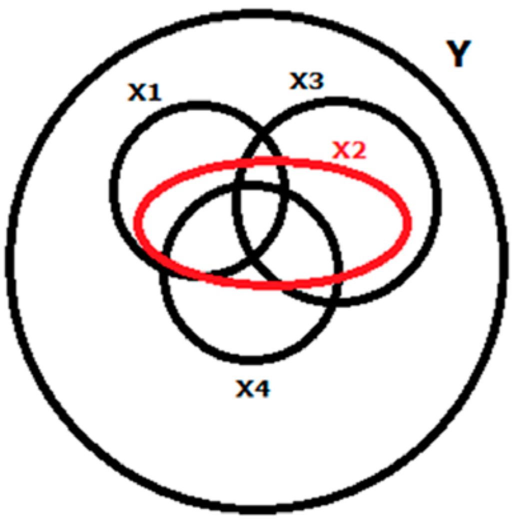
Então, chegamos ao diagrama:




Portanto, sabemos que X1, X3 e X4 são subconjuntos de Y. Dessa maneira, a união também é um subconjunto de Y. Assim, podemos escrever que:

$$X_2 \subset (X_3 \cup X_1 \cup X_4) \subset Y$$

Essa situação corresponde ao diagrama:




Portanto, X2 é um subconjunto de Y, como visto nesse diagrama.

**Letra e.**

# GABARITO

1. a
2. c
3. d
4. E
5. b
6. a
7. c
8. a
9. b
10. b
11. d
12. a
13. E
14. b
15. e
16. e
17. d
18. c
19. d
20. e
21. c
22. d
23. e
24. E
25. C
26. C
27. C
28. E
29. E
30. a
31. b
32. C
33. a
34. E
35. c
36. d
37. d
38. c
39. d
40. e
41. c
42. c
43. Anulada
44. b
45. a
46. d
47. a
48. d
49. c
50. e
51. b
52. d
53. e

**Thiago Cardoso**

Engenheiro eletrônico formado pelo ITA com distinção em Matemática, analista-chefe da Múltiplos Investimentos, especialista em mercado de ações. Professor desde os 19 anos e, atualmente, leciona todos os ramos da Matemática para concursos públicos.


LEI Nº 8.666/1993 - LICITAÇÃO
Avaliação
Comentário
Seu feedback é valioso. Você gostaria de deixar um comentário e assim nos ajudar a melhorar nossos produtos e serviços?
Obs: A avaliação da aula em pdf é exclusivamente pedagógica. Clique aqui para relatar problemas técnicos, pois serão desconsiderados deste canal.
Sim, salvar comentário.
Não, obrigado.
NÃO SE ESQUEÇA DE AVALIAR ESTA AULA!
SUA OPINIÃO É MUITO IMPORTANTE PARA MELHORARMOS AINDA MAIS NOSSOS MATERIAIS.
ESPERAMOS QUE TENHA GOSTADO DESTA AULA!
PARA AVALIAR, BASTA CLICAR EM LER A AULA E, DEPOIS, EM AVALIAR AULA.
AVALIAR