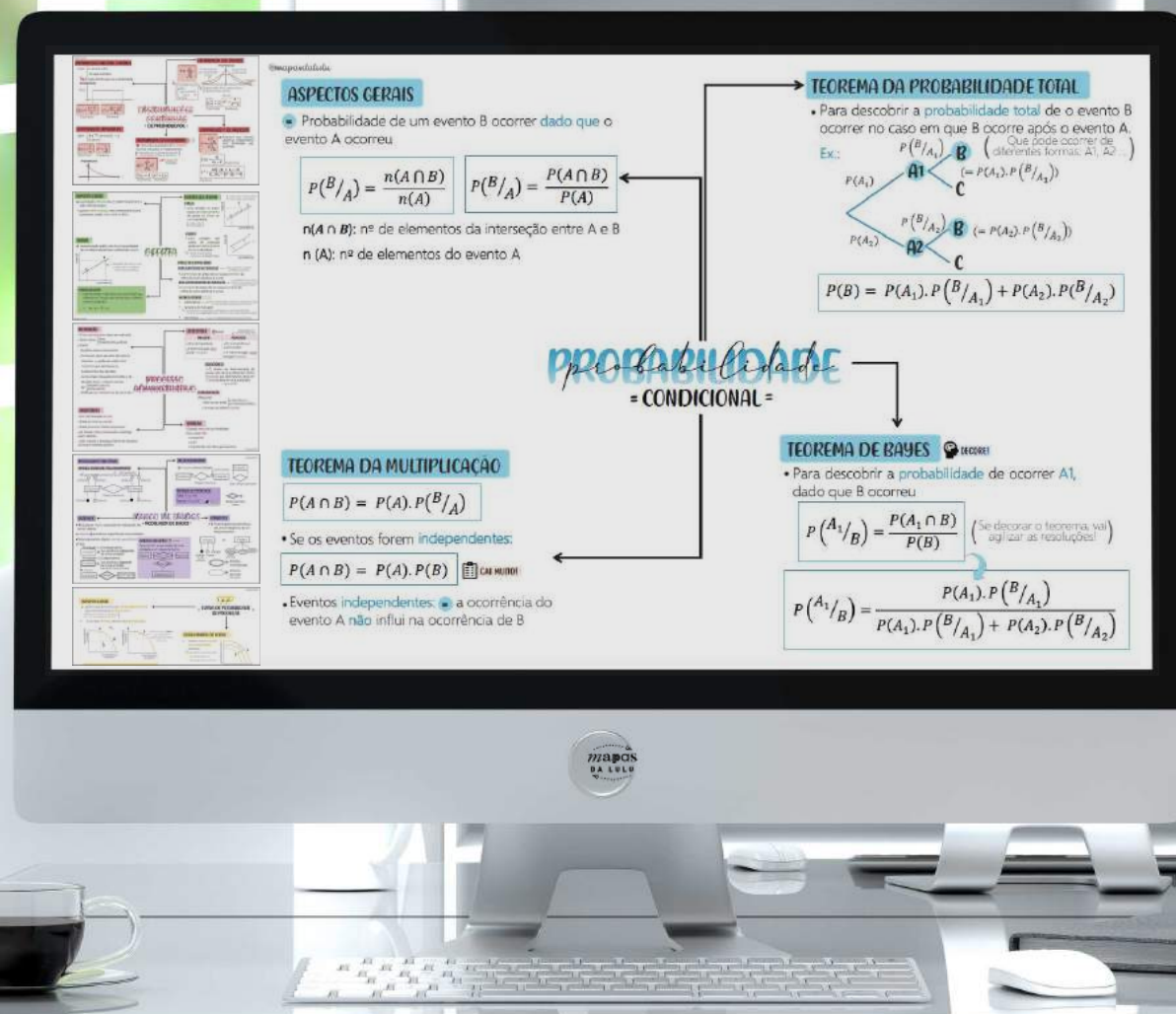




SEJA MUITO BEM-VINDO!

Obrigada por adquirir os Mapas da Lulu 3.0! Tenho certeza de que esse material fará toda a diferença em seus estudos e será um atalho para a sua tão sonhada aprovação!

Para quem ainda não me conhece, meu nome é Laura Amorim (@lulu.concurseira), tenho 28 anos, e, após pouco mais de um ano e meio de estudos, fui aprovada em quatro concursos públicos: Auditor Fiscal do Estado de Santa Catarina (7º lugar), Auditor Fiscal do Estado de Goiás (23º lugar), Consultor Legislativo (4º lugar) e Agente da Polícia Federal (primeira fase), tendo superado uma concorrência de mais de mil candidatos por vaga!

Aprendi que a revisão, muitas vezes ignorada, é a parte mais importante (e essencial!) do aprendizado! Após testar vários métodos, percebi que os meus mapas mentais são, com toda certeza, os melhores instrumentos de estudo e revisão. Ao longo da minha preparação, fiz e utilizei mais de 700 mapas mentais, desenvolvendo e aperfeiçoando um método próprio de sua construção até chegar aos Mapas da Lulu 3.0, aos quais você terá acesso a partir de agora:

Os Mapas da Lulu 3.0 visam, sobretudo, otimizar suas revisões e aumentar seu número de acertos de questões, te ajudando a chegar mais rápido à aprovação! Após resolver mais de 14.700 questões de concursos públicos nos últimos dois anos, percebi quais são os assuntos mais cobrados pelas bancas e suas principais pegadinhas, e todo esse conhecimento foi incorporado em meus mapas para que você, que confia no meu trabalho, possa sair na frente dos seus concorrentes!

Ah, e se você não quiser perder minhas dicas de estudos e motivação diárias, inscreva-se no meu canal do Youtube: Lulu Concurseira e no meu Instagram: @lulu.concurseira. Já somos uma comunidade de mais de 220 mil concurseiros em busca do mesmo sonho: a aprovação!



Um beijo,
Laura Amorim
@laura.amorimc

PIRATARIA É CRIME

ATENÇÃO:

Este produto é para uso pessoal. Não compartilhe o seu material.

Pessoal, os Mapas da Lulu são resultado de mais de dois anos de dedicação aos estudos. Ainda hoje, reservo boa parte do meu dia para produzir conteúdo, responder dúvidas, aconselhar e dar dicas sobre concursos públicos gratuitamente por meio dos meus perfis no Instagram (@laura.amorimc e @mapasdalulu) e no Youtube (Laura Amorim).

Nunca tive a pretensão de ganhar muito dinheiro com a venda desse material, até mesmo porque prestei concurso público para, dentre outros motivos, alcançar a estabilidade e segurança financeira que queria.

Mas preciso cobrir meus custos com site, servidores, distribuição, design e também minhas horas de trabalho empregadas, debruçada sobre a escrivaninha, dores nas costas, cansaço físico e mental.

São mais de 1.600 Mapas Mentais, com tempo médio de uma hora e meia para elaboração de cada um deles. Recebo menos de 50 centavos por hora trabalhada, para poder contribuir para sua aprovação.

Em razão disso, já agradecida pelo carinho e compreensão de todos, peço que **NÃO COMPARTILHE O MATERIAL** por nenhum meio (sites, e-mail, grupos de WhatsApp ou Facebook...). Se você vir qualquer compartilhamento suspeito, peço que denuncie essa fonte ilegal, por favor e também me envie no contato@mapasdalulu.com.br. **Pirataria é crime** e pode resultar penas de até QUATRO anos de prisão, além de multa (art. 184, CP).

O compartilhamento do material pelo aluno importará em seu bloqueio imediato.

Agradeço a todos pelo enorme carinho e respeito. Espero que aproveitem muito os Mapas da Lulu.

Um beijo,
Laura Amorim

ÍNDICE

1. RLM e MATEMÁTICA

1.1 Estruturas Lógicas - Proposições e Tabela Verdade	07
1.2 Diagramas Lógicos	11
1.3 Negações e Equivalências	12
1.4 Argumentação	13
1.5 Orientação Temporal	15
1.6 Regra de Três	16
1.7 Médias	17
1.8 MMC e MDC	18
1.9 Operações com Frações Decimais	21
1.10 Razão, Proporção e Divisão	23
1.11 Progressões Aritmética (PA) e Geométrica (PG)	24
1.12 Porcentagem	28
1.13 Conjuntos Numéricos	29
1.14 Radicais	35

ÍNDICE

1. RLM e MATEMÁTICA

1.15 Equação de Primeiro e Segundo Grau	36
1.16 Funções	39
1.17 Inequações	43
1.18 Função Exponencial	45
1.19 Equação Exponencial	46
1.20 Inequação Exponencial	47
1.21 Logaritmos	48
1.22 Função Logarítmica	50
1.23 Equação Logarítmica	51
1.24 Inequação Logarítmica	52
1.25 Polinômios	53
1.26 Matrizes	54
1.27 Determinantes	59
1.28 Sistemas Lineares	62

ÍNDICE

1. RLM e MATEMÁTICA

1.29 Ângulos	64
1.30 Trigonometria	66
1.31 Geometria Analítica	68
1.32 Geometria Espacial	73
1.33 Análise Combinatória	75
1.34 Probabilidade	76
1.35 Noções de Estatística	
1.35.1 Tipos de Gráficos	78
1.35.2 Distribuições de Frequência	80
1.35.3 Mediana e Moda	82
1.35.4 Medidas de Dispersão	87

LEIS DO PENSAMENTO

• **Princípio da identidade** → não existem "patamares da verdade"

• **Ex.:** uma proposição mais V que a outra

• **Princípio do terceiro excluído** → ou V ou F (Não há meio termo!)

Princípio da não contradição → não pode ser V ou F ao mesmo tempo

DEFINIÇÕES

= oração declarativa que pode ser valorada em V ou F, mas não ambas  Não pode ser exclamativa, interrogativa, imperativa ou optativa  **CAI MUITO!**

• Se não puder assumir V ou F, não é proposição

Ex.: paradoxo (contradição)

• Também **não** é proposição a sentença aberta ou função proposicional

Ex.: $x + 5 = 10$

 são variáveis!  **PEGADINHA!**

ele ganhou Oscar.

proposições

PROPOSIÇÕES SIMPLES E COMPOSTAS

• **Simples:** declaram algo sem o uso de conectivos

Ex.: o céu é azul

• **Compostas:** construídas a partir das proposições simples com os operadores lógicos

• **Conectivos:** e, ou, se ... então, ou..., ou, se e somente se....

MODIFICADOR

= operador lógico que troca o valor lógico de uma proposição

 **ATENÇÃO!** Não é um conectivo!

= negação: símbolos $\sim$ e $\neg$

CONDICIONAL

- Se p, então q

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

SINÔNIMOS DECORE!

p, logo q
sempre que p, q
quando p, q
p só quando q

CONJUNÇÃO

- "Vamos à praia e vamos ao shopping"

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

conectivos

BICONDICIONAL

- p se e somente se q

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Equipara-se á conjunção de duas condicionais

$$p \leftrightarrow q = p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p$$

DISJUNÇÃO INCLUSIVA

- "Como banana ou como maçã."
(Ou ambas!)

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

DISJUNÇÃO EXCLUSIVA

- "Ou como banana, ou como maçã."
(Não pode ambas!)

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

EM UMA FÓRMULA PROPOSICIONAL

1. $\neg$ (negação)
2. $\vee$ (ou) ou $\wedge$ (e)
3. $\underline{\vee}$ (ou exclusivo)
4. $\rightarrow$ (se ... então)
5. $\leftrightarrow$ (se e somente se)

Ordem de
resolução



EXEMPLOS

(P = F, Q = V, R = V)

1. $\neg P \rightarrow Q \wedge R$

$$= \neg F \rightarrow V \wedge V$$

$$= V \rightarrow V \wedge V$$

$$= V \rightarrow V$$

$$= V$$

Os parênteses alteram a
ordem de preferência
dos conectivos

2. $\neg ((P \rightarrow Q) \wedge R)$

$$= \neg ((F \rightarrow V) \wedge V)$$

$$= \neg (V \wedge V)$$

$$= \neg V$$

$$= F$$

conectivos
= ORDEM DE PREFERÊNCIA =

SE HOUVER MARCADORES

1. $()$
2. $[]$
3. $\{ \}$

Ordem de
resolução



Fórmula em seu interior

CASOS ESPECIAIS



TAUTOLOGIA

- Não importa quais valores assumem as proposições simples, a composta resultante será sempre **V**

• Ex.: $(p \wedge r) \rightarrow (\sim q \vee r)$

↪ Dica de prova: tente tornar a proposição falsa

CONTRADIÇÃO

- Não importa quais valores assumem as proposições simples, a composta resultante será sempre **F**

Ex.: $p \wedge \sim p$

CONTINGÊNCIA

(Não é tautologia, nem contradição)

- A proposição composta pode ser **V** ou **F**, a depender dos valores das proposições simples

NÚMERO DE LINHAS

• $\# = 2^n$ DECORE!

↪ n = número de proposições simples

DICAS PARA MONTAR A TABELA VERDADE

1. Calcule o número de linhas
 2. Divida 1. por 2 = número de V_s na primeira coluna
 3. Divida 2. por 2 = número de V_s na segunda coluna
- E assim sucessivamente até chegar em 1.

↪ Ex.: 3 proposições simples

$$2^3 = 8 \text{ linhas na T.V.}$$

$$8 : 2 = 4$$

$$4 : 2 = 2$$

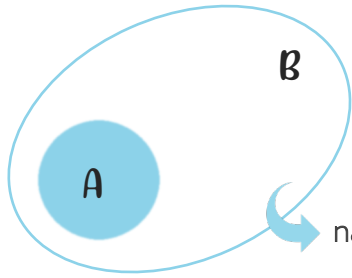
$$2 : 1 = 1$$

TABELA VERDADE

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

8

"TODO A É B"

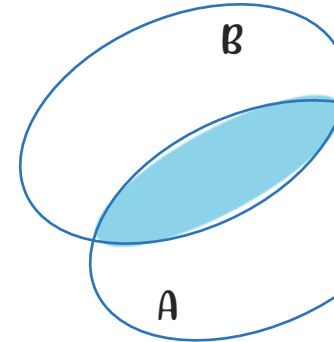


- "Algum A é B" será sempre V
- "Algum A não é B" será sempre F

não é possível afirmar sobre essa região
(Se há ou não elementos)

↪ Negação: "Algum A não é B"

"ALGUM A É B"



- "Nenhum A é B" será sempre F

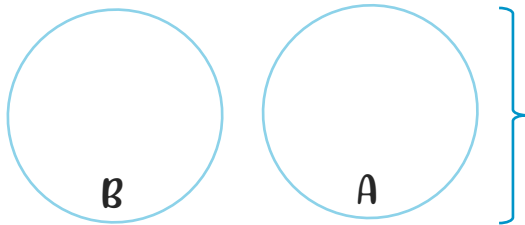
não é possível afirmar sobre essa região
(Se há ou não elementos)

↪ Negação: "Nenhum A é B"

Diagramas de Euler-Venn = PROPOSIÇÕES CATEGÓRICAS =

"NENHUM A É B"

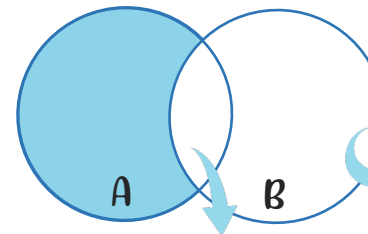
- Logo, "nenhum B é A"



= Conjuntos distintos

↪ Negação: "Algum A é B"

"ALGUM A NÃO É B"



- "Todo A é B" será sempre F

não é possível afirmar sobre essa região
(Se há ou não elementos)

↪ Negação: "Todo A é B"

ASPECTOS GERAIS

EQUIVALÊNCIA

= quando duas proposições têm a **mesma tabela verdade** (na dúvida, construa ambas e teste!)

NEGAÇÃO

= quando duas proposições têm valor lógico **oposto**.

COMUTATIVIDADE DOS CONECTIVOS

$$p \wedge q = q \wedge p$$

$$p \vee q = q \vee p$$

$$p \underline{\vee} q = q \underline{\vee} p$$

$$p \leftrightarrow q = q \leftrightarrow p$$

CAI MUITO!

EQUIVALÊNCIAS DO "SE ... ENTÃO ..."

$$p \rightarrow q = \sim q \rightarrow \sim p$$

= contrapositiva

$$p \rightarrow q = \sim p \vee q$$

$$\sim p \rightarrow q = p \vee q$$

Condição suficiente para q
"Se p, então q"
Condição necessária para p

EQUIVALÊNCIAS E NEGAÇÕES

DECORE!

NEGAÇÕES

Inverter o sinal e negar ambos

$$\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q \quad \sim (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$$

$$\sim (p \wedge q) = p \rightarrow \sim q \quad \sim (p \rightarrow q) = p \wedge \sim q$$

$$\sim (p \underline{\vee} q) = p \leftrightarrow q \quad \sim (p \leftrightarrow q) = p \underline{\vee} q$$

$$\sim (p \leftrightarrow q) = p \leftrightarrow \sim q$$

$$\sim (p \leftrightarrow q) = (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

Situações em que p e q têm valores lógicos diferentes

NEGAÇÃO DO "SE ... ENTÃO ..."

$$\sim (p \rightarrow q) = p \wedge \sim q$$

p aconteceu, mas q não!

DECORE!

ARGUMENTO

- Silogismo = 2 premissas + conclusão
- Verdade x Validade (Argumentos são válidos ou inválidos)
(Proposições são V ou F) → Depende da conexão entre as premissas e a conclusão
(Não garante a verdade da conclusão)

ARGUMENTO VÁLIDO

- Ex.: "Todos os cachorros são amigáveis."
Maggie é um cachorro. } Premissas
Logo, Maggie é amigável" → Conclusão
- A conclusão será verdadeira sempre que as premissas forem verdadeiras = **Argumento válido**
→ A lógica é o estudo sistemático de argumentos lógicos

ARGUMENTO INVÁLIDO

- Ex.: "Maggie é amigável."
Maggie é um cachorro. } Premissas
Logo, todos os cachorros são amigáveis" → Conclusão
→ Não tem validade!

REGRAS DE INFERÊNCIA

MODUS PONENS

- Se p, então q.
- p.
- Logo, q

MODUS TOWENS

- Se p, então q.
- Não q.
- Portanto, não p

SILOGISMO HIPOTÉTICO

- Se p, então q.
- Se q, então r
- Logo, se p, então r

SOFISMA OU FALÁCIA

- Argumentos que pretendem demonstrar como verdadeiros os argumentos logicamente falsos
→ = um argumento inválido que aparenta ser válido

Lógica de argumentação

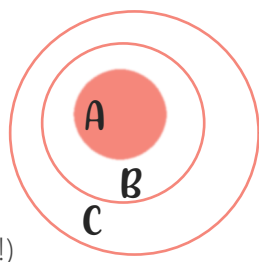
ARGUMENTO VÁLIDO

- Todo A é B.
- Todo B é C
- Logo, todo A é C (Válido!)

TESTE SEMÂNTICO:

- Um argumento é válido se, e somente se, não for possível ter uma conclusão falsa de premissas verdadeiras.

Supor que as premissas são verdadeiras e então a conclusão também deve ser



- De duas premissas afirmativas não se pode tirar uma conclusão negativa

- Todo A é B.
- Algum A é C.
- Logo, Algum C não é B. (Inválido!)

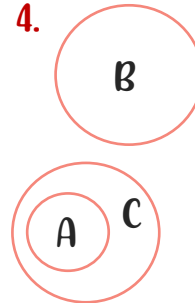
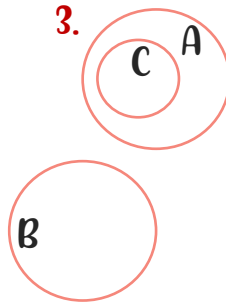
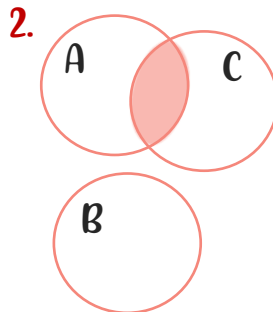
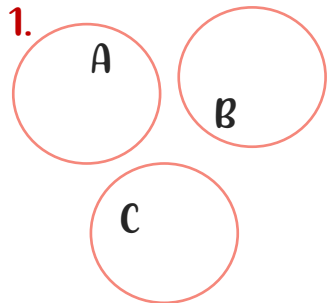


REGRAS

- De duas premissas negativas nada se conclui **CAI MUITO!**

- Nenhum A é B.
- Nenhum C é B
- Logo, nenhum C é A. (Inválido!)

Situações possíveis:

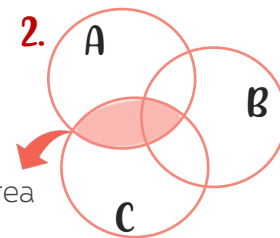
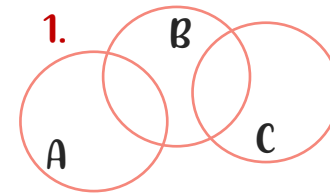


Lógica de argumentação REPRESENTAÇÃO = POR DIAGRAMAS

- De duas premissas particulares (algum, existe...) nada se conclui

- Algum A é B.
- Algum C é B
- Logo, algum C é A. (Inválido!)

Situações possíveis:



ATENÇÃO!

Não podemos ter certeza sobre essa área

DIA DA SEMANA x NÚMERO DE DIAS

1. Calcular o número de semanas completas
2. Avançar os dias restantes

•Ex.: 1º dia = segunda-feira

Dias = 180 → qual dia será daqui 180 dias?

$$180 : 7 = 25 \text{ sobra } 5$$

semanas completas

dias restantes

SEG TER QUA QUI SEX SAB DOM

1 → 2 → 3 → 4 → 5

ORIENTAÇÃO TEMPORAL E CALENDÁRIO

RELAÇÕES BÁSICAS

1 dia = 24 horas

1 hora = 60 minutos

1 minuto = 60 segundos

30 dias: ABR. JUN. SET. NOV.

MESES → 31 dias: JAN. MAR. MAI. JUL. AGO. OUT. DEZ.

28/29 dias: FEV. (ANO BISSEXTO)

ANO BISSEXTO:

1. Terminando em 00 e divisível por 400
2. Não terminando em 00, mas divisível por 4

Dica: anos de olimpíadas!

NÚMERO DE SEMANAS EM UM ANO

•Ano não bissexto = 52 semanas + 1 dias

•Ano bissexto = 52 semanas + 2 dias

2 dias da semana ocorrerão 53x no ano

DIA DA SEMANA x DIA DO MÊS

# dias no mês	Último dia em relação ao primeiro
28	D-1 (SEG)
29	D (TER)
30	D+1 (QUA)
31	D+2 (QUI)

(Ex.: TER)

ASPECTOS GERAIS

- Um método para resolver problemas com **grandezas** direta ou inversamente **proporcionais**

É o **mesmo** para a simples ou composta

PASSO A PASSO

CONSTRUÇÃO DA TABELA

1. Criar uma tabela com as grandezas
2. **1ª linha:** situação com todas as grandezas conhecidas
3. **2ª linha:** situação com a grandeza desconhecida

COLOCAÇÃO DAS SETAS DE PROPORCIONALIDADE

4. Coloque uma seta para baixo na coluna com a grandeza desconhecida

5. Compare as grandezas conhecidas com a desconhecida:

5.1 se ambas aumentam ou diminuem juntas, são **diretamente** proporcionais → seta para **baixo**

5.2 se quando uma aumenta (diminui), a outra diminui (aumenta) são **inversamente** proporcionais → seta para **cima**

CONSTRUÇÃO DA EQUAÇÃO

6. Do lado esquerdo = grandeza desconhecida
7. Do direito = o produto das demais frações (Inverter aquelas com seta para cima)
8. Resolver a equação e encontrar a grandeza desconhecida

EXEMPLO

- 400 peças** são produzidas diariamente por **10 funcionários** que trabalham 8hs/dia

Quantas peças/dia seriam construídas por **15 funcionários** que trabalham **6hs/dia** com o **dobro** da dificuldade

1	PEÇAS	FUNCIONÁRIOS	HS/DIA	DIFICULDADE
2	400	10	8	1
3	x	15	6	2

- Quando **maior** o número de funcionários **maior** o número de peças produzida **5.1**

- Quando **maior** a dificuldade, **menor** o número de peças produzidas (sempre se perguntar a relação com a grandeza desconhecida) **5.2**

$$6 \quad \frac{400}{x} = \frac{10}{15} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{2}{1}$$

$$8 \quad \frac{400}{x} = \frac{10}{15} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{2}{1}$$

$$\frac{400}{x} = \frac{16}{9}$$

$$9.25 = x \quad \therefore \quad x = 225$$

Na situação enunciada, serão produzidas 225 peças por dia

regra de três

MÉDIA ARITMÉTICA SIMPLES



$$\bar{x} = \frac{\text{soma dos termos}}{\text{número de termos}}$$

- **Ex.:** média aritmética simples dos números 3, 5, 9, 2, 11:

$$\bar{x} = \frac{3 + 5 + 9 + 2 + 11}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{30}{5}$$

$$\bar{x} = 6$$

5 termos

MÉDIA GEOMÉTRICA

- Raiz n-ésima do produto dos termos (n = número de termos)

$$\bar{G} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

- **Ex.:** média geométrica dos termos 3, 8, 9:

$$\bar{G} = \sqrt[3]{3 \cdot 8 \cdot 9} = \sqrt[3]{216}$$

$$\bar{G} = 6$$

3 termos

médias

MÉDIA ARITMÉTICA PONDERADA

- Como a simples, mas os elementos (X_i) podem ter **pesos diferentes** (p)
(Como em uma prova, em que as questões de uma matéria valem mais que de outra)

$$\bar{x}_p = \frac{\text{soma dos termos multiplicados pelos respectivos pesos}}{\text{soma dos pesos}}$$



- **Ex.:** média aritmética ponderada dos seguintes números e seus pesos

3, peso 2

4, peso 1

2, peso 5

$$\bar{x}_p = \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 5}{2 + 1 + 5}$$

$$= \frac{6 + 4 + 10}{8} = \frac{20}{8}$$

$$\bar{x}_p = 2.5$$

MÚLTIPLOS DE UM NÚMERO

- Basta multiplicá-lo por todos os números **naturais**
- Ex.:** Múltiplos de 4

$$4 \times 0 = 0$$

$$4 \times 1 = 4$$

$$4 \times 2 = 8$$

$$4 \times 3 = 12$$

$$\rightarrow M(4) = \{0, 4, 8, 12, \dots\}$$

+4 +4 +4 São infinitos!

CARACTERÍSTICAS IMPORTANTES

- O Zero é múltiplo de todos
- Todo número é múltiplo de 1 e de si mesmo
- O único múltiplo de zero é o próprio zero

MMC: MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

- É o **menor** dos múltiplos comuns entre dois números

Ex.: $M(8) = \{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, \dots\}$

Esse é o MMC!

$$M(12) = \{0, 12, 24, 36, 48, 60, \dots\}$$

Mas há infinitos múltiplos comuns não nulos

MÉTODOS PARA ENCONTRAR O MMC

- Escrever os múltiplos de cada número até encontrar um comum

Ex.: $M(8) = \{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, \dots\}$

$M(12) = \{0, 12, 24, 36, 48, 60, \dots\}$

Esse é o MMC!

- Fatoração simultânea:

Ex.: $MMC(8, 12) =$

8, 12	2	Divide ambos quando possível
4, 6	2	
2, 3	2	Divide apenas um quando não o for
1, 3	3	
1, 1		

$$= 2^3 \cdot 3$$

$$MMC(8, 12) = 24$$

- Fatoração prima individual dos números:

MMC = fatores comuns elevados aos maiores expoentes $\times$ fatores não comuns

Ex.: MMC entre 470.448 e 87.480:

$$= 2^4 \cdot 3^5 \cdot 11^2 = 2^3 \cdot 3^7 \cdot 5^1$$

$$\therefore MMC = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^1 \cdot 11^2$$

$$= 21.170.160$$

mmc.

DIVISOR DE UM NÚMERO

- Se $A : B$ é **exata**, então B é **divisor** de A e A é **divisível** por B
- Conjunto de divisores de um número = todos seus divisores

Diferente dos múltiplos, é um número finito

- Ex.: $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$

CARACTERÍSTICAS IMPORTANTES:

- 1 é divisor de todos os números
- Todo número é divisor de si mesmo.

MDC

MDC: MÁXIMO DIVISOR COMUM

- Ex.: MDC (8,12):
 $D(8) = \{1, 2, 4, 8\}$
 $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
 Esse é o MDC!
- Se $MDC(A, B) = 1$ A e B são **primos entre si** (= co-primos)
 A fração A/B é irredutível

MÉTODOS PARA ENCONTRA O MDC

FATORAÇÃO SIMULTÂNEA

- Ex.: MDC (84, 144, 60):

84, 144, 60	2	} Só usar os que dividem todos
42, 72, 30	2	
21, 36, 15	3	
7, 12, 5	2 . 2 . 3	

Esses são primos entre si (paramos de fatorar)

= 12

MDC (84, 144, 60)

ALGORÍTMO DE EUCLIDES (= MÉTODO DAS DIVISÕES SUCESSIVAS)

- Montar uma grade com 3 linhas ≥ 3 colunas

- Ex.: MDC (117, 81)

(Deixar espaço à direita)

QUOCIENTES:	1	2	4
	117	81	36
RESTOS:	36	9	0

Seguimos dividindo até chegarmos ao resto zero

O MDC é o último divisor utilizado

- PASSOS:

1. $117 \overline{) 81} \rightarrow 1$
2. $81 \overline{) 36} \rightarrow 2$
3. Esse é o MDC!

resto $\rightarrow$ Vira o divisor da operação seguinte

RELAÇÃO ENTRE MMC E MDC DE DOIS NÚMEROS NATURAIS

$$x \cdot y = MMC(x, y) \cdot MDC(x, y)$$

➤ O produto entre o MMC e o MDC de 2 números é o produto entre esses 2 números !

• Ex.: $x=6$ $\rightarrow$ $MMC(6, 8) = 24$
 $y=8$ $MDC(6, 8) = 2$

$$\therefore 6 \cdot 8 = 24 \cdot 2$$

$$48 = 48$$

MMC
e MDC

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

FRAÇÕES COM MESMO DENOMINADOR

- Repetir o denominador e operar com os numeradores

• Ex.: $\frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4+3}{5} = \frac{7}{5}$

$\frac{5}{7} - \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{5-2+4}{7} = \frac{7}{7}$

MULTIPLICAÇÃO

- Basta multiplicar os numeradores e denominadores entre si

• Ex.: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 7} = \frac{8}{21}$

• Ex.: $3 \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{7}$

DIVISÃO

- Repetir a primeira fração e multiplicar pela segunda invertida:

• Ex.: $\frac{2}{3} : \frac{5}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}$

• Ex.: $8 : \frac{3}{16} = 8 \cdot \frac{16}{3} = \frac{128}{3}$

• Ex.: $\frac{16}{3} : 8 = \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

operações básicas

= FRAÇÕES =

Ex.: $\frac{5}{6} - \frac{2}{9} + \frac{7}{12}$

fração 1 fração 2 fração 3

MMC (6, 9, 12) = 36 (= novo denominador)

$F_1 = \frac{5}{6} \rightarrow \frac{30}{36}$ (= novo numerador)

$F_2 = \frac{2}{9} \rightarrow \frac{8}{36}$ $\frac{30 - 8 + 21}{36} = \frac{43}{36}$

$F_3 = \frac{7}{12} \rightarrow \frac{21}{36}$

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

FRAÇÕES COM DENOMINADORES DIFERENTES

1. Calcular o MMC dos denominadores
2. Substituir os denominadores por esse MMC
3. Dividir o MMC pelo denominador original e multiplicar pelo respectivo numerador
4. Substituir o numerador pelo valor encontrado em 3

operações básicas

= DECIMAIS =

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

- Alinhe a vírgula e realize a operação normalmente

- Ex.: $3,12 + 12,4 =$

$$\begin{array}{r} 3,12 \\ + 12,40 \\ \hline 15,52 \end{array}$$

Adicionar um zero onde não há decimal

- Ex.: $5,1 - 2,42 =$

$$\begin{array}{r} 5,10 \\ - 2,42 \\ \hline 2,68 \end{array}$$

MULTIPLICAÇÃO

Ignorando as casas decimais

1. Multiplique normalmente
2. Conte as casas decimais
3. Coloque no resultado o número de casas encontrado em 2

- Ex.: $23,1 \times 1,234 =$
= 4 casas decimais

$$231 \times 1234 = 285.054 = 28,5054$$

Ignore as casas decimais

DIVISÃO

1. Igualar a quantidade de casas decimais do divisor e dividendo (Colocando zeros)
2. Ignorar as vírgulas e realizar a operação normalmente

- Ex.: $80,4 : 0,00025 =$
= $80,40000 : 0,000025 =$
= $8040000 : 25 = 321.600$

- Ex.: $40 : 0,8 =$
= $40,0 : 0,8 \rightarrow = 400 : 8 \rightarrow 50$

RAZÃO

- Razão de a para b é o quociente de a por b:

$$a : b \rightarrow \frac{a}{b}$$

Antecedente (numerador)

Consequente (denominador)

- Permite fazer comparações de grandezas entre 2 números

- Ex.: em uma sala há 80 homens e 60 mulheres

$$80/60 = 4/3 \rightarrow \text{há 4 homens para cada 3 mulheres}$$

Escala: $\frac{\text{Medida do Desenho}}{\text{Medida Real}}$

PROPRIEDADES DAS PROPORÇÕES

$$1. \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

(Multiplicar cruzado)

- Simplificações:

- Do mesmo lado:

Numerador com denominador $\rightarrow \frac{10}{20} = \frac{50}{100}$

- De lados diferentes:

Numerador com numerador ou denominador com denominador $\rightarrow \frac{10}{20} = \frac{50}{100}$

$$\frac{10}{20} = \frac{50}{100}$$

PROPORÇÃO

- É a igualdade entre duas ou mais razões:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \text{ e } d: \text{extremos} \mid b \text{ e } c: \text{meios}$$

Obs.: Proporção contínua: $\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$

b é a média geométrica de a e d

GRANDEZAS PROPORCIONAIS

- Diretamente proporcionais: o **quociente** entre seus elementos é constante

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = K$$

constante de proporcionalidade

- Inversamente proporcionais: o **produto** entre seus elementos é constante

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = K$$

DIVISÃO PROPORCIONAL

- Dividir uma quantia x em partes proporcionais a outras grandezas (Diretamente)

- Ex.: dividir R\$ 250,00 a 3 filhos (de 2, 3 e 5 anos) em partes proporcionais a suas idades

$$\frac{p_1}{2} = \frac{p_2}{3} = \frac{p_3}{5} = \frac{\overbrace{p_1 + p_2 + p_3}^{=250}}{\underbrace{2 + 3 + 5}_{=10}} = 25$$

K = constante de proporcionalidade

$$\frac{p_1}{2} = 25 \rightarrow p_1 = 50 \quad (p_2 = 75 \text{ e } p_3 = 125)$$

Aí resolve separadamente

razão e proporção

CONCEITO

- Sequência de termos

→ Cada termo (a_n) é a soma do anterior (a_{n-1}) com uma constante (r) (Chamada de razão)

→ A partir do segundo termo!

CLASSIFICAÇÃO

1. Crescente: $a_n > a_{n-1}$
 $r > 0$
2. Decrescente: $a_n < a_{n-1}$
 $r < 0$
3. Constante: $a_n = a_{n-1}$
 $r = 0$

CÁLCULO DA RAZÃO

$$r = a_n - a_{n-1}$$

→ É a diferença entre dois termos consecutivos

e $r = a_{n+1} - a_n$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$$

$$2a_n = a_{n+1} + a_{n-1}$$

$$\therefore a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$

→ O termo do meio é a média aritmética dos outros dois

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

TERMO GERAL

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$



- Ex.: qual o milésimo termo da sequência (2, 5, 8, 11 ...)?
($n = 1000$) (a1)

$$a_{1000} = 2 + (999).3$$

$$\therefore a_{1000} = 2.999$$

$$\begin{array}{l} + 3 \\ r = 3 \end{array}$$

- Termo geral sem conhecer a_1

$$a_n = a_k + (n - k).r$$

→ Termo conhecido

PROPRIEDADES

$$a_n + a_m = a_p + a_q$$

- Se e somente se $n + m = p + q$
(Em uma P.A. não constante)

A soma de termos equidistantes dos extremos de uma P.A. é constante ($S_1 = S_2 = S_3$).

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{S_1} & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{S_2} & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{S_3} & & & \\ & + & & & & \end{array}$$

MÉDIA DE TERMOS DE UMA P.A.

$$\bar{x} = \frac{S_n}{n} \rightarrow \bar{x} = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2n} = \text{A média entre os termos}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{(a_1 + a_n)}{2}$$

e $\bar{x} = x_c$

Termo central (Quando o número de termos é ímpar)

SOMA DOS TERMOS



1. Calcular os n primeiros termos da P.A.

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_n$$

$$\begin{array}{l} +S \\ \hline 2S = \underbrace{(a_1 + a_n)}_{S_1} + \underbrace{(a_2 + a_{n-1})}_{S_2} + \dots + \underbrace{(a_n + a_1)}_{S_n} \end{array}$$

n parcelas

- Como $S_1 = S_2 = S_3 \dots$,

$$2S = S_n \cdot n$$

$$\therefore S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

ou $\frac{S}{n} = x_c$

$$\therefore S = x_c \cdot n$$

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

CONCEITO

- Sequência de termos

Cada termo (a_n) é igual ao anterior (a_{n-1}) multiplicado por uma constante real (q) chamada de razão

a partir do segundo termo

- **Obs.:** se for não-estacionária ($q \neq 0$)

- **Ex.:** (3, 6, 12, 24, 48 ...)

x 2

CLASSIFICAÇÃO

1. **Crescente:** $a_n > a_{n-1}$

- P.G com termos $\left\{ \begin{array}{l} \text{Positivos} \rightarrow q > 1 \\ \text{Negativos} \rightarrow 0 < q < 1 \end{array} \right.$

2. **Decrescente:** $a_n < a_{n-1}$

- P.G com termos $\left\{ \begin{array}{l} \text{Positivos} \rightarrow 0 < q < 1 \\ \text{Negativos} \rightarrow q > 1 \end{array} \right.$

3. **Constante:** $a_n = a_{n-1}$

$$q = 1$$

- **Obs.:** Se $a_1 = 0$, q pode ser qualquer valor real

4. **Oscilante (ou alternante/pendular):**

- = Termos consecutivos têm sinais contrários

$$q < 0$$

- **Ex.:** (3, -6, 12, -24 ...) $\rightarrow q < -2$

5. **Estacionária (ou singular):**

- = $a_1 \neq 0$, mas $q = 0$

- **Ex.:** (3, 0, 0, 0, 0, ...)

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

CÁLCULO DA RAZÃO



$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$a_n^2 = a_{n+1} \cdot a_{n-1}$$

é a média geométrica de a_{n+1} e a_{n-1}

TERMO GERAL

$$a_1 \xrightarrow{\times q} a_2 \xrightarrow{\times q} a_3 \xrightarrow{\times q} \dots a_n$$

$$\therefore a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

- Termo geral sem conhecer a_1

$$a_n = a_k \cdot q^{n-k}$$

Termo conhecido

SOMA DOS TERMOS

- De uma P.G. **finita**

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_n$$

n termos

$$S = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

SOMA DOS TERMOS

- De uma P.G. **infinita**
(n = infinito!)

- se $|q| \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S = \infty$

= Sequência
divergente

- se $|q| < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S = \frac{-a_1}{q - 1}$

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

ASPECTOS GERAIS

- Razão com denominador 100:

$$p\% = p/100$$

OUTRAS REPRESENTAÇÕES:

$$80\% = 80/100 = 0,8$$

$$230\% = 230/100 = 2,3$$

TRANSFORMAÇÃO DE UMA FRAÇÃO ORDINÁRIA EM PERCENTUAL

- Basta multiplicá-la por 100%

$$\text{Ex.: } 5/2 \rightarrow 5/2 \times 100\% = 500\%/2 = 250\%$$

$$3/8 \rightarrow 3/8 \times 100\% = 300\%/8 = 37,5\%$$

PERCENTUAL DE UM VALOR

- Para calcular x% de um valor, basta multiplicá-lo por x/100

Ex.: 30% de 500

$$= 30/100 \times 500 = 150$$

20% de 30% de 40% de 1000

$$= 20/100 \times 30/100 \times 40/100 \times 1000 = 24$$

VARIAÇÕES PERCENTUAIS

- Para diminuir p% → multiplicar por: $(100 - p)\%$

Ex.: Redução de 25% em uma mercadoria de R\$400,00

$$\text{Valor final} = (100 - 25)\% \times 400 = 300,00$$

$$\text{Desconto} = 25\% \times 400 = 100$$

- Para aumentar p% → multiplicar por $(100 + p)\%$

Ex.: Aumento de 25% em uma mercadoria de R\$ 400,00

$$\text{Valor final} = (100 + 25)\% \times 400 = 500,00$$

$$\text{Aumento} = 25\% \times 400 = 100,00$$

PORCENTAGEM

VARIAÇÕES PERCENTUAIS SUCESSIVAS

Basta multiplicar, **sucessivamente** por $(100 - p)\%$ para descontos e $(100 + p)\%$ para aumentos

Ex.: há um aumento de 20%, seguido de uma redução de 30% e um posterior aumento de 40% em uma mercadoria que custava inicialmente R\$120,00.

$$120/100 \times 70/100 \times 140/100 \times 120 = 141,12$$

ASPECTOS GERAIS

• Símbolos: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$

Sem o zero
(= "não nulos")

• Para a contagem dos objetos.

• Ex.: livros, árvores, ...

Não se diz "tenho 3,425 livros" ou "há -1 banana".

FATORAÇÃO

= reescrevê-lo como um **produto** de números **primos**:

Só são divisíveis por 1 e por si mesmos (Ex.: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...)

• Ex.: Fatorar 36:

Usar sempre o menor número primo possível

36	2
18	2
9	3
3	3
1	
$= 2^2 \cdot 3^2$	

CONJUNTOS NUMÉRICOS

= NÚMEROS NATURAIS =

OPERAÇÕES

• Podemos definir **adição** e **multiplicação**.
(O conjunto é fechado)

+ ou x de número naturais resultam em um número natural.

• A **subtração** e a **divisão** não são sempre definidas. (O conjunto não é fechado)

Resultam em número **não** natural:

$$2 - 5$$

$$2 : 8$$

$$5 : 3$$

QUADRADO PERFEITO

• É o quadrado de um número natural

• Ex.: $16 = 4^2$

$$9 = 3^2$$

$$4 = 2^2$$

CUBO PERFEITO

• É o cubo de um número natural

• Ex.: $8 = 2^3$

$$27 = 3^3$$

$$64 = 4^3$$

QUANTIDADE DE DIVISORES DE UM NÚMERO NATURAL

PASSO A PASSO

1. Fatorar em números primos
 2. Adicione 1 a cada expoente
 3. Multiplique os resultados de 2
- Ex.: número de divisores de 12

1

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} = 2^2 \cdot 3^1$$

2 $12 = 2^2 \cdot 3^1$

$$\begin{array}{c} 2 + 1 = 3 \\ 1 + 1 = 2 \end{array}$$

3 $3 \times 2 = 6$ 6 divisores!

$$D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

6 divisores!

conjuntos
numéricos
= NÚMEROS NATURAIS =

QUANTIDADES DE ALGARISMOS EM UMA SEQUÊNCIA

- Ex.: Quantos algarismos são usados para numerar páginas de 1 a 150?
 - $1 \rightarrow 9 = 9 - 1 + 1 = 9$ números de 1 algarismo
($9 \cdot 1 = 9$)
 - $10 \rightarrow 99 = 99 - 10 + 1 = 90$ números de 2 algarismos
($90 \cdot 2 = 180$)
 - $100 \rightarrow 150 = 150 - 100 + 1 = 51$ números de 3 algarismos
($51 \cdot 3 = 153$)

$$\text{Total: } 9 + 180 + 153$$

$$= 342$$

ASPECTOS GERAIS

• Símbolos: $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$

Números simétricos/
opostos

$\mathbb{Z}^* = \{ \dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots \}$

Inteiros não nulos

$\mathbb{Z}_- = \{ \dots, -3, -2, -1, 0 \}$

Inteiros não positivos

$\mathbb{Z}_+ = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$

Inteiros não negativos

$\mathbb{Z}_-^* = \{ \dots, -3, -2, -1 \}$

Inteiros negativos

$\mathbb{Z}_+^* = \{ 1, 2, 3, \dots \}$

Inteiros positivos

O **zero** não é positivo nem negativo: é neutro

OPERAÇÕES

• Podemos definir **adição**, **subtração** e **multiplicação**

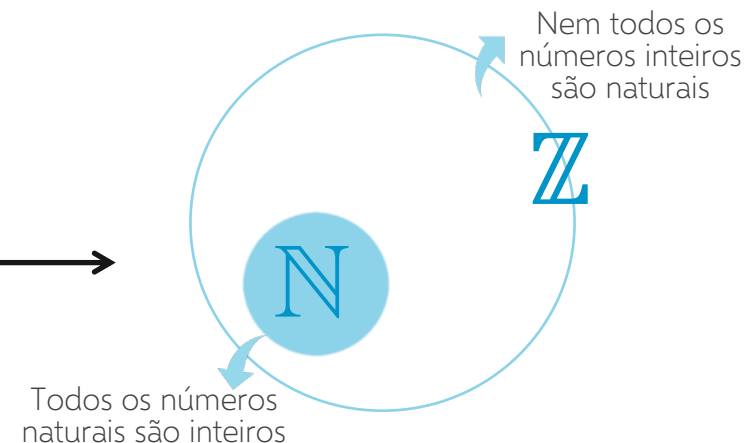
$\mathbb{Z}$ é fechado nas três opções

• A divisão **não** é ainda definida

$a - b = a + (-b)$

conjuntos
numéricos
= NÚMEROS INTEIROS =

RELAÇÃO ENTRE OS CONJUNTOS



conjuntos numéricos = NÚMEROS INTEIROS =

REGRAS DOS SINAIS COM NÚMEROS INTEIROS

$$-(-a) = a$$

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

$$a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b) = -a \cdot b$$

Para multiplicação e divisão:

SINAIS	RESULTADO
Iguais	Positivo
Diferentes	Negativo

- Ex.: $(-2) \cdot (-4) = 8$
 $3 \cdot 6 = 18$
 $(-2) \cdot 4 = -8$
 $(-3) \cdot 6 = -18$

QUANTIDADE DE NÚMEROS EM UMA SEQUÊNCIA

- Ex.: Quantos números há entre $\{354, 355, \dots, 678\}$?
 $= 678 - 354 + 1 = 325$ números

Subtrair o maior do
menor e somar 1

ASPECTOS GERAIS

- Símbolo: $\mathbb{Q} = \{ p/q \mid p \in \mathbb{Z} \text{ e } p \in \mathbb{Z}^* \}$

PROPRIEDADE DA DENSIDADE

- Entre dois números racionais há **infinitos** outros números racionais

OPERAÇÕES

- Podemos definir **adição**, **subtração**, **multiplicação** e **divisão**
 inclui os números decimais finitos e infinitos (Dízimas periódicas)

conjuntos
CONJUNTOS
numéricos
NUMÉRICOS
= NÚMEROS RACIONAIS=

DÍZIMAS PERIÓDICAS

- Números decimais com **infinitas** casas decimais periódicas

- Ex.: 0,14141414 ...

$$32,12\overline{546} = 32,12546546\ldots$$

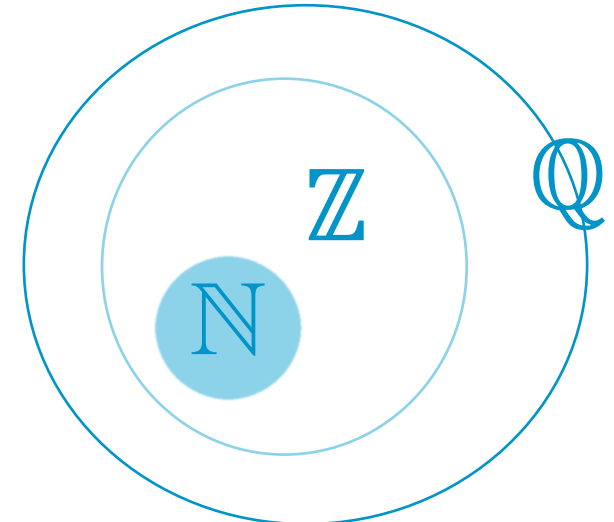
- Para transformar em fração:

- Ex.: $3,12\overline{851}$

1. "Número completo" = NC = 312.851
 2. "Núm. fora da barra" = NFB = 312
 3. Denominador = $\underbrace{999\ldots9}_{\text{Tantos quantos os números abaixo da barra}} \underbrace{000\ldots0}_{\text{Tantos quantos os números entre a vírgula e a barra}}$
- } para o numerador

- Fração $\rightarrow 3,12\overline{851} = \frac{312.851 - 312}{999} = \frac{312.539}{999}$

RELAÇÃO ENTRE CONJUNTOS



ASPECTOS GERAIS

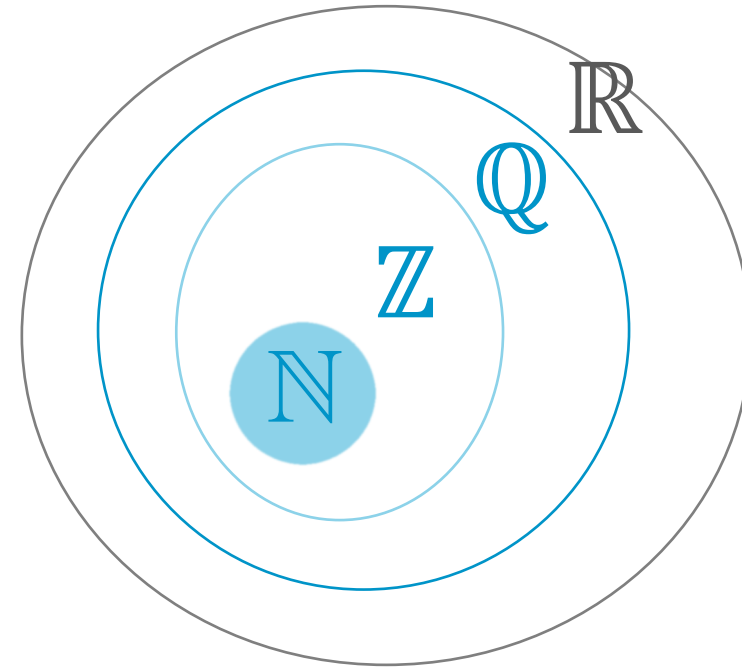
- Todos os números com representação decimal (finita/infinita, periódica/não periódica)

• Símbolo: $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \bar{\mathbb{Q}}$$

Irracionais (não podem ser escritos como fração)
Ex.: $\sqrt{2}, \pi$

RELAÇÃO ENTRE CONJUNTOS



conjuntos
numéricos
= NÚMEROS REAIS =

INTERVALOS REAIS

- $[a, b]$ = intervalo limitado fechado
(Inclui os extremos)
- (a, b) = intervalo limitado aberto
(não inclui os extremos)
- $[a, +\infty)$ = intervalo limitado fechado à esquerda
Infinito é sempre aberto
- $(-\infty, a)$ = intervalo limitado aberto à esquerda

radicais

ASPECTOS GERAIS

$$\cdot \sqrt[n]{a} = b \rightarrow b^n = a$$

n = índice | r = radicando | b = raiz

RAÍZES DE ÍNDICE PAR

- Não há raiz de um número negativo se o índice for **par**
 Não existe $\sqrt{-16}$ (nos números reais)

Um número positivo ou negativo elevado a um expoente par sempre resulta em um número **positivo**

RAÍZES DE ÍNDICE ÍMPAR

- Não há esse impedimento:
 $\sqrt[3]{-8} = -2$

PROPRIEDADES IMPORTANTE!

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES

- = eliminar os radicais do denominador da fração
 (Sem alterar seu valor)
- Deve-se **multiplicar** o numerador e denominador pelo **fator racionalizante**
- Lembre-se das **propriedades**

$$\cdot \sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{8\sqrt{2}}{2}$$

$$\cdot \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^{n-m}} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\frac{8}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{8}{\sqrt[5]{2^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^2}}$$

$$= \frac{8\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{8 \cdot \sqrt[5]{2^2}}{2}$$

$$\cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$$

$$\frac{6}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$$

$$= \frac{6 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2})}{5 - 2}$$

$$= \frac{6 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2})}{3}$$

$$= 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$$

CONCEITO

- Sentença matemática **aberta** que exprime uma relação de **igualdade**.  Tem uma variável

Ex.: $3x + 2 = 9$

$$\sqrt{2x + 1} = 7$$

$$2x + 4y = 5$$

- Não** são equações: $9^2 + 4^2 = 97$

$$4 + \sqrt{7} x \neq 3$$

INCÓGNITA → tem um valor fixo que queremos descobrir (= raiz da equação)

VARIÁVEL → pode assumir qualquer valor

CONJUNTOS IMPORTANTES

CONJUNTO UNIVERSO

- Todos os valores que uma variável pode assumir (U)

CONJUNTO VERDADE

- Elementos de U que satisfazem a equação



SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES

- Equações **equivalentes** → têm as mesmas raízes
- Para resolver → escreva uma série de equações equivalentes até isolar a incógnita.

Ex.: $3x - 1 = 8$

 inverte

$$3x = 8 + 1$$

 inverte

$$3x = 9$$

 inverte

$$x = \frac{9}{3} \rightarrow \boxed{x = 3}$$

ATENÇÃO!

Ao passar um termo para o outro lado da **=** inverte-se o sinal

-	→	+
+	→	-
x	→	:
:	→	x

EQUAÇÕES

DICA:

- Quando uma equação possuir **frações**, multiplique os **dois lados** pelo **MMC** dos **denominadores**.

Ex.: $\frac{2x}{3} + \frac{5}{2} = 4$ → MMC (2,3) = 6

$6 \left(\frac{2x}{3} + \frac{5}{2} \right) = 6 \cdot 4$  multiplicar os dois lados

$\cancel{2} \cancel{6} \cdot \frac{2x}{\cancel{3}} + \cancel{6} \cdot \frac{5}{\cancel{2}} = 6 \cdot 4$ Simplifique!

$$4x + 15 = 24$$

$$4x = 9 \rightarrow \boxed{x = \frac{9}{4}}$$

ASPECTOS GERAIS

- Equação que pode ser escrita como:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \text{ são números reais e } a \neq 0)$$

Ex.: $x^2 + 2x + 1 = 0$

$$x^2 = 9$$

CUIDADO!

$$\sqrt{9} = 3, \text{ mas } \sqrt{x^2} = |x|$$

$$\text{se } x^2 = 9$$

$$x = \pm \sqrt{9}$$

$$x = \pm 3 \quad \begin{cases} (-3)^2 = 9 \\ 3^2 = 9 \end{cases}$$

EQUAÇÕES DO 2º GRAU

SOLUÇÃO GERAL



$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

(delta)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$$

- Se
- $\Delta > 0$: 2 raízes reais e distintas
 - $\Delta = 0$: 2 raízes reais e iguais
 - $\Delta < 0$: não há raízes

QUADRADO PERFEITO



$$(ax + b)^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2$$

- Como identificar:

$$64x^2 + 80x + 25$$

$$= 8^2$$

$$= 5^2$$

Tire os quadrados

Multiplique por 2 $\rightarrow 2 \cdot 5 \cdot 8 = 80 \rightarrow$ Igual ao termo do meio

Logo, $= (8x + 5)^2$

CASOS ESPECIAIS

(solução imediata)

- $b = c = 0 \rightarrow ax^2 = 0 \rightarrow x = 0$

- $b = 0 \rightarrow ax^2 + c = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$

- $c = 0 \rightarrow ax^2 + bx = 0$

$$x(ax + b) = 0$$

$$ax + b = 0$$

$$x = \frac{-b}{a} \quad \text{ou} \quad x = 0$$

EQUAÇÕES do 2º grau

RELAÇÕES DE GIRARD

- Soma das raízes $\rightarrow S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$
- Produto das raízes $\rightarrow P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

$$a [x^2 - Sx + P] = 0$$

• Ex.: $3x^2 - 15x - 72 = 0$

↪ Raízes:

$x_1 = 8$
$x_2 = -3$

↪

$S = 5$
$P = -24$

Logo,

$$3x^2 - 15x - 72 = 3 (x^2 - 5x - 24)$$

FORMA FATORADA

• $a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

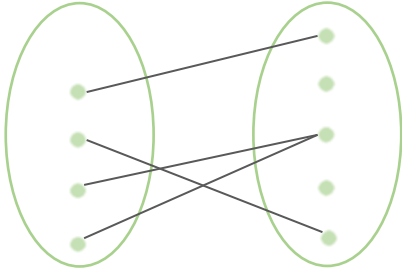
Ex.: $3x^2 - 15x - 72 = 0$

↪ Raízes:

$x_1 = 8$
$x_2 = -3$

$$3x^2 - 15x - 72 = 3 (x - 8) \cdot (x + 3)$$

DOMÍNIO E CONTRADOMÍNIO



Conjunto
domínio (A)
(De partida)

Conjunto
contradomínio (B)
(De chegada)

Usar o domínio mais amplo possível

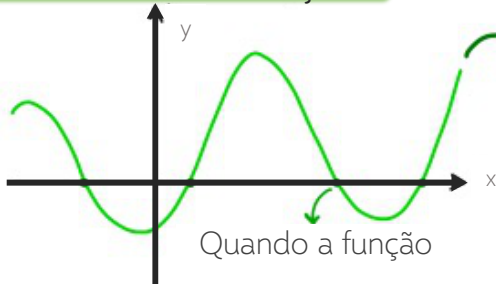
Para ser função, cada elemento de A deve se relacionar a um elemento em B (apenas uma vez)

IMAGEM

- Subconjunto do contradomínio
- Elementos de B associados a A pela função
- É a **projeção** do gráfico sobre o **eixo y**

$f(x)$ = Imagem do elemento x pela função y

ZERO DE UMA FUNÇÃO



Quando a função

Para encontrá-los:

Faça $f(x)=0$

Resolva a equação
resultante

funções = CONCEITOS =

QUALIDADES

FUNÇÃO SOBREJETORA

- Se e somente se o **contradomínio** é igual ao conjunto **imagem** (Todos os elementos no contradomínio recebem a cordinha de A)

FUNÇÃO INJETORA

- Se e somente se elementos distintos do domínio têm **imagens distintas**:

$$f(x_1) \neq f(x_2), \text{ se } x_1 \neq x_2$$

FUNÇÃO BIJETORA

- Se e somente se for **simultaneamente** sobrejetora e injetora

Só funções bijetoras admitem a existência de função inversa

FUNÇÃO PAR

$$f(x) = f(-x) \quad (\text{O eixo y é como um espelho})$$

- Todos os **expoentes** de $f(x)$ devem ser **pares**

FUNÇÃO ÍMPAR

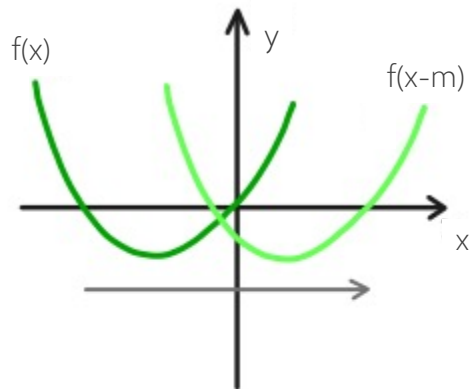
$$f(-x) = -f(x) \quad (\text{O gráfico é simétrico em relação à origem})$$

- Todos os **expoentes** de $f(x)$ devem ser **ímpares**

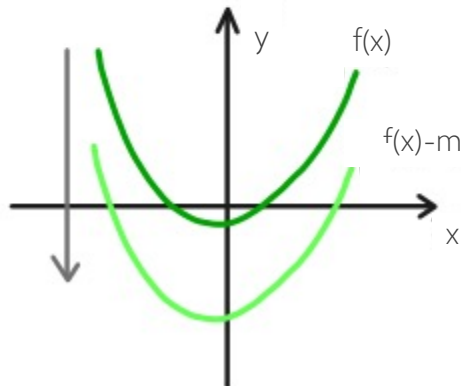
FUNÇÕES

TRANSLAÇÃO NO PLANO CARTESIANO

TRANSLAÇÃO HORIZONTAL

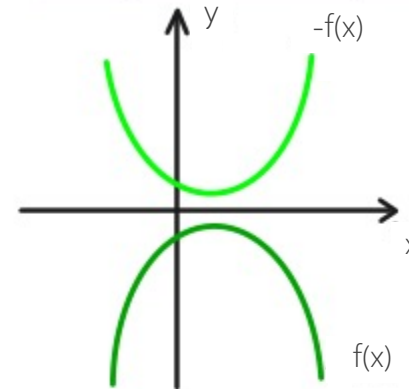


TRANSLAÇÃO VERTICAL

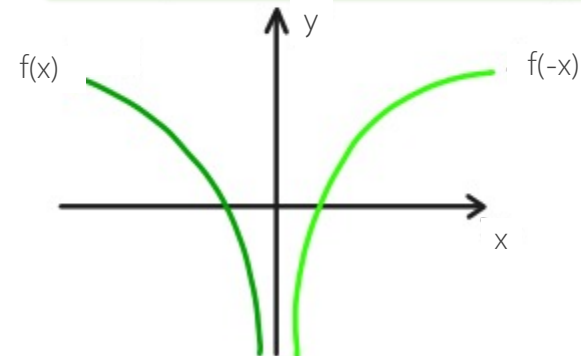


REFLEXÃO NO PLANO CARTESIANO

ROTAÇÃO EM RELAÇÃO AO EIXO X



ROTAÇÃO EM RELAÇÃO AO EIXO Y



DEFINIÇÃO:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

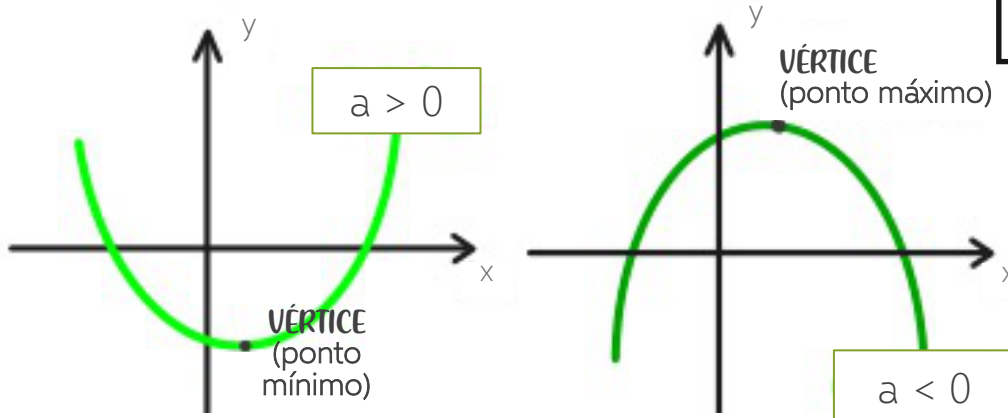
→ **a**: coeficiente dominante
(Único responsável pelo formato da parábola)

b: coeficiente do primeiro grau

c: termo independente (Ponto em que corta o eixo y)

Para calcular c, fazer $x=0$ → $f(0)=c$

CONCAVIDADE



RAÍZES

• São a **solução** da equação: $ax^2 + bx + c = 0$
(x_1, x_2)

$$x_i = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

em que $\Delta = b^2 - 4ac$

- $\Delta < 0$: não há raízes reais
- $\Delta = 0$: há 2 raízes reais e **iguais**
- $\Delta > 0$: há 2 raízes reais e **distintas**

FORMA FATORADA

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

VÉRTICE

$$x_{VÉRTICE} = \frac{-b}{2a}$$

$$y_{VÉRTICE} = \frac{-\Delta}{4a}$$

• Forma **canônica** da equação:

$$y = a(x - x_{VÉRTICE})^2 + y_{VÉRTICE}$$

• Se $\Delta > 0$:

$$x_{VÉRTICE} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

→ É o ponto médio entre as duas raízes

funções
= 2º GRAU =

INEQUAÇÕES

ASPECTOS GERAIS

- Sentenças com incógnita x :

$$f(x) > g(x)$$

$$f(x) < g(x)$$

$$f(x) \geq g(x)$$

$$f(x) \leq g(x)$$

SOLUÇÃO

- = valores que tornam a sentença **verdadeira**

CONJUNTO SOLUÇÃO (S)

- $S = \emptyset$ se não houver solução
- $S = \mathbb{R}$ se qualquer número real for solução

- Para resolver, opere como uma equação

➡ Para inverter o sinal da inequação, ($< \leftrightarrow >$) multiplicar ambos os lados por **-1**

- $[] \rightarrow$ intervalo **fechado** (Inclui extremidades)
- $() \rightarrow$ intervalo **aberto** (Não inclui as extremidades)

INEQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

- Ex.: $f(x) > g(x) > h(x)$

- Para resolvê-las:

- Decomponha o sistema em **duas** inequações simultâneas conectadas por "e":

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > h(x) \end{cases}$$

- Conjunto solução: = **interseção** dos conjuntos solução das inequações que o compõem

INEQUAÇÕES

= 2º GRAU =

ASPECTOS GERAIS

• Sendo $f(x)$ uma **função quadrática**:

$$f(x) > 0$$

$$f(x) < 0$$

$$f(x) \geq 0$$

$$f(x) \leq 0$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

SOLUÇÃO

= fazer um **estudo de sinal** de $f(x)$
(Ver quando ela é negativa e quando é positiva)

1. Determinar a **concavidade**:

$a > 0$	$a < 0$
Positivo = feliz	Negativo = triste
	

(Depende do sinal de a)

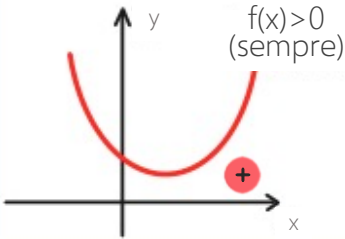
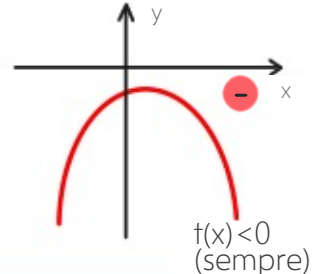
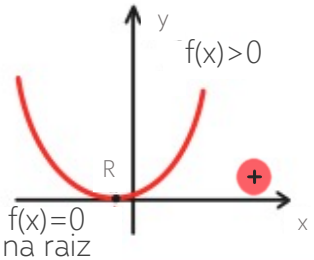
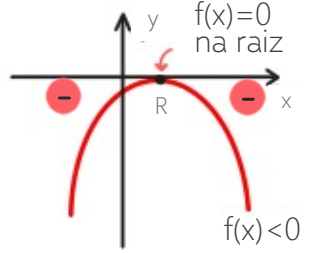
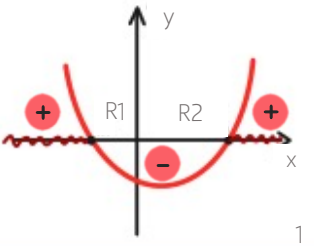
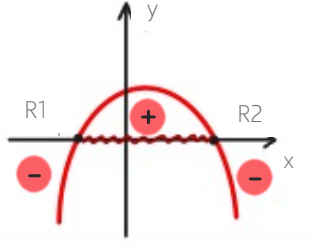
2. Calcular o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$

- $\Delta < 0$: não há raízes reais
- $\Delta = 0$: há 2 raízes reais e **iguais**
- $\Delta > 0$: há 2 raízes reais e **distintas**

3. Calcular seus zeros/**raízes**

4. Encaixar em alguma das situações do **quadro ao lado**.

IMPORTANTE!

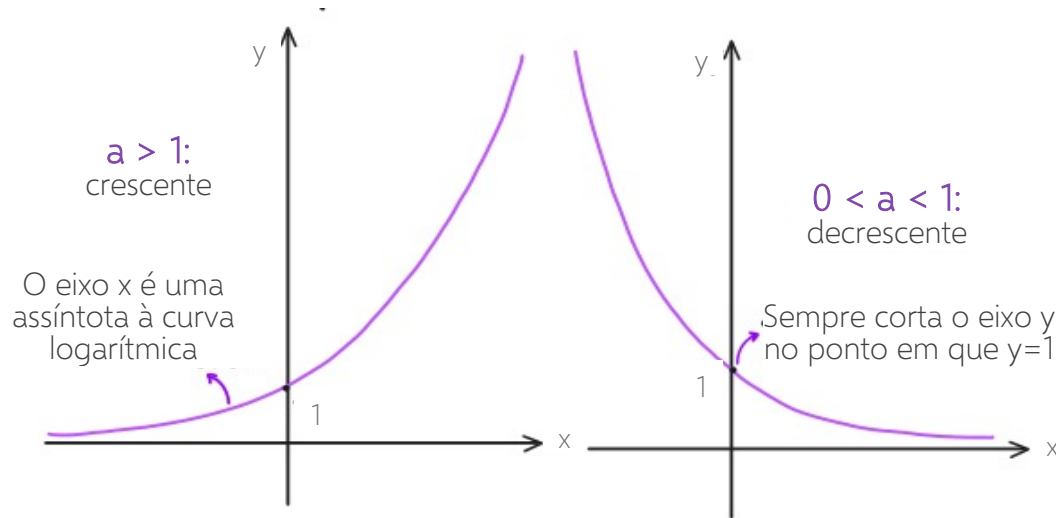
	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta < 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta > 0$		

função exponencial

ASPECTOS GERAIS

- $f(x) = a^x$, em que a é um número real tal qual $a > 0$ e $a \neq 1$
- Domínio: $\mathbb{R}$ (Números reais)
- Imagem: $\mathbb{R}_+^*$ (Números reais positivos)

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA



O NÚMERO e:

- É o número de Euler;
 $e = 2,718281\dots$
- É um número irracional

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$y = e^x \quad (y = \exp(x))$$

EQUAÇÕES EXPONENCIAIS



ASPECTOS GERAIS

- = equações em que a **incógnita** se encontra no **expoente**

Para **solucionar**: reescrever de modo que se chegue a uma igualdade de potências de mesma base.

• Ex.:

• $2^x = 128$

$2^x = 2^7 \rightarrow x = 7$

• $3^x = 1/81$

$3^x = 3^{-4} \rightarrow x = -4$

EQUAÇÕES EXPONENCIAIS + LOGARÍTMOS

- Com o uso da operação de logaritmo, **não** é necessário tentar chegar a uma igualdade de potências de **mesma base**

$$b^x = a$$

$$\log_b b^x = \log_b a$$

$$x \cdot \log_b b^1 = \log_b a$$

$$x = \log_b a$$

Aplique o logaritmo em ambos os lados da equação

• Ex.: $5^{3x-2} = 4$

$$\frac{5^{3x}}{5^2} = 4$$

$$5^{3x} = 25 \cdot 4$$

$$(5^3)^x = 100$$

$$125^x = 100$$

$$\log_{125} 125^x = \log_{125} 100$$

$$x = \log_{125} 100$$

• $6^{\sqrt{x}} = 2$

$$\log_6 6^{\sqrt{x}} = \log_6 2$$

$$(\sqrt{x})^2 = (\log_6 2)^2$$

$$x = (\log_6 2)^2$$

INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS

ASPECTOS GERAIS

- = inequações em que a **incógnita** se encontra no **expoente**.
- Sendo $f(x) = a^x$
 - $a > 1$: se $x > y \rightarrow a^x > a^y$ (crescente)
 - $0 < a < 1$: se $x > y \rightarrow a^x < a^y$ (decrescente)

PROCEDIMENTO PARA SOLUÇÃO

- Reduzir todos os membros a uma **base comum**
- **Base > 1**: o sentido da desigualdade se mantém
Ex.: $2^x > 2^3$
 $x > 3$
- **Base < 1**: Inverter o sentido da desigualdade
Ex.: $(1/2)^x > (1/2)^3$
 $x < 3$

EXEMPLOS

$$\begin{aligned} 2^{3x-2} &< 8 \\ 2^{3x-2} &< 2^3 \\ 3x-2 &< 3 \\ x &< 5/3 \end{aligned}$$

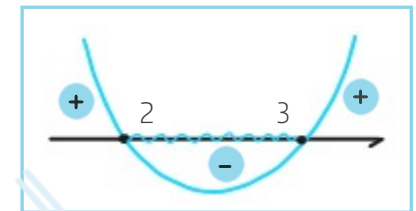
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5/3\} = (-\infty, 5/3)$$

$$\begin{aligned} 2^{x^2-5x} &\leq 1/64 \\ 2^{x^2-5x} &\leq 2^{-6} \\ x^2-5x &\leq -6 \\ x^2-5x+6 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\} = [2, 3]$$

$$\begin{aligned} (1/3)^x &\geq 27 \\ (1/3)^x &\geq (1/3)^{-3} \\ x &\leq -3 \end{aligned}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\} = (-\infty, -3]$$



DEFINIÇÃO

- Logaritmo = Expoente
- Ex.: $\log_3 9$ = qual **expoente** devemos dar ao 3 para resultar em 9

$$3^2 = 9 \rightarrow \log_3 9 = 2$$

$$\log_b a \rightarrow b^x = a$$

- **a**: logaritmando (positivo)
- **b**: base (positivo e $\neq 1$)
- **x**: logaritmo (qualquer número real)

BASES ESPECIAIS

- Logaritmos decimais
- $\log_{10} x = \log x$ → Se a base não estiver explícita
- Logaritmos neperiano = natural

Base: $e = 2,718281$

$$\log_e x = \ln x$$

Logaritmos

PROPRIEDADES IMPORTANTES

- Logaritmo de 1 em qualquer base é igual a zero
- Logaritmo da própria base é 1
- Ex.: $\log_8 8 = 1$
- $\log_a x = \log_a y$ se e somente se $x = y$

LOGARÍTMO DA POTÊNCIA

$$\log_a x^y = y \cdot \log_a x$$

LOGARITMO DO PRODUTO

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

(Verdadeira em ambos os sentidos!)

LOGARITMO DO QUOCIENTE

$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$$

(Verdadeira em ambos os sentidos!)

Logaritmos

= MUDANÇA DE BASE =

MUDANÇA DE BASE

Efetua-se uma **divisão** com a base desejada:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

c = nova base

Ex.: $\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$

EXPOENTE NA BASE

$$\log_{b^n} x = \frac{\log_b x}{\log_b b^n} = \frac{\log_b x}{n \cdot \log_b b}$$

$\therefore \log_{b^n} x = \frac{\log_b x}{n}$ =1

PERMUTAR BASE E LOGARITMANDO

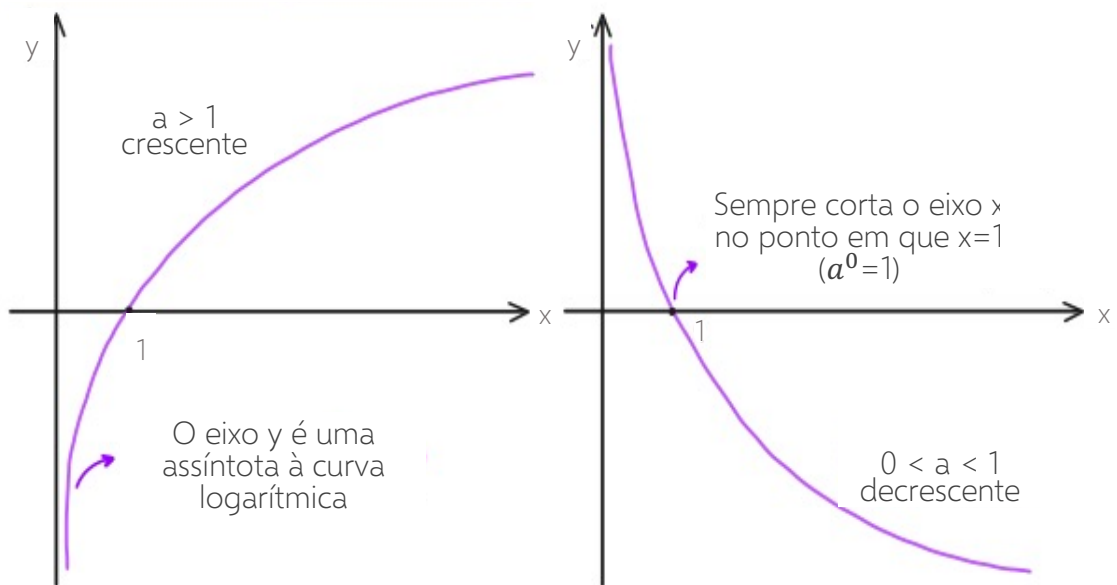
$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

ASPECTOS GERAIS

- $y = \log_a x$ (É a inversa da função exponencial)
- Pode se reescrita como $a^y = x$
- Domínio: $\mathbb{R}_+^*$ (Números reais positivos)
- Imagem: $\mathbb{R}$ (Números reais)
- Condição de existência do logaritmo:
 $a \neq 1$
 Logaritmando > 0

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA



EQUAÇÃO LOGARÍTMICA

ASPECTOS GERAIS

= equações em que a **incógnita** se encontra no **logaritmando**

Para solucionar: usar a operação de exponenciação para "tirar" o logaritmo

IMPORTANTE LEMBRAR:

- $\log_b x = a \iff x = b^a$
- se $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, então $f(x) = g(x)$
- O logaritmando é positivo
- A base é positiva e diferente de 1

EXEMPLOS:

$$\bullet \log_3(4x + 5) = 4$$

$$3^{\log_3(4x+5)} = 3^4$$

$$4x + 5 = 81$$

$$\therefore x = 19$$

$$\bullet \log_4 \overbrace{(4x + 5)}^{f(x)} = \log_4 \overbrace{(2x + 11)}^{g(x)}$$

$$f(x) = g(x)$$

$$4x + 5 = 2x + 11$$

$$2x = 6$$

$$\therefore x = 3$$

$$\bullet \log_3(2x + 1) + \log_3(x - 1) = 3$$

$$\log_3[(2x + 1) \cdot (x - 1)] = 3 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Logaritmo do produto} = \\ \text{soma dos logaritmos} \end{array} \right)$$

$$3^{\log_3[(2x+1) \cdot (x-1)]} = 3^3$$

$$(2x + 1) \cdot (x - 1) = 27$$

$$2x^2 - x - 28 = 0 \rightarrow x = 4 \text{ ou } x = \frac{-7}{2}$$

para $x = \frac{-7}{2}$, o logaritmando fica < 0 (não pode!)

$$\text{logo, } x = 4$$

ATENÇÃO!

é preciso substituir na equação original para verificar a existência dos logaritmos

INEQUAÇÃO LOGARÍTMICA

ASPECTOS GERAIS

= inequações em que a **incógnita** se encontra no **logaritmando**

sendo $f(x) = \log_a x$

$a > 1$: se $x > y \rightarrow \log_a x > \log_a y$
(crescente)

$0 < a < 1$: se $x > y \rightarrow \log_a x < \log_a y$
(decrescente)

PROCEDIMENTO PARA SOLUÇÃO

- Reduzir todos os membros a uma **base comum**
($k = \log_a a^k$)
- **Base > 1**: o sentido da desigualdade se **mantém**
Ex.: $\log_a x > \log_a y \rightarrow y > x$
- **Base < 1**: **inverter** o sentido da desigualdade
Ex.: $\log_a x > \log_a y \rightarrow x < y$

EXEMPLOS

• $\log_3(2x - 4) \leq \log_3 8$

$2x - 4 \leq 8$ ↩ Manter o sinal

$x < 6$

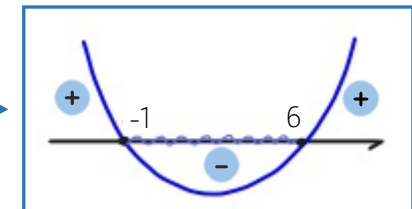
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 6\} = [-\infty, 6]$

• $\log_{1/2}(x^2 - 5x) \geq \log_{1/2} 6$

$x^2 - 5x \leq 6$ ↩ Inverter o sinal

$x^2 - 5x - 6 \leq 0$

$-1 \leq x \leq 6$

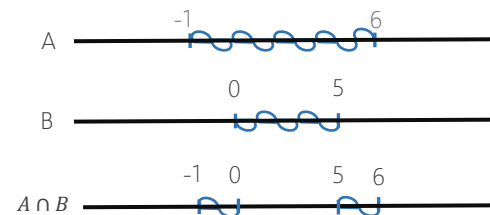


- O **logaritmando** deve ser positivo *

$x^2 - 5x > 0 \rightarrow x < 0 \text{ ou } x > 5$

- A solução será a **interseção** dos intervalos:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 0 \text{ ou } 5 < x \leq 6\} = [-1, 0) \cup (5, 6]$



*

ATENÇÃO!

Lembre-se sempre de verificar a condição de existência do logaritmo (logaritmando > 0)

MONÔMIOS

(Termos algébricos)

= número/ produto de números em que alguns deles são representados por **letras**

- Ex.: $-5xy^2$ $3x$
↘ coeficiente ab^2c ↘ parte literal

OPERAÇÕES

- Opere os coeficientes e repita a parte literal (Monômios semelhantes)
- Ex.: $2x + 3xy + 4y^2 + 3x - 5xy$
 $= (2 + 3)x + (3 - 5)xy + 4y^2$ Simplifique!
 $= 5x - 2xy + 4y^2$



DECORE!

PRODUTOS NOTÁVEIS

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

POLINÔMIOS

= monômio ou soma de monômios não semelhantes

- Ex.: $3x - 14$ $2x^2 - 4y$
- Polinômios especiais: (Não tendo termos semelhantes)
 - Monômio: 1 termo ($3x$)
 - Binômio: 2 termos ($7x^2 + 5xy$)
 - Trinômio: 3 termos ($2x + 3xy + 4y^2$)

polinômios

OPERAÇÕES

Multiplicação:

Monômio x Polinômio

Multiplica cada um dos termos $\rightarrow 3x \cdot (2x^2 + 8x + 5)$
 $= 6x^3 + 24x^2 + 15x$

Polinômio x Polinômio

Cada termo multiplica cada um dos termos $\rightarrow (2x + 3) \cdot (-3x + 4)$
 $= (-6x^2 + 8x) + (-9x + 12)$
 $= -6x^2 - x + 12$

Divisão:

Dividendo = Quociente . Divisor + Resto

Resolva nessa ordem!

$$\begin{array}{r}
 -15x^3 + 29x^2 - 33x + 28 \quad \underline{3x - 4} \\
 +15x^3 - 20x^2 \quad \quad \quad \underline{-5x^2 + 3x - 7} \\
 \hline
 9x^2 - 33x + 28 \quad \text{quociente} \\
 -9x^2 + 12x \quad \quad \quad \underline{-21x + 28} \\
 \hline
 -21x + 28 \\
 +21x - 28 \quad \quad \quad \underline{0} \\
 \hline
 0 \rightarrow \text{resto}
 \end{array}$$

REPRESENTAÇÃO

- Matriz $m \times n$ = tabela retangular formada por números reais distribuídos em:

- m linhas
- n colunas

$$\begin{bmatrix} a & b & \dots & z \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k & \dots & \dots & j \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} a & b & \dots & z \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k & \dots & \dots & j \end{bmatrix}} \right\} m \\ \left. \vphantom{\begin{bmatrix} a & b & \dots & z \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k & \dots & \dots & j \end{bmatrix}} \right\} n \end{matrix}$$

- Elemento = a_{ij}

$$\mathcal{M} = (a_{ij}) . m \times n \text{ (Linha } i \text{ coluna } j)$$

MATRIZES ESPECIAIS

RETANGULAR

$$= m \neq n$$

QUADRADA

$$= m = n \rightarrow \text{matriz quadrada de ordem } n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

diagonal secundária

diagonal principal

Traço = soma dos elementos da diagonal principal

LINHA

$$= m = 1$$

$$\begin{bmatrix} a & b & \dots & z \end{bmatrix}$$

n

COLUNA

$$= n = 1$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

m

matrizes

MATRIZES ESPECIAIS

DIAGONAL

- = matriz quadrada cujos elementos que **não** pertencem à **diagonal principal** são **nulos**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

IDENTIDADE

- = matriz **diagonal** cujos elementos da **diagonal principal** são 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$I_n = \text{matriz identidade de ordem } n$

ESCALAR

- = matriz **diagonal** cujos elementos da **diagonal principal** são **iguais**

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

NULA

- = **todos** seus elementos são **nulos**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRIZES ESPECIAIS

(continuação)

MATRIZES

MATRIZ SIMÉTRICA

- = Matriz quadrada de ordem n tal que $a_{ij} = a_{ji}$, para todo i e todo j
- A **diagonal** principal atua como um **eixo de simetria** (não há restrição aos elementos da diagonal principal)

$$\begin{bmatrix} 9 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ ANTI-SIMÉTRICA

- = Matriz quadrada de ordem n tal que $a_{ij} = -a_{ji}$, para todo i e todo j
- A **diagonal** principal deve ser formada por **zeros**

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 9 \\ -3 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRIZ OPOSTA

- = Quando a soma das duas matrizes resulta em uma **matriz nula**
- $A + B = \text{Matriz Nula}$
- $a_{ij} = -b_{ij}$
- A matriz oposta de **A** é **-A**

TRIANGULAR SUPERIOR

- = Matriz quadrada em que todos os elementos **abaixo** da diagonal principal são **nulos** ($a_{ij}=0$, para $i > j$)

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TRIANGULAR INFERIOR

- = Matriz quadrada em que todos os elementos **acima** da diagonal principal são **nulos** ($a_{ij}=0$, para $i < j$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZES

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE MATRIZES

- Só se dá entre matrizes do **mesmo tipo** (Mesmo número de linhas e colunas)
- O resultado também é uma matriz do **mesmo tipo**

$$C = A + B$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Faz-se a operação termo a termo

PROPRIEDADES

- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + B = B + A$
- É o equivalente para a **subtração**

$$C = A - B$$

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

• Ex.:

$$\begin{bmatrix} 9 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 4 \\ 11 & 6 & 7 \\ 2 & 14 & 5 \end{bmatrix}$$

PRODUTO DE UM NÚMERO POR MATRIZ

- Para **multiplicar** uma matriz A por um número real **k**, basta multiplicar **todos os elementos** de A (a_{ij}) por k

• Ex.:

$$k=3$$

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow k.A =$$

$$= 3 \cdot \begin{bmatrix} 9 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 24 & 0 \\ 24 & 12 & 21 \\ 0 & 21 & 3 \end{bmatrix}$$

MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

- Para multiplicar duas matrizes A, B, é necessário que o número de **colunas de A** seja igual ao de **linhas de B**

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p}$$

as dimensões do meio devem coincidir

ATENÇÃO! Nem sempre é possível multiplicar duas matrizes

DIMENSÕES DA MATRIZ RESULTANTE

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

As dimensões das extremidades vão para a matriz resultante

•Ex.:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 3 & -3 & -4 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{4 \times 3} = \begin{bmatrix} 15 & 28 & 39 \\ 1 & 21 & 28 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$= 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 4$
 $= 1 + 0 + (-6) + 20 = 15$

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^n a_{ir} \cdot a_{rj}$$

matrizes

PROPRIEDADES

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (Associativa)
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (Distributiva em relação à adição)
- $(kA) \cdot B = A(kB) = k \cdot (A \cdot B)$
- $I \cdot A = A \cdot I = A$ (Sendo A uma matriz quadrada)

→ A matriz identidade é o elemento neutro da multiplicação de matrizes quadradas

POTENCIALIZAÇÃO DE MATRIZES

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \dots A}_{n \text{ fatores}} \quad \begin{aligned} &\bullet A^1 = A \\ &\bullet A^0 = 1 \end{aligned}$$

MATRIZES

MATRIZ TRANSPOSTA

- Seja $A = (a_{ij})_{m \times n}$, sua transposta será $A^t_{n \times m}$ a matriz que se obtém **trocando** as **linhas** pelas **colunas**

- Ex.:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}}_A \quad \underbrace{\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}}_{A^t}$$

PROPRIEDADES DECORE!

- $(A^t)^t = A$
- $(A + B)^t = A^t + B^t$ (Sendo A e B matrizes do mesmo tipo)
- $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$
- $(A \cdot B)^t = A^t \cdot B^t$ (Sendo A e B matrizes que podem ser multiplicadas)
- Matriz simétrica: $A^t = A$
- Matriz antissimétrica: $A^t = -A$

MATRIZES INVERSAS

- Seja A uma matriz **quadrada** de ordem n , e B sua inversa:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

$(B = A^{-1})$

- Se A **não** é inversível = matriz **singular**

PROPRIEDADES

(Sendo A e B matrizes quadradas de mesma ordem e inversíveis)

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

- MATRIZ ORTOGONAL** → se a inversa da matriz é igual a sua transposta. $(A^{-1} = A^t)$

DETERMINANTES



CÁLCULO

ORDEM 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\det A = a \cdot d - b \cdot c$$

ORDEM 3

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

TÉCNICA DE SAURUS

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$\det A$

$$= a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - (c \cdot e \cdot g + a \cdot f \cdot h + b \cdot d \cdot i)$$



Soma dos produtos no sentido da diagonal principal

- Soma dos produtos no sentido contrário

ASPECTOS GERAIS

- = número associado a uma matriz.
- Apenas **matrizes quadradas** admitem seu cálculo
- Denotado por $\det A$

MENOR COMPLEMENTAR

- Menor complementar do elemento a_{ij} é D_{ij} = determinante da matriz que se obtém **suprimindo-se** a **linha i** e a **coluna j**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & \pi \end{bmatrix} \rightarrow D_{1,3} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

PROPRIEDADES



DECORE!

- Se os elementos de **uma fila** qualquer (Linha ou coluna) forem **todos nulos** → $\det A = 0$
- Se A Tem duas **filas paralelas** (Linha ou coluna) formadas por elementos **iguais** → $\det A = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 2\pi & \sqrt{37} & 2\pi \\ 1 & 2 & 1 \\ 15 & -1,37 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \det A = 0$$

- Se A tem duas **filas paralelas** (Linha ou coluna) formadas por elementos **proporcionais** → $\det A = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 2\pi & \sqrt{37} & 4\pi \\ 1 & 2 & 2 \\ 15 & -1,37 & 30 \end{bmatrix} \rightarrow \det A = 0$$

- Se uma matriz quadrada A tem uma linha (ou coluna) que é **combinação linear** de outras linhas (ou colunas) → $\det A = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 19 \\ 3 & 2 & 12 \\ 1 & 7 & 23 \end{bmatrix} \rightarrow \det A = 0$$

Coluna 3 = 2 . Coluna1 + 3 . Coluna 2

DETERMINANTES



- Se A é uma matriz quadrada: $\det A = \det A^t$
- Se

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} a & b & k \cdot c \\ d & e & k \cdot f \\ g & h & k \cdot i \end{bmatrix}$$

(Qualquer coluna)

$$A'' = \begin{bmatrix} a & b & c \\ k \cdot d & k \cdot e & k \cdot f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

(Qualquer linha)

$$\det A' = \det A'' = k \cdot \det A$$

- Se A é uma matriz quadrada (Ordem > 2), ao **trocarmos duas filas** (Linha ou coluna) de posição, o determinante troca de sinal.
- O determinante de uma **matriz triangular** ou diagonal é o **produto** dos elementos da **diagonal principal**.

DETERMINANTES

COFATORES

- Cofator do elemento a_{ij} é o número A_{ij} , tal que :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Menor complementar de A_{ij}

TABELA DE SINAIS 3 X 3

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

TABELA DE SINAIS 4 X 4

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$



ATENÇÃO!

ESCOLHA BEM A FILA !

(uma com muitos zeros ou números inteiros, menores ...)

TEOREMA DE LAPLACE

- O **determinante** de uma matriz A (Ordem >1) é a **soma dos produtos** dos elementos de **uma fila** qualquer (linha ou coluna) pelos seus respectivos **cofatores**.

PASSO A PASSO

1. Escolher uma fila qualquer (Linha ou coluna)
2. Calcular os cofatores dos elementos da fila
3. Multiplicas cada elemento por seu cofator
4. Somar os resultados

SISTEMAS LINEARES

ASPECTOS GERAIS

EQUAÇÃO LINEAR:

$$ax + by + cz + \dots = k$$

coeficiente

termo independente

- Os **expoentes** das incógnitas devem ser 1
- **Não** pode haver **produto** de incógnitas

SISTEMAS LINEARES

- Conjunto de equações lineares

REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = k_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = k_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO

- = Conjunto de números que é **solução de todas** as equações que compõem sistema
- Ex.: $\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$
 Solução: (2,1) (x=2 | y=1)

CLASSIFICAÇÕES

POSSÍVEL

- = Sistema que admite solução pode ser:
 - **Determinado**: a solução é única
 - **Indeterminado**: Há infinitas soluções

IMPOSSÍVEL

- = **não** admite solução
 O conjunto solução é $S = \emptyset$ (vazio)

HOMOGÊNEO

- = o **termo independente** de cada equação é zero
 $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$
- Todo sistema linear homogêneo é possível:
 - Solução Trivial: Todas as incógnitas = 0

SISTEMAS LINEARES

TEOREMA DE CRAMER

- Seja o sistema representado pelas matrizes:

(O número de incógnitas deve ser igual ao número de equações)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

A matriz incompleta é uma matriz quadrada

D = determinante da matriz incompleta

D_x = determinante da matriz incompleta substituindo a coluna de x pelos termos independentes

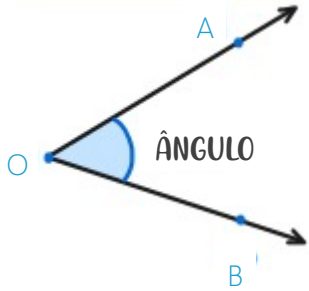
$$D_x = \begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} D_y \text{ e } D_z \text{ são o} \\ \text{equivalente para } y \text{ e } z \end{array} \right)$$

DETERMINANTES	TIPO DE SISTEMA
$D \neq 0$	possível e determinado
$D = D_x = D_y = D_z = \dots = 0$	possível e indeterminado
$D = 0$ e algum $D_i \neq 0$	impossível

- Se $D \neq 0$, a **solução** do sistema será:

$$x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D} \quad z = \frac{D_z}{D}$$

ASPECTOS GERAIS



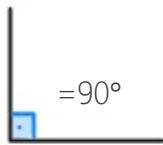
- **Ângulo** = reunião de duas semirretas de mesma origem
- Podem ser expressos em **graus** ($^{\circ}$) ou **radianos** (rad)

$$180^{\circ} \Leftrightarrow \pi \text{ rad}$$

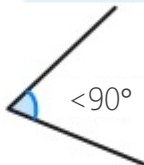
$$360^{\circ} \Leftrightarrow 2\pi \text{ rad}$$

CLASSIFICAÇÃO

RETO



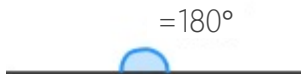
AGUDO



OBTUSO



RASO



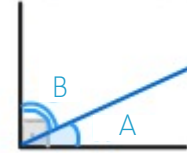
ÂNGULOS

RELAÇÕES ENTRE OS ÂNGULOS



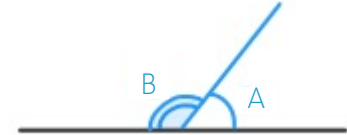
ÂNGULOS COMPLEMENTARES

= a **soma** de suas medidas é 90°



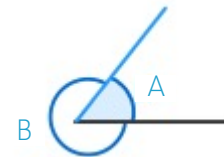
ÂNGULOS SIPLEMENTARES

= a **soma** de suas medidas é 180°



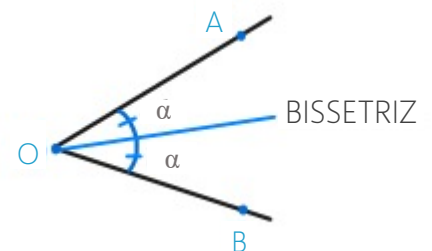
ÂNGULOS REPLEMENTARES

= a **soma** de suas medidas é 360°



BISSETRIZ DE UM ÂNGULO

= semirreta interna ao ângulo e que o **divide** em dois ângulos congruentes



ÂNGULOS

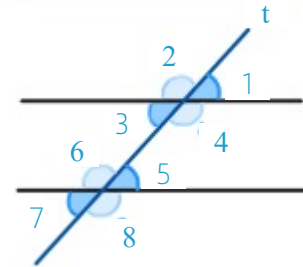
PARALELISMO

Duas retas são paralelas se:

- São $\left\{ \begin{array}{l} \text{coincidentes (iguais)} \text{ ou} \\ \text{coplanares (Pertencem ao mesmo plano)} \end{array} \right.$
- Não têm pontos comuns



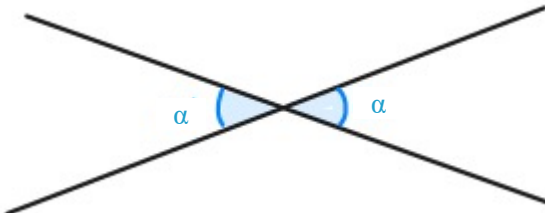
ÂNGULOS E RELAÇÕES IMPORTANTES



- Ângulos 1, 3, 5, 7 são **congruentes** entre si
- Ângulos 2, 4, 6, 8 são **congruentes** entre si
- Ângulos 1, 3, 5, 7 e 2, 4, 6, 8 são **suplementares** entre si

ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE

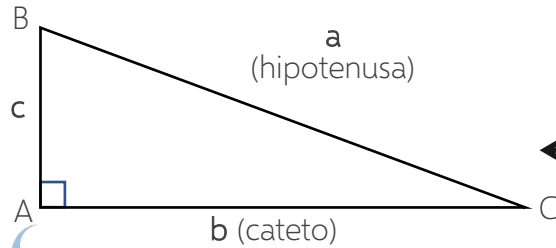
- os lados de um são semirretas **opostas** dos lados do outro
- São sempre **congruentes** (Têm a mesma medida)



LEI ANGULAR DE TALES CAI MUITO!

A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°

TRIÂNGULO RETÂNGULO



$$A + B + C = 180^\circ$$

$$B + C = 90^\circ$$

São ângulos complementares

ÂNGULO	CATETO OPOSTO	CATETO ADJACENTE
$\hat{C}$	c	b
$\hat{B}$	b	c

- Os ângulos podem ser expressos em graus ($^\circ$) ou radianos (rad)

$$180^\circ \Leftrightarrow \pi \text{ rad}$$

$$360^\circ \Leftrightarrow 2\pi \text{ rad}$$

TEOREMA DE PITÁGORAS



CAI MUITO!

$$a^2 = b^2 + c^2$$

trigonometria

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

SENO

= razão entre o cateto oposto ao ângulo e hipotenusa

$$\sin(\hat{B}) = \frac{b}{a}$$

$$\sin(\hat{C}) = \frac{c}{a}$$

COSSENO

= razão entre o cateto adjacente ao ângulo e hipotenusa

$$\cos(\hat{B}) = \frac{c}{a}$$

$$\cos(\hat{C}) = \frac{b}{a}$$

TANGENTE

= razão entre o cateto oposto ao ângulo e cateto adjacente

$$\tan(\hat{B}) = \frac{b}{c}$$

$$\tan(\hat{C}) = \frac{c}{b}$$

ÂNGULOS NOTÁVEIS



DECORE!

	30°	45°	60°
SENO	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
COSSENO	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
TANGENTE	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

TRIGONOMETRIA

RELAÇÕES ENTRE SENO, COSSENO E TANGENTE

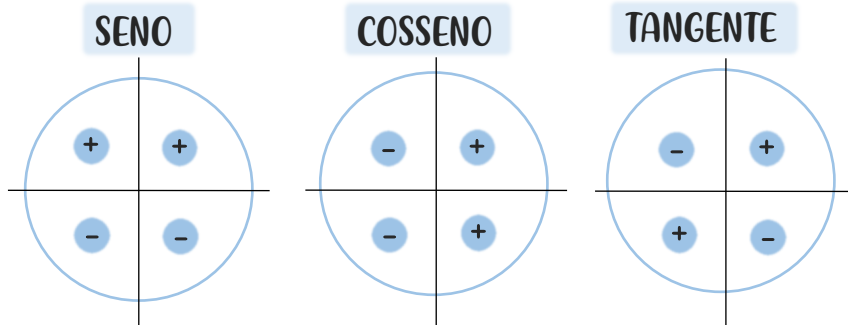
$$\text{sen}^2 \hat{B} + \text{cos}^2 \hat{B} = 1 \quad (\text{Relação fundamental da trigonometria})$$

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{\text{sen } \hat{B}}{\text{cos } \hat{B}}$$

ATENÇÃO!

Quando $\text{cos} B = 0$,
a $\text{tg} B$ não existe

SINAL DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS



SOMA E SUBTRAÇÃO DE ÂNGULOS

- $\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \text{cos } b + \text{sen } b \cdot \text{cos } a$
- $\text{sen}(a - b) = \text{sen } a \cdot \text{cos } b - \text{sen } b \cdot \text{cos } a$
- $\text{cos}(a + b) = \text{cos } a \cdot \text{cos } b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$
- $\text{cos}(a - b) = \text{cos } a \cdot \text{cos } b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

NOME DOS POLÍGONOS

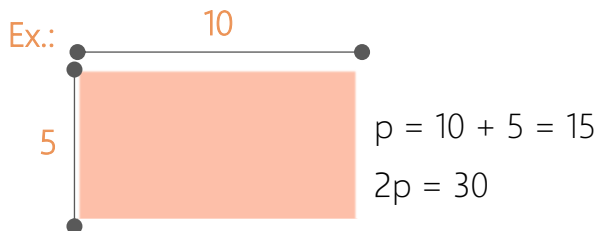
NÚMEROS DE LADOS	NOMES
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

PERÍMETRO



= Soma de seus lados

Perímetro: $2p$
Semiperímetro: p



geometria
= POLÍGONOS =

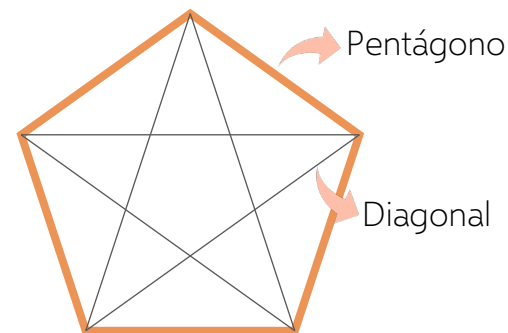
POLÍGONO REGULAR

= Se e somente se é:

- Equilátero (Todos os lados têm a mesma medida) e
- Equiângulo (Todos os ângulos têm a mesma medida)

POLÍGONO REGULAR

- Diagonal = segmento cujas extremidades são vértices não consecutivos do polígono



Número de lados

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Número de diagonais

Ex.:

Número de diagonais (D) do icosaágono:

$$D_{20} = \frac{20(20-3)}{2} = 170$$

SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS

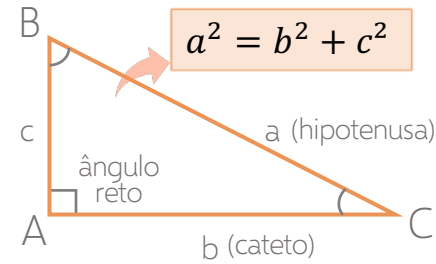
$$S_i = 180^\circ \cdot (n - 2)$$

= a medida de cada ângulo de um polígono convexo de n lados:

$$A_i = \frac{180^\circ \cdot (n - 2)}{n}$$

GEOMETRIA

TEOREMA DE PITÁGORAS

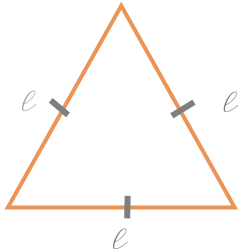


CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS

QUANTOS AOS LADOS

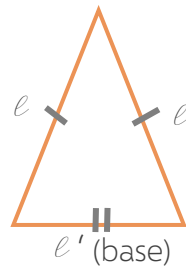
TRIÂNGULO EQUILÁTERO

(Todos os lados são congruentes)



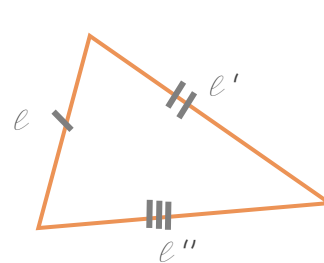
TRIÂNGULO ISÓCELES

(Tem dois lados congruentes)



TRIÂNGULO ESCALENO

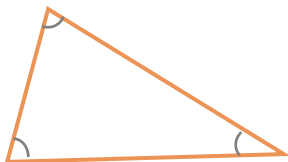
(Os três lados são não congruentes)



QUANTOS AOS ÂNGULOS

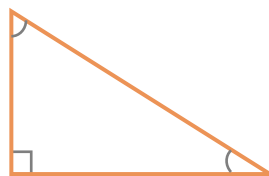
TRIÂNGULO ACUTÂNGULO

(Todos os três ângulos agudos)



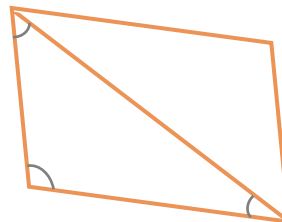
TRIÂNGULO RETÂNGULO

(Tem um ângulo reto)



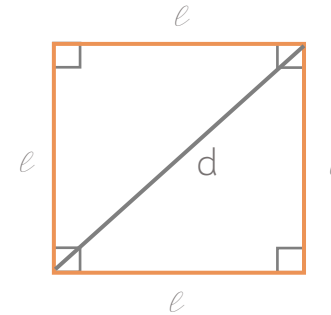
TRIÂNGULO OBTUSÂNGULO

(Tem um ângulo obtuso)



APLICAÇÕES:

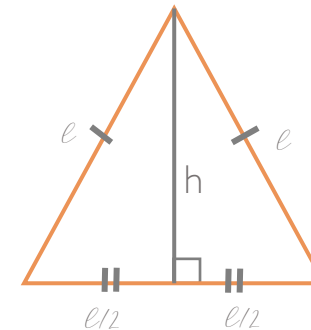
DIAGONAL DO QUADRADO



$$d^2 = l^2 + l^2$$

$$d = l \cdot \sqrt{2}$$

ALTURA DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO



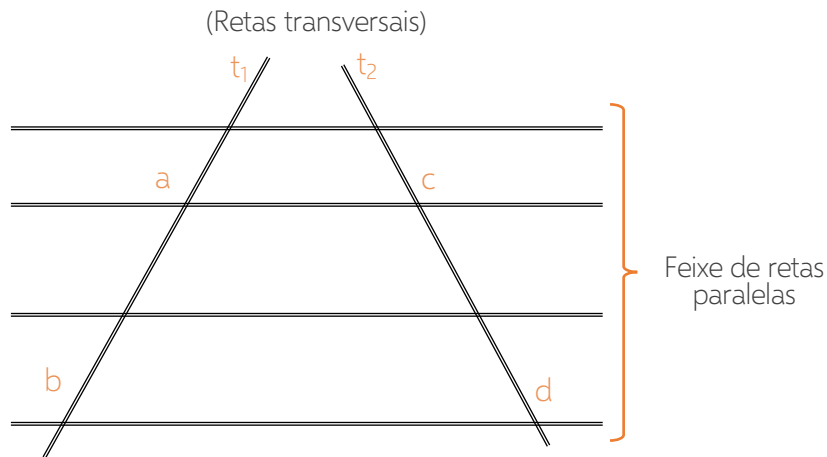
$$h^2 = l^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

GEOMETRIA

TEOREMA DE TALES

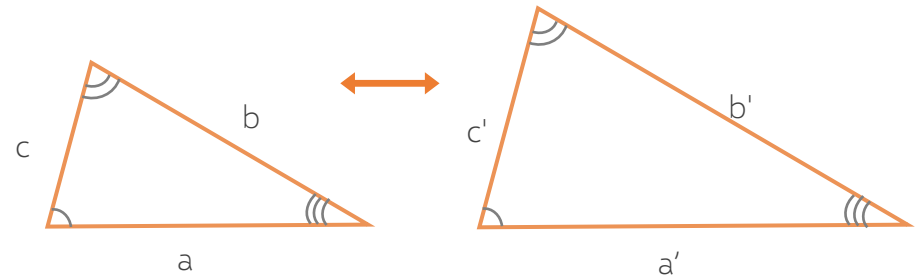
CAI MUITO!



$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

A **razão** entre dois segmentos em uma das retas transversais **é igual** à razão entre os respectivos segmentos correspondentes na outra

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS



TRIÂNGULOS SEMELHANTES: IMPORTANTE!

Três ângulos ordenadamente congruentes
+ lados homólogos proporcionais

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k \quad \left(\begin{array}{l} \text{Razão de semelhança ou} \\ \text{constante de proporcionalidade} \end{array} \right)$$

Razão entre as **áreas** dos triângulos:

$$\frac{A}{A'} = k^2$$

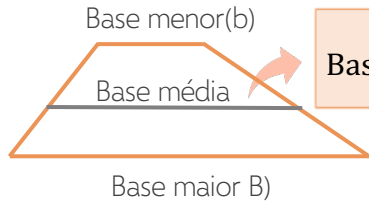
GEOMETRIA

= QUADRILÁTEROS =

TRAPÉZIO

= Tem dois lados paralelos

TRAPÉZIO ESCALENO (Lados não congruentes)



$$\text{Base Média} = \frac{\text{Base menor} + \text{Base maior}}{2}$$

TRAPÉZIO ISÓSCELES (Seus lados são congruentes)



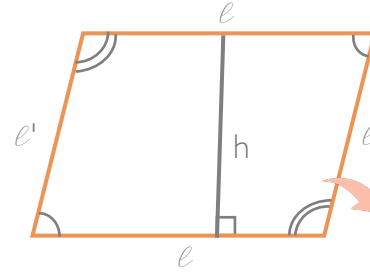
$$\text{ÁREA} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

TRAPÉZIO RETÂNGULO (Tem dois ângulos retos)



PARALELOGRAMO

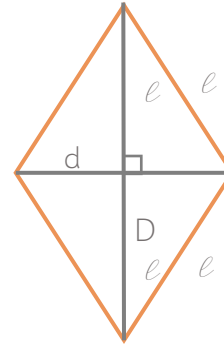
= Tem dois lados opostos paralelos



- Ângulos opostos = congruentes
- Ângulos adjacentes = suplementares
- Lados opostos = congruentes

• Suas diagonais cortam-se ao meio

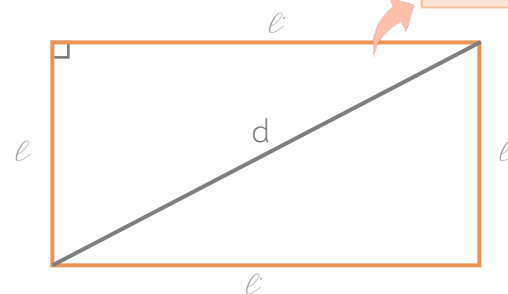
LOSANGO (Todo losango é um paralelogramo)



$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

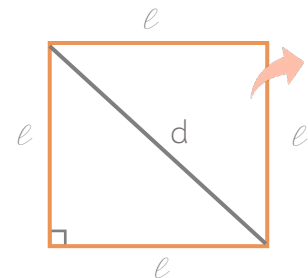
• Suas diagonais são perpendiculares

RETÂNGULO



$$A = l' \cdot l$$

QUADRADO



$$A = l^2$$

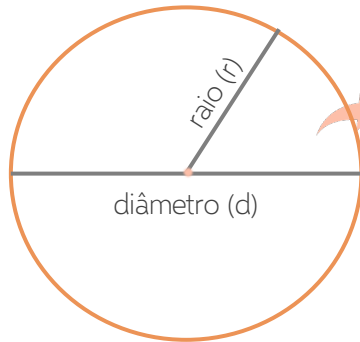
$$d = l\sqrt{2}$$

GEOMETRIA

geometria

= CÍRCULO =

ASPECTOS GERAIS



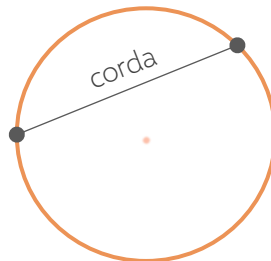
Círculo = circunferência + interior

Comprimento: $C = 2\pi r$

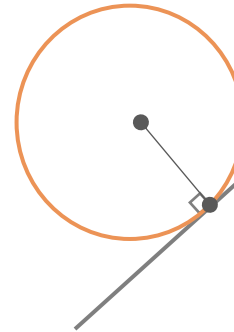
Área: $A = \pi r^2$

CORDA

= Segmento cujas extremidades pertencem à circunferência
(O diâmetro é uma corda que passa pelo centro)



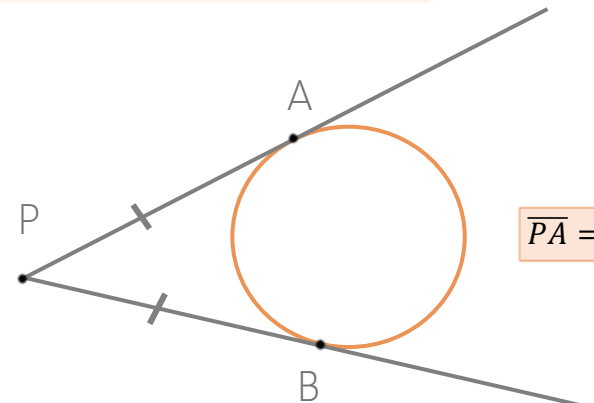
TANGENTE



- = Reta que intercepta a circunferência em um **único ponto**
- É **perpendicular ao raio** no ponto de tangência

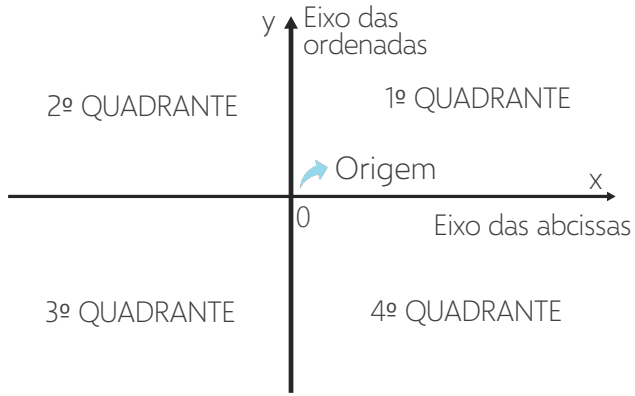
PROPRIEDADE IMPORTANTE

⚠ ATENÇÃO!

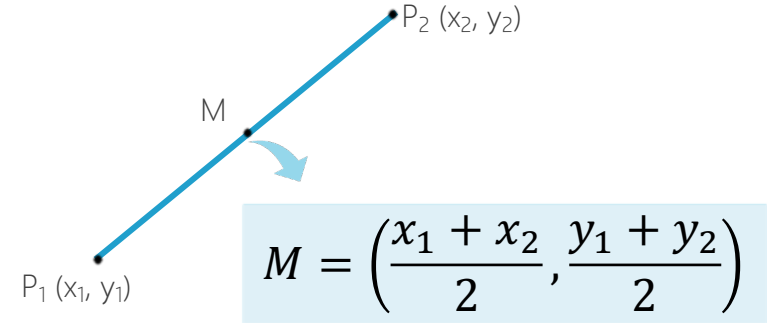


$$\overline{PA} = \overline{PB}$$

PLANO CARTESIANO



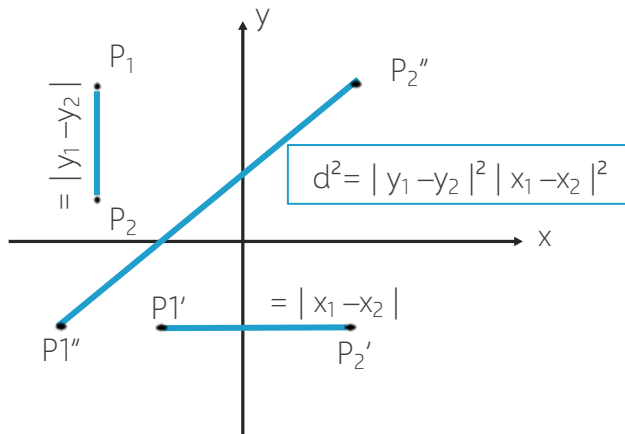
PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO



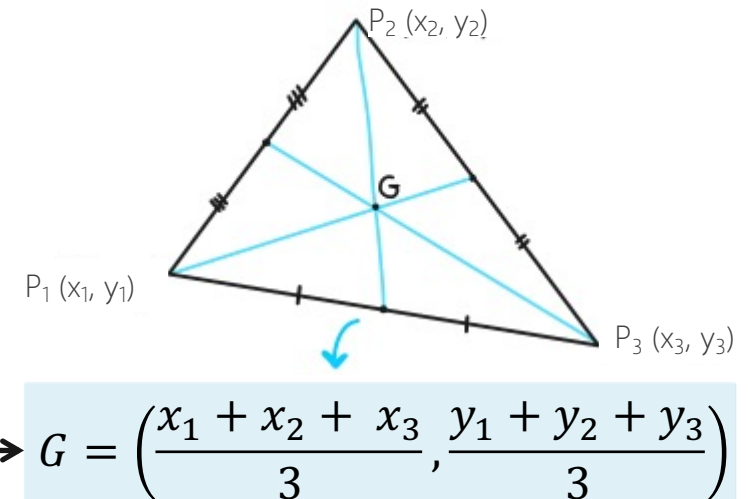
GEOMETRIA ANALÍTICA

= COORDENADAS NO PLANO CARTESIANO =

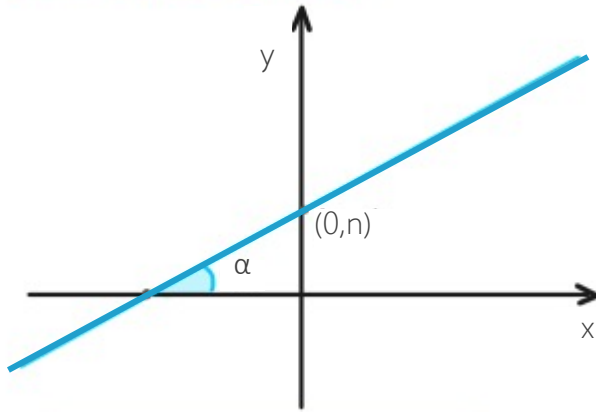
DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS



BARICENTRO DE UM TRIÂNGULO



ASPECTOS GERAIS



Interseção com eixo x: $y=0$

Interseção com eixo y: $x=0$

COEFICIENTE ANGULAR

= Inclinação da reta

$$m = \operatorname{tg} \alpha \rightarrow m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

α	m
$0 < \alpha < 90$	>0
$90 < \alpha < 180$	<0
$=0$	$=0$

COEFICIENTE LINEAR

= Ordenada do ponto em que a reta corta o Eixo y.

EQUAÇÃO DA RETA

$$y = mx + n$$

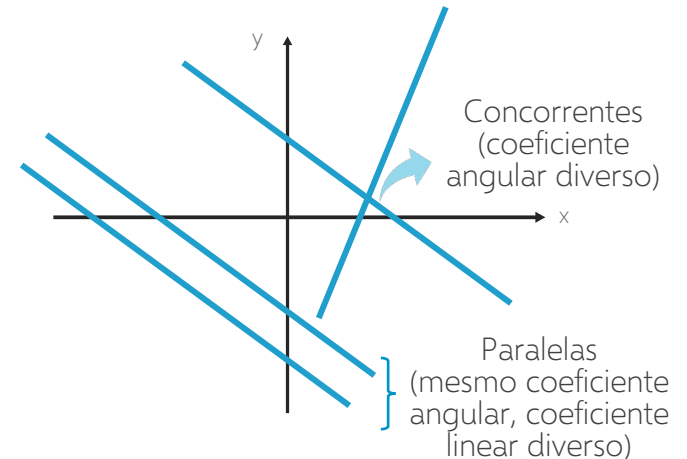
Coeficiente angular

Coeficiente linear

GEOMETRIA ANALÍTICA

= EQUAÇÃO DA RETA =

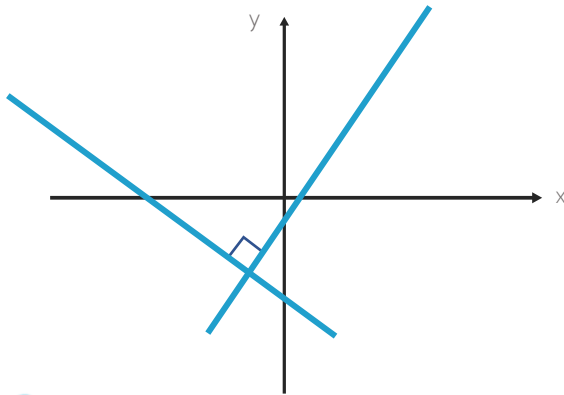
POSIÇÃO RELATIVA DE DUAS RETAS



geometria ANALÍTICA

= EQUAÇÃO DA RETA =

RETAS PERPENDICULARES



= retas concorrentes que formam entre si um ângulo de 90°

$m_1 \cdot m_2 = -1$

• Ex.:

$y = -2x + 3$ e $y = \frac{1}{2}x + 5$

$(-2) \cdot (1/2) = -1$

FORMAS DA EQUAÇÃO DA RETA

EQUAÇÃO GERAL DA RETA

$$ax + by + c = 0$$

FORMA REDUZIDA

$$y = \left(\frac{-a}{b}\right)x + \left(\frac{-c}{b}\right) \quad \text{ou} \quad y = mx + n$$

Coeficiente
Angular

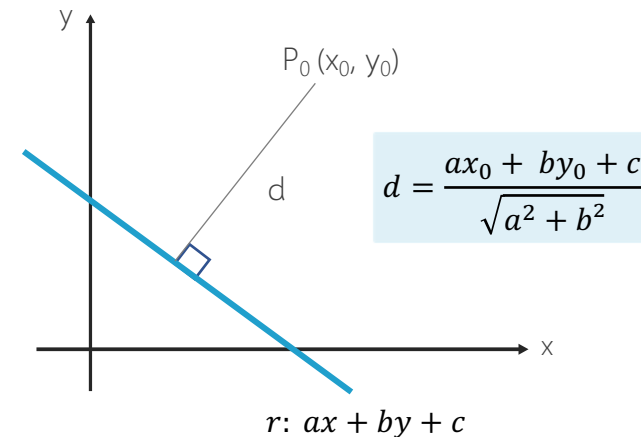
Coeficiente
Linear

FORMA SEGMENTÁRIA

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{n} = 1$$

→ A reta corta: $\begin{cases} \text{eixo } x \text{ no ponto de abscissa } p \\ \text{eixo } y \text{ no ponto de ordenada } n \end{cases}$

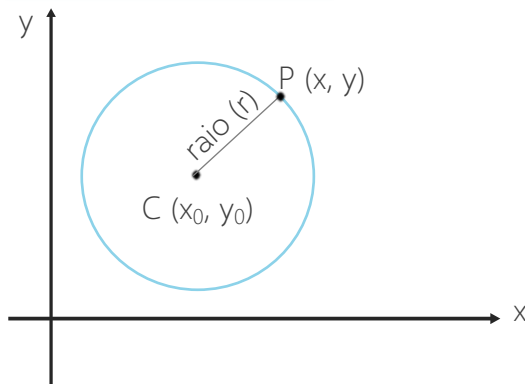
DISTÂNCIA DE UM PONTO A RETA



GEOMETRIA ANALÍTICA

ELIPSE

CIRCUNFERÊNCIA

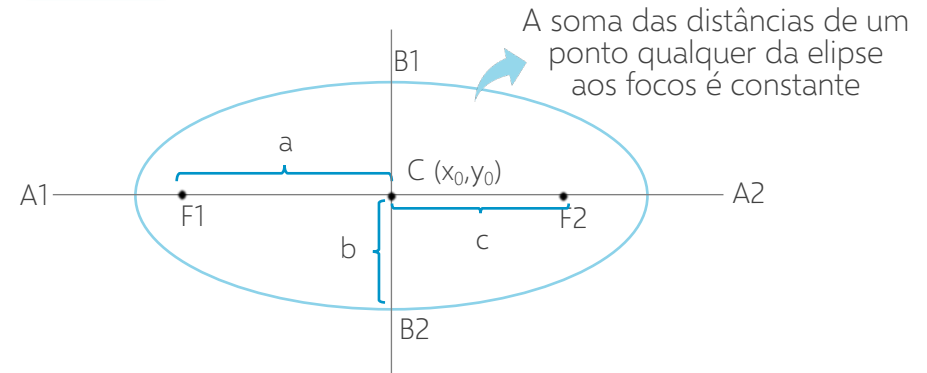


$$r: \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$r^2: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

EQUAÇÃO NORMAL

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$



$$\bullet \overline{A_1A_2} = \text{eixo maior} = 2.a$$

$$\bullet \overline{B_1B_2} = \text{eixo menor} = 2.b$$

$$\bullet \overline{F_1F_2} = \text{distância focal} = 2.c$$

$$\bullet \text{Área} = \pi ab$$

$$\bullet \text{excentricidade} = e = \frac{c}{a} \quad (0 < e < 1)$$

EQUAÇÃO

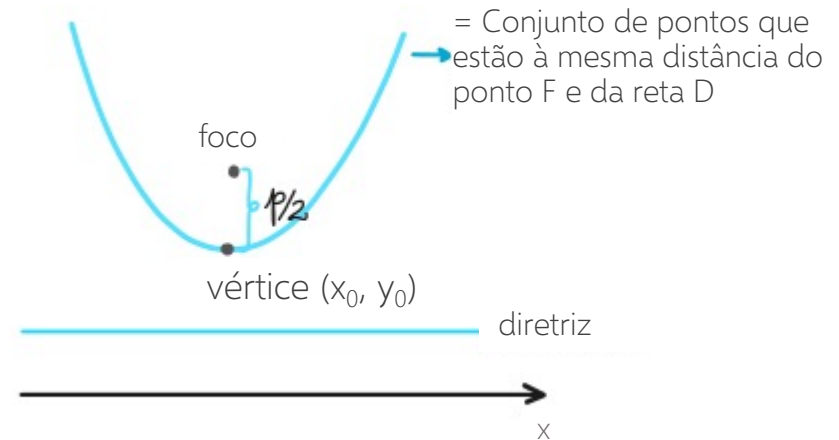


$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \text{Eixo maior horizontal}$$

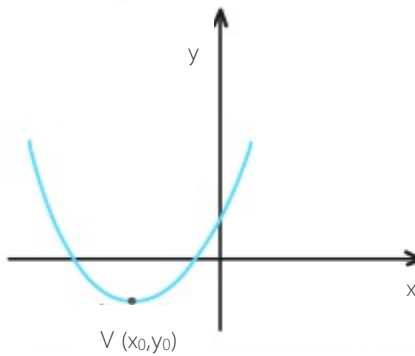
$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1 \rightarrow \text{Eixo maior vertical}$$

geometria ANALÍTICA

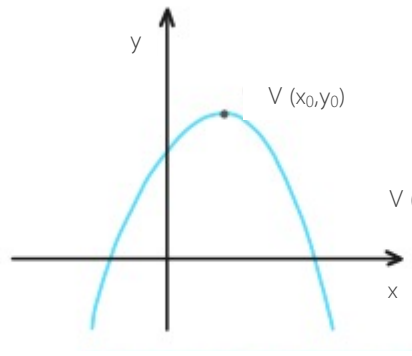
PARÁBOLA



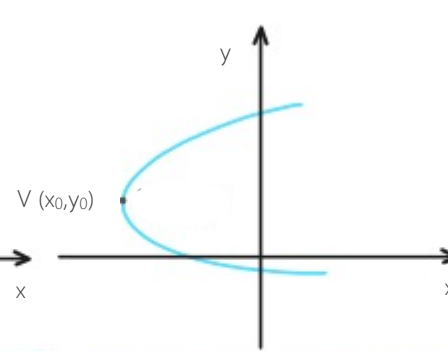
EQUAÇÕES



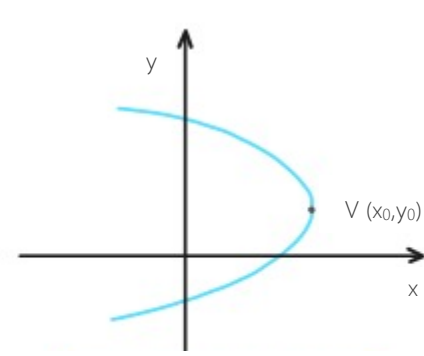
$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$



$$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$$

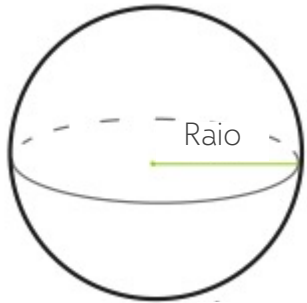


$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$



$$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$$

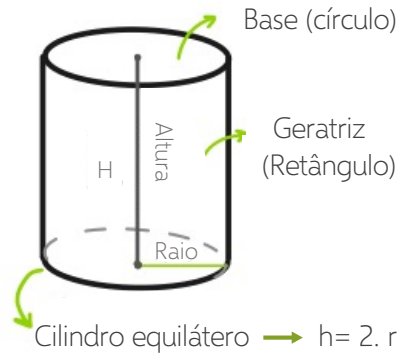
ESFERA



• Volume: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$

• Área da superfície: $A = 4 \cdot \pi r^2$

CILINDRO



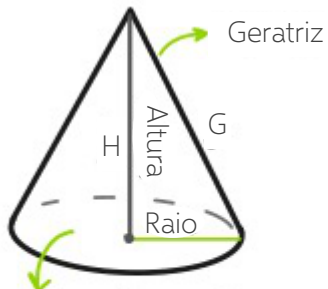
• Volume: $V = \pi r^2 h$

• Área da superfície lateral: $A_l = 2\pi r h$

• Área da base: $A_b = \pi r^2$

GEOMETRIA ESPACIAL

CONE

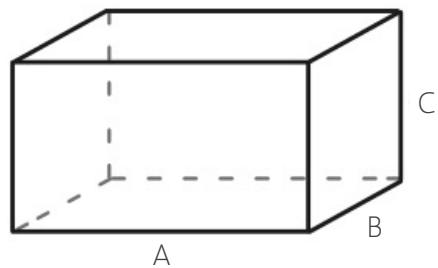


• Volume: $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

• Área da superfície lateral: $A_l = \pi r g$

• Área da base: $A_b = \pi r^2$

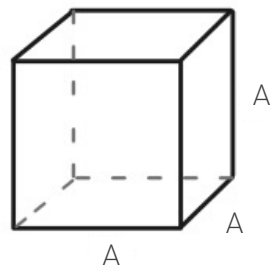
PARALELEPÍPEDO RETO-RETÂNGULO



• Volume: $V = a \cdot b \cdot c$

• Área da superfície: $A = 2ab + 2bc + 2ac$

CUBO



• Volume: $V = a^3$

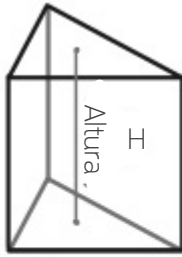
• Área da superfície: $A = 6a^2$

Cone equilátero $\rightarrow g = 2 \cdot r$

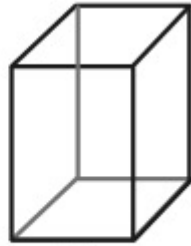
PRISMAS

= semelhante ao cilindro, sua base pode ser qualquer polígono

Ex.:



Prisma triangular



Prisma quadrangular

• Volume: $V = A_b \cdot h$ Área da base

• Área da superfície lateral: $A_l = 2ph$ 2p = perímetro da base

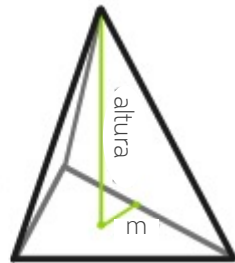
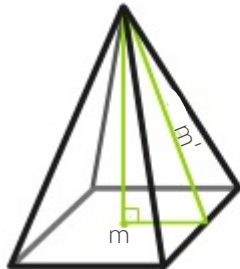
• Área da superfície total: $A_T = A_l + 2A_b$

GEOMETRIA ESPACIAL

PIRÂMIDES

= semelhante ao cone, sua base pode ser qualquer polígono

Ex.:



• Área da superfície total: $A_T = A_l + A_b$ Área da base

• Área da superfície lateral:

$$A_l = p \cdot m'$$

p = semiperímetro

• Volume:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

• m = apótema da base

• m' = apótema da pirâmide

$$m'^2 = m^2 + h^2$$

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

- = princípio multiplicativo
- Em experimentos que ocorrem em várias etapas sucessivas e independentes
 - p_1 = nº de possibilidades na 1ª etapa
 - p_n = nº de possibilidades na n-ésima etapa
- **Número total** de formas de o acontecimento ocorrer:
 - = $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ (multiplicação)

PRINCÍPIO ADITIVO

- Em experimentos que podem ser realizados de p modos ou q modos
- **Número total** de formas de o acontecimento ocorrer = $p+q$ (soma)

PERMUTAÇÃO SIMPLES

- De quantas maneiras é possível ordenar n objetos distintos?
- = $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$

PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

- De quantas maneiras é possível ordenar n objetos, sendo alguns deles repetidos?
- **Exemplo:** Um termo r_x repetidos e um s_x repetidos:

$$= \frac{n!}{r! \cdot s!} \quad \left(\text{Como uma "correção" pela existência das repetições} \right)$$

ANÁLISE COMBINATÓRIA

COMBINAÇÃO SIMPLES

- De quantas maneiras podemos formar subconjuntos de p elementos a partir de um conjunto de n elementos? (A ordem dos elementos não importa)

$$C_{n_1p} = C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p! (n-p)!}$$

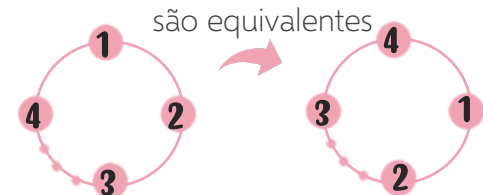
COMBINAÇÃO COM REPETIÇÃO

- De quantas maneiras podemos escolher p elementos a partir de um conjunto com n variedades? (Elementos de uma mesma variedade são considerados repetidos)

$$CR_n^p = \frac{(n+p-1)!}{p! (n-1)!}$$

PERMUTAÇÃO CIRCULAR

⚠ ATENÇÃO!



- Número total de permutações circulares de n objetos distintos = $(n-1)!$

PROBABILIDADE

CONCEITOS

ESPAÇO AMOSTRAL (U)

= Conjunto de **todos** os resultados possíveis

EVENTO

= Todo **subconjunto** do espaço amostral
 evento impossível = $\emptyset$ (Conjunto Vazio)

PROBABILIDADE

- Considera-se que cada elemento de U tem a **mesma chance** de ocorrer

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

$n(A)$: nº de elementos do evento A
 $n(U)$: nº de elementos do espaço amostral

COMBINAÇÃO DE EVENTOS

UNIÃO

$A \cup B \rightarrow$ Ocorre se ocorrer A **ou** B **ou** ambos

INTERSECÇÃO

$(A \cap B) \rightarrow$ Ocorre se ocorrer A **e** B (ou seja, ambos)

COMPLEMENTAR

$\bar{A} \rightarrow$ Ocorre se **não** ocorrer A

PROPRIEDADES

- Se evento = espaço amostral $\rightarrow$ evento é **certo**
- Se evento = $\emptyset \rightarrow$ evento é **impossível**

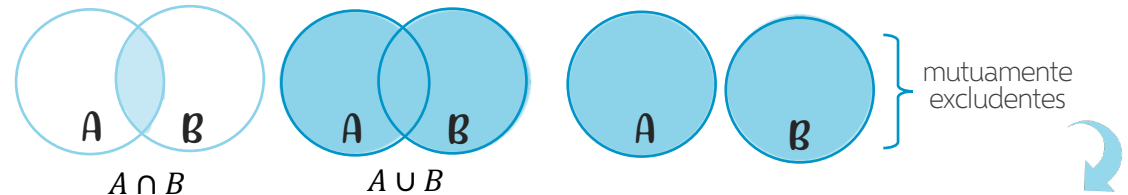
$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (P(U) = 1)$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$(se A \cap B = \emptyset, P(A \cup B) = P(A) + P(B))$$

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA



CASOS ESPECIAIS

$A \cup B =$ Espaço amostral $\rightarrow$ eventos **exaustivos**

$A \cap B = \emptyset \rightarrow$ eventos mutuamente excludentes/exclusivos

ASPECTOS GERAIS

= Probabilidade de um evento B ocorrer **dados** que o evento A ocorreu

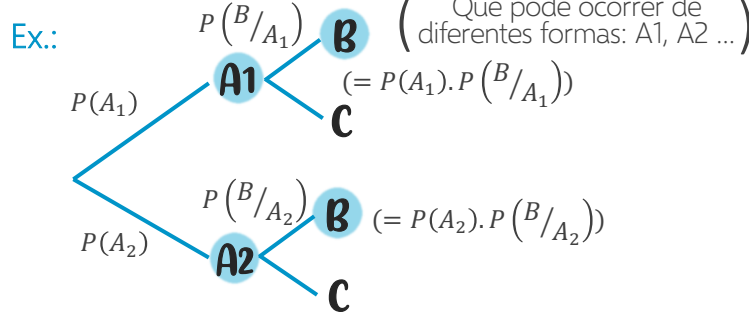
$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$n(A \cap B)$: nº de elementos da interseção entre A e B
 $n(A)$: nº de elementos do evento A

TEOREMA DA PROBABILIDADE TOTAL

• Para descobrir a **probabilidade total** de o evento B ocorrer no caso em que B ocorre após o evento A.



$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2)$$

probabilidade
= CONDICIONAL =

TEOREMA DA MULTIPLICAÇÃO

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$$

• Se os eventos forem **independentes**:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

CAI MUITO!

• Eventos **independentes**: = a ocorrência do evento A **não** influi na ocorrência de B

TEOREMA DE BAYES DECORE!

• Para descobrir a **probabilidade** de ocorrer A1, dados que B ocorreu

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$$

(Se decorar o teorema, vai agilizar as resoluções!)

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1).P(B/A_1)}{P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2)}$$

DIAGRAMA DE RAMOS E FOLHAS

- Outra representação de dados em rol

• **ROL:** 11 11 12 13 13 20 21 21 30 31 33

42 65 72 73

1	11233
2	011
3	013
4	2
6	5
7	23

1ª coluna
dezena

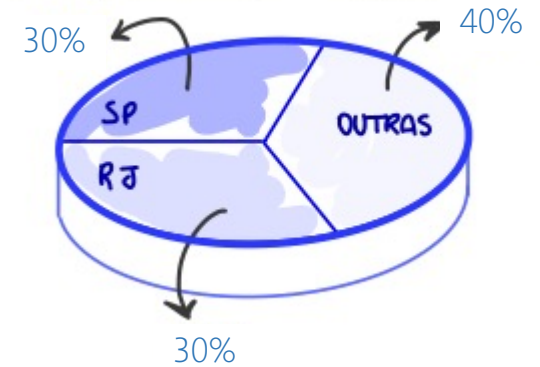
Unidades
correspondentes

APRESENTAÇÃO DE DADOS

GRÁFICO DE SETORES (PIZZA)

- Útil para apresentar para mostrar **divisão** de um todo em partes

CIDADE NATAL x FREQUÊNCIA



- Cada setor circular é **proporcional** à respectiva frequência

é possível encontrar o **ângulo** por regra de três:

100% → 360°

30% → x

CIDADE NATAL x FREQUÊNCIA

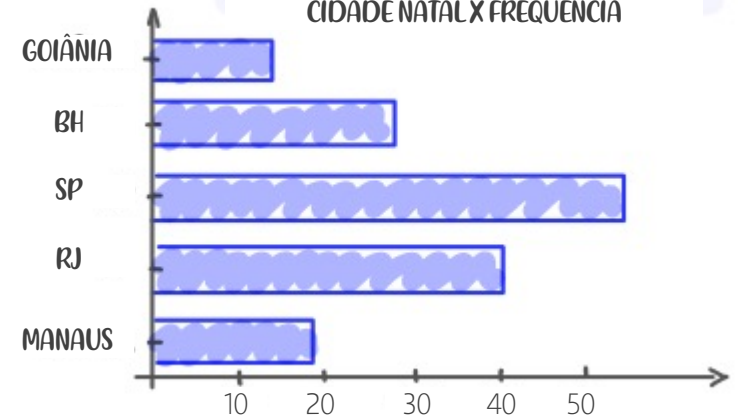


GRÁFICO DE COLUNAS OU BARRAS JUSTAPOSTAS

- Para dados agrupados por valor ou atributo
- **Ex.:** idade x frequência

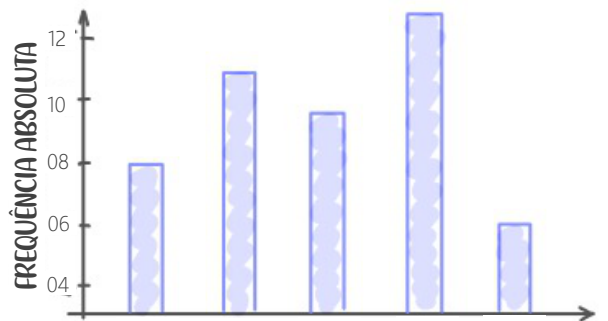


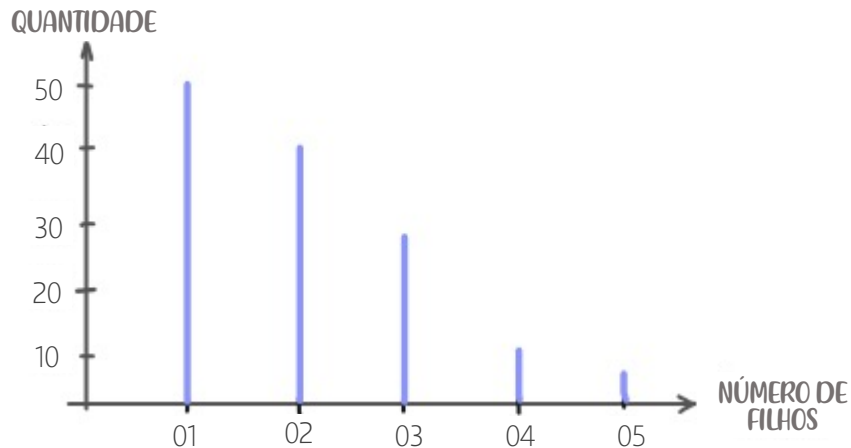
GRÁFICO DE LINHAS

- Usados na representação de séries temporais



GRÁFICO DE HASTES OU BASTÕES

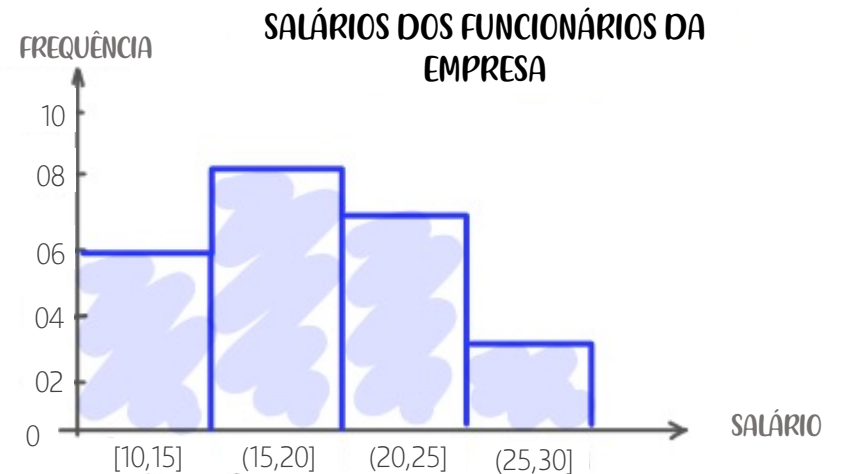
- Usados para representar dados não agrupados em classes
(Normalmente = dados discretos)



APRESENTAÇÃO DE DADOS

HISTOGRAMAS

- Usados para representar dados agrupados em classes
(Normalmente = dados contínuos)
- Relaciona classe ↔ frequências por retângulos contínuos
- Área de cada retângulo é **proporcional** à **frequência**



ASPECTOS GERAIS

- **Frequência** = número de vezes que um determinado valor aparece no conjunto
- Podemos agrupar os valores em **classes**
(Conveniente quando há muitos valores possíveis, ou com **variáveis contínuas**)
- Ganhamos simplicidade, mas perdemos detalhes sobre os elementos

SÍMBOLOS

- ┌ Inlui ambos os limites
- └ Inlui limite inferior, exclui limite superior
- ┐ Inlui limite superior, exclui limite inferior
- ─ Exclui ambos os limites

EXEMPLO

- Altura dos alunos de uma escola
- Classes

ALTURA	FREQUÊNCIA (f_i)	PONTO MÉDIO (x_i)
150 + 154	04	152
154 + 158	09	156
158 + 162	11	160
162 + 166	08	164
166 + 170	05	168
170 + 174	03	172
TOTAL:	40 = Total de alunos	

Número de ocorrências

distribuições de frequências
= ELEMENTOS =

ELEMENTOS

CLASSES

- = cada grupo/ intervalo de valores
- Ex.: classe 3 = 158 ┌ 162

LIMITES DE CLASSE

- = extremos da classe
- Ex.: limites da classe 3: 158 e 162

AMPLITUDE DE UM INTERVALO DE CLASSE

- = diferença entre o limite superior e o limite inferior (l_{INF}) (l_{SUP})

$$h = l_{SUP} - l_{INF}$$

AMPLITUDE TOTAL

- = A diferença entre o maior e o menor número do conjunto inteiro (elemento)

PONTO MÉDIO DE UMA CLASSE (x_i)

- = divide o intervalo em 2 partes iguais
(Média Aritmética dos limites da classe)

$$x_i = \frac{l_{SUP} + l_{INF}}{2}$$

Ex.: $x_i = \frac{150 + 154}{2} = 152$

FREQUÊNCIA ABSOLUTA SIMPLES

- = Número de dados na respectiva classe (f_i)
(elementos)
- Soma das frequências simples de todas as classes = total de elementos (n)

$$\sum f_i = n$$

FREQUÊNCIA RELATIVA SIMPLES (Normalmente em porcentagem)

- = **razão** entre a frequência simples da respectiva classe e a frequência total:

$$f_{ri} = \frac{f_i}{n}$$

DENSIDADE DE FREQUÊNCIA

(= Razão entre a frequência da classe e sua amplitude:

$$d = \frac{f_i}{h}$$

EXEMPLO (Frequências simples)

- Altura dos alunos de uma escola

ALTURA	FREQUÊNCIA (f_i)	FREQUÊNCIA RELATIVA (f_{ri})
150 + 154	04	4/40 = 0.1 (10%)
154 + 158	09	9/40 = 0.225 (22,5%)
158 + 162	11	11/40 = 0.275 (27,5%)
162 + 166	08	8/40 = 0.2 (20%)
166 + 170	05	5/40 = 0.125 (12,5%)
170 + 174	03	3/40 = 0.075 (7,5%)
TOTAL:	40 (n)	1.00 (100%)

Absoluta simples

DISTRIBUIÇÕES DE FREQUÊNCIAS

= TIPOS DE FREQUÊNCIAS =

FREQUÊNCIAS ACUMULADAS

- Pode-se calcular por frequências absolutas ou relativas.

FREQUÊNCIA ACUMULADA CRESCENTE

se decrescente, faz-se o mesmo procedimento, de baixo para cima.

1. Copiar a freq. absoluta da 1ª classe
2. Para o cálculo da frequência seguinte: **somar** a frequência acumulada anterior com a absoluta da classe correspondente

ALTURA	FREQUÊNCIA (f_i)	FREQ. ACUMULADA (f_{ac})
150 + 154	04	04
154 + 158	09	13
158 + 162	11	24
162 + 166	08	32
166 + 170	05	37
170 + 174	03	<u>40</u>
TOTAL:	40 (n)	40

A freq. acumulada da última classe = total de elementos (n)

- A **frequência acumulada** de uma classe, indica o número de **elementos menores** que seu limite superior

MEDIDAS SEPARATRIZES

medidas separatrizes

= MEDIANA =

MEDIDAS SEPARATRIZES

- **Dividem** os dados em **partes**
- É necessário que os dados estejam dispostos em **ordem** crescente (ou decrescente)
- Dispostos em "rol"

MEDIANA (Md)

- = **número** que se encontra no **centro** de uma série de números.

MEDIANA PARA DADOS NÃO-AGRUPADOS

NÚMERO ÍMPAR DE TERMOS

3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13

4 elementos 4 elementos

mediana

- **Mediana** = termo de ordem $\frac{n+1}{2}$

NÚMERO PAR DE TERMOS

3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15

4 elementos 4 elementos

mediana = $\frac{8+9}{2} = 8.5$ (ponto médio)

- **Mediana** = média aritmética entre o termo de ordem $n/2$ e $n/2 + 1$

PROPRIEDADES

CAI MUITO!

- A mediana **não** é influenciada pelo **valores extremos** do rol (depende da posição)
- **Somando-se** (subtraindo-se) uma constante **c** de todos os valores → a mediana também é somada/subtraída de **c**.

$$M_d' = M_d + c$$

$$M_d' = M_d - c$$

- **Multiplicando-se** (dividindo-se) todos os valores por uma constante **c** → a mediana também é multiplicada/dividida por **c**.

$$M_d' = M_d \cdot c$$

$$M_d' = M_d : c$$

- A **soma** dos **módulos dos desvios** da sequência de números x_i em relação a um número é **mínima** se em relação à **mediana**

MEDIANA PARA DADOS AGRUPADOS

SEM INTERVALOS DE CLASSE

- Ex.: notas de alunos em uma classe

EXEMPLO 1:

Número de alunos

NOTAS	FREQUÊNCIA (f_i)	FREQUÊNCIA ACUMULADA (f_{ac})
2	2	2
4	6	8
6	10	18
8	12	30
10	9	39
TOTAL:	39 (n)	39

Total = 39 (ímpar) Md = número na posição $(n+1)/2$

Md = 20º termo

Ele está na classe de nota 8!

Logo, Md = 8

EXEMPLO 2:

NOTAS	FREQUÊNCIA (f_i)	FREQUÊNCIA ACUMULADA (f_{ac})
2	2	2
4	6	8
6	10	18
8	12	30
10	6	36
TOTAL:	36 (n)	36

Total = 36 (par)

Md = média entre $n/2$ e $n/2+1$

Md = média entre $x_{(18)}$ e $x_{(19)}$

Logo, Md = 7

MEDIANAS PARA DADOS AGRUPADOS

EM CLASSES

ALTURA	FREQUÊNCIA (f_i)	FREQUÊNCIA ACUMULADA (f_{ac})
40-50	2	2
50-60	5	7 $f_{ac_{ant}}$
60-70	7	14
70-80	8	22
80-90	3	25
TOTAL:	25 (n)	25

- 1º passo.: determinar a classe mediana
Encontrar a classe onde esteja a frequência acumulada $n/2$
 $n/2 = 25/2 = 12,5$

Está entre f_{ac} 7 e 14 → logo,
classe mediana = 60 - 70

- 2º passo: aplicar a fórmula:

$$M_d = l_i + \left[\frac{n/2 - f_{ac_{anterior}}}{f_i} \right] \cdot h$$

DO EXEMPLO

$$M_d = 60 + \left[\frac{12,5 - 7}{7} \right] \cdot 10$$

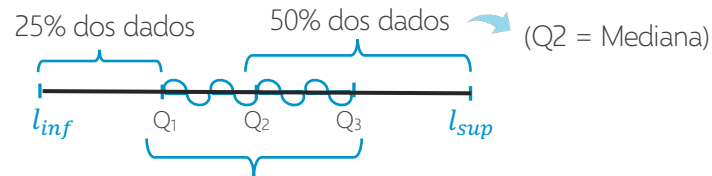
$$M_d = 67,85$$

l_i	Limite inferior
$f_{ac_{ant}}$	Frequência acumulada da classe anterior
h	Amplitude da classe → 70 - 60
f_i	Frequência simples da classe mediana

MEDIDAS SEPARATRIZES
= MEDIANA =

QUARTIL

- Divide os dados em **4 partes** de mesma frequência
 São **3 quartis** com **25% dos dados** cada



= Amplitude interquartílica = $Q_3 - Q_1$

- Amplitude semi-interquartílica = $(Q_3 - Q_1)/2$



ATENÇÃO!

Q_1 = mediana entre l_{inf} e Q_2

Q_3 = mediana entre l_{sup} e Q_2

FÓRMULAS (Procedimento análogo ao da mediana)



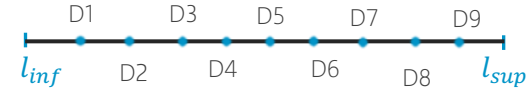
$$Q_1 = l_i + \left[\frac{1 \cdot \frac{n}{4} - fac_{ant}}{f_i} \right] \cdot h$$

$$Q_2 = l_i + \left[\frac{2 \cdot \frac{n}{4} - fac_{ant}}{f_i} \right] \cdot h$$

$$Q_3 = l_i + \left[\frac{3 \cdot \frac{n}{4} - fac_{ant}}{f_i} \right] \cdot h$$

DECIL

- Divide os dados em **10 partes** de mesma frequência
 São **9 decis** com **10% dos dados** cada



FÓRMULAS

$$D_K = l_i + \left[\frac{k \cdot \frac{n}{10} - fac_{ant}}{f_i} \right] \cdot h$$

PERCENTIL

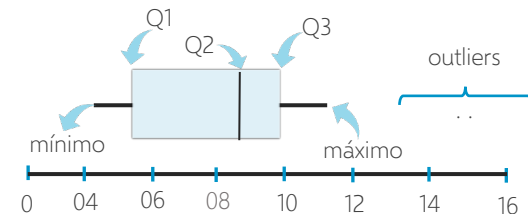
- Divide os dados em **100 partes** de mesma frequência
 (são **99 percentis** com **1% dos dados** cada)

FÓRMULAS

$$P_K = l_i + \left[\frac{k \cdot \frac{n}{100} - fac_{ant}}{f_i} \right] \cdot h$$

BOX PLOT

- Gráficos que usam os **quartis** para a **representação** de dados
- Pode ser **horizontal** ou **vertical**



*medidas
separatrizes*

ASPECTOS GERAIS

- = valor que aparece com **maior frequência**
- Um conjunto de valores pode ter **mais de uma moda**

MODA PARA DADOS NÃO-AGRUPADOS

- $X = \{1, 3, 9, 16, 20, 21, 21, 34\}$ = conjunto **amodal**
- $X = \{1, 3, 9, 16, 16, 16, 20, 21, 21, 34\}$ = conjunto **unimodal**
- $X = \{1, 3, 9, 16, 16, 20, 21, 21, 34\}$ = conjunto **bimodal**

MODA PARA DADOS AGRUPADOS

SEM INTERVALOS DE CLASSE

- A moda é aquele valor com f_i **maior** ↗ Frequência simples
- Ex.: notas de alunos em uma classe

NOTAS	FREQUÊNCIA (f_i)
2	2
4	4
6	10
8	12
10	9
TOTAL:	39 (n)

Moda = 8
(Nota 8!)

ATENÇÃO!

A moda não é a f_i ,
mas o valor em si

moda

PROPRIEDADES DA MODA

- A moda **não** é influenciada pelos **valores extremos** do rol (Depende apenas do número de vezes que cada valor aparece!)
- **Somando-se** (subtraindo-se) uma constante c de todos os valores $\rightarrow$ a moda também é somada ou subtraída de c

$$M_o' = M_o + c$$

$$M_o' = M_o - c$$

- **Multiplicando-se** (Dividindo-se) todos os valores por uma constante $c \rightarrow$ a moda também é multiplicada/dividida por c

$$M_o' = M_o \cdot c$$

$$M_o' = M_o : c$$

moda

MODA DE PEARSON



$$Mo = 3.Md - 2\bar{X}$$

moda

mediana

média

- Utilize apenas quando a questão pedir **expressamente**

MODA PARA DADOS AGRUPADOS EM CLASSES

MODA BRUTA

Classe com maior frequência

- É o **ponto médio** da **classe modal**

- Ex.:

ALTURA	FREQUÊNCIA (f _i)
40-50	2
50-60	5
60-70	7 <i>f_{ant}</i>
<i>l_i</i> 70-80	<i>f_M</i> 8 classe modal
80-90	3 <i>f_{post}</i>
TOTAL:	25 (n)

moda bruta = 75

se a classe modal for:
primeira: *f_{ant}* = 0
última: *f_{post}* = 0

<i>l_i</i>	Limite inferior
<i>h</i>	Amplitude de classe
<i>f_{ant}</i>	Frequência da classe anterior
<i>f_{post}</i>	Frequência da classe posterior
<i>f_M</i>	Frequência simples da classe modal



MODA PARA DADOS AGRUPADOS EM CLASSES

MODA DE CZUBER

$$M_o = l_i + \left[\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right] \cdot h$$

$$\Delta_1 = f_M - f_{ant}$$

$$\Delta_2 = f_M - f_{post}$$

$$M_o = l_i + \left[\frac{f_M - f_{ant}}{(f_M - f_{ant}) + (f_M - f_{post})} \right] \cdot h$$

Alguns livros usam a fórmula assim

MODA DE KING

$$M_o = l_i + \left[\frac{f_{post}}{f_{ant} + f_{post}} \right] \cdot h$$

Essas fórmulas de Czubers e King só podem ser aplicadas se as **amplitudes** das classes (h) forem todas iguais



MEDIDAS de dispersão

ASPECTOS GERAIS

= Analisa o **afastamento** dos dados

• Exemplos:

- Amplitudes (Total, interquartílica)
- Desvios (Quartilico, médio, padrão...)
- Variância
- Coeficiente de Variação

AMPLITUDE TOTAL

$$A = x_{\max} - x_{\min}$$

= Diferença entre o **maior** e o **menor** valor de um conjunto de dados

PROPRIEDADES

- **Somando-se** (subtraindo-se) uma constante **c** de todos os valores $\rightarrow$ a amplitude **não** é alterada.
- **Multiplicando-se** (dividindo-se) todos os valores por uma constante **c** $\rightarrow$ a amplitude também é multiplicada (ou dividida) por **c**.

DESVIOS

= **Diferença** entre um número do conjunto (x_i) em relação a um número (m).

$$d_i = x_i - m$$

PROPRIEDADES

- Soma **algébrica** dos desvios **relação à média** ($\bar{x}$) é zero

$$\sum d_i = \sum (x_i - \bar{x}) = 0$$

- A soma dos **quadrados** dos desvios ($\sum d_i^2$) em relação a um número **m** é mínima quando **m = $\bar{x}$**
- A soma dos módulos dos desvios ($\sum |d_i|$) em relação a um número **m** é mínima quando **m = mediana**.

MEDIDAS de dispersão

DESVIO MÉDIO

= média dos módulos dos desvios dos termos (x_i) em relação à média ($\bar{x}$)

$$D_m = \frac{\sum(|x_i - \bar{x}|)}{n}$$

- Em **dados agrupados**, deve-se calcular a média **ponderada** dos desvios:

$$D_m = \frac{\sum(|x_i - \bar{x}| \cdot f_i)}{n}$$

Os pesos são as frequências (f_i)

VARIÂNCIA (Populacional)

= **média** aritmética dos **quadrados** dos **desvios**

$$\sigma^2 = \frac{\sum(|x_i - \bar{x}|)^2}{n}$$

- Ou $\sigma^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$

σ^2 = média dos quadrados – quadrado da média

DESVIO PADRÃO (Populacional)

= **raiz** quadrada da **variância**:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

- A variância e o desvio padrão serão **nulos** quando **todos os termos forem iguais**.

SIMBOLOGIA:

σ^2 : Variância populacional

S^2 : Variância amostral

$$S^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \rightarrow S^2 = [\overline{x^2} - (\bar{x})^2] \cdot \frac{n}{n - 1}$$

σ : Desvio padrão populacional

S : Desvio padrão amostral

$$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

MEDIDAS de dispersão

VARIÂNCIA E DESVIO PADRÃO

PROPRIEDADES

- **Somando-se** (subtraindo-se) uma constante **c** de todos os valores: a variância e o desvio padrão **não** se alteram
- **Multiplicando-se** (dividindo-se) todos os valores por uma constante **c**:
 - O **desvio padrão** também é multiplicado (dividido) por **c**
 - A **variância** é multiplicada (dividida) por **c²**

VARIÂNCIA E DESVIO PADRÃO

PARA DADOS AGRUPADOS

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n}$$

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n - 1}$$

→ Deve-se multiplicar cada resultado pela respectiva frequência

COEFICIENTE DE VARIAÇÃO

$$C_v = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

= Razão entre o desvio padrão e a média (É adimensional)

- Dá uma **noção relativa** da dispersão dos dados: permite "ver" se o desvio padrão é relevante quando comparado à média dos dados
- **C_v² = variância relativa**