Aula 19

Banco do Brasil - Matemática - 2023 (Pós-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

12 de Janeiro de 2023

Índice

Apresentação da Aula

Fala, pessoal!

Hoje trataremos sobre **sistemas lineares**. Antes de começar esse PDF, é necessário que você já tenha uma base de **matrizes** e **determinantes**.

Ressalto desde já que o assunto dessa aula **não costuma ser muito cobrado em provas de concurso público**.

Usualmente procuro colocar questões ao longo da teoria. Para o aprendizado da matéria de **sistemas lineares**, **existe a necessidade de uma base teórica que não costuma ser cobrada diretamente nas questões**, motivo pelo qual essa aula apresenta alguns trechos de teoria sem muitas questões.

Como de costume, vamos exibir um **resumo** logo no **início do tópico** para que você tenha uma visão geral do conteúdo antes mesmo de iniciar o assunto.

Conte comigo nessa caminhada =)

Prof. Eduardo Mocellin.

@edu.mocellin

SISTEMAS LINEARES

Sistemas lineares

Equação linear

Equações lineares são da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$.
- $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ **são incógnitas**;
- $a_1, a_2, a_3, ... ,a_n$ são os **coeficientes**;
- b é o **termo independente**.

Uma **solução de uma equação linear** é um **conjunto ordenado** de **números reais** **que torna a equação verdadeira**.

Sistema linear

Um **sistema linear** é um **conjunto de equações lineares**.
A **solução de um sistema linear** deve tornar verdadeira todas as equações que compõem o sistema.

Representação matricial de um sistema linear:

$$AX = B$$

- A**: Matriz dos coeficientes** ou **matriz incompleta do sistema**;
- X: **Matriz das incógnitas**;
- B: **Matriz dos termos independentes**.
- $[A|B]$: **Matriz completa do sistema**.

$$\begin{cases} 3x + 4y + 1z = 3 \\ 1x + (-1)y + 1z = 1 \\ 1x + 3y + 0z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sistemas lineares equivalentes

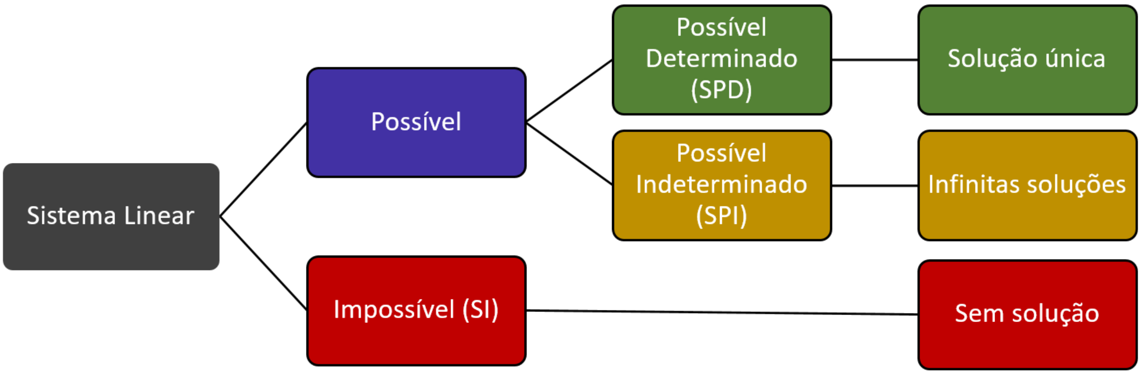
Dois **sistemas lineares** são **equivalentes** quando apresentam as mesmas soluções.
Uma equação L_1 é **combinação linear** de outras equações L_2 e L_3 **quando existem valores reais a e b tais que**:

$$L_1 = aL_2 + bL_3$$

Em um **sistema linear**, ao **substituir** uma **determinada equação** por uma **combinação linear dela** com **outra equação**, temos um **sistema linear equivalente**.

Em um **sistema linear**, quando uma **determinada equação** corresponde a uma **combinação linear** de **outras equações do sistema**, **podemos eliminar essa equação do sistema**.

Classificação de um sistema linear

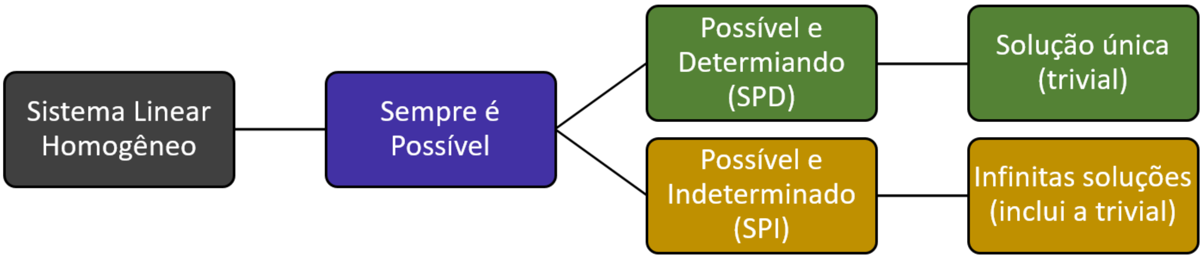


Se um sistema linear apresenta **mais de uma solução**, então ele apresenta **infinitas soluções**.

Sistema linear homogêneo

Um **sistema linear homogêneo** é aquele em que os **termos independentes** de todas as equações são iguais a zero. Sempre admite a solução em que todas as variáveis são zero (**solução trivial**).

$$\begin{cases} 3x + 1y + z = \mathbf{0} \\ 2x + 4y + 2z = \mathbf{0} \\ 3x + 2y + 4z = \mathbf{0} \end{cases}$$



Solução de um sistema linear

• **Solução por substituição**: consiste em isolar uma variável em uma equação e substituir em outra equação.
• **Solução por eliminação de variável:** consiste em eliminar variáveis por meio de uma **combinação linear** conveniente das equações do sistema linear.
• **Solução pela soma das equações do sistema:** existem casos em que a solução do sistema linear é obtida de modo mais rápido realizando a soma de todas as equações do sistema.
• **Solução por matriz inversa:** a **matriz das incógnitas** ($\boldsymbol{X}$) é obtida pelo produto da matriz inversa dos coeficientes pela matriz dos termos independentes: $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

Teorema de Cramer

Só pode ser utilizado quando o **número de equações do sistema linear** (n) é igual ao **número de incógnitas.** Nesse caso, a **matriz dos coeficientes** (A) do sistema linear será **quadrada**, de dimensão $n \times n$.
Seja $D = \det A$.

01) Se $D \neq 0$, **o sistema é possível e determinado** (**SPD**), apresentando <u>solução única</u>.
02) Sendo $D \neq 0$, a solução única $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ do sistema linear é tal que:

$$\alpha_i = \frac{D_i}{D}$$

Onde D_i é o determinante da matriz que se obtém a partir de $A_{n\times n}$ substinuindo a coluna i pela matriz $B_{n\times 1}$.

Método do escalonamento

O método consiste em **<u>obter um sistema equivalente</u>** ao sistema original em que **<u>o número de variáveis explícitas diminui de equação para equação</u>**. Em outras palavras, <u>o número de coeficientes nulos aumenta de equação para equação</u>.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 2x + 4y + 4z = 22 \\ 2x + 4y + 3z = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + \ \ y + \ \ z = \ \ 4 \\ \qquad 3y + 3z = \ 18 \\ \qquad\qquad -z = -12 \end{cases}$$

Para obter o sistema escalonado, devemos seguir os seguintes passos:
- Colocar como 1ª equação uma que apresente a 1ª incógnita;
- Anular a **1ª incógnita** de todas as equações (**exceto da 1ª**) fazendo uso da **1ª equação**;
- Anular a **2ª incógnita** de todas as equações (**exceto da 1ª e da 2ª**) fazendo uso da **2ª equação**;
- Anular a **3ª incógnita** de todas as equações (**exceto da 1ª, da 2ª e da 3ª**) fazendo uso da **3ª equação**;
- E assim sucessivamente, até que tenhamos usado todas as equações.

Posto e nulidade de uma matriz

O **posto** de uma matriz é o **número de linhas não nulas de uma matriz escalonada**. A representação do posto de uma matriz A é dada por $\rho(A)$.
A **nulidade** de uma matriz é dada por $null(A) = (\text{Nº } colunas) - \rho(A)$

Discussão de um sistema linear

Discussão por Teorema de Cramer

Para fins de **discussão do sistema linear**, o **Teorema de Cramer** tem serventia quando obtemos $D \neq 0$ **<u>ou</u> quando o sistema é homogêneo**.

Sistema Linear Homogêneo	
D ≠ 0	D = 0
Sistema Possível e Determinado (SPD)	Sistema Possível e Indeterminado (SPI)
Admite somente a solução trivial	Admite a solução trivial e infinitas outras

Discussão pelo Método do Escalonamento

Passo 1: Escalonar o sistema linear.

Passo 2: Analisar o sistema linear escalonado.

• Se obtivermos uma equação da forma $\mathbf{0x+0y+0z+0w=b}$, com $\mathbf{b \neq 0}$, temos um **sistema impossível** (**SI**);

• **Caso contrário**, temos duas possibilidades:

‣ Se o número de **equações** for **igual** ao número de **incógnitas**, temos um **sistema possível e determinado** (**SPD**).

‣ Se o número de **equações** for **menor** do que o número de **incógnitas**, temos um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**).

No escalonamento, se obtivermos uma equação da forma $\mathbf{0x+0y+0z+0w=0}$, **devemos eliminar essa equação do sistema linear**, pois essa equação é uma combinação linear das outras.

Equação linear

Definição

Nesse momento, vamos mostrar a representação genérica de uma equação linear. Basicamente, uma **equação linear** é uma equação da seguinte forma:

$$\boldsymbol{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \cdots + a_n x_n = b}$$

Em que $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_3}$, ..., $\boldsymbol{x_n}$ **são incógnitas**.

Os números reais $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_3}$, ... ,$\boldsymbol{a_n}$ são os **coeficientes** da equação e $\boldsymbol{b}$ é denominado **termo independente**.

Exemplos de **equações lineares**:

Equação linear	Incógnitas	Coeficientes	Termo independente
$\boldsymbol{5x + 3y = 2}$	$\boldsymbol{x\ ,\ y}$	$\boldsymbol{5\ ,\ 3}$	$\boldsymbol{2}$
$\boldsymbol{2x + 0y + 3z + 1w = 0}$	$\boldsymbol{x, y, z, w}$	$\boldsymbol{2, 0, 3, 1}$	$\boldsymbol{0}$
$\boldsymbol{5^2 x_1 + \sqrt{3} x_2 + 1 x_3 = \pi}$	$\boldsymbol{x_1, x_2, x_3}$	$\boldsymbol{5^2, \sqrt{3}, 1}$	$\boldsymbol{\pi}$

As equações a seguir **não são equações lineares**.

- $3\sqrt{\boldsymbol{x}} + 2y + z = 3$
- $3x + 2\boldsymbol{y^2} + z = 1$;
- $5x + \boldsymbol{\log y} + \boldsymbol{zw} = 0$;
- $x + y + \boldsymbol{\cos z} = 3$.

ACORDE!

Note que a **principal restrição** de uma equação linear está na **incógnita**. **Não** se pode ter incógnitas da forma $\sqrt{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{y^2}$, $\boldsymbol{\log y}$, $\boldsymbol{\cos z}$, por exemplo, bem como **não** se pode ter produto entre incógnitas ($\boldsymbol{zw}$).

Já os **coeficientes** e o **termo independente** podem ser quaisquer números reais: 5^2, $\sqrt{3}$, π, etc.

Solução de uma equação linear

Uma **solução** de uma equação linear é um **conjunto ordenado** de **números reais** **que torna a equação verdadeira**.

Vamos a um exemplo. Considere a seguinte equação linear:

$$\boxed{3x + 2y + z = 7}$$

Note que o conjunto ordenado $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{4})$ é uma solução, pois:

$$3\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = 7$$
$$3.\mathbf{1} + 2.\mathbf{0} + \mathbf{4} = 7$$
$$7 = 7$$
(VERDADEIRO)

Podemos ter infinitas soluções para a equação linear em questão. Observe que o conjunto ordenado $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{7})$ também é uma solução, pois:

$$3\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = 7$$
$$3.\mathbf{0} + 2.\mathbf{0} + \mathbf{7} = 7$$
$$7 = 7$$
(VERDADEIRO)

Vejamos agora o conjunto ordenado $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\mathbf{5}, \mathbf{5}, \mathbf{5})$:

$$3\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = 7$$
$$3.\mathbf{5} + 2.\mathbf{5} + \mathbf{5} = 7$$
$$30 = 7$$
(FALSO)

Note que $(\mathbf{5}, \mathbf{5}, \mathbf{5})$ **não é solução da equação linear**, pois esse conjunto ordenado **não tornou a equação linear verdadeira**.

Sistema linear

Definição

Um **sistema linear** nada mais é do que um **conjunto de equações lineares**. A seguir, temos um **sistema linear**, pois trata-se de um conjunto de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x + 3y + z = 3 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

Agora observe o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \mathbf{2^{y}} = \dfrac{1}{2} \\ \boldsymbol{x^2 y} = 3 \end{cases}$$

Esse sistema de equações **não é linear**, pois contém equações que não são lineares.

Solução de um sistema linear

Assim como as equações lineares, um sistema linear também apresenta solução. A diferença é que **a solução do sistema linear deve tornar verdadeira todas as equações que compõem o sistema**.

Considere, por exemplo, o seguinte sistema linear de equações:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x + y + 3z = 16 \\ 0x + y + z = 3 \end{cases}$$

Note que $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$ é solução do sistema linear, pois essa solução torna verdadeira as três equações. Vejamos:

Primeira equação	Segunda equação	Terceira equação
$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = 6$	$3\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + 3\boldsymbol{z} = 16$	$0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = 3$
$\mathbf{3} + \mathbf{1} + \mathbf{2} = 6$	$3.\mathbf{3} + \mathbf{1} + 3.\mathbf{2} = 16$	$0.\mathbf{3} + \mathbf{1} + \mathbf{2} = 3$
$6 = 6$	$16 = 16$	$3 = 3$
(VERDADEIRO)	**(VERDADEIRO)**	**(VERDADEIRO)**

Agora observe o que acontece com $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$:

Primeira equação	**Segunda equação**	**Terceira equação**
$x + y + z = 6$	$3x + y + 3z = 16$	$0x + y + z = 3$
$2 + 2 + 2 = 6$	$3.2 + 2 + 3.2 = 16$	$0.2 + 2 + 2 = 3$
$6 = 6$	$14 = 16$	$4 = 3$
(VERDADEIRO)	**(FALSO)**	**(FALSO)**

Como $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ satisfaz apenas uma equação do sistema, $(2, 2, 2)$ **não** é solução do sistema linear.

Veremos mais adiante que um sistema linear pode apresentar uma solução única, infinitas soluções ou então nenhuma solução.

Representação na forma matricial

Considere o seguinte sistema linear com três equações:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 1z = 2 \\ 1x + 3y + 2z = 1 \\ 3x + 1y + 4z = 4 \end{cases}$$

Esse sistema linear também pode ser representado por meio da equação matricial $AX = B$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}}_{Matriz\ A} \times \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{Matriz\ X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{Matriz\ B}$$

$$AX = B$$

Como assim, professor? Como que apareceu uma equação matricial?

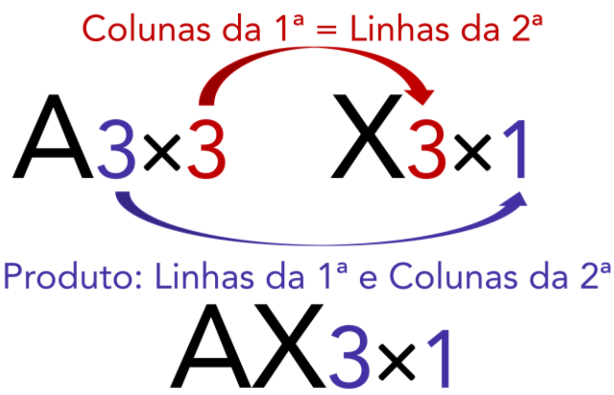
ESCLARECENDO!

Para compreender melhor a representação matricial, vamos desenvolvê-la.

Do lado esquerdo, temos o seguinte produto:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

Trata-se da multiplicação de uma matriz 3×3 por uma matriz 3×1. Note que o produto é possível e que o resultado desse produto é uma matriz 3×1.



Logo, AX é:

$$AX = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{bmatrix}_{3\times 3} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$AX = \begin{bmatrix} \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{y} + \mathbf{1}\boldsymbol{z} \\ \mathbf{1}\boldsymbol{x} + \mathbf{3}\boldsymbol{y} + \mathbf{2}\boldsymbol{z} \\ \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}\boldsymbol{y} + \mathbf{4}\boldsymbol{z} \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

Do outro lado da equação, temos uma matriz B, que também apresenta dimensão 3×1:

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

Assim, temos:

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{bmatrix}_{3\times 3} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{y} + \mathbf{1}\boldsymbol{z} \\ \mathbf{1}\boldsymbol{x} + \mathbf{3}\boldsymbol{y} + \mathbf{2}\boldsymbol{z} \\ \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}\boldsymbol{y} + \mathbf{4}\boldsymbol{z} \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

Agora temos a igualdade de duas matrizes 3×1. Para as matrizes serem iguais, todos os elementos de mesma posição devem ser iguais:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 1z = 2 \\ 1x + 3y + 2z = 1 \\ 3x + 1y + 4z = 4 \end{cases}$$

Veja que voltamos ao nosso sistema linear!

Logo, **podemos representar um sistema linear** tanto por meio de um **conjunto de equações** quanto por meio de uma **equação matricial** do tipo $AX = B$.

Vejamos alguns exemplos de representação matricial:

Representação por conjunto de equações	Representação matricial $AX = B$
$\begin{cases} 5x + 3y = 0 \\ 1x + 1y = 1 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 1x + 2y = 1 \\ 4x + 6y = 4 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$
$\begin{cases} 3x + 4y + 1z = 3 \\ 1x + (-1)y + 1z = 1 \\ 1x + 3y + 0z = 2 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\begin{cases} 3x + 2y + 1z = 3 \\ 1x + 3y + (-1)z = 1 \\ 1x + 3y + 0z = 2 \\ 6x + 4y + 2z = 6 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

Um ponto muito importante ao realizar a representação matricial é ordenar corretamente os **coeficientes**, as **variáveis** e os **termos independentes**.

Suponha, por exemplo, que temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ z - 2x = 1 \\ 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

Devemos colocar os **termos independentes** no lado direito da equação. Nesse caso, **a última equação deve ser modificada**:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ z - 2x = 1 \\ 2y + z = -3 \end{cases}$$

Além disso, devemos ordenar as **variáveis** da forma correta:

$$\begin{cases} \quad x \; + \; 3y + z = 5 \\ -2x \qquad \;\; + z = 1 \\ \qquad \quad 2y + z = -3 \end{cases}$$

Por fim, quanto aos **coeficientes**, deve-se entender que:

- Variáveis que aparecem em outras equações e **não** aprecem em uma determinada equação devem ser representadas com um **coeficiente 0**;
- Variáveis que supostamente não apresentam coeficiente na verdade têm **coeficiente 1**.

Ficamos com:

$$\begin{cases} 1x \; + \; 3y + 1z = 5 \\ -2x + 0y + 1z = 1 \\ 0x + 2y + 1z = -3 \end{cases}$$

Portanto, o sistema original apresenta a seguinte forma matricial $AX = B$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Importante destacar que a **matriz A** é conhecida por **matriz dos coeficientes** ou também **matriz incompleta do sistema**. Já a **matriz X** é a **matriz das incógnitas** e a **matriz B** é a **matriz dos termos independentes**.

Por fim, você deve saber que a **matriz completa do sistema** é a matriz formada pela **matriz incompleta** (A) concatenada com a **matriz dos termos independentes** (B). Para o exemplo anterior, a matriz completa é dada por:

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

O esquema a seguir resume o que vimos sobre a representação matricial de um sistema linear.

ESQUEMATIZANDO

Representação matricial de um sistema linear:

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$$

- $\boldsymbol{A}$: **Matriz dos coeficientes** ou **matriz incompleta do sistema**;
- $\boldsymbol{X}$: **Matriz das incógnitas**;
- $\boldsymbol{B}$: **Matriz dos termos independentes**;
- $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}]$: **Matriz completa do sistema**.

$$\begin{cases} \mathbf{3}x + \mathbf{4}y + \mathbf{1}z = \mathbf{3} \\ \mathbf{1}x + (\mathbf{-1})y + \mathbf{1}z = \mathbf{1} \\ \mathbf{1}x + \mathbf{3}y + \mathbf{0}z = \mathbf{2} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(SEDUC AM/2014) Considere o sistema linear de três equações e duas incógnitas a seguir:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 4y = 5 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$$

Esse sistema escrito na forma matricial é:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Comentários:

A representação de um sistema linear com **3 equações** e **2 incógnitas** na forma matricial é dado por $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, em que:

• $\boldsymbol{A}$ é a **matriz dos coeficientes**, da forma 3×2;

• $\boldsymbol{X}$ é a **matriz das incógnitas**, da forma 2×1; e

• $\boldsymbol{B}$ é a **matriz dos termos independentes**, da forma 3×1.

Para o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 4y = 5 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{1}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{y} = \mathbf{3} \\ \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{4}\boldsymbol{y} = \mathbf{5} \\ \mathbf{5}\boldsymbol{x} + \mathbf{6}\boldsymbol{y} = \mathbf{7} \end{cases}$$

Temos:

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{7} \end{bmatrix}$$

Gabarito: Letra D.

Sistemas lineares equivalentes

O entendimento do que são sistemas equivalentes será bastante útil adiante, quando estudarmos a **solução de um sistema linear** e a **discussão de um sistema linear**. Vamos à definição:

Definição

Dois **sistemas lineares** são **equivalentes** quando apresentam as mesmas soluções.

Exemplo: considere os sistemas lineares S_1 e S_2.

$$S_1\begin{cases}x+3y=7\\5x+y=7\end{cases}\quad S_2\begin{cases}x+3y & = & 7\\ \quad 14y & = & -28\end{cases}$$

Ainda veremos como obter as soluções de um sistema linear. Nesse momento, você deve acreditar em mim: ambos os sistemas admitem uma única solução dada por $(x,y)=(1,2)$.

Assim, como ambos os sistemas apresentam as mesmas soluções (no caso, uma solução única), eles são equivalentes.

Podemos representar a equivalência entre dois sistemas por meio de um til " ~ ". Portanto:

$$\begin{cases}x+3y=7\\5x+y=7\end{cases}\sim\begin{cases}x+3y & = & 7\\ \quad 14y & = & -28\end{cases}$$

A equivalência entre dois sistemas também pode ser representada por meio da **matriz completa do sistema**:

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 7\\5 & 1 & 7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 3 & 7\\0 & -14 & 28\end{bmatrix}$$

Combinação linear de equações

Na aula de determinantes, tratamos do conceito de combinação linear. Vamos recapitular a ideia, aplicando o conceito para **equações lineares**.

Podemos dizer que uma equação L_1 é **combinação linear** de outras equações L_2 e L_3 **quando existem valores reais a e b tais que**:

$$L_1=\boldsymbol{a}L_2+\boldsymbol{b}L_3$$

Vejamos um exemplo:

<u>Exemplo 1.</u> Considere as três equações abaixo:

$$\begin{gathered} x+y+z=5 \\ 2x+y+3z=3 \\ 3x+2y+4z=8 \end{gathered}$$

Note que a **terceira equação** (L_3) é **combinação linear** da **primeira** (L_1) com a **segunda** (L_2), pois $L_3 = \mathbf{1}L_1 + \mathbf{1}L_2$.

Nem sempre é fácil identificar uma combinação linear. Vejamos um outro exemplo:

<u>Exemplo 2.</u> Considere as três equações abaixo:

$$\begin{gathered} x-y\ +\ z=-1 \\ 2x+y+\ z=3 \\ 5x+1y+3z=5 \end{gathered}$$

Temos que a **primeira equação** (L_1) é combinação linear da **segunda** (L_2) e da **terceira** (L_3), pois $L_1 = (-\mathbf{2})L_2 + \mathbf{1}L_3$. Veja:

$$\begin{array}{cccccc} (-\mathbf{2})\boldsymbol{L_2} & -\mathbf{4x} & -\ \mathbf{2y} & -\ \mathbf{2z} & = & -6 \\ \mathbf{1}\boldsymbol{L_3} & \mathbf{5x} & +\ \mathbf{1y} & +\ \mathbf{3z} & = & 5 \\ \hline (-\mathbf{2})\boldsymbol{L_2}+\mathbf{1}\boldsymbol{L_3} & \boldsymbol{x} & -\ \boldsymbol{y} & +\ \boldsymbol{z} & = & -1 \end{array}$$

Obtenção de sistemas lineares equivalentes

Uma propriedade importante dos sistemas lineares diz respeito à **combinação linear de equações**.

Em um **sistema linear**, ao **substituir** uma **<u>determinada equação</u>** por uma **combinação linear <u>dela</u>** com **outra equação**, temos um **sistema linear equivalente**.

Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x+3y=7 \\ 5x+y=7 \end{cases}$$

Ao **substituir** a **segunda equação** $(\boldsymbol{L_2})$ pela **combinação linear** $\mathbf{1}\boldsymbol{L_2} + (-\mathbf{5})\boldsymbol{L_1}$, obtemos um novo sistema linear que é equivalente ao primeiro.

Como $\mathbf{1}L_2 + (-\mathbf{5})L_1$ corresponde a $-\mathbf{14}\boldsymbol{y} = -\mathbf{28}$, ficamos com:

$$\begin{cases} x+3y=7 \\ 5x+y=7 \end{cases} \sim \begin{cases} x+3y &= 7 \\ 14y &= -28 \end{cases}$$

Para facilitar a comunicação, a substituição de $\boldsymbol{L_2}$ por $\boldsymbol{L_2} + \boldsymbol{(-5)}\boldsymbol{L_1}$ será denotada da seguinte forma:

$$\boldsymbol{L_2} \leftarrow \boldsymbol{1L_2} + \boldsymbol{(-5)L_1}$$

FIQUE
ATENTO!

A propriedade aprendida é válida quando substituímos a equação por uma **combinação linear** de equações **<u>que contenha a equação original</u>**. Para o exemplo apresentado:

$$\boldsymbol{L_2} \leftarrow 1\boldsymbol{L_2} + (-5)L_1$$

Vamos a um outro exemplo. Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y+2z=4 \\ 2x+4y+z=5 \end{cases}$$

Ao **substituir** a **segunda equação** (L_2) pela **combinação linear** $\boldsymbol{1}L_2 + \boldsymbol{(-1)}L_1$, obtemos um novo sistema linear que é equivalente ao primeiro.

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y+2z=4 \\ 2x+4y+z=5 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y+z= \ 3 \\ \boldsymbol{y+z=} \ \boldsymbol{1} \\ 2x+4y+z=5 \end{cases}$$

Remoção de equações do sistema linear

TOME
NOTA!

Em um sistema linear, quando uma **determinada equação** corresponde a uma **combinação linear** de **<u>outras equações do sistema</u>**, **podemos eliminar essa equação do sistema**.

<u>Exemplo</u>: considere o seguinte sistema.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=5} \\ \boldsymbol{2x+y+3z=3} \\ \boldsymbol{3x+2y+4z=8} \end{cases}$$

Temos que a **terceira equação** é uma combinação linear da **primeira** com a **segunda**, pois $\boldsymbol{L_3 = 1L_1 + 1L_2}$. Logo, podemos eliminar a terceira equação. Isso significa que temos a seguinte equivalência:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 5} \\ \boldsymbol{2x + y + 3z = 3} \\ \boldsymbol{3x + 2y + 4z = 8} \end{cases} \sim \begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 5} \\ \boldsymbol{2x + y + 3z = 3} \end{cases}$$

INDO MAIS FUNDO!

A ideia por trás dessa remoção de uma equação é que, em um sistema linear, uma equação que é combinação linear de outras contém uma **informação desnecessária**. No caso apresentado, a informação $\boldsymbol{3x + 2y + 4z = 8}$ já está contida, implicitamente, nas outras duas equações.

Há uma situação análoga em que se pode eliminar uma equação do sistema linear:

TOME NOTA!

Já sabemos que, em um **sistema linear**, ao **substituir** uma **<u>determinada equação</u>** por uma **combinação linear <u>dela</u>** com **outra equação**, temos um **sistema linear equivalente**.

Se nessa substituição obtivermos uma equação no seguinte formato:

$$0x + 0y + 0z + 0w = 0$$

Podemos remover essa equação do sistema linear.

<u>Vamos utilizar o mesmo sistema linear como exemplo</u>:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 5} \\ \boldsymbol{2x + y + 3z = 3} \\ \boldsymbol{3x + 2y + 4z = 8} \end{cases}$$

Ao substituirmos $\boldsymbol{L_3}$ por $\boldsymbol{L_3} + (-1)L_1$, temos o seguinte sistema linear equivalente:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 5} \\ \boldsymbol{2x + y + 3z = 3} \\ \boldsymbol{3x + 2y + 4z = 8} \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + y + 3z = 3 \\ \boldsymbol{2x + y + 3z = 3} \end{cases}$$

Ao substituirmos novamente $\boldsymbol{L_3}$ por $\boldsymbol{L_3} + (-1)L_2$, temos:

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ 2x+y+3z=3 \\ \mathbf{2x+y+3z=3} \end{cases} \sim \begin{cases} x+y+z=5 \\ 2x+y+3z=3 \\ \mathbf{0x+0y+0z=0} \end{cases}$$

Note que obtivemos uma equação no formato $\mathbf{0x+0y+0z=0}$. Logo, podemos eliminar essa equação.

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ 2x+y+3z=3 \\ \mathbf{0x+0y+0z=0} \end{cases} \sim \begin{cases} \mathbf{x+y+z=5} \\ \mathbf{2x+y+3z=3} \end{cases}$$

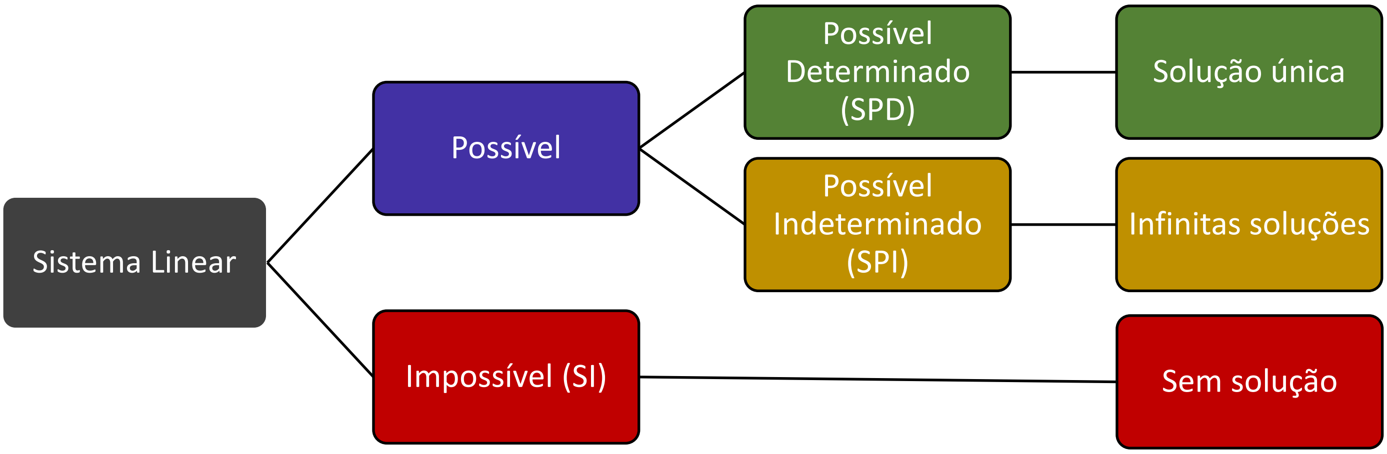
Portanto, temos que o sistema linear original é equivalente ao novo sistema linear obtido, isto é:

$$\begin{cases} \mathbf{x+y+z=5} \\ \mathbf{2x+y+3z=3} \\ \mathbf{3x+2y+4z=8} \end{cases} \sim \begin{cases} \mathbf{x+y+z=5} \\ \mathbf{2x+y+3z=3} \end{cases}$$

Classificação de um sistema linear

Um sistema linear pode ser classificado de três formas:

- **Sistema Possível e Determinado (SPD)**: o sistema apresenta uma **única** solução;
- **Sistema Possível e Indeterminado (SPI)**: o sistema apresenta **infinitas** soluções; e
- **Sistema Impossível (SI)**: ocorre quando o sistema **não apresenta solução**.



A seguir, vamos entender essas três classificações com maiores detalhes. O procedimento de como realizar essa classificação será visto no tópico de **discussão de um sistema linear**.

ACORDE!

Um sistema linear pode apresentar **solução única**, **infinitas soluções** ou **nenhuma solução**.

Se um sistema linear apresenta **mais de uma solução**, então ele apresenta **infinitas soluções**.

Não existe a possibilidade de ele apresentar "**apenas duas soluções**", "**apenas três soluções**", etc.

Sistema possível e determinado (SPD)

Um **sistema possível e determinado (SPD)** é aquele que admite uma única solução.

Um exemplo de sistema possível e determinado é o seguinte:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y + 3z = 14 \\ x + 2y + z = 7 \end{cases}$$

Isso porque ele admite uma única solução: $(x, y, z) = (6, 14, 7)$.

Para um sistema ser possível e determinado, devemos ter:

- **Um número de equações igual ao número de incógnitas**;
- Essas equações **não podem ser combinações lineares umas das outras** (pois, nesse caso, podemos eliminar equações); e
- Essas equações **não podem se contradizer**.

Sistema possível e indeterminado (SPI)

Um **sistema possível e determinado (SPD)** é aquele que admite infinitas soluções.

Podemos tomar como exemplo o sistema que vimos recentemente:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 5} \\ \boldsymbol{2x + y + 3z = 3} \\ \boldsymbol{3x + 2y + 4z = 8} \end{cases}$$

Lembre-se que ele é equivalente a um sistema com duas equações:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 5} \\ \boldsymbol{2x + y + 3z = 3} \\ \boldsymbol{3x + 2y + 4z = 8} \end{cases} \sim \begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 5} \\ \boldsymbol{2x + y + 3z = 3} \end{cases}$$

Veja que $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{(0, 6, -1)}$, bem como $\boldsymbol{(-4, 8, 1)}$ e $\boldsymbol{(-2, 7\ 0)}$ são soluções do sistema linear.

Solução (x, y, z)	Teste em $x + y + z = 5$	Teste em $2x + y + 3z = 3$
$\boldsymbol{(0, 6, -1)}$	$0 + 6 + (-1) = 5\ \rightarrow \boldsymbol{OK}$	$2.0 + 6 + 3.(-1) = 3\ \rightarrow \boldsymbol{OK}$
$\boldsymbol{(-4, 8, 1)}$	$(-4) + 8 + 1 = 5\ \rightarrow \boldsymbol{OK}$	$2.(-4) + 8 + 3.1 = 3\ \rightarrow \boldsymbol{OK}$
$\boldsymbol{(-2, 7, 0)}$	$(-2) + 7 + 0 = 5\ \rightarrow \boldsymbol{OK}$	$2.(-2) + 7 + 3.0 = 3\ \rightarrow \boldsymbol{OK}$

Além dessas três soluções, temos infinitas outras. Logo, o sistema é possível e indeterminado.

Sistema impossível (SI)

O **sistema impossível** ocorre quando o sistema **não apresenta solução**.

Exemplo:

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ \mathbf{2x+y+3z=3} \\ \mathbf{2x+y+3z=4} \end{cases}$$

Observe o que a segunda e a terceira equação estão nos dizendo: em uma equação, temos que "$\mathbf{2x+y+3z}$" é **igual a 3** e, na outra, temos que essa mesma soma é **igual a 4.**

Ora, não é possível encontrar uma solução (x,y,z) cuja soma " $\mathbf{2x+y+3z}$" seja igual a 3 e a 4 ao mesmo tempo. Logo, o sistema é impossível.

Sistema linear homogêneo

Um **sistema linear homogêneo** é aquele em que os **termos independentes** de todas as equações são iguais a zero.

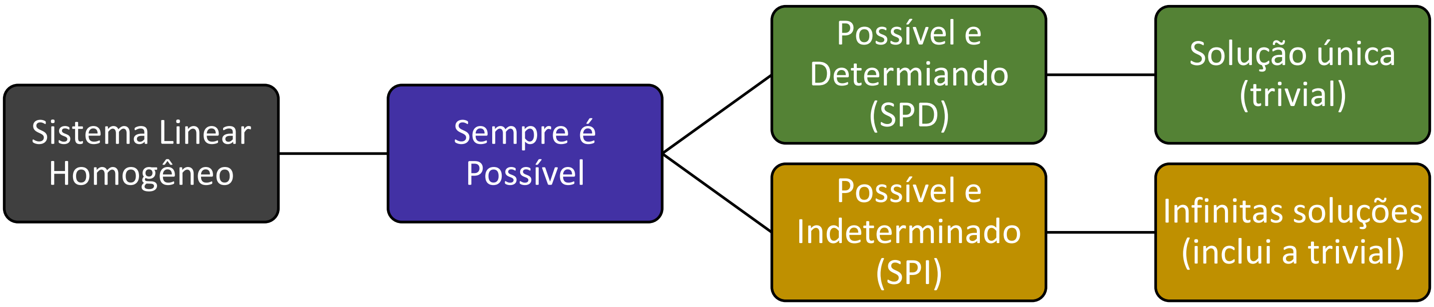
Exemplo:

$$\begin{cases} 3x + 1y + z = \mathbf{0} \\ 2x + 4y + 2z = \mathbf{0} \\ 3x + 2y + 4z = \mathbf{0} \end{cases}$$

Observe que $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ é solução desse sistema.

Um **sistema linear homogêneo** é **sempre possível**, pois sempre admite a solução em que todas as variáveis são zero (denominada **solução trivial**).

- Se o sistema linear homogêneo admitir somente a **solução trivial**, então ele é um **Sistema Possível e Determinado** (**SPD**);
- Caso ele admita outras soluções, então ele admite infinitas soluções e é um **Sistema Possível e Indeterminado** (**SPI**).



(ANPEC/2001) Julgue o item a seguir como certo ou errado.

Um sistema homogêneo de equações lineares sempre tem solução.

Comentários:

Um **sistema homogêneo de equações lineares**, ou seja, um **sistema linear homogêneo**, é sempre possível, isto é, sempre admite ao menos uma solução, a **solução trivial**.

Gabarito: CERTO.

Solução de um sistema linear

Pessoal, até o momento o estudo foi mais voltado para a **construção de uma base teórica**. A partir de agora, temos que **redobrar a atenção**.

Solução por substituição

A **solução por substituição** consiste em isolar uma variável em uma equação e substituir em outra equação. Veja o próximo exemplo:

Encontre a solução do seguinte sistema linear: $\begin{cases} \boldsymbol{3x + 2y = 2} \\ \boldsymbol{2x + y = 4} \end{cases}$.

A partir da segunda equação, podemos isolar y:

$$2x + y = 4$$

$$\boldsymbol{y = 4 - 2x}$$

Substituindo esse $\boldsymbol{y}$ na primeira equação, temos:

$$3x + 2\boldsymbol{y} = 2$$

$$3x + 2.(\boldsymbol{4 - 2x}) = 2$$

$$3x - 8 - 4x = 2$$

$$-x + 8 = 2$$

$$-x = -6$$

$$\boldsymbol{x = 6}$$

Como $\boldsymbol{y = 4 - 2x}$, temos:

$$y = 4 - 2\boldsymbol{x}$$

$$y = 4 - 2.\boldsymbol{6}$$

$$\boldsymbol{y = -8}$$

Logo, a solução do sistema em questão é $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{6}, \boldsymbol{-8})$.

HORA DE PRATICAR!

(SEFAZ AM/2022) x e y são tais que $4x + 5y = 80$ e $6x + 7y = 116$. O valor de $2x + 3y$ é:

a) 38

b) 40

c) 42

d) 44

e) 46

Comentários:

Vamos resolver o sistema linear por **substituição**. Temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 80 \\ 6x + 7y = 116 \end{cases}$$

A partir da primeira equação, podemos isolar x:

$$4x + 5y = 80$$

$$4x = 80 - 5y$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = \frac{80 - 5y}{4}}}$$

Substituindo o valor de x na segunda equação, temos:

$$6x + 7y = 116$$

$$6 \times \left(\frac{80 - 5y}{4}\right) + 7y = 116$$

$$3 \times \left(\frac{80 - 5y}{2}\right) + 7y = 116$$

$$3 \times (40 - 2{,}5y) + 7y = 116$$

$$120 - 7{,}5y + 7y = 116$$

$$-0{,}5y = 116 - 120$$

$$-0{,}5y = -4$$

$$y = \frac{-4}{-0{,}5}$$

$$\boxed{\boldsymbol{y = 8}}$$

Substituindo o valor de y em $\boldsymbol{x = \frac{80-5y}{4}}$, temos:

$$x = \frac{80 - 5y}{4}$$

$$x = \frac{80 - 5 \times 8}{4}$$

$$x = \frac{80 - 40}{4}$$

$$x = \frac{40}{4}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = 10}}$$

Logo, o valor procurado é:

$$2x + 3y$$

$$= 2 \times 10 + 3 \times 8$$

$$= 20 + 24$$

$$= 44$$

Gabarito: Letra D.

Solução por eliminação de variável

Consiste em eliminar variáveis por meio de uma **combinação linear** conveniente das equações do sistema linear.

Trata-se de uma solução não muito metodológica, uma vez que **não há uma clareza do passo a passo a ser seguido**.

Veremos, mais adiante, que o **método do escalonamento** é uma versão procedimental do que aprenderemos nesse tópico.

Vejamos dois exemplos:

Encontre a solução do seguinte sistema linear: $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases}$

Ao realizar a soma das duas primeiras equações, isto é, a **combinação linear $L_1 + L_2$,** elimina-se a variável y:

$$\begin{array}{rl} \boldsymbol{L_1} & 3x + 2y = 2 \\ \boldsymbol{L_2} & 2x - 2y = 3 \\ \hline \boldsymbol{L_1 + L_2} & \boldsymbol{5x \qquad = 5} \end{array}$$

Dividindo ambos os lados da equação por 5, ficamos com:

$$\boldsymbol{x = 1}$$

Para obter y, **podemos substituir o valor de x em qualquer uma das equações do sistema linear**. Vamos substituir na **primeira**:

$$3x + 2y = 2$$

$$3.\boldsymbol{1} + 2y = 2$$

$$2y = 2 - 3$$

$$2y = -1$$

$$\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}}$$

Logo, a solução do sistema em questão é $\boldsymbol{(x, y) = \left(1, -\frac{1}{2}\right)}$.

Encontre a solução do seguinte sistema linear: $\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + 2y + 3z = 9 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$

Ao realizar a **combinação linear $L_1 + (-1)L_3$**, elimina-se as variáveis x e z:

$$\begin{array}{rl} \boldsymbol{L_1} & x + 2y + z = 5 \\ \boldsymbol{(-1)L_3} & -x - y - z = -3 \\ \hline \boldsymbol{L_1 + (-1)L_3} & \boldsymbol{\qquad y \qquad = 2} \end{array}$$

Ao realizar a **combinação linear** $L_2 + (-2)L_3$, elimina-se as variáveis x e y:

$$\begin{array}{rr} L_2 & 2x + 2y + 3z = 9 \\ (-2)L_3 & -2x - 2y - 2z = -6 \\ \hline L_1 + (-1)L_3 & z = 3 \end{array}$$

Temos, portanto, que $y = 2$ e $z = 3$. Para obter x, **podemos substituir esses valores em qualquer uma das equações do sistema linear**. Vamos substituir na **terceira**:

$$x + y + z = 3$$

$$x + 2 + 3 = 3$$

$$x = -2$$

Portanto, a solução do sistema linear é $(x, y, z) = (-2, 2, 3)$.

Solução pela soma das equações do sistema

Pessoal, existem casos em que a solução do sistema linear é obtida de modo mais rápido realizando a **soma de todas as equações do sistema**. Vejamos um exemplo:

Encontre a solução do seguinte sistema linear: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + z = 4 \\ y + z = 5 \end{cases}$

Somando todas as equações do sistema, isto é, realizando a combinação linear $L_1 + L_2 + L_3$, temos:

$$\begin{array}{rr} L_1 & x + y \quad\;\; = 3 \\ L_2 & x + \quad\;\; z = 4 \\ L_3 & y + z = 5 \\ \hline L_1 + L_2 + L_3 & 2x + 2y + 2z = 12 \end{array}$$

Ficamos com:

$$2(x + y + z) = 12$$

$$x + y + z = 6$$

A partir dessa informação, podemos subtrair cada equação do sistema linear de $x + y + z = 6$.

$$
\begin{array}{rl}
 & \boldsymbol{x+y+z=6} \\
\boldsymbol{(-1)L_1} & -x-y \qquad = -3 \\
\hline
 & \boldsymbol{z = \ 3}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
 & \boldsymbol{x+y+z=6} \\
\boldsymbol{(-1)L_2} & -x + \quad -z = -4 \\
\hline
 & \boldsymbol{y \qquad = 2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
 & \boldsymbol{x+y+z=6} \\
\boldsymbol{(-1)L_3} & \quad -y-z = -5 \\
\hline
 & \boldsymbol{x \qquad\quad = 1}
\end{array}
$$

Portanto, a solução do sistema linear é $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3})$.

(MPE SC/2022) No sistema

$$
\begin{cases}
3a + b + c + d = 16 \\
a + 3b + c + d = 6 \\
a + b + 3c + d = 14 \\
a + b + c + 3d = 12
\end{cases}
$$

o valor de a é:

a) –1;

b) 1;

c) 2;

d) 3;

e) 4.

Comentários:

Ao somar todas as equações do sistema linear, temos:

$$
\begin{array}{r}
3a + b + c + d = 16 \\
a + 3b + c + d = \ \ 6 \\
a + b + 3c + d = 14 \\
a + b + c + 3d = 12 \\
\hline
6a + 6b + 6c + 6d = 48
\end{array}
$$

Ficamos com:

$$6(a + b + c + d) = 48$$

$$\boldsymbol{a + b + c + d = 8}$$

A partir dessa informação, podemos subtrair $\boldsymbol{a + b + c + d = 8}$ da primeira equação do sistema linear.

$$\begin{array}{r} 3a + b + c + d = 16 \\ \boldsymbol{-a - b - c - d = -8} \\ \hline \boldsymbol{2a \qquad\qquad = 8} \end{array}$$

Logo, dividindo os dois lados da equação por 2, temos $\boldsymbol{a = 4}$.

Gabarito: Letra E.

(TCE TO/2022) Considere o sistema:

$$\begin{cases} x + y + 5z = 0 \\ x + 5y + z = 14 \\ 5x + y + z = 28 \end{cases}$$

O valor de x é:

a) 3/2;

b) 5/2;

c) 7/2;

d) 9/2;

e) 11/2.

Comentários:

Ao somar todas as equações do sistema linear, temos:

$$\begin{array}{c} x + y + 5z = 0 \\ x + 5y + z = 14 \\ 5x + y + z = 28 \\ \hline 7x + 7y + 7z = 42 \end{array}$$

Ficamos com:

$$7(x + y + z) = 42$$

$$x + y + z = \frac{42}{7}$$

$$x + y + z = 6$$

A partir dessa informação, podemos subtrair $x + y + z = 6$ da terceira equação do sistema linear.

$$\begin{array}{r}5x + y + z = 28\\ -x - y - z = -6\\ \hline 4x \qquad\quad = 22\end{array}$$

Portanto:

$$x = \frac{22}{4}$$

$$x = \frac{11}{2}$$

Gabarito: Letra E.

Solução por matriz inversa

Considere um sistema linear cujo **número de equações** (n) é **igual** ao **número de incógnitas**. Note que, nesse caso, a **matriz dos coeficientes** (A) do sistema linear será **quadrada**, de dimensão $n \times n$.

O sistema pode ser escrito na forma matricial do seguinte modo:

$$A_{n\times n}X_{n\times 1} = B_{n\times 1}$$

Supondo que $\det A \neq 0$, você deve se lembrar da aula de determinantes que **a matriz A possui inversa**. Ao multiplicar ambos os lados da equação por A^{-1} pela esquerda, temos:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

Pela definição de matriz inversa, temos que $A^{-1}A = I$. Logo:

$$IX = A^{-1}B$$

Como a matriz identidade é o elemento neutro da multiplicação de matrizes, ficamos com:

$$X = A^{-1}B$$

Veja, portanto, que a **matriz das incógnitas** (X) é obtida pelo produto da **matriz inversa dos coeficientes** pela **matriz dos termos independentes**.

Vamos resolver um exemplo.

Encontre a solução do seguinte sistema linear: $\begin{cases} \mathbf{3x + 2y = 2} \\ \mathbf{2x - 2y = 3} \end{cases}$

No sistema linear apresentado, a matriz dos coeficientes é dada por $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ e matriz dos termos independentes é $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Note que a matriz A é inversível, pois:

$$\det A = [3 \times (-2)] - [2 \times 2] = -10$$

Da aula sobre determinantes, você deve se lembrar que, para uma matriz $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$, a sua inversa é dada por $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{-b} \\ \boldsymbol{-c} & \boldsymbol{a} \end{bmatrix}$. Logo, para o nosso caso:

$$A^{-1} = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

A matriz dos coeficientes $\boldsymbol{X}$ do sistema linear em questão é:

$$\boldsymbol{X = A^{-1}B}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} (\mathbf{-2}).\mathbf{2} + (\mathbf{-2}).\mathbf{3} \\ (\mathbf{-2}).\mathbf{2} + \mathbf{3}.\mathbf{3} \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} -10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{10}.(-10) \\ -\frac{1}{10}.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

Veja que $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$, isto é, $x = 1$ e $y = -\frac{1}{2}$. Portanto, a solução do sistema linear é $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\mathbf{1}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$.

HORA DE PRATICAR!

(PETROBRAS/2008) A matriz $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, solução do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x + 3y = 185 \\ 3x + 2y = 190 \end{cases}$$

pode ser expressa na forma $X = PB$, em que $B = \begin{bmatrix} 195 \\ 190 \end{bmatrix}$ é a matriz dos termos constantes do sistema, P é uma matriz constante, quadrada, de dimensão 2×2. Nesse caso, assinale a opção correspondente à matriz P.

a) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

Comentários:

Considerando o sistema apresentado:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 185 \\ 3x + 2y = 190 \end{cases}$$

Temos que a **matriz dos coeficientes** é $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Como $\det A \neq 0$, então a **matriz A é inversível.**

$$\det A = [2.2] - [3.3] = 4 - 9 = -5$$

O sistema linear pode ser representado na sua forma matricial por:

$$\boldsymbol{AX = B}$$

Como a matriz A é inversível, podemos multiplicar ambos os lados da equação por A^{-1} pela esquerda:

$$\boldsymbol{A^{-1}AX = A^{-1}B}$$

$$\boldsymbol{IX = A^{-1}B}$$

$$\boldsymbol{X = A^{-1}B}$$

Comparando $\boldsymbol{X = A^{-1}B}$ a equação matricial apresentada no enunciado, dada por $\boldsymbol{X = PB}$, temos que $\boldsymbol{P = A^{-1}}$.

Para uma matriz $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$, a sua inversa é dada por $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{-b} \\ \boldsymbol{-c} & \boldsymbol{a} \end{bmatrix}$. Logo, para o nosso caso:

$$A^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \times 2 & -\frac{1}{5} \times (-3) \\ -\frac{1}{5} \times (-3) & -\frac{1}{5} \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Portanto, $P = A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$

Gabarito: Letra D.

Teorema de Cramer

Primeiramente, deve-se entender que o **Teorema de Cramer** só pode ser utilizado quando o **número de equações** do sistema linear ($\boldsymbol{n}$) é **igual** ao **número de incógnitas**. Nesse caso, a **matriz dos coeficientes** ($\boldsymbol{A}$) do sistema linear será **quadrada**, de dimensão $\boldsymbol{n \times n}$.

Considere, então, um sistema linear escrito na forma matricial:

$$\boldsymbol{A_{n\times n}X_{n\times 1} = B_{n\times 1}}$$

Vamos chamar de $\boldsymbol{D}$ o **determinante da matriz dos coeficientes** ($\boldsymbol{A}$). Ou seja:

$$D = \det A$$

O **Teorema de Cramer** nos diz duas coisas:

PRESTE MAIS
ATENÇÃO!

01) Se $D \neq 0$, o **sistema é possível e determinado** (**SPD**), apresentando **solução única**.

02) Sendo $D \neq 0$, a solução única $(\alpha_1, \alpha_2, \dots\ \alpha_n)$ do sistema linear é tal que:

$$\alpha_i = \frac{D_i}{D}$$

Onde D_i é o determinante da matriz que se obtém a partir de $A_{n \times n}$ substinuindo a coluna i pela matriz $B_{n \times 1}$.

Professor, não entendi nada!

Calma, concurseiro. O entendimento só virá com o desenvolvimento do próximo exemplo. Ao acompanhá-lo, o **Teorema de Cramer** fica mais claro.

Encontre a solução do seguinte sistema linear $\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + 2y + 3z = 9 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ **pelo Teorema de Cramer.**

Ao representar o sistema linear na sua forma matricial, temos $AX = B$, sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Primeiro, devemos obter o determinante da matriz A:

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando a **Regra de Sarrus**, ficamos com:

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D = [1.2.1 + 2.3.1 + 1.2.1] - [1.2.1 + 1.3.1 + 2.2.1]$$

$$D = 10 - 9$$

$$\boxed{D = 1}$$

Como $D \neq 0$, o sistema é **possível e determinado (SPD)**, sendo possível aplicar o teorema.

Obtenção de x

Para obter x, vamos utilizar a seguinte relação:

$$x = \frac{D_x}{D}$$

Já temos o valor do determinante D. Nesse momento, devemos obter D_x.

D_x é o determinante da matriz que se obtém a partir da matriz A substituindo a **coluna dos coeficientes da variável x** pela matriz B.

Coeficientes de x

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando a **Regra de Sarrus**, ficamos com:

$$\left|\begin{matrix} 5 & 2 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 5 & 2 \\ 9 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D_x = [5.2.1 + 2.3.3 + 1.9.1] - [1.2.3 + 5.3.1 + 2.9.1]$$

$$D_x = 37 - 39$$

$$\boxed{D_x = -2}$$

Logo:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{1}$$

$$\boxed{x = -2}$$

Obtenção de y

D_y é o determinante da matriz que se obtém a partir da matriz A substituindo a **coluna dos coeficientes da variável y** pela matriz B.

Coeficientes de y

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{2} & 1 \\ 2 & \boxed{2} & 3 \\ 1 & \boxed{1} & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando a **Regra de Sarrus**, ficamos com:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 5 \\ 2 & 9 \\ 1 & 3 \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D_y = [1.9.1 + 5.3.1 + 1.2.3] - [1.9.1 + 1.3.3 + 5.2.1]$$

$$D_y = 30 - 28$$

$$\boxed{D_y = 2}$$

Logo:

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{2}{1}$$

$$\boxed{y = 2}$$

Obtenção de z

D_z é o determinante da matriz que se obtém a partir da matriz A substituindo a **coluna dos coeficientes da variável z** pela matriz B.

Coeficientes de z

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \boxed{1} \\ 2 & 2 & \boxed{3} \\ 1 & 1 & \boxed{1} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Aplicando a **Regra de Sarrus**, ficamos com:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 9 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right.$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D_z = [\mathbf{1.2.3 + 2.9.1 + 5.2.1}] - [\mathbf{5.2.1 + 1.9.1 + 2.2.3}]$$

$$D_z = 34 - 31$$

$$\boxed{D_z = 3}$$

Logo:

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{3}{1}$$

$$\boxed{z = 3}$$

Portanto, a solução do sistema linear é $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3})$.

HORA DE PRATICAR!

(AFRFB/2012) Considere o sistema de equações lineares dado por:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + rz = 2 \\ rx + 2y + z = -1 \end{cases}$$

Sabendo-se que o sistema tem solução única para $r \neq 0$ e $r \neq 1$, então o valor de x é igual a

a) $\frac{2}{r}$

b) $\frac{-2}{r}$

c) $\frac{1}{r}$

d) $\frac{-1}{r}$

e) $2r$

Comentários:

Vamos resolver essa questão com o **Teorema de Cramer**.

Note que as variáveis do sistema são x, y e z, sendo r uma constante.

Ao representar o sistema linear na sua forma matricial, temos $AX = B$, sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & r \\ r & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Primeiro, devemos obter o determinante da matriz A:

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & r \\ r & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando a **Regra de Sarrus**, ficamos com:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & r & 1 & -1 \\ r & 2 & 1 & r & 2 \end{array}\right.$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D = [\mathbf{1}.(-\mathbf{1}).\mathbf{1} + \mathbf{1}.\boldsymbol{r}.\boldsymbol{r} + \mathbf{1}.\mathbf{1}.\mathbf{2}] - [\mathbf{1}.(-\mathbf{1}).\boldsymbol{r} + \mathbf{1}.\boldsymbol{r}.\mathbf{2} + \mathbf{1}.\mathbf{1}.\mathbf{1}]$$

$$D = [r^2 + 1] - [r + 1]$$

$$D = r^2 - r$$

$$\boxed{D = r(r-1)}$$

O enunciado pede a solução para $r \neq 0$ e $r \neq 1$. Note que, para esse caso, $\boldsymbol{D}$ **será diferente de zero**. Portanto, podemos aplicar o **Teorema de Cramer**.

Para obter x, vamos utilizar a seguinte relação:

$$x = \frac{D_x}{D}$$

D_x é o determinante da matriz que se obtém a partir da matriz A substituindo a **coluna dos coeficientes da variável x** pela matriz B.

Coeficientes de x

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{1}} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boxed{\mathbf{1}} & -\mathbf{1} & \boldsymbol{r} \\ \boxed{\boldsymbol{r}} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{2} \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & -\mathbf{1} & \boldsymbol{r} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$$

Aplicando a **Regra de Sarrus**, ficamos com:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & r & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right.$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D_x = [\mathbf{0}.(-\mathbf{1}).\mathbf{1} + \mathbf{1}.\boldsymbol{r}.(-\mathbf{1}) + \mathbf{1}.\mathbf{2}.\mathbf{2}] - [\mathbf{1}.(-\mathbf{1}).(-\mathbf{1}) + \mathbf{0}.\boldsymbol{r}.\mathbf{2} + \mathbf{1}.\mathbf{2}.\mathbf{1}]$$

$$D_x = [-r+4] - [3]$$

$$\boxed{D_x = 1 - r}$$

Logo:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{1-r}{r(r-1)} = \frac{-(r-1)}{r(r-1)}$$

Simplificando $(r-1)$, obtemos:

$$\boxed{x = \frac{-1}{r}}$$

Gabarito: Letra D.

Método do escalonamento

O **método do escalonamento**, também conhecido por **Eliminação Gaussiana**, sem dúvidas é o melhor meio para se resolver sistemas lineares.

Esse método nos traz um **passo a passo**, uma "**receita de bolo**". **Não é necessário ter uma "sacada" para resolver o sistema**. Além disso, **não precisamos resolver determinantes**, como acontece no **Teorema de Cramer**.

O método consiste em **obter um sistema equivalente** ao sistema original em que o **número de variáveis explícitas diminui de equação para equação**. Em outras palavras, o número de coeficientes nulos aumenta de equação para equação.

Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 2x + 4y + 4z = 22 \\ 2x + 4y + 3z = 10 \end{cases}$$

A ideia do método do escalonamento é chegar no seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x + \ \ y + \ \ z = 4 \\ \qquad 3y + 3z = 18 \\ \qquad\qquad -z = -12 \end{cases}$$

Dizemos que este sistema é um **sistema escalonado** porque o número de variáveis explícitas diminui de equação para equação. Note que na **primeira equação** temos 3 variáveis explícitas, na **segunda equação** temos 2 variáveis e, na **última equação**, temos apenas uma variável explícita.

Veja como o **sistema escalonado** é interessante: a partir da **última equação**, obtemos o valor de $\boldsymbol{z}$. Na **penúltima equação** conseguimos obter o valor de $\boldsymbol{y}$, pois já temos o valor de z. Por fim, na **primeira equação**, conseguimos obter o valor de $\boldsymbol{x}$, pois já temos y e z.

Ok, professor. Mas como obtenho esse sistema escalonado?

Para obter o sistema escalonado, devemos seguir os seguintes passos:

- Colocar como 1ª equação uma que apresente a 1ª incógnita;
- Anular a 1ª incógnita de todas as equações (exceto da 1ª) fazendo uso da 1ª equação;
- Anular a 2ª incógnita de todas as equações (exceto da 1ª e da 2ª) fazendo uso da 2ª equação;
- Anular a 3ª incógnita de todas as equações (exceto da 1ª, da 2ª e da 3ª) fazendo uso da 3ª equação;
- E assim sucessivamente, até que tenhamos usado todas as equações.

Vamos aprender na prática.

Encontre a solução do seguinte sistema linear $\begin{cases} \mathbf{2x + y + z = 4} \\ \mathbf{2x + 4y + 4z = 22} \\ \mathbf{2x + 4y + 3z = 10} \end{cases}$ pelo método do escalonamento.

• Note que a 1ª equação já apresenta a 1ª incógnita (x).

• Devemos, agora, eliminar a 1ª incógnita (x) de todas as equações (exceto da 1ª) fazendo uso da 1ª equação.

Temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 2x + 4y + 4z = 22 \\ 2x + 4y + 3z = 10 \end{cases}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + \mathbf{(-1)}L_1$, obtemos um sistema linear equivalente:

$$\sim \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 3y + 3z = 18 \\ 2x + 4y + 3z = 10 \end{cases}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + \mathbf{(-1)}L_1$, obtemos um sistema linear equivalente:

$$\sim \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 3y + 3z = 18 \\ 3y + 2z = 6 \end{cases}$$

• Devemos, agora, eliminar a 2ª incógnita (y) de todas as equações (exceto da 1ª e da 2ª) fazendo uso da 2ª equação.

Fazendo $L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + \mathbf{(-1)}L_2$, obtemos um sistema linear equivalente:

$$\sim \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 3y + 3z = 18 \\ -1z = -12 \end{cases}$$

Observe que obtemos um sistema escalonado. Nesse momento, devemos parar o escalonamento e obter a solução a partir da **última equação**.

$$-1z = -12$$

$$\boldsymbol{z = 12}$$

Da **segunda equação**, temos:

$$3y + 3\boldsymbol{z} = 18$$

$$3y + 3.\boldsymbol{12} = 18$$

$$3y = -18$$

$$\boldsymbol{y = -6}$$

Da **primeira equação**, temos:

$$2x + \boldsymbol{y} + \ \boldsymbol{z} = 4$$

$$2x + (\boldsymbol{-6}) + \boldsymbol{12} = 4$$

$$2x + 6 = 4$$

$$2x = -2$$

$$\boldsymbol{x = -1}$$

Portanto, a solução do sistema linear é $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{-1}, \boldsymbol{-6}, \boldsymbol{12})$.

Observe que, no problema anterior, obtivemos a seguinte sequência de sistemas equivalentes:

$$\begin{cases} \boldsymbol{2x + \ \ y + \ z = \ \ 4} \\ \boldsymbol{2x + 4y + 4z = 22} \\ \boldsymbol{2x + 4y + 3z = 10} \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (\mathbf{-1})L_1}{\sim} \begin{cases} 2x + \ \ y + \ z = \ \ 4 \\ \qquad\ 3y + 3z = 18 \\ 2x + 4y + 3z = 10 \end{cases} \overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (\mathbf{-1})L_1}{\sim} \begin{cases} 2x + \ \ y + \ z = \ \ 4 \\ \qquad\ 3y + 3z = 18 \\ \qquad\ 3y + 2z = 6 \end{cases}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (\mathbf{-1})L_2}{\sim} \begin{cases} 2x + \ \ y + \ z = \ \ 4 \\ \qquad\ 3y + 3z = 18 \\ \qquad\quad -1z = -12 \end{cases}$$

Uma outra forma de escalonar o sistema é utilizando a **matriz <u>completa</u> do sistema** $[A|B]$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{22} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{10} \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (\mathbf{-1})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 18 \\ 2 & 4 & 3 & 10 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (\mathbf{-1})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 18 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (\mathbf{-1})L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 18 \\ 0 & 0 & -1 & -12 \end{bmatrix}$$

Dê preferência ao escalonamento <u>por meio da matriz completa do sistema</u>. Isso porque ela traz maior agilidade no escalonamento, pois não é necessário escrever diversas vezes as incógnitas x, y e z.

Para evitar trabalhar com frações na hora de escalonar um sistema, um recurso interessante é <u>alterar a ordem das equações</u>. Veremos isso na resolução do primeiro exercício a seguir.

(Pref. Rezende/2019) O valor de x no sistema linear a seguir é:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 19 \\ x + 2y + z = 12 \\ 3x - y + z = 7 \end{cases}$$

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

Comentários:

Vamos resolver essa questão pelo **método do escalonamento**, fazendo uso da **matriz <u>completa</u> do sistema.** Inicialmente, temos:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 19 \\ x + 2y + z = 12 \\ 3x - y + z = 7 \end{cases}$$

Note que, para iniciar o escalonamento, teríamos que fazer $L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + \left(-\frac{1}{2}\right)L_1$ para eliminar a incógnita x da segunda equação. Para evitar trabalhar com números fracionários, vamos trocar a primeira e a segunda equação de lugar:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 12 \\ 2x + y + 3z = 19 \\ 3x - y + z = 7 \end{cases}$$

A **matriz completa do sistema** é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 2 & 1 & 3 & 19 \\ 3 & -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

• Note que a 1ª equação já apresenta a 1ª incógnita (x).

• Devemos, agora, eliminar a 1ª incógnita (x) de todas as equações (exceto da 1ª) fazendo uso da 1ª equação.

Fazendo $L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (\mathbf{-2})L_1$, obtemos um sistema linear equivalente:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (\mathbf{-3})L_1$, obtemos um sistema linear equivalente:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & -7 & -2 & -29 \end{bmatrix}$$

• Devemos, agora, eliminar a 2ª incógnita (y) de todas as equações (exceto da 1ª e da 2ª) fazendo uso da 2ª equação.

Fazendo $L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + \left(\mathbf{-\frac{7}{3}}\right)L_1$, obtemos um sistema linear equivalente:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -\dfrac{13}{3} & -\dfrac{52}{3} \end{bmatrix}$$

Note, portanto, que obtivemos o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 12 \\ \quad - 3y + z = -5 \\ \qquad -\dfrac{13}{3}z = -\dfrac{52}{3} \end{cases}$$

Da **última equação**, temos:

$$-\frac{13}{3}z = -\frac{52}{3}$$

$$13z = 52$$

$$\mathbf{z = 4}$$

Da **segunda equação**, temos:

$$-3y + z = -5$$

$$-3y + 4 = -5$$

$$-3y = -9$$

$$\boldsymbol{y = 3}$$

Da **primeira equação**, temos:

$$x + 2y + z = 12$$

$$x + 2.3 + 4 = 12$$

$$x = 12 - 4 - 6$$

$$\boldsymbol{x = 2}$$

Portanto, o valor de x é 2.

Gabarito: Letra B.

(Pref. Caxias do Sul/2019) Dado o sistema de equações lineares abaixo:

$$Y = \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 16 \end{cases}$$

O conjunto solução **S** com base na ordem de $S = (x_2, x_1, x_3)$ é:

a) $S = (x_2, x_1, x_3) = (2, -2, 8)$.

b) $S = (x_2, x_1, x_3) = (-2, 2, 8)$.

c) $S = (x_2, x_1, x_3) = (8, -2, 2)$.

d) $S = (x_2, x_1, x_3) = (2, 8, 2)$.

e) $S = (x_2, x_1, x_3) = (2, 2, 8)$.

Comentários:

Vamos resolver essa questão pelo **método do escalonamento**, fazendo uso da **matriz <u>completa</u> do sistema.**

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & 2 & 16 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + \left(-\frac{3}{2}\right)L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -1/2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 16 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (-\mathbf{1})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Veja que a última operação já eliminou a variável x_1 e x_2 da terceira equação.

Ficamos com o seguinte sistema escalonado:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -1x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -2 \\ 1x_3 = 8 \end{cases}$$

Da **última equação**, temos:

$$\boldsymbol{x_3 = 8}$$

Da **segunda equação**, temos:

$$-1x_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{x_3} = -2$$

$$-x_2 - \frac{1}{2}.8 = -2$$

$$-x_2 - 4 = -2$$

$$-x_2 = 4 - 2$$

$$-x_2 = 2$$

$$\boldsymbol{x_2 = -2}$$

Da **primeira equação**, temos

$$2x_1 + 2\boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} = 8$$

$$2x_1 + 2.(-2) + 8 = 8$$

$$2x_1 = 4$$

$$\boldsymbol{x_1 = 2}$$

Muita atenção nesse momento. A questão pergunta pela solução $S = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_1}, x_3)$.

O **gabarito**, portanto, é **letra B**: $S = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_1}, x_3) = (\boldsymbol{-2}, \boldsymbol{2}, 8)$.

Gabarito: Letra B.

Posto e nulidade de uma matriz

O **posto** de uma matriz é o **número de linhas não nulas de uma matriz escalonada**. A representação do posto de uma matriz A é dada por $\rho(A)$.

A **nulidade** de uma matriz é dada pela **diferença** entre o **número de colunas** e o **posto da matriz**:

$$null(A) = (\text{Nº colunas}) - \rho(A)$$

Exemplo: se, ao escalonarmos uma matriz A, obtivermos o seguinte resultado:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Temos que:

- O **posto** dessa matriz é $\boldsymbol{\rho(A) = 3}$.
- A **nulidade** dessa matriz é $null\ (A) = 5 - 3 = 2$.

FIQUE ATENTO!

O **posto da matriz** também é conhecido por **característica da matriz**.

(ABIN/2010) Considerando a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

E os vetores:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Julgue o item a seguir.

A matriz A tem posto 2.

Comentários:

Vamos escalonar a matriz A, dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (\mathbf{-2})L_1$, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (\mathbf{-3})L_1$, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + \left(-\frac{1}{2}\right) L_2$, obtemos:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

O **posto** de uma matriz é o **número de linhas não nulas de uma matriz escalonada**. Logo, o posto de A é 2.

Gabarito: CERTO.

Discussão de um sistema linear

Vimos que um sistema linear pode ser classificado de três formas:

- **Sistema Possível e Determinado (SPD)**: o sistema apresenta uma **única** solução;
- **Sistema Possível e Indeterminado (SPI)**: o sistema apresenta **infinitas** soluções; e
- **Sistema Impossível (SI)**: ocorre quando o sistema **não apresenta solução**.

A **discussão de um sistema linear** trata justamente dessa classificação, de modo a determinar se o sistema linear é SPD, SPI ou SI.

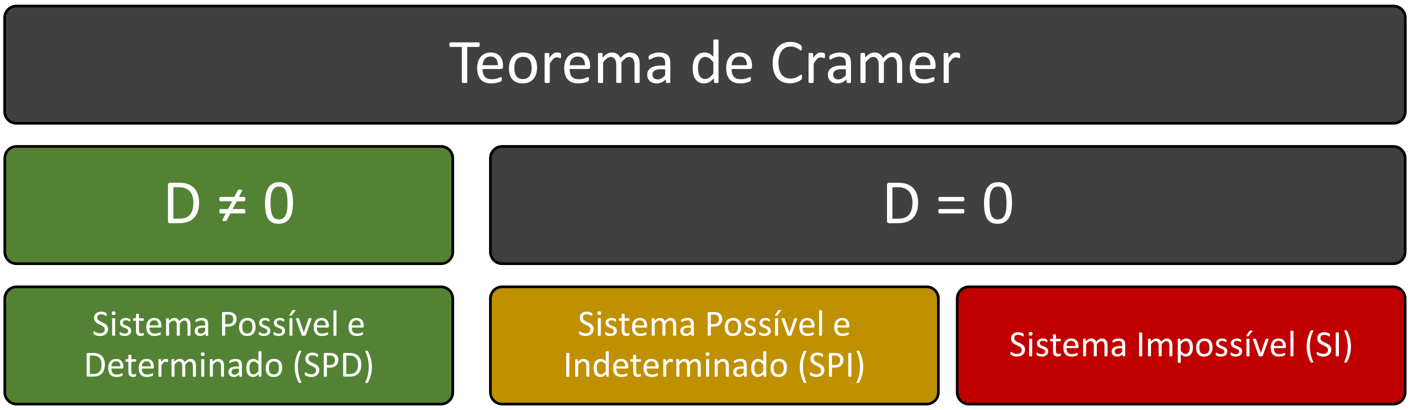
Discussão por Teorema de Cramer

Vimos que é possível obter a solução de um sistema linear por meio do **Teorema de Cramer**:

$$x = \frac{D_x}{\boldsymbol{D}} \ ; \ y = \frac{D_y}{\boldsymbol{D}} \ ; \ z = \frac{D_z}{\boldsymbol{D}}$$

Lembre-se de que a condição para aplicar o teorema é $\boldsymbol{D \neq 0}$, isto é, o **determinante** da **matriz dos coeficientes** (**matriz incompleta do sistema**) deve ser diferente de zero. Nesse caso, o **sistema é possível e determinado** (**SPD**), apresentando **solução única**.

Por outro lado, quando $\boldsymbol{D = 0}$**,** podemos ter um **sistema possível indeterminado** (**SPI**) ou um **sistema impossível** (**SI**).



Um caso interessante ocorre quando temos um **sistema linear homogêneo**. Lembre-se de que esse sistema sempre admite solução, a **solução trivial**. Nesse caso, **esse sistema não pode ser impossível**, de modo que, se $D = 0$, necessariamente ele é **possível e indeterminado** (**SPI**).

Sistema Linear Homogêneo	
D ≠ 0	D = 0
Sistema Possível e Determinado (SPD)	Sistema Possível e Indeterminado (SPI)
Admite somente a solução trivial	Admite a solução trivial e infinitas outras

Professor, quando $D = 0$ e o sistema não é homogêneo, como vou diferenciar o SPI do SI?

Excelente pergunta! Nesse caso, o **Teorema de Cramer** nos deixa na mão. Devemos utilizar o **Método do Escalonamento**, que será visto no próximo tópico.

ESCLARECENDO!

Para fins de **discussão do sistema linear**, o **Teorema de Cramer** tem serventia quando obtemos $D \neq 0$ **ou quando o sistema é homogêneo**.

No caso em que $D = 0$ e o sistema não é homogêneo, ficamos na dúvida entre **SPI** e **SI**. Para sanar essa questão, deve-se utilizar o **Método do Escalonamento**.

HORA DE PRATICAR!

(Pref. SJC/2019) Considere o sistema linear S, representado da seguinte forma matricial:

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O sistema S é:

a) impossível se $ad - bc = 0$

b) impossível se $ad - bc \neq 0$

c) possível e determinado se $ad - bc = 0$

d) possível e determinado se $ad - bc \neq 0$

e) possível e indeterminado se $ad - bc \neq 0$

Comentários:

Observe que o **sistema linear** em questão é **homogêneo**, pois os termos independentes são nulos.

Nesse caso, sendo D o determinante da matriz dos coeficientes:

• Se $D \neq 0$, temos um **sistema possível e determinado** (**SPD**);

• Se $D = 0$, temos um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**).

O determinante da matriz dos coeficientes é:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Logo:

• Se $ad - bc \neq 0$, temos um **sistema possível e determinado** (**SPD**);

• Se $ad - bc = 0$, temos um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**).

O **gabarito**, portanto, é **letra D**.

Gabarito: Letra D.

(TRANSPETRO/2018) Sistemas lineares homogêneos possuem, pelo menos, uma solução e, portanto, nunca serão considerados impossíveis. O sistema linear dado abaixo possui infinitas soluções.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + \alpha y + z = 0 \\ \alpha x + \alpha y + 2z = 0 \end{cases}$$

Qual o maior valor possível para α?

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

Comentários:

Temos um **sistema linear homogêneo** com **infinitas soluções**. Logo, além de homogêneo, o sistema é **possível e indeterminado (SPI)**.

Portanto, devemos ter $D = 0$, ou seja, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha & 2 \end{vmatrix} = 0$.

Aplicando a **Regra de Sarrus** no determinante D, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D = [1.\alpha.2 + 1.1.\alpha + 1.1.\alpha] - [1.\alpha.\alpha + 1.1.\alpha + 1.1.2]$$

$$D = [4\alpha] - [\alpha^2 + \alpha + 2]$$

$$D = -\alpha^2 + 3\alpha - 2$$

Como $D = 0$, temos:

$$-\alpha^2 + 3\alpha - 2 = 0$$

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$$

Aplicando a **Fórmula de Bhaskara**:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4.1.2$$

$$\Delta = 1$$

$$\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\alpha = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2.1}$$

$$\alpha = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$\boldsymbol{\alpha_1 = 2} \quad ; \quad \boldsymbol{\alpha_2 = 1}$$

Logo, **o maior valor possível para α é 2**.

Gabarito: Letra C.

Antes de passar para o próximo tópico, é necessário esclarecer um ponto para aqueles que estudaram essa matéria em outras fontes.

INDO MAIS FUNDO!

Alguns professores, especialmente relacionados a concursos públicos, ensinam de **modo equivocado (ERRADO)** que se pode usar **Teorema de Cramer** para diferenciar um **SPI** de um **SI**. Eles dizem que, uma vez que $D = 0$, o **SPI** ocorre quando:

$$D = D_x = D_y = D_z = \cdots = 0$$

O contraexemplo a seguir mostra que **esse bizu está errado**:

$$\begin{cases} 1x + 1y + 1z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = \mathbf{7} \end{cases}$$

Note que **o sistema apresentado é impossível** (**SI**). Isso porque, ao multiplicar a primeira equação por 3, obtém-se:

$$3x + 3y + 3z = \mathbf{3}$$

Essa equação contradiz a última equação do sistema, pois $3x + 3y + 3z$ **não pode ser igual a 3 e a 7 ao mesmo tempo**.

Observe, porém, que todos os determinantes são zero, pois apresentam filas paralelas iguais:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad D_x = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ \mathbf{2} & 2 & 2 \\ \mathbf{7} & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 2 & \mathbf{2} & 2 \\ 3 & \mathbf{7} & 3 \end{vmatrix} \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 2 & 2 & \mathbf{2} \\ 3 & 3 & \mathbf{7} \end{vmatrix}$$

Segundo o bizu errado, **teríamos um SPI**, pois $D = D_x = D_y = D_z = 0$.

Discussão pelo Método do Escalonamento

Podemos classificar um sistema linear em SPD, SPI e SI de maneira inequívoca por meio do escalonamento. Para tanto, deve-se seguir os seguintes passos:

Passo 1: Escalonar o sistema linear.

Passo 2: Analisar o sistema linear escalonado.

- Se obtivermos uma equação da forma $\mathbf{0x + 0y + 0z + 0w = b}$, com $\mathbf{b \neq 0}$, temos um **sistema impossível** (**SI**);
- **Caso contrário**, temos duas possibilidades:
  - Se o número de **equações** for **igual** ao número de **incógnitas**, temos um **sistema possível e determinado** (**SPD**).
  - Se o número de **equações** for **menor** do que o número de **incógnitas**, temos um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**).

ACORDE!

No escalonamento, se obtivermos uma equação da forma $\mathbf{0x + 0y + 0z + 0w = 0}$, **devemos eliminar essa equação do sistema linear**, pois essa equação é uma combinação linear das outras.

Vamos realizar três exemplos para que não reste dúvida quanto ao método.

Classifique o sistema linear $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 4x + 7y + 3z = 8 \end{cases}$.

Vamos escalonar o sistema fazendo uso da **matriz completa do sistema.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 3 & 8 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (-\mathbf{2})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 7 & 3 & 8 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (-\mathbf{4})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (-\mathbf{1})L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

A última equação do sistema escalonado, dada por $\mathbf{0x + 0y + 0z = 1}$, indica que estamos diante de um **sistema impossível** (**SI**).

Classifique o sistema linear $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + 3y + 2z = 2 \\ 4x + 9y + 5z = 5 \end{cases}$.

Vamos escalonar o sistema fazendo uso da **matriz completa do sistema**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 9 & 5 & 5 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (-\mathbf{1})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 9 & 5 & 5 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (-\mathbf{4})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (-\mathbf{1})L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

A última equação do sistema escalonado, dada por $\mathbf{0x + 0y + 0z = 0}$, deve ser eliminada. O sistema linear em questão é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Explicitando as variáveis, o sistema linear original equivale a:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ \quad\ \ y + z = 1 \end{cases}$$

Veja que **o sistema anterior é escalonado**, pois o número de incógnitas diminui de equação para equação.

Trata-se de um **sistema escalonado** cujo **número de equações** (2) é **menor** do que o **número de incógnitas** (3). Logo, temos um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**).

Classifique o sistema linear $\begin{cases} \boldsymbol{x - y + z = 1} \\ \boldsymbol{x + 3y + 2z = 2} \\ \boldsymbol{2x + 3y + 1z = 3} \end{cases}$.

Vamos escalonar o sistema fazendo uso da **matriz completa do sistema.**

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (-\mathbf{1})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (-\mathbf{2})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + \left(-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}\right)L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & 4 & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Explicitando as variáveis, o sistema linear original equivale a:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ \quad 4y + z = 1 \\ \quad\quad -\frac{1}{4}z = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Veja que **o sistema acima é escalonado**, pois o número de incógnitas diminui de equação para equação.

Trata-se de um **sistema escalonado** cujo **número de equações** (3) é **igual** ao **número de incógnitas** (3). Logo, temos um **sistema possível e determinado** (**SPD**).

Vamos praticar o que aprendemos nessa seção.

HORA DE PRATICAR!

(STN/2013) Dado o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 3x + 6y = 9 \end{cases}$$

É correto afirmar que:

a) o sistema não possui solução.

b) o sistema possui uma única solução.

c) $x = 1$ e $y = 2$ é uma solução do sistema.

d) o sistema é homogêneo.

e) o sistema possui mais de uma solução.

Comentários:

Vamos escalonar o sistema fazendo uso da **matriz completa do sistema**. Temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Realizando $L_2 = \mathbf{1}L_2 + \left(-\frac{3}{2}\right)L_1$, ficamos com:

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

A última equação do sistema escalonado, dada por $\mathbf{0x + 0y = 0}$, pode ser eliminada. O sistema linear em questão é equivalente a:

$$\sim [2 \quad 4 \quad 6]$$

Explicitando as variáveis, o sistema linear original equivale a:

$$\{x + 2y = 6$$

Trata-se de um **sistema escalonado** cujo **número de equações** (1) é **menor** do que o **número de incógnitas** (2). Logo, temos um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**). Isso significa que o sistema possui mais de uma solução, isto é, possui infinitas soluções. O **gabarito**, portanto, é **letra E**.

Gabarito: Letra E.

(CGU/2008) Considerando o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ 2x_1 + px_2 = q \end{cases}$$

pode-se corretamente afirmar que

a) se $p = -2$ e $q \neq 4$, então o sistema é impossível.

b) se $p \neq -2$ e $q = 4$, então o sistema é possível e indeterminado.

c) se $p = -2$, então o sistema é possível e determinado.

d) se $p = -2$ e $q \neq 4$, então o sistema é possível e indeterminado.

e) se $p = 2$ e $q = 4$, então o sistema é impossível.

Comentários:

Essa questão é um excelente resumo do que vimos quanto à **discussão de um sistema linear**.

Inicialmente, vamos utilizar o **Teorema de Cramer**.

O determinante D da **matriz dos coeficientes** é:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & p \end{vmatrix}$$

$$D = [1 \times p] - [(-1) \times 2]$$

$$D = p - (-2)$$

$$\boldsymbol{D = p + 2}$$

Pelo **Teorema de Cramer**, sabemos que **o sistema é possível e determinado** (**SPD**) quando $\boldsymbol{D \neq 0}$, isto é, quando:

$$p + 2 \neq 0$$

$$\boldsymbol{p \neq -2}$$

Para o caso em que $\boldsymbol{D = 0}$, isto é, **quando** $\boldsymbol{p = -2}$, podemos ter tanto um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**) quanto um **sistema impossível** (**SI**).

Para saber o que acontece para o caso em que $\boldsymbol{p = -2}$, devemos escalonar o sistema. Temos:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ 2x_1 \boldsymbol{- 2}x_2 = q \end{cases}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & q \end{bmatrix}$$

Realizando $L_2 = \mathbf{1}L_2 + (\mathbf{-2})L_1$, temos:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & q-4 \end{bmatrix}$$

Note que:

- Se $(q-4)$ for diferente de zero, isto é, **se $q \neq 4$**, teremos um **sistema impossível** (**SI**), pois haverá uma equação da forma $\mathbf{0x_1 + 0x_2 = (q-4)}$ com $(\boldsymbol{q-4}) \neq \mathbf{0}$.
- Por outro lado, **se $q = 4$**, ficamos com:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

A última equação do sistema escalonado, dada por $\mathbf{0x_1 + 0x_2 = 0}$, pode ser eliminada. O sistema linear em questão é equivalente a:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Explicitando as variáveis, o sistema linear original equivale a:

$$\{x_1 - x_2 = 2$$

Trata-se de um **sistema escalonado** cujo **número de equações** (1) é **menor** do que o **número de incógnitas** (2). Logo, temos um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**).

Em resumo, temos o seguinte:

- $p \neq -2 \rightarrow$ **Sistema Possível e Determinado (SPD)**;
- $p = -2$ e $q \neq 4 \rightarrow$ **Sistema Impossível (SI)**;
- $p = -2$ e $q = 4 \rightarrow$ **Sistema Possível e Indeterminado (SPI)**.

O **gabarito**, portanto, é **letra A**.

Gabarito: Letra A.

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Sistema linear

1.(CESGRANRIO/TRANSPETRO/2011) Nas duas equações mostradas a seguir, x e y são variáveis e a e b são constantes.

$$\frac{y-a}{2}+\frac{y-x}{5}+\frac{y}{4}=0 \text{ e } \frac{x-b}{2}+\frac{x-y}{5}+\frac{x}{4}=0$$

Essas equações podem ser compactadas em uma equação matricial do tipo $M\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$, na qual M é a matriz:

a) $\begin{bmatrix}0{,}4 & 1{,}9\\1{,}9 & 0{,}4\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}-0{,}4 & 1{,}9\\0{,}4 & -1{,}9\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}-1{,}9 & 0{,}4\\1{,}9 & -0{,}4\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}-0{,}4 & 1{,}9\\1{,}9 & -0{,}4\end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix}-4 & 19\\19 & -4\end{bmatrix}$

Comentários:

Para transformar o sistema linear para a forma matricial, devemos deixar os termos independentes do lado direito das equações.

Da **primeira equação**, temos:

$$\frac{y-a}{2}+\frac{y-x}{5}+\frac{y}{4}=0$$

$$\frac{y}{2}-\frac{a}{2}+\frac{y}{5}-\frac{x}{5}+\frac{y}{4}=0$$

$$-\frac{1}{5}x+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)y=\boldsymbol{\frac{a}{2}}$$

Note que, a partir da **matriz dos termos independentes** $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ apresentada no enunciado, percebe-se que **a questão pede que o termo independente da primeira equação seja a**. Logo, devemos multiplicar a primeira equação por 2. Ficamos com:

$$-\frac{2}{5}x + \left(1 + \frac{2}{5} + \frac{2}{4}\right)y = \boldsymbol{a}$$

$$-0{,}4x + (1 + 0{,}4 + 0{,}5)y = a$$

$$\boldsymbol{-0,4x + 1,9y = a}$$

Da **segunda equação**, temos:

$$\frac{x-b}{2} + \frac{x-y}{5} + \frac{x}{4} = 0$$

$$\frac{x}{2} - \frac{b}{2} + \frac{x}{5} - \frac{y}{5} + \frac{x}{4} = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right)x - \frac{1}{5}y = \boldsymbol{\frac{b}{2}}$$

A questão pede que o termo independente da segunda equação seja $\boldsymbol{b}$. Logo, devemos multiplicar a segunda equação por 2. Ficamos com:

$$\left(1 + \frac{2}{5} + \frac{2}{4}\right)x - \frac{2}{5}y = \boldsymbol{b}$$

$$(1 + 0{,}4 + 0{,}5)x - 0{,}4y = b$$

$$\boldsymbol{1,9x - 0,4y = b}$$

Logo, o sistema apresentado pelo enunciado corresponde a:

$$\begin{cases} \boldsymbol{-0,4x + 1,9y = a} \\ \boldsymbol{1,9x - 0,4y = b} \end{cases}$$

Na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} -0{,}4 & 1{,}9 \\ 1{,}9 & -0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz M é:

$$M = \begin{bmatrix} -0{,}4 & 1{,}9 \\ 1{,}9 & -0{,}4 \end{bmatrix}$$

Gabarito: Letra D.

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Solução de um sistema linear

1.(CESGRANRIO/BNDES/2006) O valor de x no sistema

$$\begin{cases} \mathbf{2x - y + z = 4} \\ \mathbf{x + 3y + z = 14} \\ \mathbf{3x + 2y - 4z = 0} \end{cases}$$

é:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

Comentários:

Vamos escalonar o sistema fazendo uso da **matriz completa do sistema**. Para evitar trabalhar com frações, vamos trocar a primeira e a segunda equação de lugar:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 14 \\ 2x - y + z = 4 \\ 3x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 14 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (\mathbf{-2})L_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 14 \\ 0 & -7 & -1 & -24 \\ 3 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (\mathbf{-3})L_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 14 \\ 0 & -7 & -1 & -24 \\ 0 & -7 & -7 & -42 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (\mathbf{-1})L_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 14 \\ 0 & -7 & -1 & -24 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{bmatrix}$$

Ficamos com o seguinte sistema escalonado:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 14 \\ \quad -7y - z = -24 \\ \quad\quad - 6z = -18 \end{cases}$$

Da **última equação**, temos:

$$-6z = -18$$

$$\mathbf{z = 3}$$

Da **segunda equação**, temos:

$$-7y - \mathbf{z} = -24$$

$$-7y - 3 = -24$$

$$-7y = -21$$

$$\mathbf{y = 3}$$

Da **primeira equação**, temos:

$$x + 3\mathbf{y} + \mathbf{z} = 14$$

$$x + 3.3 + 3 = 14$$

$$x + 12 = 14$$

$$\mathbf{x = 2}$$

O **gabarito**, portanto, é **letra C**.

Uma outra forma de resolver o problema é pelo **Teorema de Cramer**. Temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y + z = 14 \\ 3x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

O valor de x pode ser obtido da seguinte forma:

$$x = \frac{D_x}{D}$$

D é o determinante da **matriz dos coeficientes**:

$$\left|\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{array}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D = \mathbf{[2.3.(-4) + (-1).1.3 + 1.1.2]} - \mathbf{[1.3.3 + 2.1.2 + (-1).1.(-4)]}$$

$$D = -25 - 17$$

$$D = -42$$

D_x é o determinante da **matriz dos coeficientes** **substituindo a primeira coluna pela matriz dos termos independentes**:

$$\left|\begin{matrix} 4 & -1 & 1 \\ 14 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 4 & -1 \\ 14 & 3 \\ 0 & 2 \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D = [\mathbf{4.3.(-4) + (-1).1.0 + 1.14.2}] - [\mathbf{1.3.0 + 4.1.2 + (-1).14.(-4)}]$$

$$D_x = -20 - 64$$

$$D_x = -84$$

Logo:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-84}{-42}$$

$$x = 2$$

Novamente, obtemos que o **gabarito** é **letra C**.

Gabarito: Letra C.

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Discussão de um sistema linear

1.(CESGRANRIO/PETROBRAS/2018) Considere o sistema de equações lineares nas variáveis reais x e y:

$$\begin{cases} k^2x + y = 3 \\ x - ky = m + 4 \end{cases}, \text{ no qual } k \text{ e } m \text{ são reais.}$$

Sabe-se que existem números reais a e b, com $a \neq b$, tais que os pares ordenados (a, b) e (b, a) são soluções do sistema dado.

Dessa forma, k e m são, necessariamente, tais que

a) $k = 1, m = 1$

b) $k \neq 1, m = 1$

c) $k = -1, m = -1$

d) $k \neq -1, m = -1$

e) $k \neq -1, m \neq -1$

Comentários:

Note que o enunciado afirma que o sistema apresenta duas soluções distintas. Isso significa que o sistema possui infinitas soluções, ou seja, trata-se de um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**).

Pelo **Teorema de Cramer**, sabemos que uma condição **necessária** para que o sistema seja **SPI** é que o **determinante da matriz dos coeficientes seja zero**, isto é, $D = 0$.

Observação: **Não** se trata de uma condição **suficiente**, pois **$D = 0$ não implica que o sistema seja SPI**, pois ele pode ser **SI**. Em outras palavras:

$$SPI \rightarrow D = 0$$

$$D = 0 \rightarrow SPI \text{ ou } SI$$

Fazendo $D = 0$, temos:

$$\begin{vmatrix} k^2 & 1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} = 0$$

$$[k^2 \times (-k)] - [1 \times 1] = 0$$

$$-k^3 - 1 = 0$$

$$k^3 = -1$$

$$\boldsymbol{k = -1}$$

Agora que temos $k = -1$, o sistema linear fica assim:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = m + 4 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, isto é, subtraindo a segunda linha da primeira, ficamos com:

$$\overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (-1)L_1}{\sim} \begin{cases} x + y = 3 \\ 0x + 0y = \boldsymbol{m + 1} \end{cases}$$

Note que:

- Se $(m + 1)$ for diferente de zero, isto é, se $\boldsymbol{m \neq -1}$, teremos um **sistema impossível** (**SI**), pois haverá uma equação da forma $\mathbf{0x + 0y = (m + 1)}$ com $\mathbf{(m + 1) \neq 0}$.
- Por outro lado, se $\boldsymbol{m = -1}$, ficamos com:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 0x + 0y = \mathbf{0} \end{cases} \sim \{x + y = 3$$

Trata-se de um **sistema escalonado** cujo **número de equações** (1) é **menor** do que o **número de incógnitas** (2). Logo, temos um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**).

Portanto, para que o sistema seja **SPI**, devemos ter $\boldsymbol{k = -1}$ e $\boldsymbol{m = -1}$.

Gabarito: Letra C.

2. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2018) Seja o sistema de equação linear: $\begin{cases} \boldsymbol{ax + y = 1} \\ \boldsymbol{x + ay = -1} \end{cases}$

Quantos são os valores do parâmetro a que levam o sistema a possuir infinitas soluções?

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) infinitos

Comentários:

Note que o enunciado afirma que o sistema deve possuir infinitas soluções, ou seja, deve ser um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**).

Pelo **Teorema de Cramer**, sabemos que uma condição **necessária** para que o sistema seja **SPI** é que o **determinante da matriz dos coeficientes seja zero**, isto é, $D = 0$.

Observação: **Não** se trata de uma condição suficiente, pois $D = 0$ não implica que o sistema seja **SPI**, pois ele pode ser **SI**. Em outras palavras:

$$SPI \rightarrow D = 0$$

$$D = 0 \rightarrow SPI \text{ ou } SI$$

Fazendo $D = 0$, temos:

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 0$$

$$[a \times a] - [1 \times 1] = 0$$

$$a^2 - 1 = 0$$

$$a^2 = 1$$

$$\boldsymbol{a = \pm 1}$$

Note, portanto, que a princípio temos duas possibilidades: $\boldsymbol{a = 1}$ e $\boldsymbol{a = -1}$.

—

Fazendo $a = 1$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

Veja que **esse sistema é impossível**, pois $x + y$ não pode ser igual a 1 e também igual a -1. Escalonando o sistema, ficamos com:

$$\overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (-\mathbf{1})L_1}{\sim} \begin{cases} x + y = 3 \\ \mathbf{0x + 0y = -2} \end{cases}$$

—

Fazendo $\boldsymbol{a = -1}$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, ficamos com:

$$\overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + \mathbf{1}L_1}{\sim} \begin{cases} -x + y = 1 \\ \mathbf{0x + 0y = 0} \end{cases} \sim \{-x + y = 1$$

Trata-se de um **sistema escalonado** cujo **número de equações** (1) é **menor** do que **número de incógnitas** (2). Logo, temos um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**).

—

Portanto, conclui-se que o sistema admite infinitas soluções para **apenas um valor** do parâmetro a.

Gabarito: Letra B.

3. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2011) Com relação ao sistema de variáveis reais x e y, $\begin{cases} mx + y = 3 \\ x - y = n \end{cases}$, no qual m e n são números reais, tem-se que

a) se $m = -1$ e $n = -3$, qualquer par ordenado (x, y), x e y reais, é solução

b) não tem solução se $m = -1$ e $n \neq -3$

c) tem sempre solução quaisquer que sejam m e n reais

d) tem duas soluções se $m \neq -1$

e) $(1,1)$ é solução se $m = n$

Comentários:

Pelo **Teorema de Cramer**, pode-se obter algumas conclusões a partir do **determinante** da **matriz dos coeficientes** (D):

Temos que:

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$D = [m \times (-1)] - [1 \times 1]$$

$$\boldsymbol{D = -m - 1}$$

Para $\boldsymbol{D = 0}$, podemos ter tanto um **SPI** quanto um **SI**.

$$D = 0$$

$$-m - 1 = 0$$

$$\boldsymbol{m = -1}$$

Portanto, pelo **Teorema de Cramer**, temos as seguintes conclusões:

- $\boldsymbol{m = -1}$ → **Sistema possível e indeterminado** (**SPI**) ou **Sistema Impossível** (**SI**).
- Quando, $D \neq 0$, isto é, $\boldsymbol{m \neq -1}$ → **Sistema Possível e Determinado** (**SPD**).

Para $\boldsymbol{m = -1}$, ficamos com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -x + y = 3 \\ x - y = n \end{cases}$$

Escalonando o sistema, temos:

$$\underset{\sim}{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + \mathbf{1}L_1} \begin{cases} -x + y = 3 \\ 0x + 0y = \boldsymbol{n + 3} \end{cases}$$

Veja que:

- Se $(n + 3)$ for diferente de zero, isto é, se $\boldsymbol{n \neq -3}$, teremos um **sistema impossível** (**SI**), pois haverá uma equação da forma $\mathbf{0}\boldsymbol{x} + \mathbf{0}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{n} + \mathbf{3})$ com $(n + 3) \neq 0$.

- Por outro lado, se $n = -3$, ficamos com:

$$\begin{cases} -x + y = 3 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \sim \{-x + y = 3$$

Trata-se de um **sistema escalonado** cujo **número de equações** (1) é **menor** do que o **número de incógnitas** (2). Logo, temos um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**).

Em resumo, temos as seguintes conclusões:

- $m \neq -1$ → **Sistema possível e determinado** (**SPD**) → Solução única.
- $m = -1$ e $n = -3$ → **Sistema Possível e Indeterminado** (**SPI**) → Infinitas soluções.
- $m = -1$ e $n \neq -3$ → **Sistema Impossível** (**SI**) → Sem solução.

Vamos analisar as alternativas:

a) se $m = -1$ e $n = -3$, qualquer par ordenado (x, y), x e y reais, é solução. ERRADO.

Se $m = -1$ e $n = -3$, temos um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**), que admite infinitas soluções. Isso não significa dizer que qualquer par ordenado é solução. Por exemplo, o par $(x, y) = (0, 0)$ não é solução.

b) não tem solução se $m = -1$ e $n \neq -3$. CERTO.

Se $m = -1$ e $n \neq -3$, o **sistema é impossível**, isto é, não admite solução. O **gabarito**, portanto, é **letra B**.

c) tem sempre solução quaisquer que sejam m e n reais. ERRADO.

Conforme a alternativa B, sistema não admite solução para $m = -1$ e $n \neq -3$.

d) tem duas soluções se $m \neq -1$. ERRADO.

Se $m \neq -1$, o **sistema é possível e determinado** (**SPD**) e, portanto, admite **solução única**.

e) $(1, 1)$ é solução se $m = n$. ERRADO.

Não basta que m seja igual a n para que $(x, y) = (1,1)$ seja solução. Fazendo $m = n$, temos seguinte sistema:

$$\begin{cases} nx + y = 3 \\ x - y = n \end{cases}$$

Note que $(x, y) = (1,1)$ não torna verdadeira as duas equações do sistema:

$$\begin{cases} n + 1 = 3 \\ 1 - 1 = n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ 0 = n \end{cases}$$

Gabarito: Letra B.

4. (CESGRANRIO/BNDES/2009) Para que o sistema linear $\begin{cases} 5x - 6y = 1 \\ ax + 4y = b \end{cases}$ possua infinitas soluções, os valores de a e b devem ser tais que $\frac{a}{b}$ valha

a) -5

b) -2

c) 0

d) 2

e) 5

Comentários:

A questão pede que o sistema possua infinitas soluções, isto é, pede que ele seja **possível e indeterminado** (**SPI**).

Pelo **Teorema de Cramer**, sabemos que uma condição **necessária** para que o sistema seja **SPI** é que o **determinante da matriz dos coeficientes seja zero**, isto é, $D = 0$.

Observação: **Não** se trata de uma condição suficiente, pois $D = 0$ não implica que o sistema seja **SPI**, pois ele pode ser **SI**. Em outras palavras:

$$SPI \rightarrow D = 0$$

$$D = 0 \rightarrow SPI \text{ ou } SI$$

Temos:

$$D = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ a & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$[5 \times 4] - [(-6) \times a] = 0$$

$$20 + 6a = 0$$

$$a = -\frac{20}{6}$$

$$\boldsymbol{a = -\frac{10}{3}}$$

Para $a = -\frac{10}{3}$, ficamos com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 5x - 6y = 1 \\ -\dfrac{10}{3}x + 4y = b \end{cases}$$

Para evitar trabalhar com frações, vamos multiplicar a segunda equação por 3. Ficamos com:

$$\begin{cases} 5x - 6y = 1 \\ -10x + 12y = 3b \end{cases}$$

Escalonando o sistema, temos:

$$\underset{\sim}{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + \mathbf{2}L_1} \begin{cases} 5x - 6y = 1 \\ 0x + 0y = 3b + 2 \end{cases}$$

Para o sistema ser **possível e indeterminado**, devemos ter $\boldsymbol{3b + 2 = 0}$:

$$3b + 2 = 0$$

$$3b = -2$$

$$\boldsymbol{b = -\frac{2}{3}}$$

Portanto é necessário que $\frac{a}{b}$ seja:

$$\frac{a}{b} = \frac{-\frac{10}{3}}{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{10}{3} \times \frac{3}{2}$$

$$= 5$$

Gabarito: Letra E.

5.(CESGRANRIO/PETROBRAS/2012) Um professor editou sua prova bimestral em um processador de textos antigo e salvou em um pen drive para imprimir na escola. Devido à incompatibilidade entre os processadores de texto, alguns caracteres de um sistema linear, cujas variáveis eram x, y e z, ficaram irreconhecíveis na impressão, conforme ilustrado a seguir:

$$\begin{cases} x + y + \square z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 2x + 5y - 3z = \triangle \end{cases}$$

Os alunos que iriam resolver a prova bimestral perguntaram ao professor quais eram os valores de □ e △, mas ele não soube dizer. Disse apenas que o sistema possuía, pelo menos, duas soluções distintas.

Se a afirmação do professor é correta, qual a soma dos valores de □ e △?

a) 11

b) 8

c) 6

d) 5

e) 4

Comentários:

Para facilitar as contas, vamos substituir o quadrado pela constante "q" e o triângulo pela constante "t". Ficamos com o seguinte sistema de variáveis x, y e z:

$$\begin{cases} x + y + qz = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 2x + 5y - 3z = t \end{cases}$$

O enunciado afirma que o sistema possuía, pelo menos, duas soluções distintas. Isso significa que o sistema admite infinitas soluções, ou seja, estamos diante de um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**).

Pelo **Teorema de Cramer**, sabemos que uma condição **necessária** para que o sistema seja **SPI** é que o **determinante da matriz dos coeficientes seja zero**, isto é, $D = 0$.

Observação: **Não** se trata de uma condição suficiente, pois $D = 0$ não implica que o sistema seja **SPI**, pois ele pode ser **SI**. Em outras palavras:

$$SPI \rightarrow D = 0$$

$$D = 0 \rightarrow SPI\ ou\ SI$$

Temos que $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & q \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$. Vamos aplicar a **regra de Sarrus**:

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & q \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D = [1.2.(-3) + 1.1.2 + q.1.5] - [q.2.2 + 1.1.5 + 1.1.(-3)]$$

$$D = [5q - 4] - [4q + 2]$$

$$D = q - 6$$

Para que tenhamos um **SPI**, é **necessário** que $D = 0$. Logo:

$$q - 6 = 0$$

$$\boldsymbol{q = 6}$$

Logo, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y + \mathbf{6}z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 2x + 5y - 3z = t \end{cases}$$

Vamos escaloná-lo a partir da **matriz completa do sistema**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & t \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (-1)L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 2 & 5 & -3 & t \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (-2)L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -15 & t-2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (-3)L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{t-5} \end{bmatrix}$$

Para que o sistema seja possível e indeterminado, a terceira equação do sistema escalonado deve ser da seguinte forma:

$$\mathbf{0x + 0y + 0z = 0}$$

Portanto, devemos ter:

$$\boldsymbol{t - 5 = 0}$$

$$\boldsymbol{t = 5}$$

Portanto, a soma dos valores de □ e △ é:

$$q + t = 6 + 5 = 11$$

Gabarito: Letra A.

AVISO IMPORTANTE!

Olá, alunos (as)!

Informamos que não temos mais questões da banca, referente ao assunto tratado na aula de hoje, em virtude de baixa cobrança deste tópico ao longo dos anos. No entanto, para complementar o estudo e deixar sua preparação em alto nível, preparamos um caderno de questões inéditas que servirá como treino e aprimoramento do conteúdo.

Em caso de dúvidas, não deixe de nos chamar no Fórum de dúvidas!

Bons estudos!

Estratégia Concursos

QUESTÕES COMENTADAS – INÉDITAS

Sistema linear

1.(INÉDITA) Quanto aos sistemas lineares, julgue o item a seguir.

O sistema linear $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x+y+3z=2 \\ y+z=3 \end{cases}$ **pode ser representado por meio da seguinte equação matricial:**

$$[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Comentários:

Temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 1x+1y+1z=1 \\ 3x+1y+3z=2 \\ 0x+1y+1z=3 \end{cases}$$

A representação matricial desse sistema, conforme apresentado na teoria da aula, é dada do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

O **gabarito**, portanto, é **ERRADO**. Cumpre destacar que a equação matricial presente no item não corresponde ao sistema linear em questão. Veja:

$$[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1x+3y+0z \\ 1x+1y+1z \\ 1x+3y+3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Igualando os elementos das duas matrizes-coluna, temos:

$$\rightarrow \begin{cases} 1x+3y+0z=1 \\ 1x+1y+1z=2 \\ 1x+3y+3z=3 \end{cases}$$

Note que esse sistema obtido é diferente do original.

Gabarito: ERRADO.

2. (INÉDITA) Assinale a alternativa que apresenta a matriz dos coeficientes do sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ 3x - 3z = x \\ -y + z = 6 \end{cases}$$

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

Comentários:

Para obter a matriz dos coeficientes do sistema linear, devemos manter as variáveis do lado esquerdo das equações:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ 3x - 3z = x \\ -y + z = 6 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ 3x - 3z - x = 0 \\ -y + z = 6 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ 2x - 3z = 0 \\ -y + z = 6 \end{cases}$$

Além disso, quanto aos coeficientes, deve-se entender que:

- Variáveis que aparecem em outras equações e **não** aprecem em uma determinada equação devem ser representadas com um **coeficiente 0**;
- Variáveis que supostamente não apresentam coeficiente na verdade têm **coeficiente 1**.

Ficamos com:

$$\begin{cases} 1x + 3y + 1z = 5 \\ 2x + 0y - 3z = 0 \\ 0x - 1y + 1z = 6 \end{cases}$$

Portanto, o sistema original apresenta a seguinte forma matricial $\boldsymbol{AX = B}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz dos coeficientes}} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Gabarito: Letra D.

3. (INÉDITA) Considere o seguinte sistema de equações a seguir, em que x e y são variáveis:

$$\begin{cases} \dfrac{y-2}{3} + \dfrac{x-y}{2} + \dfrac{y}{5} = 0 \\ \dfrac{x-5}{3} + \dfrac{y-x}{5} + \dfrac{x}{2} = 0 \end{cases}$$

Esse sistema de equações pode ser escrito da forma $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, em que A é a matriz:

a) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{19}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{19}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{30} \\ \frac{19}{30} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{19}{30} \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{30} \\ \frac{19}{30} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Comentários:

Para transformar o sistema linear para a forma matricial, devemos deixar os termos independentes do lado direito das equações.

Da **primeira equação**, temos:

$$\frac{y-2}{3} + \frac{x-y}{2} + \frac{y}{5} = 0$$

$$\frac{y}{3} - \frac{2}{3} + \frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{y}{5} = 0$$

$$\frac{x}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)y = \frac{2}{3}$$

$$\frac{x}{2} + \left(\frac{10-15+6}{30}\right)y = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{30}y = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

Note que, a partir da **matriz dos termos independentes** $\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$ apresentada no enunciado, **percebe-se que a questão pede que o termo independente da primeira equação seja 2**. Logo, devemos multiplicar a primeira equação por 3. Ficamos com:

$$\frac{3}{2}x+\frac{1}{10}y=\mathbf{2}$$

Da **segunda equação**, temos:

$$\frac{x-5}{3}+\frac{y-x}{5}+\frac{x}{2}=0$$

$$\frac{x}{3}-\frac{5}{3}+\frac{y}{5}-\frac{x}{5}+\frac{x}{2}=0$$

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)x+\frac{1}{5}y=\frac{5}{3}$$

$$\left(\frac{10-6+15}{30}\right)x+\frac{1}{5}y=\frac{5}{3}$$

$$\frac{19}{30}x+\frac{1}{5}y=\mathbf{\frac{5}{3}}$$

A questão pede que o termo independente da segunda equação seja 5. Logo, devemos multiplicar a segunda equação por 3. Ficamos com:

$$\frac{19}{10}x+\frac{3}{5}y=\mathbf{5}$$

Logo, o sistema apresentado pelo enunciado corresponde a:

$$\begin{cases}\mathbf{\frac{3}{2}}\boldsymbol{x}+\mathbf{\frac{1}{10}}\boldsymbol{y}=\mathbf{2}\\ \mathbf{\frac{19}{10}}\boldsymbol{x}+\mathbf{\frac{3}{5}}\boldsymbol{y}=\mathbf{5}\end{cases}$$

Na forma matricial, temos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{\frac{3}{2}} & \mathbf{\frac{1}{10}}\\ \mathbf{\frac{19}{10}} & \mathbf{\frac{3}{5}}\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{2}\\ \mathbf{5}\end{bmatrix}$$

O **gabarito**, portanto, é **letra B**.

Gabarito: Letra B.

QUESTÕES COMENTADAS – INÉDITAS

Solução de um sistema linear

1.(INÉDITA) Considere dois números x e y em que $3x - 2y = 4$ e $x + 3y = 5$. O valor de $x + y$ é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

Comentários:

Temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema linear por **substituição**.

A partir da segunda equação, podemos isolar x:

$$x + 3y = 5$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = 5 - 3y}}$$

Substituindo esse valor na primeira equação, temos:

$$3x - 2y = 4$$

$$3 \times (5 - 3y) - 2y = 4$$

$$15 - 9y - 2y = 4$$

$$-11y = -11$$

$$\boxed{\boldsymbol{y = 1}}$$

Substituindo o valor de y em $\boldsymbol{x = 5 - 3y}$, temos:

$$x = 5 - 3 \times 1$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = 2}}$$

Logo:

$$x + y = 2 + 1$$

$$= 3$$

Gabarito: Letra C.

2. (INÉDITA) Considere que a solução do sistema linear $\begin{cases} 5x + 3y = 3 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$ é $(x, y) = (a, b)$. O valor de $3a + 9b$ é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

Comentários:

Vamos resolver o sistema linear por **substituição**.

A partir da primeira equação, podemos isolar x:

$$5x + 3y = 3$$

$$5x = 3 - 3y$$

$$\boxed{x = \frac{3 - 3y}{5}}$$

Substituindo esse valor na segunda equação, temos:

$$2x + 3y = 2$$

$$2 \times \left(\frac{3 - 3y}{5}\right) + 3y = 2$$

$$\frac{6}{5} - \frac{6}{5}y + 3y = 2$$

$$3y - \frac{6}{5}y = 2 - \frac{6}{5}$$

$$\frac{15y - 6y}{5} = \frac{10 - 6}{5}$$

$$\frac{9y}{5}=\frac{4}{5}$$

$$\boxed{y=\frac{4}{9}}$$

Substituindo o valor de y em $x=\frac{3-3y}{5}$, temos:

$$x=\frac{3-3y}{5}$$

$$x=\frac{3-3\times\frac{4}{9}}{5}$$

$$x=\frac{3-\frac{4}{3}}{5}$$

$$x=\frac{\frac{9-4}{3}}{5}$$

$$x=\frac{\frac{5}{3}}{5}$$

$$\boxed{x=\frac{1}{3}}$$

Logo, a solução do sistema é:

$$(x,y)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{9}\right)$$

Consequentemente:

$$a=\frac{1}{3}\text{ e }b=\frac{4}{9}$$

Portanto, o valor requerido pela questão é:

$$3a+9b$$

$$=3\times\frac{1}{3}+9\times\frac{4}{9}$$

$$=1+4$$

$$=5$$

Gabarito: Letra E.

3. (INÉDITA) O valor de x no sistema

$$\begin{cases} 6x - 2y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

é:

a) 0,1

b) 0,3

c) 0,5

d) 0,7

e) 0,9

Comentários:

Poderíamos resolver o problema pelo **método da substituição**. Observe, porém, que podemos eliminar a variável y por meio de uma **combinação linear**.

Fazendo a **combinação linear** $\boldsymbol{L_1 + 2L_2}$, temos:

$$\begin{array}{rl} \boldsymbol{L_1} & 6x - 2y = 1 \\ \boldsymbol{2L_2} & 4x + 2y = 8 \\ \hline \boldsymbol{L_1 + 2L_2} & \mathbf{10x} \quad\;\; = \mathbf{9} \end{array}$$

Portanto:

$$x = \frac{9}{10}$$

$$\boxed{x = 0,9}$$

Gabarito: Letra E.

4. (INÉDITA) Considere o sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ 3x + 5y + z = 14 \\ 2x + 4y + 4z = 27 \end{cases}$$

O valor de y é:

a) 2,5

b) 3,5

c) 4,5

d) 5,5

e) 6,5

Comentários:

Poderíamos resolver esse problema pelo **método do escalonamento** ou até mesmo por **Cramer**. Observe, porém, que a maneira mais prática de se obter o valor de y é utilizar a **combinação linear** $\boldsymbol{L_3 + (-2)L_1}$.

Ao realizar a **combinação linear** $\boldsymbol{L_3 + (-2)L_1}$, elimina-se as variáveis x e z:

$$\begin{array}{rc} \boldsymbol{L_3} & 2x + 4y + 4z = 27 \\ \boldsymbol{(-2)L_1} & -2x - 2y - 4z = -20 \\ \hline \boldsymbol{L_3 + (-2)L_1} & 2y \qquad = 7 \end{array}$$

Logo:

$$2y = 7$$

$$y = \frac{7}{2}$$

$$y = 3{,}5$$

Gabarito: Letra B.

5.(INÉDITA) O sistema a seguir apresenta solução única:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y + 3z = 10} \\ \boldsymbol{x + 3y + z = 11} \\ \boldsymbol{x + 2y + 2z = 14} \end{cases}$$

O valor de $\boldsymbol{\sqrt{x + y + z}}$ **é:**

a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

e) 8

Comentários:

Poderíamos resolver esse problema pelo **método do escalonamento**. A solução por **Cramer** também é possível, porém teríamos que calcular quatro determinantes 3×3 para determinar as três variáveis x, y e z.

Uma maneira mais rápida de resolver o problema é obter a variável z realizando a **combinação linear** $\boldsymbol{L_1 + (-1)L_3}$.

$$\begin{array}{rr} L_1 & x+2y+3z=10 \\ (-1)L_3 & -x-2y-2z=-14 \\ \hline L_3+(-1)L_1 & z=-4 \end{array}$$

Agora que sabemos que $z=-4$, ficamos com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x+2y+3.(-4)=10 \\ x+3y+(-4)=11 \\ x+2y+2.(-4)=14 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x+2y-12=10 \\ x+3y-4=11 \\ x+2y-8=14 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x+2y=22 \\ x+3y=15 \\ x+2y=22 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x+2y=22} \\ \boldsymbol{x+3y=15} \end{cases}$$

A partir desse novo sistema obtido, podemos eliminar a variável x realizando a **combinação linear** $L_2+(-1)L_1$.

$$\begin{array}{rr} L_2 & x+3y=15 \\ (-1)L_1 & -x-2y=-22 \\ \hline L_2+(-1)L_1 & y=-7 \end{array}$$

Agora que sabemos que $y=-7$, podemos obter x por meio de qualquer uma das equações do sistema anterior.

$$x+3y=15$$

$$x+3\times(-7)=15$$

$$x-21=15$$

$$\boldsymbol{x=36}$$

Portanto:

$$\sqrt{x+y+z}=\sqrt{36-7-4}$$

$$=\sqrt{25}$$

$$=5$$

Gabarito: Letra E.

6. (INÉDITA) Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y + z = 5} \\ \boldsymbol{x + y + 2z = 6} \\ \boldsymbol{2x + y + z = 7} \end{cases}$$

O valor de $\boldsymbol{x - y}$ é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

Comentários:

Ao somar todas as equações do sistema linear, temos:

$$\begin{array}{c} x + 2y + z = 5 \\ x + y + 2z = 6 \\ 2x + y + z = 7 \\ \hline 4x + 4y + 4z = 18 \end{array}$$

Ficamos com:

$$4(x + y + z) = 18$$

$$x + y + z = \frac{18}{4}$$

$$\boldsymbol{x + y + z = 4,5}$$

Para obter x, podemos subtrair $\boldsymbol{x + y + z = 4,5}$ da terceira equação do sistema linear.

$$\begin{array}{c} 2x + y + z = 7 \\ \boldsymbol{-x - y - z = -4,5} \\ \hline \boldsymbol{x \qquad = 2,5} \end{array}$$

Logo, $\boldsymbol{x = 2,5}$.

Para obter y, podemos subtrair $\boldsymbol{x + y + z = 4,5}$ da primeira equação do sistema linear.

$$\begin{array}{c} x + 2y + z = 5 \\ \boldsymbol{-x - y - z = -4,5} \\ \hline \boldsymbol{y \qquad = 0,5} \end{array}$$

Logo, $\boldsymbol{y = 0,5}$.

Portanto, o valor de $x - y$ é:

$$2{,}5 - 0{,}5$$

$$= 2$$

Gabarito: Letra B.

7. (INÉDITA) Considere que os valores x, y, z e w são tais que

- $x + y + z = 5$;
- $x + y + w = 6$;
- $x + z + w = 7$; e
- $y + z + w = 3$.

O valor de $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ é:

a) 12

b) 13

c) 14

d) 18

e) 21

Comentários:

Temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + y + z \phantom{{}+w} = 5 \\ x + y \phantom{{}+z} + w = 6 \\ x \phantom{{}+y} + z + w = 7 \\ \phantom{x+{}} y + z + w = 3 \end{cases}$$

Ao somar todas as equações do sistema linear, temos:

$$\begin{array}{r} x + y + z \phantom{{}+w} = 5 \\ x + y \phantom{{}+z} + w = 6 \\ x \phantom{{}+y} + z + w = 7 \\ y + z + w = 3 \\ \hline 3x + 3y + 3z + 3w = 21 \end{array}$$

Ficamos com:

$$3(x + y + z + w) = 21$$

$$x + y + z + w = \frac{21}{3}$$

$$\boldsymbol{x + y + z + w = 7}$$

Para obter x, podemos tomar $\boldsymbol{x + y + z + w = 7}$ subtrair a quarta equação.

$$\begin{array}{r} \boldsymbol{x + y + z + w = 7} \\ -y - z - w = -3 \\ \hline \boldsymbol{x \qquad\qquad = 4} \end{array}$$

Para obter y, podemos tomar $\boldsymbol{x + y + z + w = 7}$ subtrair a terceira equação.

$$\begin{array}{r} \boldsymbol{x + y + z + w = 7} \\ -x \qquad - z - w = -7 \\ \hline \boldsymbol{y \qquad\quad = 0} \end{array}$$

Para obter z, podemos tomar $\boldsymbol{x + y + z + w = 7}$ subtrair a segunda equação.

$$\begin{array}{r} \boldsymbol{x + y + z + w = 7} \\ -x - y \qquad - w = -6 \\ \hline \boldsymbol{z \quad = 1} \end{array}$$

Para obter w, podemos tomar $\boldsymbol{x + y + z + w = 7}$ subtrair a primeira equação.

$$\begin{array}{r} \boldsymbol{x + y + z + w = 7} \\ -x - y - z \qquad = -5 \\ \hline \boldsymbol{w = 2} \end{array}$$

Logo, o valor de $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ é:

$$4^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2$$

$$= 16 + 0 + 1 + 4$$

$$= 21$$

Gabarito: Letra E.

8.(INÉDITA) Considere o seguinte sistema linear formado pelas incógnitas a, b e c.

$$\begin{cases} -a + 2b + 2c = 110 \\ 3a + b + 2c = 150 \\ a + 2b + 3c = 180 \end{cases}$$

O valor de $a + b + c$ é:

a) 80

b) 90

c) 100

d) 110

e) 120

Comentários:

Poderíamos resolver o problema pelo **método do escalonamento** para obter os valores de a, b e c e, em seguida, calcular a soma $a + b + c$. A solução por **Cramer** também é possível, porém teríamos que calcular quatro determinantes 3×3 para determinar as três variáveis a, b e c.

A maneira mais rápida de resolver o problema é tentar obter uma **combinação linear** que resulte diretamente na soma procurada. Nem sempre é fácil seguir por esse caminho. Observe, porém, que a combinação linear $\boldsymbol{L_1} + \boldsymbol{L_2} + (\boldsymbol{-1})\boldsymbol{L_3}$ nos traz a soma $a + b + c$.

$$\begin{array}{cr} \boldsymbol{L_1} & -a + 2b + 2c = 110 \\ \boldsymbol{L_2} & 3a + b + 2c = 150 \\ (\boldsymbol{-1})\boldsymbol{L_3} & -a - 2b - 3c = -180 \\ \hline & \boldsymbol{a + \ \ b + \ \ c = 80} \end{array}$$

O **gabarito**, portanto, é **letra A**.

Gabarito: Letra A.

9. (INÉDITA) Considere que $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é a matriz das incógnitas do seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3x + y = 40 \\ 2x - y = 65 \end{cases}$$

Sabe-se que X pode ser escrita da forma $X = MB$, com $B = \begin{bmatrix} 40 \\ 65 \end{bmatrix}$. Nesse caso, sendo M uma matriz quadrada de ordem 2, M corresponde a:

a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

Comentários:

Considerando o sistema apresentado:

$$\begin{cases} 3x + y = 40 \\ 2x - y = 65 \end{cases}$$

Temos que:

- A matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; e
- A matriz dos termos independentes, fornecida pelo enunciado, é $B = \begin{bmatrix} 40 \\ 65 \end{bmatrix}$.

Como $\det A \neq 0$, então a **matriz A é inversível**.

$$\det A = [3 \times (-1)] - [1 \times 2]$$

$$= -3 - 2$$

$$= -5$$

O sistema linear pode ser representado na sua forma matricial por:

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$$

Como a matriz A é inversível, podemos multiplicar ambos os lados da equação por A^{-1} pela esquerda:

$$\boldsymbol{A^{-1}AX} = \boldsymbol{A^{-1}B}$$

$$\boldsymbol{IX} = \boldsymbol{A^{-1}B}$$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A^{-1}B}$$

Comparando $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A^{-1}B}$ a equação matricial apresentada no enunciado, dada por $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{MB}$, temos que $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A^{-1}}$.

Para uma matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, a sua inversa é dada por $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. Logo, para o nosso caso:

$$A^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \times \frac{1}{-5} & -1 \times \frac{1}{-5} \\ -2 \times \frac{1}{-5} & 3 \times \frac{1}{-5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$M = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Gabarito: Letra C.

10. (INÉDITA) Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 5 \\ x + 4y + 3z = 3 \\ x + 2y + 2z = 9 \end{cases}$$

O valor de y é:

a) -59

b) -44

c) -19

d) 19

e) 59

Comentários:

Poderíamos resolver esse problema pelo **método do escalonamento**. Note, porém, que a questão pede apenas o valor de uma das três incógnitas. Consequentemente, a solução pelo **Teorema de Cramer** mostra-se uma boa opção, pois nesse caso teremos que calcular apenas dois determinantes 3×3.

Ao representar o sistema linear na sua forma matricial, temos $AX = B$, sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Primeiro, devemos obter o determinante da matriz A:

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Aplicando a **Regra de Sarrus**, ficamos com:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D = [2.4.2 + 1.3.1 + 3.1.2] - [3.4.1 + 2.3.2 + 1.1.2]$$

$$D = [16 + 3 + 6] - [12 + 12 + 2]$$

$$D = 25 - 26$$

$$\boxed{D = -1}$$

Como $D \neq 0$, o sistema é **possível e determinado (SPD)**, sendo possível aplicar o teorema.

Obtenção de y

Para obter y, vamos utilizar a seguinte relação:

$$y = \frac{D_y}{D}$$

Já temos o valor do determinante D. Nesse momento, devemos obter D_y.

D_y é o determinante da matriz que se obtém a partir da matriz A substituindo a **coluna dos coeficientes da variável y** pela matriz B.

Coeficientes de y

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \boxed{1} & 3 \\ 1 & \boxed{4} & 3 \\ 1 & \boxed{2} & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

Aplicando a **Regra de Sarrus**, ficamos com:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 5 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 9 & 2 & 1 & 9 \end{array}\right.$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D_y = [\mathbf{2.3.2 + 5.3.1 + 3.1.9}] - [\mathbf{3.3.1 + 2.3.9 + 5.1.2}]$$

$$D_y = [12 + 15 + 27] - [9 + 54 + 10]$$

$$= 54 - 73$$

$$\boxed{D_y = -19}$$

Logo:

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-19}{-1}$$

$$\boxed{y = 19}$$

Gabarito: Letra D.

11. (INÉDITA) Considere o seguinte sistema linear, em que x, y e z são as incógnitas e k é uma constante.

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x - y + kz = 0 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

Sabendo-se que $k \neq 0$ e $k \neq 1$, o valor de x é igual a:

a) $\frac{-1}{k+1}$

b) $\frac{2}{k+1}$

c) $\frac{2k-1}{k+1}$

d) $-2k^2 + k$

e) $-k^2 - k$

Comentários:

Vamos resolver essa questão com o **Teorema de Cramer**.

Note que as variáveis do sistema são x, y e z, sendo k uma constante.

Ao representar o sistema linear na sua forma matricial, temos $AX = B$, sendo:

$$A=\begin{bmatrix}k & 1 & 1\\ 1 & -1 & k\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}\qquad X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}$$

Primeiro, devemos obter o determinante da matriz A:

$$D=\det A=\begin{vmatrix}k & 1 & 1\\ 1 & -1 & k\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

Aplicando a **Regra de Sarrus**, ficamos com:

$$\left|\begin{matrix}k & 1 & 1\\ 1 & -1 & k\\ 1 & 1 & 2\end{matrix}\right|\begin{matrix}k & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 1\end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D=[k.(-1).2+1.k.1+1.1.1]-[1.(-1).1+k.k.1+1.1.2]$$

$$D=[-k+1]-[k^2+1]$$

$$D=-k^2-k$$

$$\boxed{D=-k(k+1)}$$

O enunciado pede a solução para $k\neq 0$ e $k\neq 1$. Note que, para esse caso, $\boldsymbol{D}$ **será diferente de zero**. Portanto, podemos aplicar o **Teorema de Cramer**.

Para obter x, vamos utilizar a seguinte relação:

$$x=\frac{D_x}{D}$$

D_x é o determinante da matriz que se obtém a partir da matriz A substituindo a **coluna dos coeficientes da variável x** pela matriz B.

Coeficientes de x

$$A=\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}k\\ 1\\ 1\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\ -1\\ 1\end{matrix} & \begin{matrix}1\\ k\\ 2\end{matrix}\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}$$

$$D_x=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & k\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

Aplicando a **Regra de Sarrus**, ficamos com:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & k \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D_x = [1.(-1).2 + 1.k.2 + 1.0.1] - [1.(-1).2 + 1.k.1 + 1.0.2]$$

$$D_x = [2k - 2] - [k - 2]$$

$$\boxed{D_x = k}$$

Logo:

$$x = \frac{D_x}{D}$$

$$= \frac{k}{-k(k+1)}$$

$$= \frac{1}{-(k+1)}$$

Logo:

$$\boxed{x = \frac{-1}{(k+1)}}$$

Gabarito: Letra A.

12. (INÉDITA) Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

Sabendo-se que o sistema é possível e determinado, o valor de $x^2 + y^2 + z^2$ é:

a) 14

b) 17

c) 38

d) 49

e) 53

Comentários:

Vamos resolver essa questão pelo **método do escalonamento**, fazendo uso da **matriz completa do sistema**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (-\mathbf{1})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (-\mathbf{2})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + \mathbf{1}L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

Ficamos com o seguinte sistema escalonado:

$$\begin{cases} 1x + 2y + 1z = 3 \\ \qquad 1y + 1z = -2 \\ \qquad\qquad 1z = -6 \end{cases}$$

Da **última equação**, temos:

$$\boldsymbol{z = -6}$$

Da **segunda equação**, temos:

$$y + z = -2$$

$$y + (-6) = -2$$

$$\boldsymbol{y = 4}$$

Da **primeira equação**, temos:

$$x + 2y + z = 3$$

$$x + 2.4 + (-6) = 3$$

$$x + 2 = 3$$

$$\boldsymbol{x = 1}$$

Logo:

$$x^2 + y^2 + z^2$$

$$= 1^2 + 4^2 + (-6)^2$$

$$= 1 + 16 + 36$$

$$= 53$$

Gabarito: Letra E.

13. (INÉDITA) Joaquim possui x gatos, y ratos e z papagaios. Sabe-se que x, y e z satisfazem o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 4x + 2y + z = 33 \\ 2x + y + 6z = 22 \\ 2x + 2y + 3z = 33 \end{cases}$$

Considerando-se que o gasto mensal com cada gato é de R$ 40,00, com cada rato é R$ 10,00 e com cada papagaio é R$ 20,00, o gasto mensal com todos os animais é:

a) R$ 200,00

b) R$ 250,00

c) R$ 300,00

d) R$ 350,00

e) R$ 400,00

Comentários:

Vamos resolver essa questão pelo **método do escalonamento**, fazendo uso da **matriz completa do sistema**. Inicialmente, temos a seguinte matriz completa:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 33 \\ 2 & 1 & 6 & 22 \\ 2 & 2 & 3 & 33 \end{bmatrix}$$

Para evitar trabalhar com frações, vamos iniciar o escalonamento trocando a primeira e a segunda linha de posição:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 33 \\ 2 & 1 & 6 & 22 \\ 2 & 2 & 3 & 33 \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 22 \\ 4 & 2 & 1 & 33 \\ 2 & 2 & 3 & 33 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow 1L_2 + (-2)L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 22 \\ 0 & 0 & -11 & -11 \\ 2 & 2 & 3 & 33 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow 1L_3 + (-1)L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 22 \\ 0 & 0 & -11 & -11 \\ 0 & 1 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 22 \\ 0 & 1 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & -11 & -11 \end{bmatrix}$$

Ficamos com o seguinte sistema escalonado:

$$\begin{cases} 2x + 1y + 6z = 22 \\ \quad\quad 1y - 3z = 11 \\ \quad\quad -11z = -11 \end{cases}$$

Da **última equação**, temos:

$$-11z = -11$$

$$\mathbf{z = 1}$$

Da **segunda equação**, temos:

$$y - 3z = 11$$

$$y - 3.1 = 11$$

$$\boldsymbol{y = 14}$$

Da **primeira equação**, temos:

$$2x + 2y + 3z = 33$$

$$2x + 2.14 + 3.1 = 33$$

$$2x + 21 = 33$$

$$2x = 2$$

$$\boldsymbol{x = 1}$$

Logo, temos 1 gato, 14 ratos e 1 papagaio. O gasto mensal com todos os animais é:

$$1 \times 40 + 14 \times 10 + 1 \times 20$$

$$= 40 + 140 + 20$$

$$= R\$\ 200{,}00$$

Gabarito: Letra A.

14. (INÉDITA) Considere que a solução do sistema linear a seguir é (x_1, y_1, z_1):

$$\begin{cases} 4x - 7y + 9z = 0 \\ 3x - 6y + 5z = 1 \\ -x + 2y - 2z = 3 \end{cases}$$

O produto $x_1 \times y_1 \times z_1$ é:

a) -13.420

b) -12.240

c) 12.240

d) 13.420

e) 15.680

Comentários:

Vamos resolver essa questão pelo **método do escalonamento**, fazendo uso da **matriz completa do sistema**. Inicialmente, temos a seguinte matriz completa:

$$\begin{bmatrix} 4 & -7 & 9 & 0 \\ 3 & -6 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Para evitar trabalhar com frações, vamos iniciar o escalonamento trocando a primeira e a terceira linha de posição:

$$\begin{bmatrix} 4 & -7 & 9 & 0 \\ 3 & -6 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & 9 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_2 \leftarrow 1L_2 + 3L_1} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 4 & -7 & 9 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_3 \leftarrow 1L_3 + 4L_1}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 12 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

Ficamos com o seguinte sistema escalonado:

$$\begin{cases} -x + 2y - 2z = 3 \\ 1y + 1z = 12 \\ -z = 10 \end{cases}$$

Da **última equação**, temos:

$$\boldsymbol{z = -10}$$

Da **segunda equação**, temos**:**

$$1y + 1z = 12$$

$$y - 10 = 12$$

$$\boldsymbol{y = 22}$$

Da **primeira equação**, temos**:**

$$-x + 2y - 2z = 3$$

$$-x + 2 \times 22 - 2 \times (-10) = 3$$

$$-x + 44 + 20 = 3$$

$$x = 64 - 3$$

$$\boldsymbol{x = 61}$$

Logo, a solução do sistema é $(x_1, y_1, z_1) = (61, 22, -10)$. Portanto, o produto requerido é:

$$x_1 \times y_1 \times z_1$$

$$= 61 \times 22 \times (-10)$$

$$= -13.420$$

Gabarito: Letra A.

15. (INÉDITA) Considere a seguinte matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 8 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

O posto dessa matriz é:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

Comentários:

Vamos escalonar a matriz A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 8 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 5 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_2 \leftarrow 1L_2 + (-2)L_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -1 & -7 \\ 5 & 1 & 8 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 5 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_3 \leftarrow 1L_3 + (-5)L_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -1 & -7 \\ 0 & -14 & -2 & -14 \\ 4 & 5 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_4 \leftarrow 1L_4 + (-4)L_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -1 & -7 \\ 0 & -14 & -2 & -14 \\ 0 & -7 & -1 & -7 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_3 \leftarrow 1L_3 + (-2)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_4 \leftarrow 1L_4 + (-1)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O **posto** de uma matriz é o **número de linhas não nulas de uma matriz escalonada**. Logo, o posto de A é 2.

Gabarito: Letra C.

QUESTÕES COMENTADAS – INÉDITAS

Discussão de um sistema linear

1. (INÉDITA) Para que o sistema linear $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + ay = 0 \end{cases}$ admita uma solução diversa de $(x, y) = (0, 0)$, o valor de a deverá ser:

a) -6

b) -3

c) 3

d) 6

e) 8

Comentários:

Note que o sistema linear apresentado é homogêneo. A matriz dos coeficientes do sistema é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & a \end{bmatrix}$$

Considere que o determinante dessa matriz é D, isto é, $D = \det A$.

Pelo **Teorema de Cramer**, sabemos que:

- Se $D \neq 0$, o **sistema linear homogêneo** é **possível e determinado** (**SPD**);
- Se $D = 0$, o **sistema linear homogêneo** é **possível e indeterminado** (**SPI**);

Sistema Linear Homogêneo	
D ≠ 0	D = 0
Sistema Possível e Determinado (SPD)	Sistema Possível e Indeterminado (SPI)
Admite somente a solução trivial	Admite a solução trivial e infinitas outras

Temos que:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & a \end{vmatrix}$$

$$D = [1 \times a] - [(-2) \times 3]$$

$$D = a - (-6)$$

$$D = a + 6$$

Para que o **sistema admita solução diversa da solução trivial** $(x, y) = (0, 0)$, o sistema deve ser **possível e indeterminado (SPI)**. Logo:

$$D = 0$$

$$a + 6 = 0$$

$$\boldsymbol{a = -6}$$

Gabarito: Letra A.

2.(INÉDITA) Quanto aos sistemas lineares, julgue o item a seguir.

O sistema $S = \begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x - 2y + z = 11 \\ x + 8y + 2z = 4 \end{cases}$ **é possível e determinado.**

Comentários:

Pelo **Teorema de Cramer**, sabemos que:

Logo, se o **determinante da matriz dos coeficientes** D for **diferente de zero**, temos um **SPD**. **Caso contrário, não temos um SPD**, de modo que o sistema **pode ser SPI ou SI**.

A matriz dos coeficientes do sistema em questão é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Aplicando a **Regra de Sarrus** no determinante da matriz A, temos:

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 1 & 8 \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D = [1.(-2).2 + 2.1.1 + 1.2.8] - [1.(-2).1 + 1.1.8 + 2.2.2]$$

$$D = [-4 + 2 + 16] - [-2 + 8 + 8]$$

$$D = 14 - 14$$

$$\mathbf{D = 0}$$

Logo, o sistema **não é possível e determinado** (**SPD**), **podendo ser SPI ou SI**.

Observação: para determinar se o sistema é SPI ou SI, teríamos que escalonar o sistema linear.

Gabarito: ERRADO.

3. (INÉDITA) Sendo k uma constante, para que o sistema linear $\begin{cases} kx + y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ 2x + y + kz = 3 \end{cases}$ admita uma única solução, é necessário que:

a) $k = 0$ ou $k = 1$

b) $k \neq 0$ e $k \neq 2$

c) $k = 0$ ou $k = 2$

d) $k \neq 1$ e $k \neq 2$

e) $k = 1$ ou $k = 2$

Comentários:

A matriz dos coeficientes do sistema é:

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & k \end{bmatrix}$$

Considere que o determinante dessa matriz é D, isto é, $D = \det A$.

Para que o sistema linear admita uma única solução, o sistema deve ser **possível e determinado** (**SPD**). Pelo **Teorema de Cramer**, sabemos que:

Aplicando a **Regra de Sarrus** no determinante da matriz A, temos:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} k & 1 & 2 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & k & 2 & 1 \end{array}\right.$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D = [k.1.k + 1.1.2 + 2.1.1] - [2.1.2 + k.1.1 + 1.1.k]$$

$$D = [k^2 + 4] - [2k + 4]$$

$$D = k^2 - 2k$$

$$D = k(k - 2)$$

Como queremos que o sistema seja SPD, devemos ter $D \neq 0$. Logo:

$$\boldsymbol{k \neq 0 \text{ e } k \neq 2}$$

Gabarito: Letra B.

4. (INÉDITA) Considere o sistema linear S a seguir, em que x, y e z são as variáveis e k é uma constante:

$$\boldsymbol{S = \begin{cases} x + ky + 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -x + 3y + kz = 0 \end{cases}}$$

O sistema S será:

a) possível e determinado para qualquer valor de k.

b) possível e determinado, se $k \neq 3$.

c) possível e indeterminado, se $k = 0$.

d) impossível, se $k = 0$.

e) impossível, se $k = 3$.

Comentários:

Note que o sistema linear S apresentado é homogêneo. Sabemos que **um sistema homogêneo não pode ser impossível**, pois **sempre admite a solução trivial**, que no caso em questão é $\boldsymbol{(x, y, z) = (0, 0, 0)}$.

A matriz dos coeficientes do sistema é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & k \end{bmatrix}$$

Considere que o determinante dessa matriz é D, isto é, $D = \det A$.

Pelo **Teorema de Cramer**, sabemos que:

- Se $\boldsymbol{D \neq 0}$, o **sistema linear homogêneo** é **possível e determinado** (**SPD**);
- Se $\boldsymbol{D = 0}$, o **sistema linear homogêneo** é **possível e indeterminado** (**SPI**);

Sistema Linear Homogêneo	
D ≠ 0	D = 0
Sistema Possível e Determinado (SPD)	Sistema Possível e Indeterminado (SPI)
Admite somente a solução trivial	Admite a solução trivial e infinitas outras

Aplicando a **Regra de Sarrus** no determinante da matriz A, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & k \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & k \\ 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{matrix}$$

Parte Negativa **Parte Positiva**

$$D = [1.(-2).k + k.1.(-1) + 3.1.3] - [3.(-2).(-1) + 1.1.3 + k.1.k]$$

$$D = [-3k + 9] - [9 + k^2]$$

$$D = -k^2 - 3k$$

$$D = -k(k + 3)$$

Note que, se $D = 0$, temos:

$$-k(k + 3) = 0$$

$$k = 0 \text{ ou } k = -3$$

Assim, para o caso em que $\boldsymbol{D = 0}$, temos que:

- Se $\boldsymbol{k = 0}$ **ou** $\boldsymbol{k = 3}$, o sistema linear homogêneo é **possível e indeterminado** (**SPI**).

Para o caso em que $\boldsymbol{D \neq 0}$, temos que:

- Se $\boldsymbol{k \neq 0}$ **e** $\boldsymbol{k \neq 3}$, o sistema linear homogêneo é **possível e determinado** (**SPD**).

Vamos avaliar as alternativas.

a) possível e determinado para qualquer valor de k. ERRADO.

O sistema é SPD para os casos em que $\boldsymbol{k \neq 0}$ **e** $\boldsymbol{k \neq 3}$. **Quaisquer valores de k que não sejam 0 e 3 fazem com que o sistema seja SPD.**

b) possível e determinado, se $k \neq 3$. ERRADO.

O sistema é SPD para os casos em que $\boldsymbol{k \neq 0}$ **e** $\boldsymbol{k \neq 3}$. Portanto, não basta que k seja diferente de 3 para que o sistema seja SPD. Se tivermos $k = 0$, esse k é diferente de 3 e o sistema é SPI.

c) possível e indeterminado, se $k = 0$. CERTO. Esse é o gabarito.

De fato, se $k = 0$, teremos um SPI. Isso porque, nesse caso, teremos $D = 0$. Outra possibilidade de termos um SPI seria para o caso em que $k = 3$.

d) impossível, se $k = 0$. ERRADO.

Um sistema linear homogêneo nunca é impossível, pois sempre admite a solução trivial.

e) impossível, se $k = 3$. ERRADO.

Um sistema linear homogêneo nunca é impossível, pois sempre admite a solução trivial.

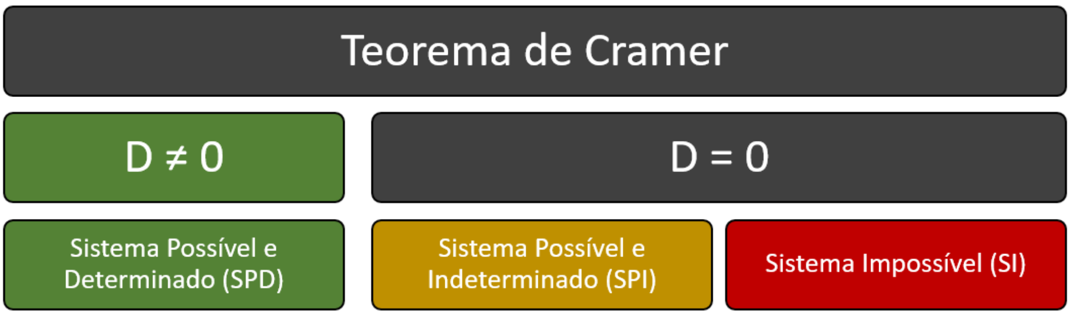
Gabarito: Letra C.

5. (INÉDITA) Quanto aos sistemas lineares, julgue o item a seguir.

O sistema $S = \begin{cases} x + 2y + z = 180 \\ 2x - 2y - 3z = -100 \\ x - 4y - 4z = 150 \end{cases}$ é possível e indeterminado.

Comentários:

A princípio, utilizar o **Teorema de Cramer** não teria grande utilidade para resolver a questão, a não ser que o determinante da matriz dos coeficientes fosse diferente de zero. Nesse caso, teríamos um **Sistema Possível e Determinado** (**SPD**) e o item estaria errado.



Veja que, caso o determinante seja zero, não poderíamos chegar no gabarito da questão utilizando somente o **Teorema de Cramer**. Isso porque, **quando $D = 0$**, podemos ter tanto um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**) quanto um **sistema impossível** (**SI**). Nesse caso, não restaria outra alternativa a não ser escalonar o sistema.

Para evitar ter que calcular um determinante 3×3, vamos começar a resolver o problema escalonando o sistema fazendo uso da **matriz completa do sistema**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 180 \\ 2 & -2 & -3 & -100 \\ 1 & -4 & -4 & 150 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow 1L_2 + (-2)L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 180 \\ 0 & -6 & -5 & -460 \\ 1 & -4 & -4 & 150 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow 1L_3 + (-1)L_1}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 180 \\ 0 & -6 & -5 & -460 \\ 0 & -6 & -5 & -30 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow 1L_3 + (-1)L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 180 \\ 0 & -6 & -5 & -460 \\ 0 & 0 & 0 & 430 \end{bmatrix}$$

Note que a última equação do sistema escalonado apresenta o seguinte formato:

$$\mathbf{0x + 0y + 0z = 430}$$

Logo, estamos diante de um **sistema impossível** (**SI**).

Gabarito: ERRADO.

6.(INÉDITA) A soma dos valores de k para que o sistema linear $\begin{cases} 2x + ky = -2 \\ kx + 2y = 2 \end{cases}$ admita infinitas soluções é:

a) -4

b) -2

c) 0

d) 2

e) 4

Comentários:

Note que o enunciado afirma que o sistema deve possuir infinitas soluções, ou seja, deve ser um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**).

Pelo **Teorema de Cramer**, sabemos que uma condição **necessária** para que o sistema seja **SPI** é que o **determinante da matriz dos coeficientes seja zero**, isto é, $D = 0$.

<u>Observação</u>: **Não** se trata de uma condição <u>suficiente</u>, pois $D = 0$ não implica que o sistema seja **SPI**, pois ele pode ser **SI**. Em outras palavras:

$$SPI \rightarrow D = 0$$

$$D = 0 \rightarrow SPI \text{ } ou \text{ } SI$$

Fazendo $D = 0$, temos:

$$\begin{vmatrix} 2 & k \\ k & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$[2.2] - [k.k] = 0$$

$$4 - k^2 = 0$$

$$k^2 = 4$$

$$\boldsymbol{k = \pm 2}$$

Note, portanto, que os valores $\boldsymbol{k = 2}$ e $\boldsymbol{k = -2}$ são duas **possibilidades que fazem com que o sistema não seja SPD**.

—

Fazendo $\boldsymbol{k = 2}$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y = -2 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Veja que **esse sistema é impossível (SI)**, pois $2x + 2y$ não pode ser igual a 2 e também igual a -2. Escalonando o sistema, ficamos com:

$$\overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1} L_2 + (-\mathbf{1}) L_1}{\sim} \begin{cases} 2x + 2y = -2 \\ \boldsymbol{0x + 0y = 4} \end{cases}$$

—

Fazendo $k = -2$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x - 2y = -2 \\ -2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, ficamos com:

$$\overset{L_2 \leftarrow 1L_2 + 1L_1}{\sim} \begin{cases} 2x - 2y = -2 \\ \mathbf{0x + 0y = 0} \end{cases} \sim \{2x - 2y = -2$$

Trata-se de um **sistema escalonado** cujo **número de equações** (1) é **menor** do que **número de incógnitas** (2). Logo, temos um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**).

—

Portanto, conclui-se que o sistema admite infinitas soluções **apenas para $k = -2$**. Logo, a soma dos valores de k para que o sistema linear admita infinitas soluções é -2.

Gabarito: Letra B.

7. (INÉDITA) Para que o sistema linear $\begin{cases} 10x + ay = -15 \\ 20x - 30y = b \end{cases}$ apresente infinitas soluções, o valor de $\frac{b}{a}$ deve ser igual a:

a) -2

b) -1

c) 1

d) 2

e) 3

Comentários:

Para que o sistema apresente infinitas soluções, o sistema deve ser **possível e indeterminado** (**SPI**).

Vamos escalonar o sistema. Fazendo $\mathbf{L_2 \leftarrow 1L_2 + (-2)L_1}$, temos:

$$\begin{cases} 10x + ay = -15 \\ 20x - 30y = b \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow 1L_2 + (-2)L_1}{\sim} \begin{cases} 10x + \qquad\qquad y = -15 \\ \mathbf{0x + (-30 - 2a)y = (b + 30)} \end{cases}$$

Para que o sistema seja SPI, devemos eliminar uma equação do sistema. Nesse caso, a segunda equação deve ser do seguinte formato:

$$\mathbf{0x + 0y = 0}$$

Consequentemente:

$$(-30 - 2a) = 0 \text{ e } (b + 30) = 0$$

Logo:

$$a = -15 \text{ e } b = -30$$

Portanto:

$$\frac{b}{a} = \frac{-30}{-15} = 2$$

Gabarito: Letra D.

8. (INÉDITA) Considere o seguinte sistema linear S, em que a e b são constantes:

$$S = \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + y + az = b \end{cases}$$

Para que S seja um sistema impossível, é necessário e suficiente que:

a) $a = 1$

b) $b \neq 5$

c) $a = 1$ e $b = 5$

d) $a \neq 1$ e $b = 5$

e) $a = 1$ e $b \neq 5$

Comentários:

Vamos escalonar o sistema fazendo uso da **matriz <u>completa</u> do sistema**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & a & b \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow 1L_2 + (-1)L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & a & b \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow 1L_3 + (-2)L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & a-2 & b-4 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow 1L_3 + 1L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & b-5 \end{bmatrix}$$

Temos, portanto, o seguinte sistema escalonado:

$$\begin{cases} 1x + 1y + 1z = 2 \\ 1y + 1z = -1 \\ (a-1)z = b - 5 \end{cases}$$

Para que tenhamos um sistema impossível, o sistema escalonado deve apresentar uma equação da seguinte forma:

$$\mathbf{0x + 0y + 0z = k}, \text{ com } k \neq 0$$

Logo, para que isso aconteça, devemos ter:

$$\boldsymbol{a - 1 = 0} \text{ e } \boldsymbol{b - 5 \neq 0}$$

Portanto, para que o sistema seja impossível, devemos ter:

$$\boldsymbol{a = 1} \text{ e } \boldsymbol{b \neq 5}$$

Veja que, nesse caso, a última equação fica da seguinte forma:

$$\mathbf{0x + 0y + 0z = (b - 5)}, \text{ com } (b - 5) \neq 0$$

O **gabarito**, portanto, é **letra E**.

Gabarito: Letra E.

9. (INÉDITA) Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3x - y + z + 2w = 3 \\ 2x + y + z + 3w = 2 \\ x - 2y - w = 1 \\ x + 2y + z + 3w = 3 \end{cases}$$

Sobre esse sistema linear, é correto afirmar que conjunto de soluções é vazio.

Comentários:

Ao dizer que o conjunto de soluções do sistema linear é vazio, o item afirma que o sistema é impossível (SI). Devemos, portanto, **verificar se estamos diante de um SI**.

Vamos escalonar o sistema fazendo uso da **matriz completa do sistema**. Para evitar trabalhar logo de início com frações, o escalonamento será iniciado trocando de posição a primeira e a quarta equação.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow \mathbf{1}L_2 + (\mathbf{-2})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & -4 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + (\mathbf{-1})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & -1 & -4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \overset{L_4 \leftarrow \mathbf{1}L_4 + (\mathbf{-3})L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & -7 & -2 & -7 & -6 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow \mathbf{1}L_3 + \left(\mathbf{-\frac{4}{3}}\right)L_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{3} & 0 & \dfrac{10}{3} \\ 0 & -7 & -2 & -7 & -6 \end{bmatrix} \overset{L_4 \leftarrow \mathbf{1}L_4 + \left(-\frac{7}{3}\right)L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{3} & 0 & \dfrac{10}{3} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{3} & 0 & \dfrac{10}{3} \end{bmatrix} \overset{L_4 \leftarrow \mathbf{1}L_4 + (-\mathbf{1})L_3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{3} & 0 & \dfrac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{3} & 0 & \dfrac{10}{3} \end{bmatrix}$$

Logo, temos o seguinte sistema equivalente escalonado:

$$\begin{cases} x + 2y + z + 3w = 3 \\ -3y - z - 3w = -4 \\ \dfrac{1}{3}z = \dfrac{10}{3} \end{cases}$$

Note que, no sistema escalonado, não obtivemos uma equação da forma $\mathbf{0x + 0y + 0z + 0w = b}$, com $\boldsymbol{b \neq 0}$. Logo, o **sistema <u>não</u> é impossível**. O **gabarito**, portanto, é **ERRADO**.

Veja que, na verdade, temos um **sistema possível e indeterminado** (**SPI**), pois o número de **equações** é **<u>menor</u>** do que o número de **incógnitas**.

Gabarito: ERRADO.

Lista de Questões – CESGRANRIO

Sistema linear

1.(CESGRANRIO/TRANSPETRO/2011) Nas duas equações mostradas a seguir, x e y são variáveis e a e b são constantes.

$$\frac{y-a}{2}+\frac{y-x}{5}+\frac{y}{4}=0 \text{ e } \frac{x-b}{2}+\frac{x-y}{5}+\frac{x}{4}=0$$

Essas equações podem ser compactadas em uma equação matricial do tipo $M\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, na qual M é a matriz:

a) $\begin{bmatrix} 0{,}4 & 1{,}9 \\ 1{,}9 & 0{,}4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -0{,}4 & 1{,}9 \\ 0{,}4 & -1{,}9 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1{,}9 & 0{,}4 \\ 1{,}9 & -0{,}4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -0{,}4 & 1{,}9 \\ 1{,}9 & -0{,}4 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -4 & 19 \\ 19 & -4 \end{bmatrix}$

GABARITO – CESGRANRIO

Sistema linear

1. LETRA D

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Solução de um sistema linear

1.(CESGRANRIO/BNDES/2006) O valor de x no sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y + z = 14 \\ 3x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

é:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

GABARITO – CESGRANRIO

Solução de um sistema linear

1. LETRA C

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Discussão de um sistema linear

1.(CESGRANRIO/PETROBRAS/2018) Considere o sistema de equações lineares nas variáveis reais x e y:

$$\begin{cases} k^2x + y = 3 \\ x - ky = m + 4 \end{cases}, \text{ no qual } k \text{ e } m \text{ são reais.}$$

Sabe-se que existem números reais a e b, com $a \neq b$, tais que os pares ordenados (a, b) e (b, a) são soluções do sistema dado.

Dessa forma, k e m são, necessariamente, tais que

a) $k = 1, m = 1$

b) $k \neq 1, m = 1$

c) $k = -1, m = -1$

d) $k \neq -1, m = -1$

e) $k \neq -1, m \neq -1$

2. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2018) Seja o sistema de equação linear: $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + ay = -1 \end{cases}$

Quantos são os valores do parâmetro a que levam o sistema a possuir infinitas soluções?

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) infinitos

3. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2011) Com relação ao sistema de variáveis reais x e y, $\begin{cases} mx + y = 3 \\ x - y = n \end{cases}$, no qual m e n são números reais, tem-se que

a) se $m = -1$ e $n = -3$, qualquer par ordenado (x, y), x e y reais, é solução

b) não tem solução se $m = -1$ e $n \neq -3$

c) tem sempre solução quaisquer que sejam m e n reais

d) tem duas soluções se $m \neq -1$

e) $(1,1)$ é solução se $m = n$

4.(CESGRANRIO/BNDES/2009) Para que o sistema linear $\begin{cases} 5x - 6y = 1 \\ ax + 4y = b \end{cases}$ possua infinitas soluções, os valores de a e b devem ser tais que $\frac{a}{b}$ valha

a) -5

b) -2

c) 0

d) 2

e) 5

5.(CESGRANRIO/PETROBRAS/2012) Um professor editou sua prova bimestral em um processador de textos antigo e salvou em um pen drive para imprimir na escola. Devido à incompatibilidade entre os processadores de texto, alguns caracteres de um sistema linear, cujas variáveis eram x, y e z, ficaram irreconhecíveis na impressão, conforme ilustrado a seguir:

$$\begin{cases} x + y + \square z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 2x + 5y - 3z = \triangle \end{cases}$$

Os alunos que iriam resolver a prova bimestral perguntaram ao professor quais eram os valores de □ e △, mas ele não soube dizer. Disse apenas que o sistema possuía, pelo menos, duas soluções distintas.

Se a afirmação do professor é correta, qual a soma dos valores de □ e △?

a) 11

b) 8

c) 6

d) 5

e) 4

GABARITO – CESGRANRIO

Discussão de um sistema linear

1. LETRA C
2. LETRA B
3. LETRA B
4. LETRA E
5. LETRA A

LISTA DE QUESTÕES – INÉDITAS

Sistema linear

1.(INÉDITA) Quanto aos sistemas lineares, julgue o item a seguir.

O sistema linear $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + y + 3z = 2 \\ y + z = 3 \end{cases}$ **pode ser representado por meio da seguinte equação matricial:**

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2. (INÉDITA) Assinale a alternativa que apresenta a matriz dos coeficientes do sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ 3x - 3z = x \\ -y + z = 6 \end{cases}$$

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

3.(INÉDITA) Considere o seguinte sistema de equações a seguir, em que x e y são variáveis:

$$\begin{cases} \dfrac{y-2}{3} + \dfrac{x-y}{2} + \dfrac{y}{5} = 0 \\ \dfrac{x-5}{3} + \dfrac{y-x}{5} + \dfrac{x}{2} = 0 \end{cases}$$

Esse sistema de equações pode ser escrito da forma $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, em que A é a matriz:

a) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{19}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{19}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{30} \\ \frac{19}{30} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{19}{30} \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{30} \\ \frac{19}{30} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Gabarito – Inéditas

Sistema linear

1. ERRADO
2. LETRA D
3. LETRA B

LISTA DE QUESTÕES – INÉDITAS

Solução de um sistema linear

1.(INÉDITA) Considere dois números x e y em que $3x - 2y = 4$ e $x + 3y = 5$. O valor de $x + y$ é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

2. (INÉDITA) Considere que a solução do sistema linear $\begin{cases} 5x + 3y = 3 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$ é $(x, y) = (a, b)$. O valor de $3a + 9b$ é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

3. (INÉDITA) O valor de x no sistema

$$\begin{cases} 6x - 2y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

é:

a) 0,1

b) 0,3

c) 0,5

d) 0,7

e) 0,9

4. (INÉDITA) Considere o sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ 3x + 5y + z = 14 \\ 2x + 4y + 4z = 27 \end{cases}$$

O valor de y é:

a) 2,5

b) 3,5

c) 4,5

d) 5,5

e) 6,5

5.(INÉDITA) O sistema a seguir apresenta solução única:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ x + 3y + z = 11 \\ x + 2y + 2z = 14 \end{cases}$$

O valor de $\sqrt{x + y + z}$ é:

a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

e) 8

6.(INÉDITA) Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ x + y + 2z = 6 \\ 2x + y + z = 7 \end{cases}$$

O valor de $x - y$ é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

7. (INÉDITA) Considere que os valores x, y, z e w são tais que

- $x + y + z = 5;$
- $x + y + w = 6;$
- $x + z + w = 7;$ e
- $y + z + w = 3.$

O valor de $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ é:

a) 12

b) 13

c) 14

d) 18

e) 21

8.(INÉDITA) Considere o seguinte sistema linear formado pelas incógnitas a, b e c.

$$\begin{cases} -a + 2b + 2c = 110 \\ 3a + b + 2c = 150 \\ a + 2b + 3c = 180 \end{cases}$$

O valor de $a + b + c$ é:

a) 80

b) 90

c) 100

d) 110

e) 120

9. (INÉDITA) Considere que $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é a matriz das incógnitas do seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3x + y = 40 \\ 2x - y = 65 \end{cases}$$

Sabe-se que X pode ser escrita da forma $X = MB$, com $B = \begin{bmatrix} 40 \\ 65 \end{bmatrix}$. Nesse caso, sendo M uma matriz quadrada de ordem 2, M corresponde a:

a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

10. (INÉDITA) Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 5 \\ x + 4y + 3z = 3 \\ x + 2y + 2z = 9 \end{cases}$$

O valor de y é:

a) -59

b) -44

c) -19

d) 19

e) 59

11. (INÉDITA) Considere o seguinte sistema linear, em que x, y e z são as incógnitas e k é uma constante.

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x - y + kz = 0 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

Sabendo-se que $k \neq 0$ e $k \neq 1$, o valor de x é igual a:

a) $\frac{-1}{k+1}$

b) $\frac{2}{k+1}$

c) $\frac{2k-1}{k+1}$

d) $-2k^2 + k$

e) $-k^2 - k$

12. (INÉDITA) Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

Sabendo-se que o sistema é possível e determinado, o valor de $x^2 + y^2 + z^2$ é:

a) 14

b) 17

c) 38

d) 49

e) 53

13. (INÉDITA) Joaquim possui x gatos, y ratos e z papagaios. Sabe-se que x, y e z satisfazem o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 4x + 2y + z = 33 \\ 2x + y + 6z = 22 \\ 2x + 2y + 3z = 33 \end{cases}$$

Considerando-se que o gasto mensal com cada gato é de R$ 40,00, com cada rato é R$ 10,00 e com cada papagaio é R$ 20,00, o gasto mensal com todos os animais é:

a) R$ 200,00

b) R$ 250,00

c) R$ 300,00

d) R$ 350,00

e) R$ 400,00

14. (INÉDITA) Considere que a solução do sistema linear a seguir é (x_1, y_1, z_1):

$$\begin{cases} 4x - 7y + 9z = 0 \\ 3x - 6y + 5z = 1 \\ -x + 2y - 2z = 3 \end{cases}$$

O produto $x_1 \times y_1 \times z_1$ é:

a) -13.420

b) -12.240

c) 12.240

d) 13.420

e) 15.680

15. (INÉDITA) Considere a seguinte matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 8 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

O posto dessa matriz é:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

GABARITO – INÉDITAS

Solução de um sistema linear

1. LETRA C
2. LETRA E
3. LETRA E
4. LETRA B
5. LETRA E
6. LETRA B
7. LETRA E
8. LETRA A
9. LETRA C
10. LETRA D
11. LETRA A
12. LETRA E
13. LETRA A
14. LETRA A
15. LETRA C

LISTA DE QUESTÕES – INÉDITAS

Discussão de um sistema linear

1. (INÉDITA) Para que o sistema linear $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + ay = 0 \end{cases}$ admita uma solução diversa de $(x, y) = (0, 0)$, o valor de a deverá ser:

a) -6

b) -3

c) 3

d) 6

e) 8

2.(INÉDITA) Quanto aos sistemas lineares, julgue o item a seguir.

O sistema $S = \begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x - 2y + z = 11 \\ x + 8y + 2z = 4 \end{cases}$ é possível e determinado.

3. (INÉDITA) Sendo k uma constante, para que o sistema linear $\begin{cases} kx + y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ 2x + y + kz = 3 \end{cases}$ admita uma única solução, é necessário que:

a) $k = 0$ ou $k = 1$

b) $k \neq 0$ e $k \neq 2$

c) $k = 0$ ou $k = 2$

d) $k \neq 1$ e $k \neq 2$

e) $k = 1$ ou $k = 2$

4. (INÉDITA) Considere o sistema linear S a seguir, em que x, y e z são as variáveis e k é uma constante:

$$S = \begin{cases} x + ky + 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -x + 3y + kz = 0 \end{cases}$$

O sistema S será:

a) possível e determinado para qualquer valor de k.

b) possível e determinado, se $k \neq 3$.

c) possível e indeterminado, se $k = 0$.

d) impossível, se $k = 0$.

e) impossível, se $k = 3$.

5. (INÉDITA) Quanto aos sistemas lineares, julgue o item a seguir.

O sistema $S = \begin{cases} x + 2y + z = 180 \\ 2x - 2y - 3z = -100 \\ x - 4y - 4z = 150 \end{cases}$ é possível e indeterminado.

6.(INÉDITA) A soma dos valores de k para que o sistema linear $\begin{cases} 2x + ky = -2 \\ kx + 2y = 2 \end{cases}$ admita infinitas soluções é:

a) -4

b) -2

c) 0

d) 2

e) 4

7. (INÉDITA) Para que o sistema linear $\begin{cases} 10x + ay = -15 \\ 20x - 30y = b \end{cases}$ apresente infinitas soluções, o valor de $\frac{b}{a}$ deve ser igual a:

a) -2

b) -1

c) 1

d) 2

e) 3

8. (INÉDITA) Considere o seguinte sistema linear S, em que a e b são constantes:

$$S = \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + y + az = b \end{cases}$$

Para que S seja um sistema impossível, é necessário e suficiente que:

a) $a = 1$

b) $b \neq 5$

c) $a = 1$ e $b = 5$

d) $a \neq 1$ e $b = 5$

e) $a = 1$ e $b \neq 5$

9. (INÉDITA) Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3x - y + z + 2w = 3 \\ 2x + y + z + 3w = 2 \\ x - 2y - w = 1 \\ x + 2y + z + 3w = 3 \end{cases}$$

Sobre esse sistema linear, é correto afirmar que conjunto de soluções é vazio.

GABARITO – INÉDITAS

Discussão de um sistema linear

1. LETRA A
2. ERRADO
3. LETRA B
4. LETRA C
5. ERRADO
6. LETRA B
7. LETRA D
8. LETRA E
9. ERRADO

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:

PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.