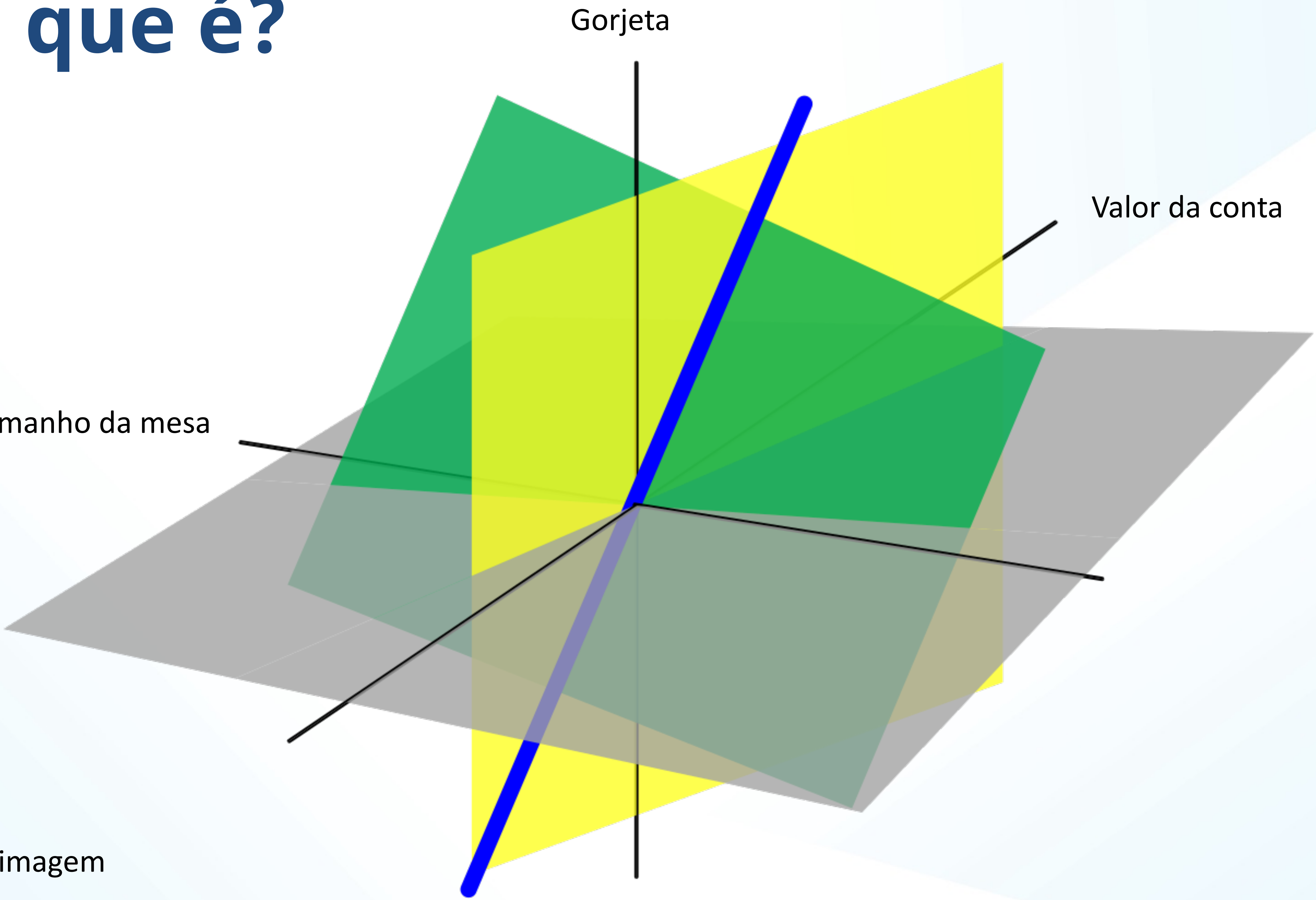
$$\begin{array}{r} \mathrm{MMXXI} \\ -\ \ \mathrm{MCMLXXVIII} \\ \hline \mathrm{XLIII} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2021 \\ -\ 1978 \\ \hline 43 \end{array}$$

Profissão: Cientista de Dados

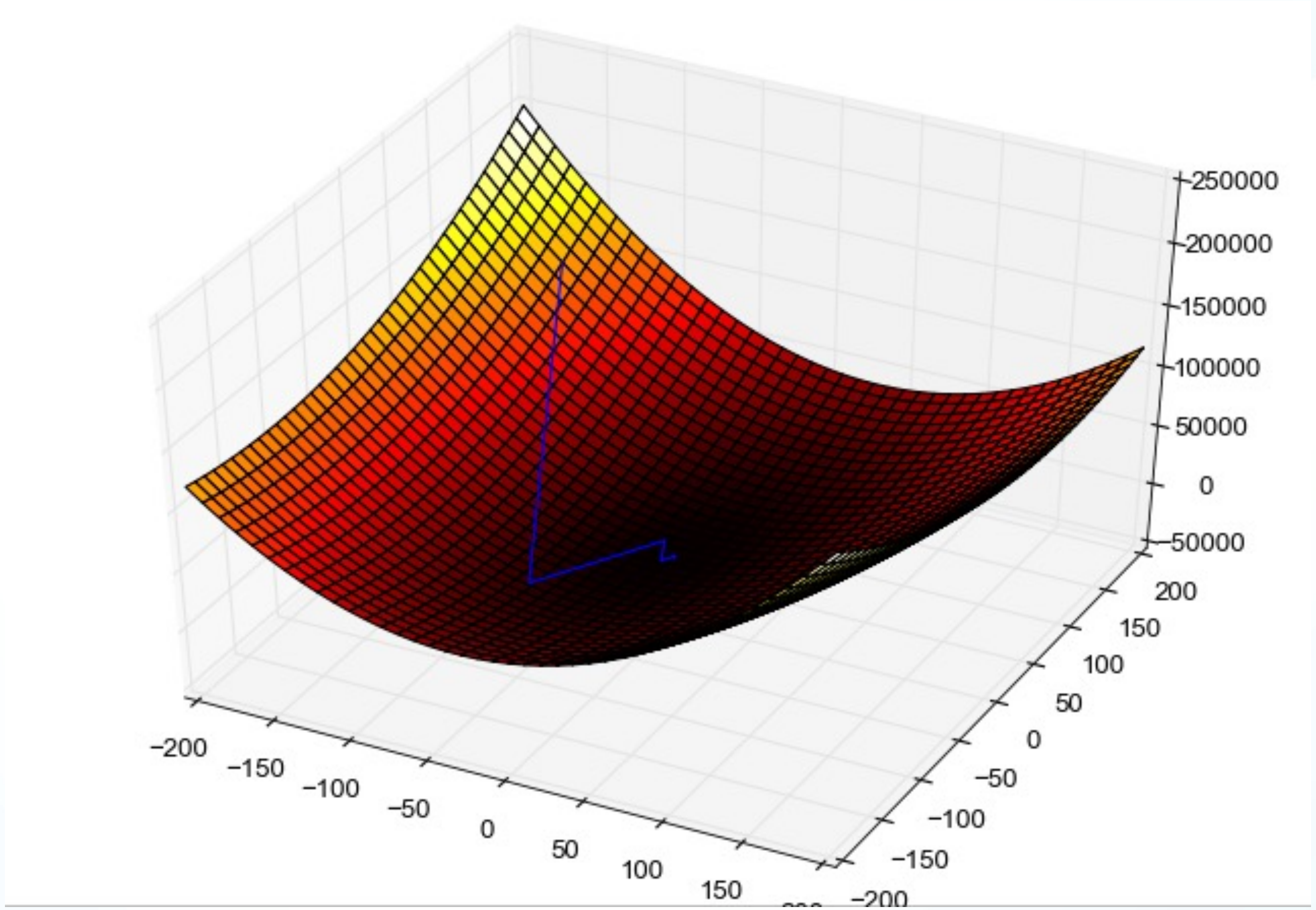
Algebra Linear

O que é?



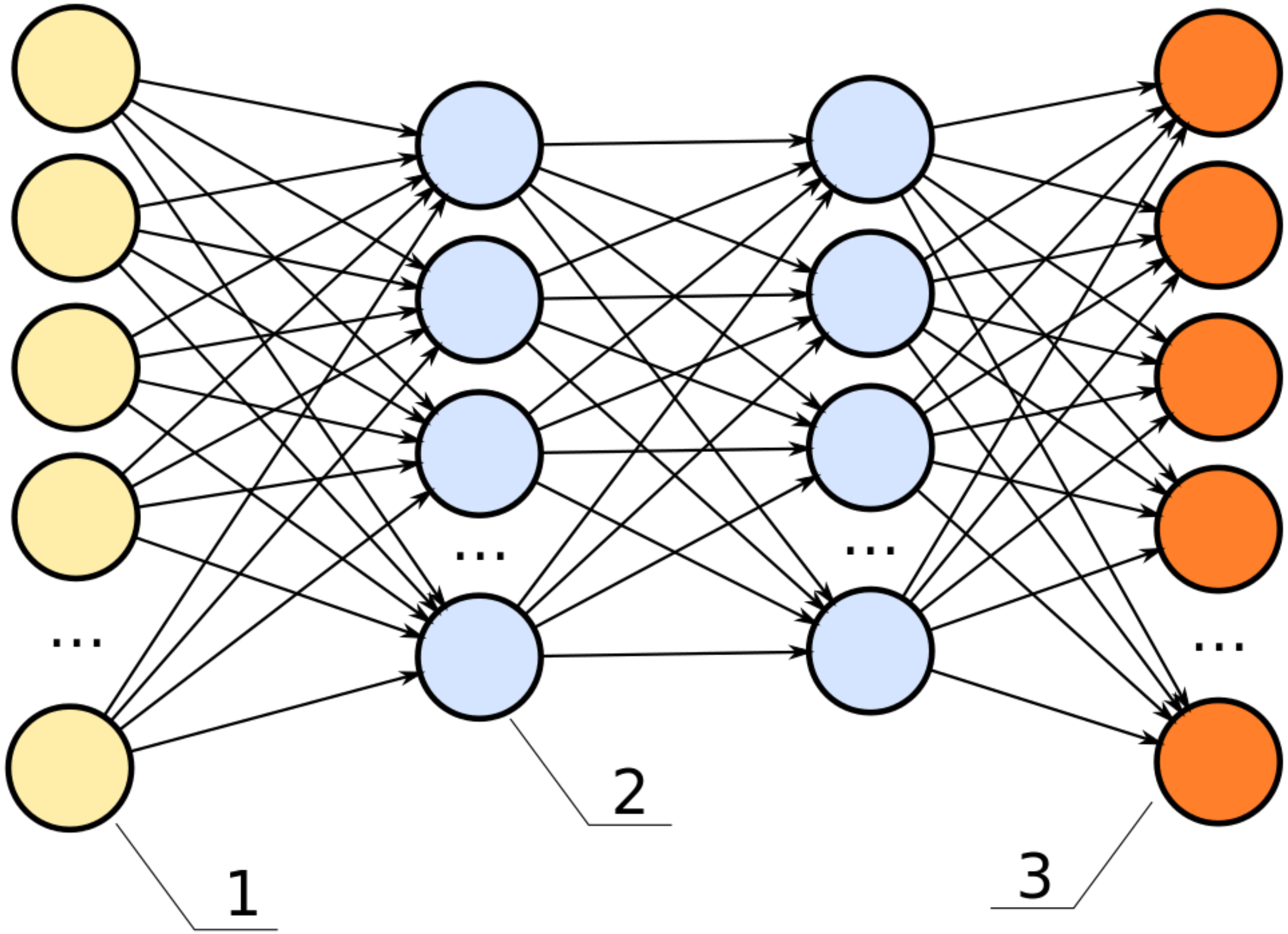
Fonte da imagem

Minimizar erros



Fonte da imagem

Redes Neurais



Fonte da imagem

escola britânica de artes criativas & tecnologia

Profissão: Cientista de Dados

Algebra Linear

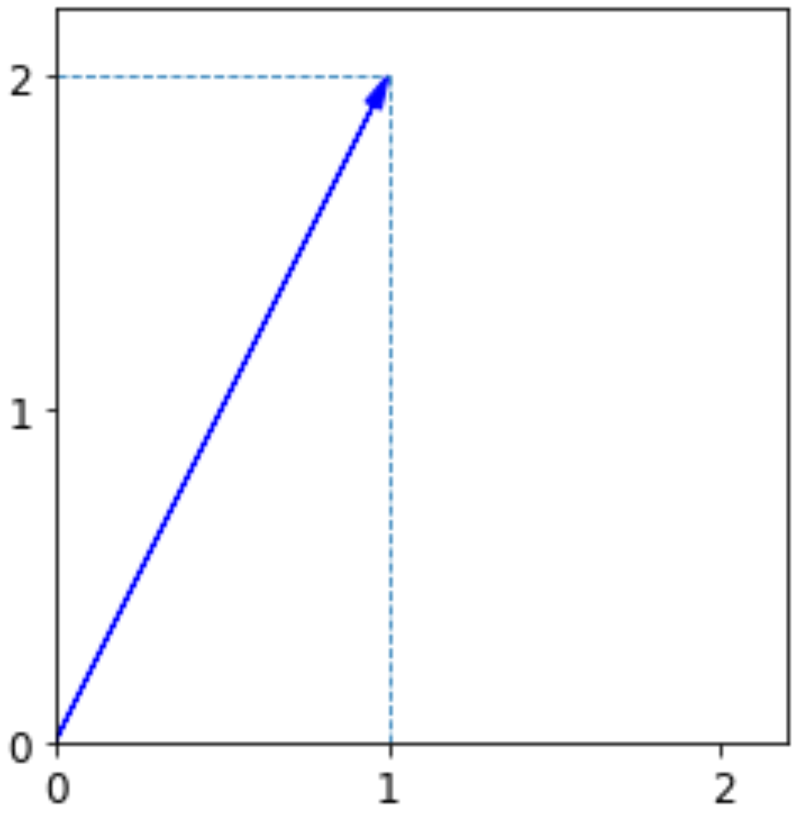
Vetores

Vetores

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Vetores

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



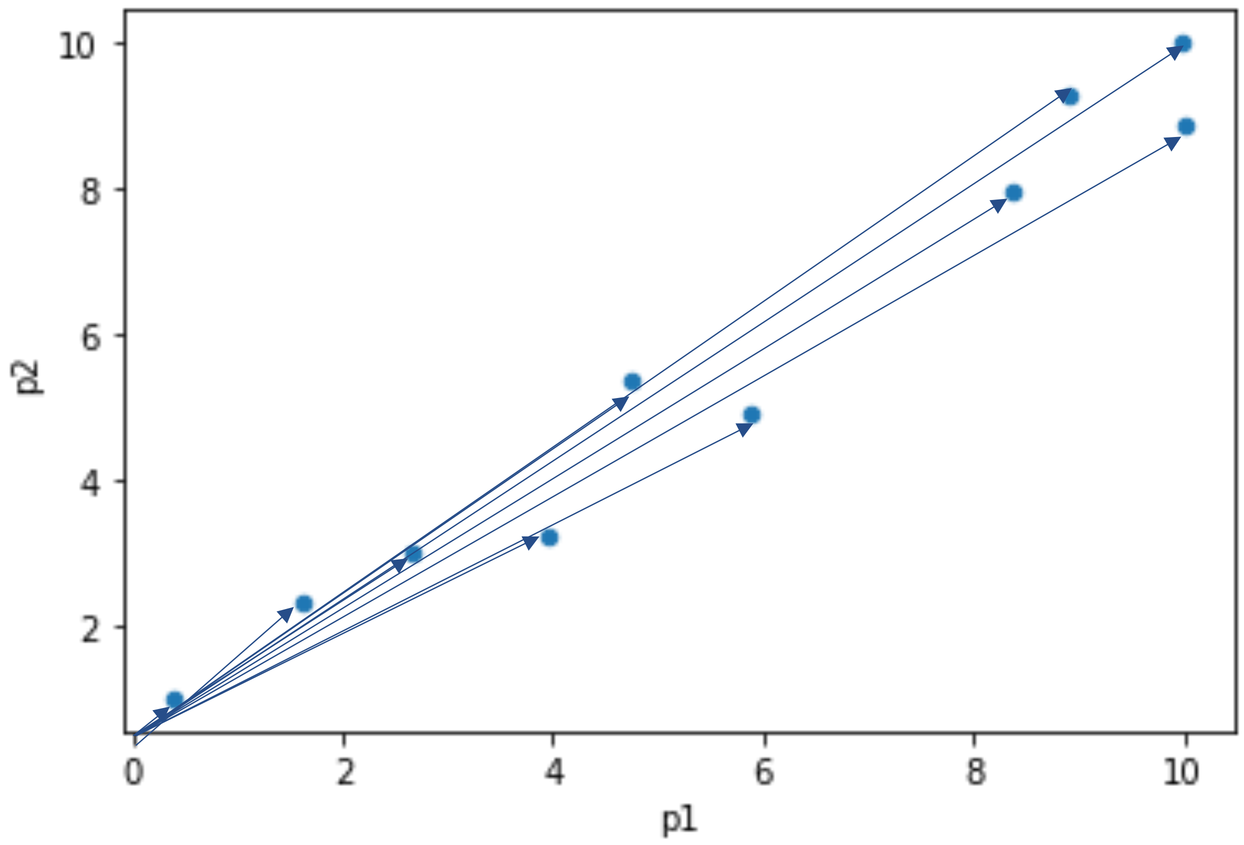
O que é um vetor?

- Podemos entender um vetor como uma lista de valores que representam uma observação, alguns exemplos:
  - No problema da gorjeta: [valor da conta, valor da gorjeta]
  - Base de pinguins: [comprimento do bico, comprimento da nadadeira]
  - Titanic: [idade, valor da passagem]

- Vetores podem ter mais de 2 dimensões, mas para aproveitar a intuição geométrica deles, vamos começar com vetores em 2 dimensões.

Vetores - Exemplo

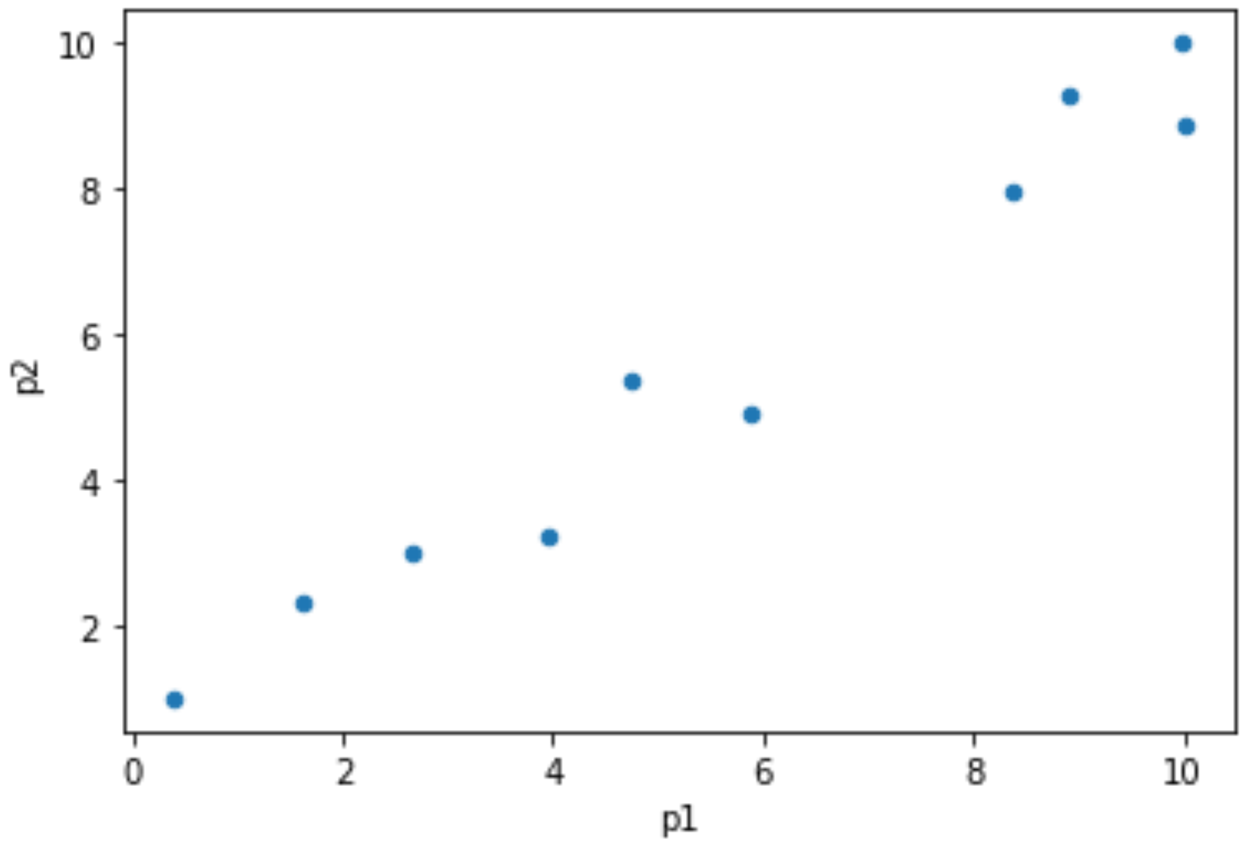
	p1	p2
0	8,9	9,3
1	8,4	8,0
2	10,0	8,9
3	3,9	3,2
4	5,9	4,9
5	1,6	2,3
6	4,8	5,4
7	0,4	1,0
8	10,0	10,0
9	2,7	3,0



Vetores - Exemplo

Isto é um vetor

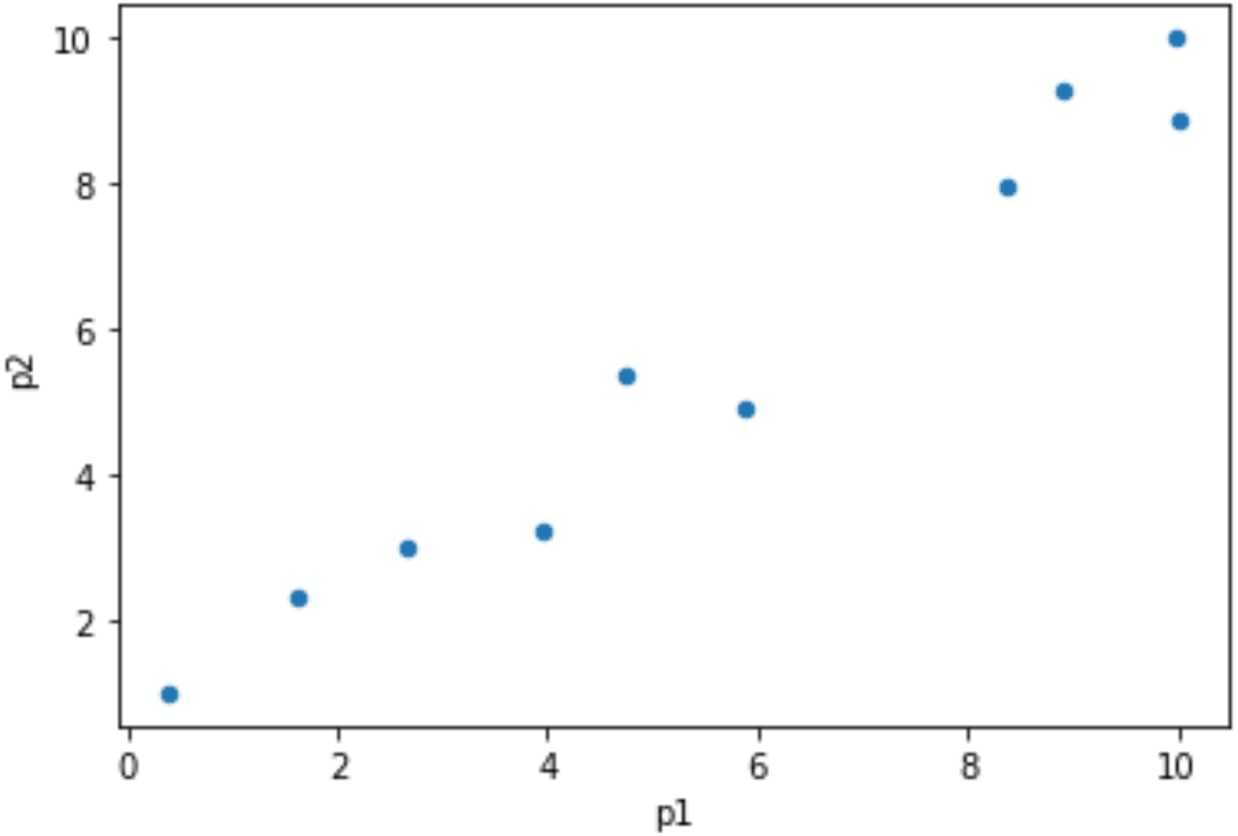
	p1	p2
0	8,9	9,3
1	8,4	8,0
2	10,0	8,9
3	3,9	3,2
4	5,9	4,9
5	1,6	2,3
6	4,8	5,4
7	0,4	1,0
8	10,0	10,0
9	2,7	3,0



Vetores - Exemplo

Isto é um vetor

	p1	p2
0	8,9	9,3
1	8,4	8,0
2	10,0	8,9
3	3,9	3,2
4	5,9	4,9
5	1,6	2,3
6	4,8	5,4
7	0,4	1,0
8	10,0	10,0
9	2,7	3,0



Dependendo do que estamos fazendo, podemos ter a visão vetorial de linha ou de coluna da nossa base de dados.

escola britânica de artes criativas & tecnologia

Profissão: Cientista de Dados

Algebra Linear

Operações com vetores

Operações com vetores

- Temos basicamente duas operações com vetores:

  - Soma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

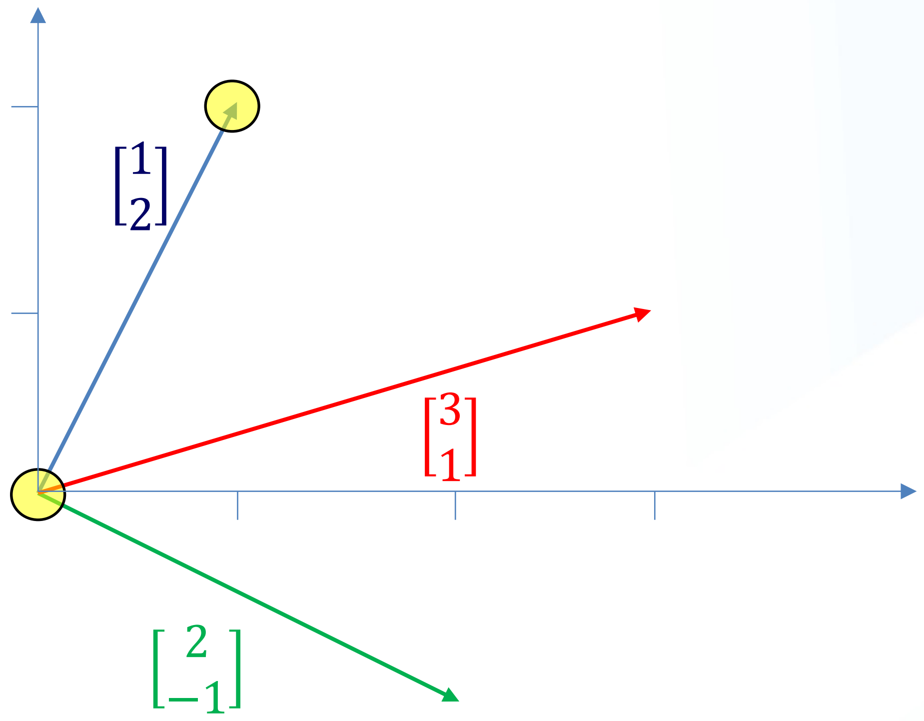
Ex: $$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  - Multiplicação por um número (escalar)

$$a \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ ay \end{bmatrix}$$

Ex: $$2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Soma de vetores



$$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{bmatrix}$$

Ex: $$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$$

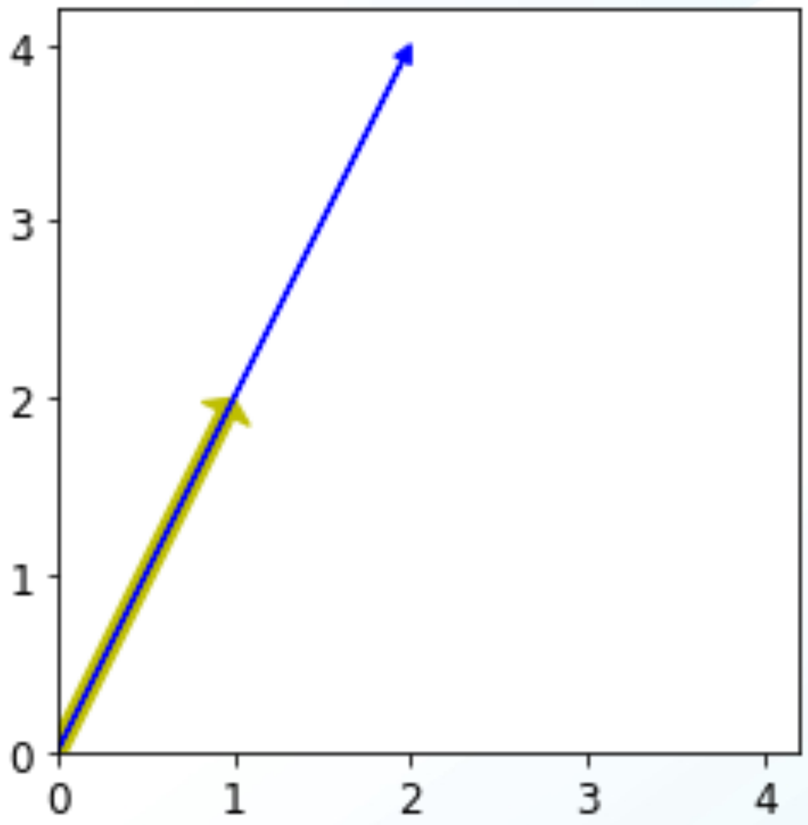
Multiplicação de vetor por um número

$$a\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ ay \end{bmatrix}$$

Ex: $$2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Esse número é chamado de “escalar”

Ele altera a **escala** do vetor.



O que é o vetor mesmo?

O vetor:

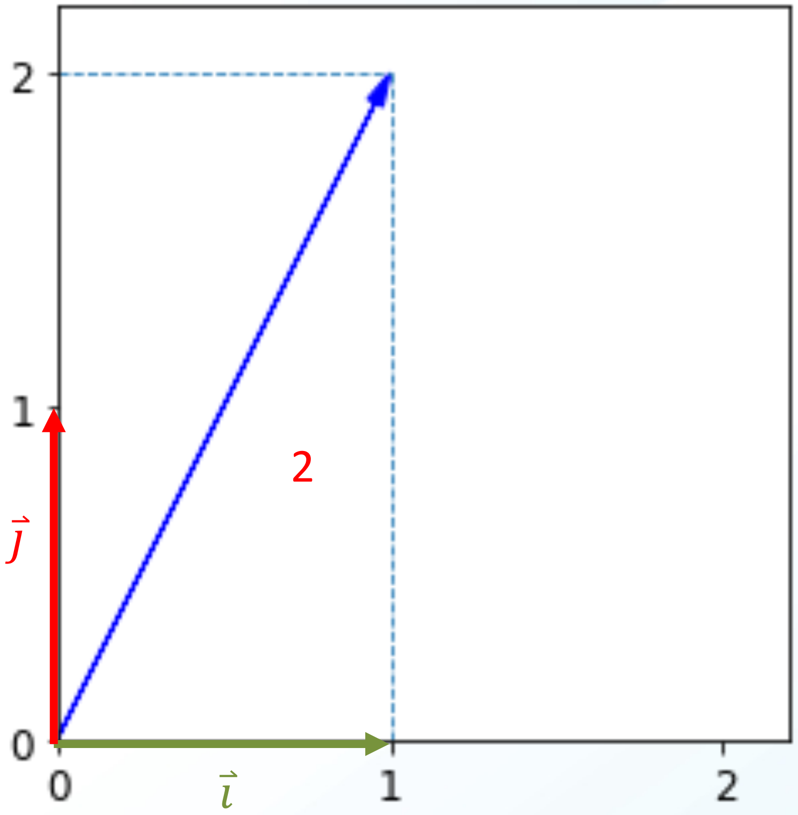
$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Pode ser reescrito como:

$\vec{v} = 1\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$

Com $\vec{\imath} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\vec{\jmath} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ são chamados de Base Vetorial



Combinações lineares

Combinação linear

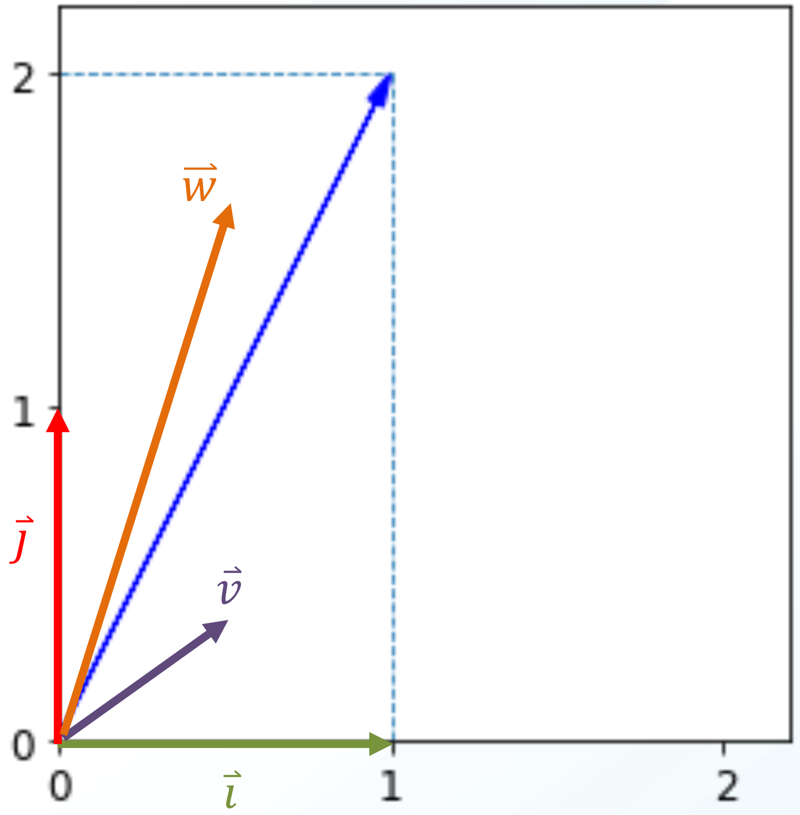
Qualquer :

$\vec{u}$ = a$\vec{v}$ $+ b\vec{w}$

Com $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sendo vetores,

a e b sendo escalares.

Com uma combinação linear dos vetores da base apresentada, podemos chegar em qualquer ponto do plano x, y



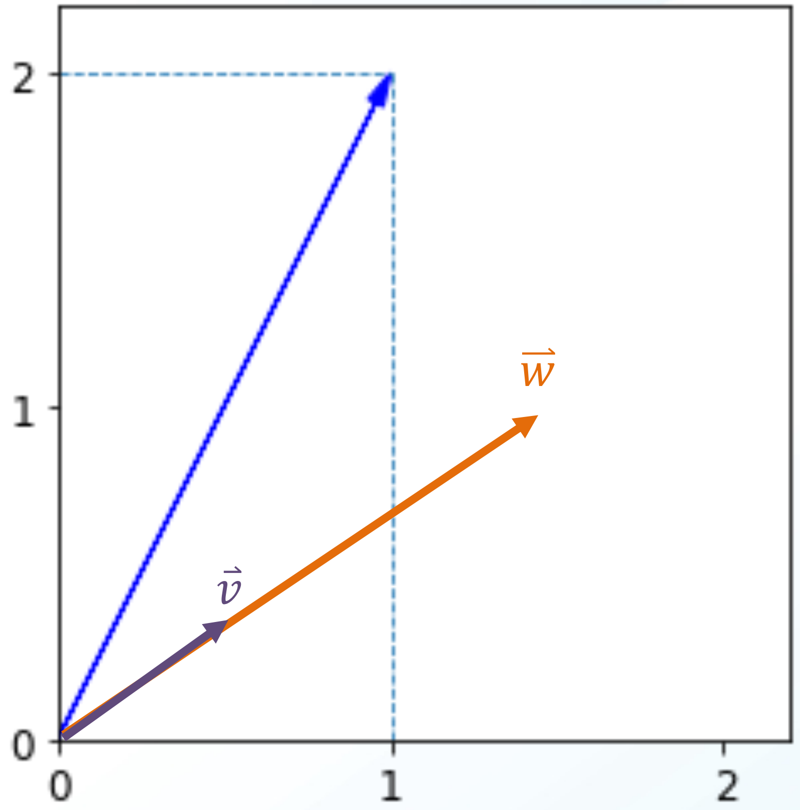
Combinação linear

Qualquer :
$\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$

Com $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sendo vetores,
a e b sendo escalares.

Nesse caso, não conseguimos representar o plano em função de v e w.

Dizemos que eles são **Linearmente Dependentes**.



Combinação linear

$\overrightarrow{p_1}$ $\overrightarrow{p_2}$

	p1	p2
0	8,9	9,3
1	8,4	8,0
2	10,0	8,9
3	3,9	3,2
4	5,9	4,9
5	1,6	2,3
6	4,8	5,4
7	0,4	1,0
8	10,0	10,0
9	2,7	3,0

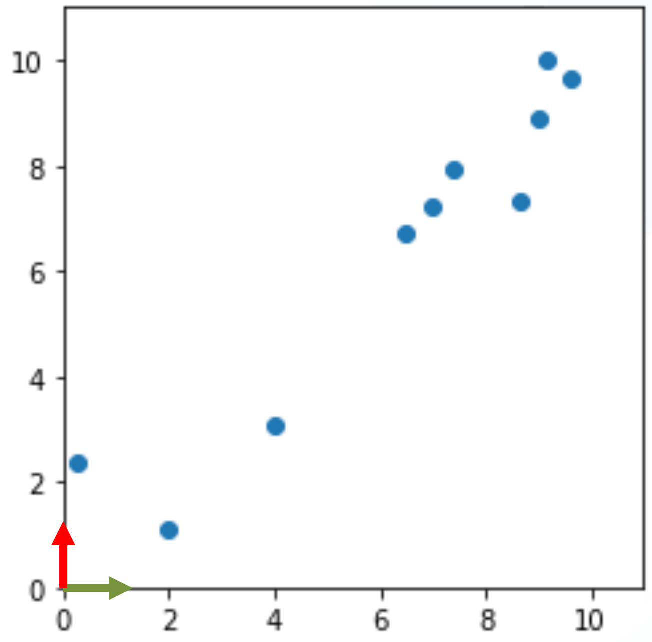
$$\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{p_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{p_2}$$

A média é uma das combinações lineares mais comuns

Bases vetoriais

Base vetorial

	p1	p2
0	8,9	9,3
1	8,4	8,0
2	10,0	8,9
3	3,9	3,2
4	5,9	4,9
5	1,6	2,3
6	4,8	5,4
7	0,4	1,0
8	10,0	10,0
9	2,7	3,0



No gráfico, estamos expressando os dados na base (i, j)

Base vetorial

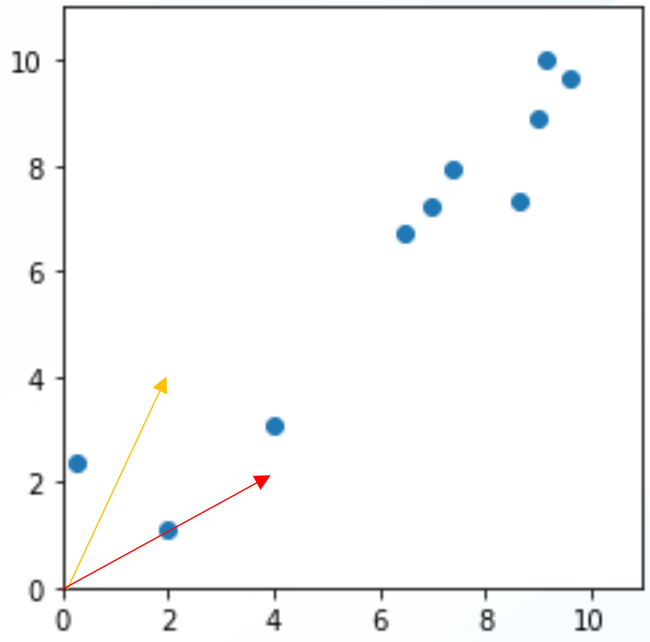
	p1	p2
0	8,9	9,3
1	8,4	8,0
2	10,0	8,9
3	3,9	3,2
4	5,9	4,9
5	1,6	2,3
6	4,8	5,4
7	0,4	1,0
8	10,0	10,0
9	2,7	3,0

Considere os vetores:

$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

Também conseguimos representar qualquer ponto do gráfico como

$$a\vec{v} + w\vec{l}$$



$\vec{v}$ e $\vec{w}$ são outra base vetorial que “alcança” o mesmo espaço vetorial.

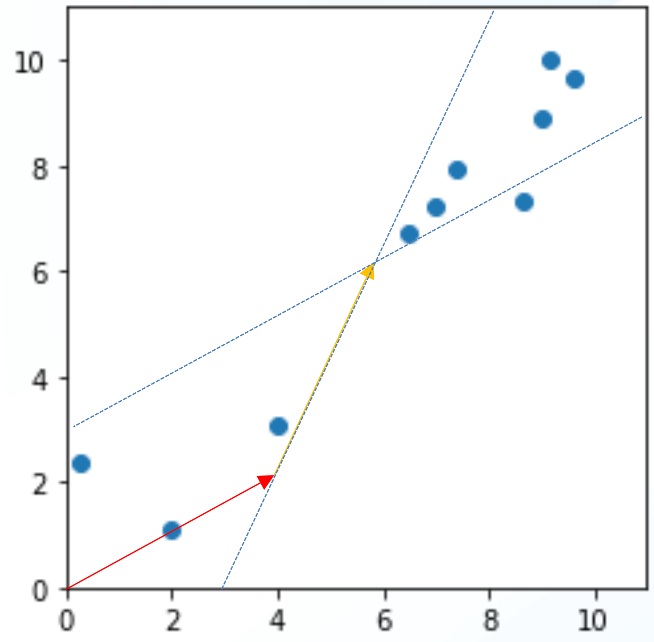
Base vetorial

	p1	p2
0	8,9	9,3
1	8,4	8,0
2	10,0	8,9
3	3,9	3,2
4	5,9	4,9
5	1,6	2,3
6	4,8	5,4
7	0,4	1,0
8	10,0	10,0
9	2,7	3,0

Considere os vetores:

$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

Na combinação $a\vec{k} + b\vec{l}$ fixando a e variando b, atingimos valores ao longo de uma reta.



Provavelmente daí vem o nome “combinação linear”

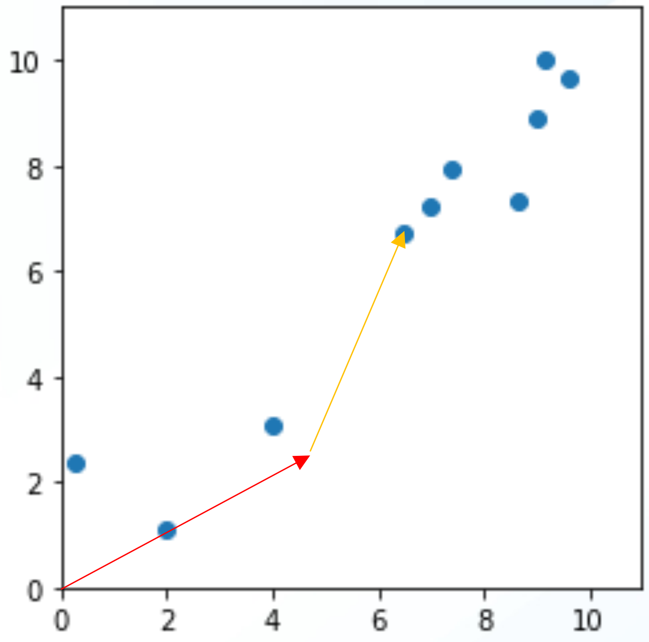
Base vetorial

	p1	p2
0	8,9	9,3
1	8,4	8,0
2	10,0	8,9
3	3,9	3,2
4	5,9	4,9
5	1,6	2,3
6	4,8	5,4
7	0,4	1,0
8	10,0	10,0
9	2,7	3,0

Assim, com:

$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

Conseguimos representar os nossos dados em uma nova *base vetorial*.



Pra que serve isso?

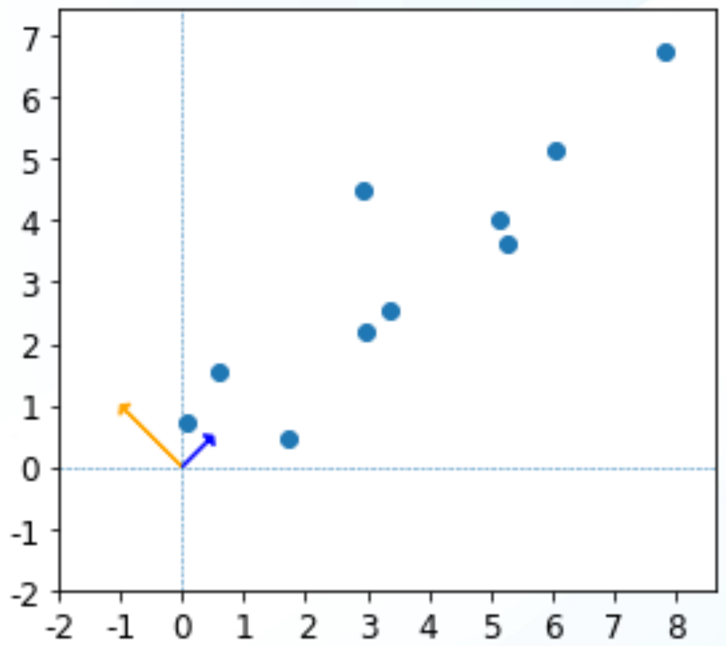
Base vetorial

	p1	p2	média	evolução
0	3,0	2,2	2,6	-0,8
1	6,1	5,1	5,6	-0,9
2	5,3	3,6	4,5	-1,6
3	0,6	1,5	1,1	1,0
4	0,1	0,7	0,4	0,6
5	1,7	0,5	1,1	-1,3
6	5,2	4,0	4,6	-1,2
7	7,8	6,7	7,3	-1,1
8	3,3	2,5	2,9	-0,8
9	2,9	4,5	3,7	1,5

Considere resumir os dados em um único valor: **a média**

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\overrightarrow{p_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{p_2}$$

Embora seja um bom resumo, ainda há perda de informação



A média é *a combinação* $\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2$

Base vetorial

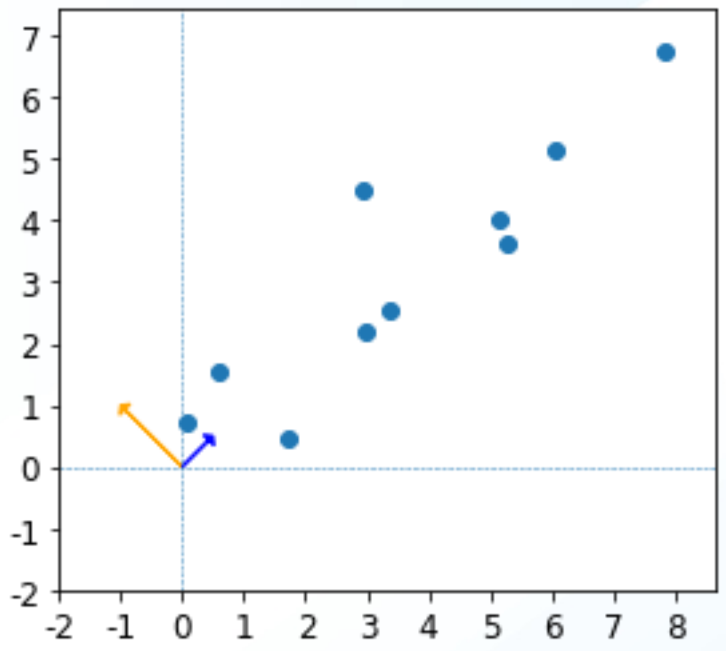
	p1	p2	média	evolução
0	3,0	2,2	2,6	-0,8
1	6,1	5,1	5,6	-0,9
2	5,3	3,6	4,5	-1,6
3	0,6	1,5	1,1	1,0
4	0,1	0,7	0,4	0,6
5	1,7	0,5	1,1	-1,3
6	5,2	4,0	4,6	-1,2
7	7,8	6,7	7,3	-1,1
8	3,3	2,5	2,9	-0,8
9	2,9	4,5	3,7	1,5

Considere a diferença:

$$d = p_2 - p_1$$

Podemos escrevê-la como a combinação linear:

$$\vec{d} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}$$



Com base na média e na diferença, podemos expressar qualquer par p1, p2 e vice versa.

Base vetorial

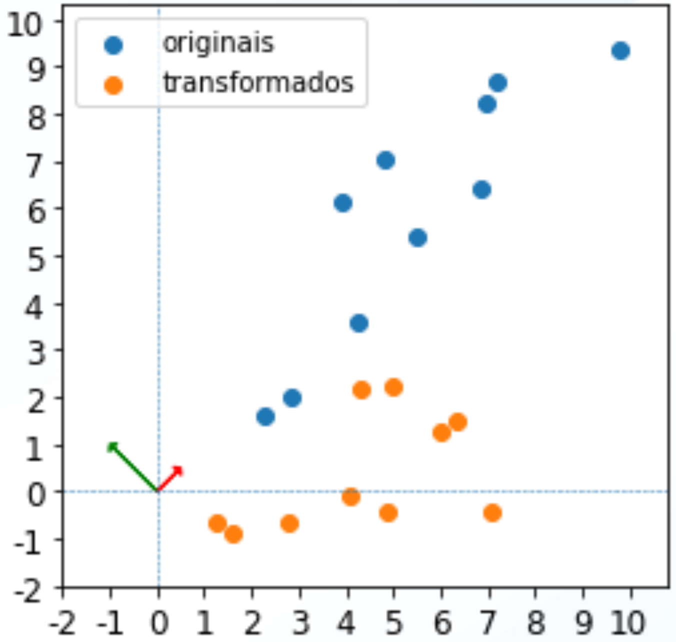
	p1	p2	média	evolução
0	3,0	2,2	2,6	-0,8
1	6,1	5,1	5,6	-0,9
2	5,3	3,6	4,5	-1,6
3	0,6	1,5	1,1	1,0
4	0,1	0,7	0,4	0,6
5	1,7	0,5	1,1	-1,3
6	5,2	4,0	4,6	-1,2
7	7,8	6,7	7,3	-1,1
8	3,3	2,5	2,9	-0,8
9	2,9	4,5	3,7	1,5

Considere a diferença:

$$d = p_2 - p_1$$

Podemos escrevê-la como a combinação linear:

$$\vec{d} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}$$



Com base na média e na diferença, podemos expressar qualquer par p1, p2 e vice versa.

Multiplicação de matriz por vetor

Multiplicação de matriz por vetor

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matriz por vetor

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matriz por vetor

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ \mathbf{cx} + \mathbf{dy} \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matriz por vetor

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

Uma outra forma de ver esta operação é como uma combinação linear dos vetores coluna da matriz, ponderada por *x* e *y*.

Multiplicação de matriz por vetor

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

2 x 2 2 x 1 2 x 1

Repare nas dimensões da matriz e do vetor

Multiplicação de matriz por vetor

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

2 x **2**   **2** x 1   2x1

O número de colunas do primeiro objeto
deve ser igual ao número de linhas do segundo

Multiplicação de matriz por vetor

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

2 x 2   2 x **1**   **2** x **1**

O objeto resultante tem
o número de linhas do primeiro
e o número de colunas do segundo

Comutatividade

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & d \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a & \mathbf{c} \\ \mathbf{b} & d \end{bmatrix}$$

Mv = (v' M')'

$$\begin{bmatrix} a & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \mathbf{c} \\ \mathbf{b} & d \end{bmatrix} \right)'$$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_1 \\ \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_2 \\ \vdots \\ \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{bmatrix}$$

$\hat{y}$ é uma combinação linear do intercepto e de x.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & x_{1,1} & x_{1,2} \\ 1 & x_{2,1} & x_{2,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n,1} & x_{n,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{X}\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{Y}}$$

Lembra daquela conta?

	MMXXI
-	MCMLXXVIII
	XLIII

$\hat{y}$ é uma combinação das variáveis explicativas (incluindo o intercepto).

Multiplicação de matrizes

Multiplicação de matrizes

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

2 x 2 2 x **1** **2** x **1**

Multiplicação de matrizes

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y_1 \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

$$x_2 \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 & \dots & ax_n + by_n \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 & \dots & cx_n + dy_n \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

$$\mathbf{M_1} \cdot \mathbf{M_2} = \mathbf{M_3}$$

a x b   b x c   a x c

Multiplicação de matrizes

$$\mathbf{A} \quad . \quad \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

n x **p**   **p** x **k**   **n** x **k**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nk} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} * b_{kj}$$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_1 \\ \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_2 \\ \vdots \\ \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{bmatrix}$$

$\hat{y}$ é uma combinação linear do intercepto e de x.

Transformações lineares

Transformações lineares

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

Transformações lineares

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}'\right)'$$

Transformação linear (exemplo)

Transformações lineares (exemplos)

Visualização 1

X escalona este vetor

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1.0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

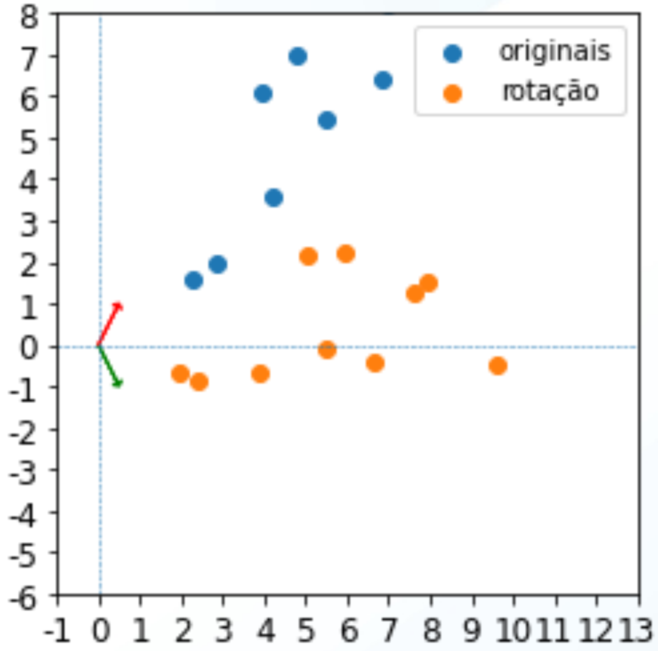
Y escalona este vetor

Visualização 2

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5x + 0.5y \\ -x + y \end{bmatrix}$$

Novo x

Novo y



Transformações lineares (exemplos)

Visualização 1

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1.0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

Visualização 2

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5x + 0.5y \\ -x + y \end{bmatrix}$$

Novo x

Novo y