Capitalização Composta - Aspectos Matemáticos

Na parte conceitual (aula 00) vimos que no cálculo dos **Juros Compostos**, os **rendimentos em cada período são incorporados ao Capital**, de forma que os Juros, ao final do período seguinte, **incidem NÃO SÓ sobre o Capital Inicial, MAS TAMBÉM sobre os Juros anteriores** que foram incorporados ao Capital (e assim Capitalizados).

Em Juros Compostos, a sequência formada pelos valores dos Montantes em cada período é caracterizada por uma **PROGRESSÃO GEOMÉTRICA CRESCENTE** onde a **razão é sempre igual a**:

$$q = 1 + i$$

Cálculo do Montante Composto

Em **Regime de Juros Compostos**, o Montante é calculado pela seguinte equação:

$$\boxed{\boldsymbol{M = C \times (1 + i)^t}}$$

Onde,

$M = Montante$

$C = Capital$

$i = Taxa\ de\ Juros$

$t = tempo$

Duas observações importantes são necessárias na hora de aplicar essa fórmula:

1. Atente-se para as unidades do Tempo e da Taxa de Juros. **OBRIGATORIAMENTE** elas devem estar na mesma unidade de grandeza.

Então, se a Taxa, por exemplo, estiver em "por cento ao mês", a unidade de tempo **NECESSARIAMENTE** deve estar em "meses".

2. A Taxa de Juros deve ser inserida na equação na **forma unitária**, ou seja, em números decimais.

Cálculo dos Juros Compostos

Estudamos que, em termos matemáticos, **Juro é definido pela diferença do Montante da operação menos o Capital inicial**.

$$\boldsymbol{J = M - C}$$

Então, se uma questão pedir para você calcular os Juros Compostos de uma operação, **primeiro** você calcula o Montante desta operação e, **posteriormente**, subtrai o Capital deste Montante, pois, como vimos, o Montante menos o Capital será igual ao Juros.

Cálculos dos Juros Compostos:

1º - Calcula-se o **Montante** da operação pela seguinte fórmula:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

2º - Em seguida, calculam-se os **Juros** pela equação:

$$J = M - C$$

"Professor, existe alguma fórmula que eu possa calcular diretamente os Juros (igual no Regime Simples)?"

Existe sim. Vamos substituir a fórmula do Montante na fórmula dos Juros e proceder com as operações matemáticas.

$$J = M - C$$

$$J = C \times (1 + i)^t - C$$

Iremos colocar o Capital C em evidência e, assim, encontramos a **fórmula dos Juros em Regime Composto**.

$$J = C \times (1 + i)^t - C \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{J = C \times [(1 + i)^t - 1]}$$

Observe que fizemos os mesmos dois passos que foram apresentados na esquematização acima. Porém, nesse caso, **trabalhamos com incógnitas** em vez de um resultado numérico.

Então, na hora da prova, você calcula os Juros, **ou** achando o Montante e depois diminuindo do Capital, **ou** aplicando diretamente a fórmula acima.

Particularmente, prefiro fazer passo a passo, isto é, calcular primeiro o Montante e, posteriormente, subtrair o Capital e encontrar os Juros.

Juros Compostos

$$M = C \times (1+i)^t$$

$$J = M - C \quad ou \quad J = C \times [(1+i)^t - 1]$$

- "i" e "t" ***obrigatoriamente*** *na* ***mesma unidade*** *de grandeza*

Antes de passar para alguns exercícios sobre esse tópico, vamos a uma **dica** que pode **facilitar suas contas** e poupar preciosos minutos na sua prova.

Esta dica é sempre passada pelo professor Brunno Lima em suas vídeo aulas e irei transcrevê-las aqui para você.

Iremos trabalhar constantemente com a potência $(\boldsymbol{1+i})^{\boldsymbol{2}}$ e a Taxa i variando de 1 até 9%. Nesse caso, vamos usar um macete para acelerar o resultado e não precisar fazer a conta.

- A dica serve para potências da forma "um vírgula zero alguma coisa ao quadrado".

$$\boxed{(1{,}0\_\_)^2}$$

O macete consiste em "**PRIMEIRO DOBRA, DEPOIS ELEVA AO QUADRADO**".

Observe e verá que é mais fácil do que imagina. Fique comigo que esse macete poupará preciosos minutos na sua prova.

- $1{,}05^2 \rightarrow$ Pegamos o que está depois da vírgula (05). Primeiro dobra $05 \times 2 = \mathbf{10}$. Depois eleva ao quadrado $05^2 = \mathbf{25}$.

Logo, $1{,}05^2 = 1{,}1025$

Perceba que você conseguirá fazer essas contas em segundos na hora da prova (de forma automática até). Diferente de multiplicar $1{,}05 \times 1{,}05$.

Vamos testar mais um.

- $1{,}04^2 \rightarrow$ Primeiro dobra $04 \times 2 =$ **08**. Eleva ao quadrado $04^2 =$ **16**.

$1{,}04^2 = 1{,}0816$

"Verdade professor. Estou entendendo. Parece ser bem rápido. Deixa eu testar mais uma para ver se funciona mesmo".

- $1{,}07^2 \rightarrow$ Dobra $=$ **14**. Eleva ao quadrado $=$ **49**.

$1{,}07^2 = 1{,}1449$

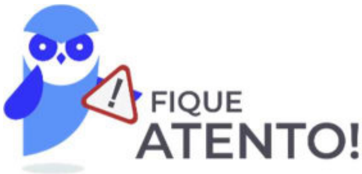
"Não pode ser. Vou fazer na calculadora para ver se é verdade mesmo."

Vamos testar mais uma potência.

- $1{,}08^2 \rightarrow$ Dobra $=$ **16**. Quadrado $=$ **64**.

$1{,}08^2 = 1{,}1664$

Percebeu como essa última já foi feita de cabeça e no modo automático?!. Agora tente fazer $1{,}08 \times 1{,}08$ no papel e constate quantos segundos preciosos você ganhará na resolução dos exercícios.



Lembrando que essa dica serve para potências da forma "<u>um vírgula zero alguma coisa ao quadrado</u>".

$$\boxed{(1{,}0\_\_)^2}$$

$$1{,}01^2 = 1{,}0201$$

$$1{,}02^2 = 1{,}0404$$

$$\vdots$$

$$1{,}06^2 = 1{,}1236$$

$$\vdots$$

$$1{,}09^2 = 1{,}1881$$

(CRMV – 2020) Para formar sua empresa, Josué tomou R$ 50.000,00 emprestados a juros simples de 3% ao mês.

Com base nesse caso hipotético, julgue o item.

Josué alugou uma máquina digital por R$ 1.000,00, por 2 meses, a juros compostos de 5% ao mês. Assim, ao final do período, Josué pagou R$ 1.102,50.

Comentários:

O aluguel da máquina é realizado em **regime de Juros Compostos**. Nesse regime, o Montante é calculado pela seguinte equação:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 1.000$

$i = Taxa\ de\ Juros = 5\%\ ao\ mês = 0{,}05$

$t = tempo = 2\ meses$

Vamos substituir os valores na equação e calcular o valor pago por José ao final do período de 2 meses.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 1.000 \times (1 + 0{,}05)^2$$

$$M = 1.000 \times 1{,}05^2$$

$$M = 1.000 \times 1{,}1025 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M = 1.102{,}50}$$

Gabarito: **CERTO**

(CRO AC- 2019) Quanto a noções básicas de matemática financeira, finanças, orçamento e tributos, julgue o item.

Se determinado investidor tem R$ 25.000,00 de capital e quer comprar uma televisão que custa R$ 3.000,00, colocando seu capital a juros compostos de 6% ao mês por 2 meses, ao final do período, ele poderá comprar a televisão usando apenas os juros recebidos na aplicação

Comentários:

Vamos calcular o Montante resultante da aplicação de um Capital de R$ 25.000,00 submetido a uma Taxa de Juros compostos de 6% ao mês por 2 meses. Em **regime de Juros Compostos**, o Montante é calculado pela seguinte equação:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 25.000$

$i = Taxa\ de\ Juros = 6\%\ ao\ mês = 0{,}06$

$t = tempo = 2\ meses$

Iremos substituir os valores e calcular o Montante.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 25.000 \times (1 + 0{,}06)^2$$

$$M = 25.000 \times 1{,}06^2$$

$$M = 25.000 \times 1{,}1236 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 28.090}}$$

De posse do Montante e do Capital, calculamos os **Juros**.

Sabemos que os Juros são calculados pela diferença do Montante resultante menos o Capital aplicado.

$$J = M - C$$

$$J = 28.090 - 25.000 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{J = 3.090}$$

Ou seja, como a televisão custa R$ 3.000,00 e os Juros da aplicação são iguais a R$ 3.090,00, ele **poderá (sim) comprar a televisão** usando apenas os juros recebidos na aplicação.

Gabarito: **CERTO**

(Pref. Três Palmares RS - 2018) O juro composto obtido na aplicação de um capital de R$ 2.000,00 durante um bimestre, com uma taxa de 10% ao mês, é:

a) R$ 420,00
b) R$ 600,00
c) R$ 1.600,00
d) R$ 2.400,00
e) R$ 2.420,00

Comentários:

Em **regime de Juros Compostos**, o Montante é calculado pela seguinte equação:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 2.000$

$i = Taxa\ de\ Juros = 10\%\ ao\ mês = 0{,}1$

$t = tempo = 1\ bimestre = 2\ meses$

Atente-se para a **conversão** da unidade do tempo de aplicação (bimestre) para a unidade da taxa de juros (mês) pois **necessariamente** devem coincidir. Em 1 bimestre há 2 meses.

Vamos substituir os valores e calcular o Montante.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 2.000 \times (1 + 0{,}1)^2$$

$$M = 2.000 \times (1{,}1)^2$$

$$M = 2.000 \times 1{,}21 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 2.420}}$$

De posse do Montante e do Capital, calcularemos os Juros relativos à aplicação em regime de juros compostos, uma vez que **os Juros são calculados pela diferença do Montante recebido menos o Capital Aplicado**.

$$J = M - C$$

$$J = 2.420 - 2.000 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{J = 420}$$

Gabarito: Alternativa **A**

(Pref. Pinhais - 2017 - Adaptada) Uma pessoa contratou um empréstimo de R$ 6.000,00 em uma agência bancária, a juros compostos de 10% ao mês. Exatamente dois meses após contratar esse empréstimo, essa pessoa foi ao banco e pagou R$ 4.000,00 e dois meses, após esse pagamento, essa pessoa quitou o seu empréstimo. Dessa forma, o valor do último pagamento foi de

a) R$ 1.244,60
b) R$ 2.346,00
c) R$ 2.586,00
d) R$ 3.944,60
e) R$ 7.260,00

Comentários:

Vamos transcrever os trechos do enunciado e resolver passo a passo.

Uma pessoa contratou um empréstimo de R$ 6.000,00 em uma agência bancária, a juros compostos i de 10% ao mês por um tempo t de 2 meses. Logo, o Montante após 2 meses será igual a:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 6.000 \times (1 + 0{,}1)^2$$

$$M = 6.000 \times (1{,}1)^2$$

$$M = 6.000 \times 1{,}21 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M = 7.260}$$

Exatamente dois meses após contratar esse empréstimo, essa pessoa foi ao banco e pagou R$ 4.000,00. Logo, o **valor que resta a pagar** é igual a:

$$resta\ pagar = 7.260 - 4.000 \quad \rightarrow \quad resta\ pagar = 3.260$$

e dois meses após esse pagamento, a pessoa quitou o seu empréstimo. Vamos calcular o Montante final em 2 meses deste valor que resta a pagar.

Iremos utilizar novamente a fórmula do Montante em regime de Juros Compostos, pois <u>em cima deste valor que resta a pagar irão incidir juros por mais 2 meses</u>. Dessa forma, o valor do último pagamento foi de:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 3.260 \times (1 + 0{,}1)^2$$

$$M = 3.260 \times (1{,}1)^2$$

$$M = 3.260 \times 1{,}21 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M = 3.944{,}60}$$

Gabarito: Alternativa **D**

TAXA NOMINAL E TAXA EFETIVA

Algumas questões irão trabalhar com essas duas taxas. **Não podemos confundi-las** na hora da prova. Iremos entender o que cada uma significa e como fazer a conversão entre elas.

Taxa Efetiva

É a Taxa de Juros em que a unidade de tempo da Taxa **é coincidente** com a unidade de tempo do período de capitalização.

Exemplos:

- $\boldsymbol{i_1} = 5\%\ ao\ mês\ capitalizados\ mensalmente$

Perceba que a unidade de tempo da Taxa (ao mês) é coincidente com a unidade de tempo do período de capitalização (mensal).

- $\boldsymbol{i_2} = 8\%\ ao\ trimestre\ capitalizados\ trimestralmente$

- $\boldsymbol{i_3} = 15\%\ ao\ ano\ capitalizados\ anualmente$

Quando a **Taxa for efetiva**, isto é, quando as unidades de tempo da taxa e da capitalização forem iguais, a taxa pode ser escrita somente em termos da sua unidade de tempo. Então, nos casos acima, as taxas poderiam ser escritas da seguinte forma:

- $\boldsymbol{i_1} = 5\%\ ao\ mês$

- $\boldsymbol{i_2} = 8\%\ ao\ trimestre$

- $\boldsymbol{i_3} = 15\%\ ao\ ano$

Até agora, em todos os exercícios, trabalhamos com a Taxa Efetiva.

Então, tenha em mente que se a taxa for escrita da forma acima (apenas com a unidade de tempo) é porque se trata de uma Taxa Efetiva e está **implícito que a unidade de capitalização é a mesma da unidade de tempo**.

Taxa Nominal

É a Taxa de Juros em que a unidade de tempo da Taxa **NÃO É coincidente** com a unidade de tempo do período de capitalização.

Exemplos:

- $\boldsymbol{i_1} = 10\%\ ao\ bimestre\ capitalizados\ mensalmente$

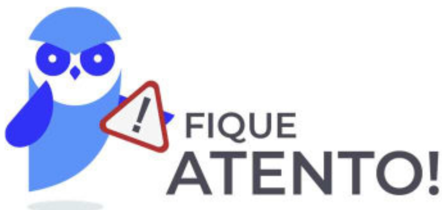
Perceba que a unidade de tempo da Taxa (ao bimestre) não é coincidente com a unidade de tempo do período de capitalização (mensal).

- $\boldsymbol{i_2} = 12\%\ ao\ semestre\ capitalizados\ bimestralmente$

- $\boldsymbol{i_3} = 15\%\ ao\ semestre\ capitalizados\ anualmente$

Conversão entre Taxa Nominal ↔ Taxa Efetiva

Nas fórmulas matemáticas de Juros Compostos **NÃO podemos utilizar a Taxa Nominal**.



Antes de proceder com os cálculos, **certifique-se que a Taxa a ser utilizada é a Taxa Efetiva**, ou seja, aquela em que a unidade de tempo da Taxa é coincidente com a unidade de tempo do período de capitalização.

Então, **nunca resolva um exercício de Juros Compostos usando a Taxa Nominal**.

"E, professor, se a questão der a Taxa Nominal, como eu transformo para a Taxa Efetiva?"

Primeiro, tenha em mente que "**QUEM MANDA É O PERÍODO DE CAPITALIZAÇÃO**". Sendo assim, devemos passar para a unidade de tempo do período de capitalização

"E como passamos da unidade de tempo do período da taxa para a unidade de tempo do período de capitalização?"

Basta fazermos uma **simples divisão/multiplicação**.

Vejamos com os mesmos exemplos da teoria acima de Taxa Nominal.

EXEMPLIFICANDO

- $\boldsymbol{i_1} = 10\%\ ao\ bimestre\ capitalizados\ mensalmente$

Como vimos, a Taxa está com a unidade de tempo em bimestre e a capitalização é mensal.

Devemos passar para a unidade da capitalização, isto é, para a unidade "mês".

Em 1 bimestre há 2 meses. Logo, a Taxa Efetiva será igual a:

$$i_{1\ Efetiva} = \frac{10\%}{2} \rightarrow i_{1\ Efetiva} = 5\%\ ao\ mês\ capitalizados\ mensalmente$$

Ou, simplesmente,

$$\boldsymbol{i_{1\ Efetiva}} = 5\%\ ao\ mês$$

- $\boldsymbol{i_2} = 12\%\ ao\ semestre\ capitalizados\ bimestralmente$

Em 1 semestre há 3 bimestres. Logo, a Taxa Efetiva será igual a:

$$i_{2\ Efetiva} = \frac{12\%}{3} \rightarrow i_{2\ Efetiva} = 4\%\ ao\ bimestre\ capitalizados\ bimestralmente$$

Ou, simplesmente,

$$\boldsymbol{i_{2\ Efetiva}} = 4\%\ ao\ bimestre$$

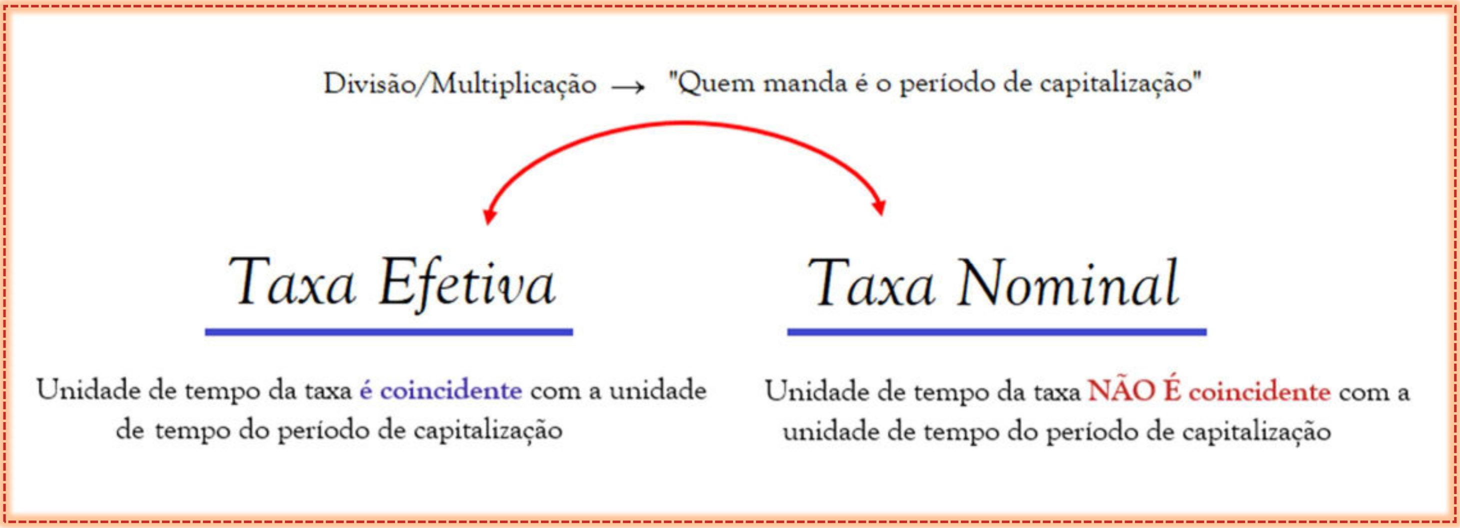
- $\boldsymbol{i_3} = 15\%\ ao\ semestre\ capitalizados\ anualmente$

Em 1 ano há 2 semestres. Logo, a Taxa Efetiva será:

$$i_{3\ Efetiva} = 15\% \times 2 \rightarrow i_{Efetiva} = 30\%\ ao\ ano\ capitalizados\ anualmente$$

Ou, simplesmente,

$$\boldsymbol{i_{3\ Efetiva}} = 30\%\ ao\ ano$$



HORA DE PRATICAR!

(Pref. São Cristóvão - 2019) Um indivíduo aplicou R$ 10.000 em um investimento que paga taxa de juros compostos de 12% ao ano com capitalização bimestral.

Considerando 1,27 como valor aproximado para $1{,}02^{12}$, julgue o item que se segue.

O montante 2 anos após o início da aplicação terá sido superior a R$ 12.000.

Comentários:

Primeiro passo é converter a Taxa Nominal para a Taxa Efetiva.

Taxa Nominal é a taxa de juros cuja unidade de tempo **não coincide** com a unidade de tempo do período de capitalização. Observe que a taxa fornecida no enunciado é uma taxa nominal.

$$i_{Nominal} = 12\%\ ao\ ano\ capitalizados\ bimestralmente$$

Nunca resolva um exercício usando a taxa nominal. Sempre devemos passar para a unidade de tempo do período de capitalização. Então, tenha em mente: "**quem manda é o período de capitalização**".

E como passamos da unidade de tempo do período da taxa nominal para a unidade de tempo do período de capitalização?

Basta fazermos uma simples divisão/multiplicação. Em 1 ano há 6 bimestres. Então, a Taxa Efetiva bimestral será um sexto da taxa anual.

$$i_{Efetiva} = \frac{12\%}{6} \rightarrow i_{Efetiva} = 2\% \; ao \; bimestre \; capitalizados \; bimestralmente$$

Ou simplesmente,

$$\boxed{\boldsymbol{i_{Efetiva} = 2\% \; ao \; bimestre}}$$

- ✓ Essa será a taxa que devemos utilizar no exercício.

Depois desse primeiro passo (perceba que a explicação é extensa para que você possa entender o passo a passo. Mas, na hora da prova, você consegue fazer essa passagem em apenas uma linha ou até mesmo fazer a divisão "de cabeça"), iremos calcular o Montante após 2 anos de aplicação.

Em **regime de Juros Compostos**, o Montante é calculado pela seguinte equação:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 10.000$

$i = Taxa \; de \; Juros = 2\% \; ao \; bimestre = 0{,}02$

$t = tempo = 2 \; anos = 12 \; bimestres$

Atente-se para a **conversão** da unidade do tempo de aplicação (ano) para a unidade da taxa de juros (bimestre) pois **necessariamente** devem coincidir. Em 1 ano há 6 bimestres. Logo, em 2 anos haverá 12 bimestres.

Vamos substituir os valores e calcular o Montante.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 10.000 \times (1 + 0{,}02)^{12}$$

$$M = 10.000 \times 1{,}02^{12}$$

$$M = 10.000 \times 1{,}27 \rightarrow \boldsymbol{M = 12.700}$$

Ou seja, o montante 2 anos após o início da aplicação terá sido **SUPERIOR** a R$ 12.000.

Gabarito: **CERTO**

(CAGE RS – 2018) Um indivíduo investiu a quantia de R$ 1.000 em determinada aplicação, com taxa nominal anual de juros de 40%, pelo período de 6 meses, com capitalização trimestral.

Nesse caso, ao final do período de capitalização, o montante será de

a) R$ 1.200
b) R$ 1.210
c) R$ 1.331
d) R$ 1.400
e) R$ 1.100

Comentários:

Primeiro passo é converter a Taxa Nominal para a Taxa Efetiva.

Taxa Nominal é a taxa de juros cuja unidade de tempo **não coincide** com a unidade de tempo do período de capitalização.

Observe que a taxa fornecida no enunciado é uma taxa nominal.

$$i_{Nominal} = 40\%\ ao\ ano\ capitalizados\ trimestralmente$$

Nunca resolva um exercício usando a taxa nominal. Sempre devemos passar para a unidade de tempo do período de capitalização. Então tenha em mente: "**quem manda é o período de capitalização**".

E como passamos da unidade de tempo do período da taxa nominal para a unidade de tempo do período de capitalização?

Basta fazermos uma simples divisão/multiplicação. Em 1 ano há 4 trimestres. Então, a Taxa Efetiva trimestral será um quarto da taxa anual.

$$i_{Efetiva} = \frac{40\%}{4} \quad \rightarrow \quad i_{Efetiva} = 10\%\ ao\ trimestre\ capitalizados\ trimestralmente$$

Ou, simplesmente,

$$\boxed{\boldsymbol{i_{Efetiva} = 10\%\ ao\ trimestre}}$$

- ✓ Essa será a taxa que devemos utilizar no exercício.

Depois desse primeiro passo (perceba que a explicação é extensa para que você possa entender o passo a passo. Mas, na hora da prova, você consegue fazer essa passagem em apenas uma linha ou até mesmo fazer a divisão “de cabeça”), iremos calcular o Montante após 6 meses de aplicação.

Em **regime de Juros Compostos**, o Montante é calculado pela seguinte equação:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 1.000$

$i = Taxa\ de\ Juros = 10\%\ ao\ trimestre = 0{,}1$

$t = tempo = 6\ meses = 2\ trimestres$

Atente-se para a **conversão** da unidade do tempo de aplicação (meses) para a unidade da taxa de juros (trimestre) pois **necessariamente** devem coincidir. Em 6 meses há 2 trimestres.

Sendo assim, o Montante será igual a:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 1.000 \times (1 + 0{,}1)^2$$

$$M = 1.000 \times 1{,}1^2$$

$$M = 1.000 \times 1{,}21 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M = 1.210}$$

Gabarito: Alternativa **B**

TAXAS EQUIVALENTES

DESPENCA NA PROVA!

Taxas Equivalentes são as taxas de juros com **unidades de tempo diferentes** que **aplicadas a um mesmo Capital,** por um mesmo período, sob o regime de juros compostos, produziriam **o mesmo Montante** (e, por consequência, mesmo Juro).

Diferentemente do que ocorre no Regime de Capitalização Simples, em Juros Compostos, **as Taxas Equivalentes NÃO SÃO proporcionais**.

Para calcular a Taxa Equivalente, iremos tomar como base a **potenciação**.

TOME NOTA!

Iremos resolver alguns exemplos para você **entender a sistemática** da mecânica de capitalização e, posteriormente, apresentarei a fórmula para cálculo.

Perceba que a fórmula será apresentada depois dos exemplos porque eu quero que você entenda o que está sendo feito. Decorar fórmula é simples. Saber o que fazer com ela é mais complicado.

Eu, particularmente, nunca utilizei a fórmula de Taxa Equivalente, pois, **uma vez entendido o sistema de capitalização entre datas**, você **não precisará decorar nada**. Tudo estará entendido.

EXEMPLIFICANDO

- **Exemplo 1:** Qual a Taxa composta bimestral Equivalente a 5% ao mês?

Observe que para calcular a Taxa bimestral temos de capitalizar a Taxa mensal por 2 meses (1 bimestre). Ou seja, a Taxa mensal de 5% capitalizada por 2 meses (1 bimestre) será igual a que Taxa Equivalente bimestral?

$$(1 + i_{mensal})^2 = (1 + i_{bimestral})$$

$$(1+0{,}05)^2 = (1+i_{bimestral})$$

$$1{,}05^2 = 1 + i_{bimestral}$$

Lembra-se do macete "primeiro dobra e depois eleva ao quadrado"? $1{,}05^2 = 1{,}1025$

$$1{,}1025 = 1 + i_{bimestral}$$

$$i_{bimestral} = 1{,}1025 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{bimestral} = 0{,}1025 \ \ ou \ \ 10{,}25\%}$$

Então, **5% ao mês é equivalente a 10,25% ao bimestre**.

Isso quer dizer que, se aplicarmos essa Taxa em um mesmo Capital, por um mesmo período de tempo, em regime de Juros Compostos, produziria o mesmo Montante.

Vamos testar. Imagine um Capital de R$ 100 aplicado por 4 meses. A primeira operação ocorreu a Juros Compostos de 5% ao mês e a segunda a 10,25% ao bimestre. Iremos calcular o Montante ao final de 4 meses para as 2 operações.

$$M_1 = C \times (1+i)^t$$

$$M_1 = 100 \times (1+0{,}05)^4$$

$$M_1 = 100 \times 1{,}05^4$$

$$M_1 = 100 \times 1{,}2155 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M_1 = 121{,}55}}$$

Agora vamos calcular o Montante da segunda operação.

$$M_2 = C \times (1+i)^t$$

$$M_2 = 100 \times (1+0{,}1025)^2$$

Atente-se para a **conversão** da unidade do tempo de aplicação (mês) para a unidade da taxa de juros (bimestre) pois **necessariamente** devem coincidir. Em 4 meses há 2 bimestres.

$$M_2 = 100 \times 1{,}1025^2$$

$$M_2 = 100 \times 1{,}2155 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M_2 = 121{,}55}}$$

Perceba que os Montantes foram iguais como queríamos demonstrar.

Exemplo 2: Qual a Taxa composta anual Equivalente a 16% ao semestre?

Ou seja, a Taxa semestral capitalizada por 2 semestres (1 ano) será igual a que Taxa Equivalente anual?

$$(1 + i_{semestral})^2 = (1 + i_{anual})$$

$$(1 + 0{,}16)^2 = (1 + i_{anual})$$

$$1{,}16^2 = 1 + i_{anual}$$

$$1{,}3456 = 1 + i_{anual}$$

$$i_{anual} = 1{,}3456 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{anual} = 0{,}3456 \ \ ou \ \ 34{,}56\%}$$

Logo, **34,56% ao ano é equivalente a 16% ao semestre**.

Exemplo 3: Qual a Taxa composta mensal Equivalente a 33,10% ao trimestre?

Nesse caso, estamos procurando a Taxa mensal que, capitalizada por 3 meses (1 trimestre), será equivalente a 33,10% ao trimestre.

$$(1 + i_{mensal})^3 = (1 + i_{trimestral})$$

$$(1 + i_{mensal})^3 = (1 + 0{,}331)$$

$$(1 + i_{mensal})^3 = 1{,}331$$

$$1 + i_{mensal} = \sqrt[3]{1{,}331}$$

$$1 + i_{mensal} = 1{,}1$$

$$i_{mensal} = 1{,}1 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{mensal} = 0{,}1 \ \ ou \ \ 10\%}$$

Logo, **10% ao mês é equivalente a 33,10% ao trimestre**.

Exemplo 4: Qual a Taxa composta bimestral Equivalente a 14,49% ao quadrimestre?

Nesse exemplo, iremos calcular a Taxa bimestral que, capitalizada por 2 bimestres (1 quadrimestre), será equivalente a 14,49% ao quadrimestre.

$$(1+i_{bimestral})^2 = \left(1+i_{quadrimestral}\right)$$

$$(1+i_{bimestral})^2 = (1+0{,}1449)$$

$$(1+i_{bimestral})^2 = 1{,}1449$$

$$1+i_{bimestral} = \sqrt{1{,}1449}$$

$$1+i_{bimestral} = 1{,}07$$

$$i_{bimestral} = 1{,}07-1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{bimestral} = 0{,}07 \ \ ou \ \ 7\%}$$

Sendo assim, **7% ao bimestre é equivalente a 14,49% ao quadrimestre**.

Vamos começar a complicar um pouco? Iremos misturar alguns conceitos de Taxas estudados nessa aula. As bancas amam esse tipo de mescla de assuntos.

- **Exemplo 5:** Qual a Taxa composta trimestral Equivalente a 6% ao semestre capitalizados mensalmente?

Observe que a banca nos fornece uma Taxa Nominal.

Taxa Nominal é a taxa de juros cuja unidade de tempo **não coincide** com a unidade de tempo do período de capitalização. Observe que a taxa fornecida no enunciado é uma taxa nominal.

$$i_{Nominal} = 6\% \ ao \ semestre \ capitalizados \ mensalmente$$

Então, **antes de calcular a Taxa Equivalente**, devemos converter a Taxa Nominal em Taxa Efetiva. Lembra como se faz a conversão?

Devemos passar para a unidade de tempo do período de capitalização. Então, tenha em mente: "**quem manda é o período de capitalização**".

E como passamos da unidade de tempo do período da taxa nominal para a unidade de tempo do período de capitalização?

Basta fazermos uma simples divisão/multiplicação. Em 1 semestre há 6 meses. Logo, a Taxa Efetiva será igual a:

$$i_{efetiva} = \frac{6\%}{6} \quad \rightarrow \quad i_{efetiva} = 1\% \ ao\ mês\ capitalizados\ mensalmente$$

Ou, simplesmente,

$$\boxed{\boldsymbol{i_{efetiva} = 1\%\ ao\ mês}}$$

Vamos, agora, calcular a Taxa trimestral equivalente à Taxa mensal de 1%. Ou seja, a Taxa mensal capitalizada por 3 meses (1 trimestre) será igual a que Taxa Equivalente trimestral?

$$(1 + i_{mensal})^3 = (1 + i_{trimestral})$$

$$(1 + 0{,}01)^3 = (1 + i_{trimestral})$$

$$1{,}01^3 = 1 + i_{trimestral}$$

$$1{,}030301 = 1 + i_{trimestral}$$

$$i_{trimestral} = 1{,}030301 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{trimestral} \cong 0{,}0303\ \ ou\ \ 3{,}03\%}$$

- **Exemplo 6:** Qual a Taxa composta bimestral Equivalente a 10% ao ano capitalizados semestralmente?

Dados: $\sqrt[3]{1{,}05} = 1{,}0164$

Observe que a banca nos fornece uma Taxa Nominal.

Taxa Nominal é a taxa de juros cuja unidade de tempo **não coincide** com a unidade de tempo do período de capitalização. Observe que a taxa fornecida no enunciado é uma taxa nominal.

$$i_{Nominal} = 10\% \ ao\ ano\ capitalizados\ semestralmente$$

Então, **antes de calcular a Taxa Equivalente**, devemos converter a Taxa Nominal em Taxa Efetiva. Lembra como se faz a conversão?

Devemos passar para a unidade de tempo do período de capitalização. Então, tenha em mente: "**quem manda é o período de capitalização**".

E como passamos da unidade de tempo do período da taxa nominal para a unidade de tempo do período de capitalização?

Basta fazermos uma simples divisão/multiplicação. Em 1 ano há 2 semestres. Logo, a Taxa Efetiva será igual a:

$$i_{efetiva} = \frac{10\%}{2} \quad \rightarrow \quad i_{efetiva} = 5\% \; ao \; semestre \; capitalizados \; semestralmente$$

Ou, simplesmente,

$$\boxed{\boldsymbol{i_{efetiva} = 5\% \; ao \; semestre}}$$

Vamos, agora, calcular a Taxa bimestral equivalente à Taxa semestral de 5%. Ou seja, qual Taxa bimestral que capitalizada por 3 bimestres (1 semestre) será equivalente a 5% ao semestre?

$$(1 + i_{bimestral})^3 = (1 + i_{semestral})$$

$$(1 + i_{bimestral})^3 = (1 + 0{,}05)$$

$$(1 + i_{bimestral})^3 = 1{,}05$$

$$1 + i_{bimestral} = \sqrt[3]{1{,}05}$$

$$1 + i_{bimestral} = 1{,}0164$$

$$i_{bimestral} = 1{,}0164 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{bimestral} = 0{,}0164 \; ou \; 1{,}64\%}$$

Conforme comentei, irei apresentar a **fórmula para o cálculo da Taxa Equivalente** ao final dos exemplos. Porém, não apenas a decore. Tente entender o uso da fórmula de acordo com os exemplos acima e com as questões de concursos que faremos em seguida.

$$\boxed{\boldsymbol{i_{quero} = (1 + i_{enunciado})^{(n_{quero}/n_{enunciado})} - 1}}$$

Atente-se para o fato que **a Taxa do enunciado DEVE ser a Taxa Efetiva**. Então, se a banca fornecer a Taxa Nominal, antes de aplicar a fórmula, certifique-se de fazer a conversão da Taxa Nominal para a Taxa Efetiva.

Vejamos o segundo Exemplo resolvido com essa equação:

- **Exemplo 2:** Qual a Taxa composta anual Equivalente a 16% ao semestre?

$$i_{quero} = (1 + i_{enunciado})^{(n_{quero}/n_{enunciado})} - 1$$

$$i_{quero} = (1 + 0{,}16)^{(2/1)} - 1$$

$$i_{quero} = 1{,}16^2 - 1$$

$$i_{quero} = 1{,}3456 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{quero} = 0{,}3456 \;\; ou \;\; 34{,}56\%}$$

Observe que n_{quero} é igual a 2, uma vez que, em 1 ano há 2 semestres.

Vamos às questões de concursos sobre esse tópico.

HORA DE PRATICAR!

(Pref. Porto Alegre – 2019 - Adaptada) Em um sistema composto de capitalização, a taxa de 5% ao mês é equivalente a uma taxa anual de:

Dado: $\mathbf{1{,}05^6 = 1{,}3401}$

a) 60%
b) 65%
c) 70,29%
d) 75,49%
e) 79,59%

Comentários:

O enunciado nos questiona a Taxa Equivalente anual. Ou seja, a Taxa mensal capitalizada por 12 meses (1 ano) será igual a que Taxa Equivalente anual?

$$(1 + i_{mensal})^{12} = (1 + i_{anual})$$

$$(1 + 0{,}05)^{12} = (1 + i_{anual})$$

$$1{,}05^{12} = 1 + i_{anual}$$

Observe que a banca não fornece a potência de 1,05 elevado a 12 e sim elevado a 6. Neste ponto, iremos <u>manipular algebricamente</u> a potência e continuar com os cálculos.

$$1{,}05^{12} = 1 + i_{anual}$$

$$1{,}05^6 \times 1{,}05^6 = 1 + i_{anual}$$

$$1{,}3401 \times 1{,}3401 = 1 + i_{anual}$$

$$1{,}7959 = 1 + i_{anual}$$

$$i_{anual} = 1{,}7959 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{anual} = 0{,}7959 \ \ ou \ \ 79{,}59\%}$$

Gabarito: Alternativa **E**

(CGE RN - 2019) Uma financeira deseja aplicar uma taxa mensal, no regime de capitalização composta, que é equivalente a taxa bimestral de 5,0625%. Desse modo a taxa aplicada pela financeira deve ser de:

Considere $\boldsymbol{(1,050625^{0,5} = 1,025)}$; $\boldsymbol{(0,050625^{0,5} = 0,225)}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{(1,50625^{0,5} = 1,2273)}$

a) 2,5%
b) 2,53125%
c) 2,25%
d) 2,27%

Comentários:

O enunciado nos questiona a Taxa mensal equivalente à Taxa bimestral de 5,0625%. Ou seja, qual Taxa mensal que capitalizada por 2 meses (1 bimestre) será igual a 5,0625%?

$$(1 + i_{mensal})^2 = (1 + i_{bimestral})$$

$$(1 + i_{mensal})^2 = (1 + 0{,}050625)$$

$$(1 + i_{mensal})^2 = 1{,}050625$$

$$1 + i_{mensal} = \sqrt{1{,}050625}$$

Lembrando que calcular a raiz quadrada de um número é a mesma operação que elevar este número a 1/2.

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$

$$para\, n = 2 \ \rightarrow \ \sqrt[2]{x} = x^{1/2}$$

Continuando com os cálculos.

$$1 + i_{mensal} = (1{,}050625)^{1/2}$$

$$1 + i_{mensal} = (1{,}050625)^{0{,}5}$$

$$1 + i_{mensal} = 1{,}025$$

$$i_{mensal} = 1{,}025 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{mensal} = 0,025 \;\; ou \;\; 2,5\%}$$

Gabarito: Alternativa **A**

(CGE RN - 2019) A taxa efetiva bimestral que é equivalente a uma taxa nominal anual de 36% capitalizados mensalmente é:

Considere $(\mathbf{1,03^2 = 1,0609})$; $\left(\mathbf{1,36^{1/6} = 1,0526}\right)$ $\boldsymbol{e}$ $(\mathbf{0,3^2 = 0,09})$

a) 6%
b) 6,09%
c) 9%
d) 5,26%

Comentários:

Observe que a banca nos fornece uma Taxa Nominal.

Taxa Nominal é a taxa de juros cuja unidade de tempo **não coincide** com a unidade de tempo do período de capitalização. Observe que a taxa fornecida no enunciado é uma taxa nominal.

$$i_{Nominal} = 36\% \ ao \ ano \ capitalizados \ mensalmente$$

Então, antes de calcular a Taxa Equivalente, devemos converter a Taxa Nominal em Taxa Efetiva. Em 1 ano há 12 meses. Logo, a Taxa Efetiva será igual a:

$$i_{efetiva} = \frac{36\%}{12} \quad \rightarrow \quad i_{efetiva} = 3\% \ ao \ mês \ capitalizados \ mensalmente$$

Ou, simplesmente,

$$\boxed{\boldsymbol{i_{efetiva} = 3\% \ ao \ mês}}$$

Vamos, agora, calcular a Taxa bimestral equivalente à Taxa mensal de 3%. Ou seja, a Taxa mensal capitalizada por 2 meses (1 bimestre) será igual a que Taxa Equivalente bimestral?

$$(1 + i_{mensal})^2 = (1 + i_{bimestral})$$

$$(1 + 0{,}03)^2 = (1 + i_{bimestral})$$

$$1{,}03^2 = 1 + i_{bimestral}$$

$$1{,}0609 = 1 + i_{bimestral}$$

$$i_{bimestral} = 1{,}0609 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{bimestral} = 0,0609 \;\; ou \;\; 6,09\%}$$

Gabarito: Alternativa **B**

(Pref. Porto Alegre - 2019) A taxa de 15% ao ano, capitalizada ao quadrimestre, tem como taxa efetiva anual:

a) 60%
b) 45%
c) 25,24%
d) 15,76%
e) 12,68%

Comentários:

Perceba que a banca nos fornece uma Taxa Nominal, isto é, uma taxa cuja unidade de tempo **não coincide** com a unidade de tempo do período de capitalização.

$$i_{Nominal} = 15\% \; ao \; ano \; capitalizados \; quadrimestralmente$$

Então, antes de calcular a Taxa Equivalente questionada pela banca, vamos converter a Taxa Nominal em Taxa Efetiva. Em 1 ano há 3 quadrimestres.

$$i_{efetiva} = \frac{15\%}{3} \quad \rightarrow \quad i_{efetiva} = 5\% \; ao \; quadrimestre \; capitalizados \; quadrimestralmente$$

Ou, simplesmente,

$$\boxed{\boldsymbol{i_{efetiva} = 5\% \; ao \; quadrimestre}}$$

Vamos, agora, calcular a Taxa anual equivalente a Taxa quadrimestral de 5%. Ou seja, a Taxa Quadrimestral de 5% capitalizada por 3 quadrimestres (1 ano), será equivalente a qual Taxa anual?

$$\left(1 + i_{quadrimestral}\right)^3 = (1 + i_{anual})$$

$$(1 + 0{,}05)^3 = (1 + i_{anual})$$

$$1{,}05^3 = 1 + i_{anual}$$

$$1{,}1576 = 1 + i_{anual}$$

$$i_{anual} = 1{,}1576 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{anual} = 0,1576 \;\; ou \;\; 15,76\%}$$

Gabarito: Alternativa **D**

Convenção Exponencial x Convenção Linear

Até então, nos exercícios, estávamos calculando o Montante e os Juros para períodos inteiros de tempo. Por exemplo, a Taxa era mensal e o período (também) era em meses.

Mas se, nesse mesmo exemplo, a Taxa fosse igual a 10% ao mês e o tempo de aplicação fosse igual a, digamos, quatro meses e quinze dias. Como proceder?

Perceba que o período é composto por **uma parte inteira** (quatro meses) **e outra fracionária** (15 dias). Nesse caso, para calcular o Montante, 2 convenções são utilizadas: a Convenção Exponencial e a Convenção Linear.

Convenção Exponencial

Nessa convenção, é utilizado o **regime de Capitalização Composta para TODO o período**, isto é, tanto para a parte inteira quanto para a parte fracionária.

A fórmula a ser utilizada é a mesma que aprendemos no início da aula.

$$\boxed{\boldsymbol{M = C \times (1 + i)^t}}$$

Em nosso exemplo acima, que a Taxa i é de 10% ao mês e o tempo de aplicação t é de 4 meses e 15 dias, o Montante de uma aplicação de Capital C igual a R$ 100,00 seria igual a:

Dados: $1{,}1^{4{,}5} = 1{,}5356$

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 100 \times (1 + 0{,}1)^{4{,}5}$$

$$M = 100 \times 1{,}1^{4{,}5}$$

$$M = 100 \times 1{,}5356 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M = 153{,}56}$$

Atente-se para a **conversão** da unidade do tempo de aplicação (mês e dia) para a unidade da taxa de juros (mensal) pois **necessariamente** devem coincidir. 4 meses e 15 dias é igual a 4 meses e meio, isto é, 4,5 meses.

Fique tranquilo que, em questões que exigem convenção exponencial, a banca fornece os dados que serão necessários para o cálculo da potência.

Convenção Linear

Já na Convenção Linear, iremos utilizar o **regime de Capitalização Composta para a parte inteira** do tempo de aplicação e o **regime de Capitalização Simples para a parte fracionária**.

Então, no mesmo exemplo anterior, calcularíamos o Montante para um período de 4 meses (parte inteira) utilizando a fórmula de Juros Compostos e, posteriormente, com o resultado calculado, aplicaríamos a fórmula dos Juros Simples para a parte fracionária (meio mês).

Vejamos como resolver.

Dados: $1{,}1^4 = 1{,}4641$

1. Calcular o Montante em **regime de Juros Compostos para a parte inteira** do período de aplicação (4 meses):

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 100 \times (1 + 0{,}1)^4$$

$$M = 100 \times 1{,}1^4$$

$$M = 100 \times 1{,}4641 \quad \rightarrow \quad M = 146{,}41$$

2. De posse do Montante calculado acima, utilizar a **fórmula dos Juros Simples para a parte fracionária** (15 dias):

$$M = C \times (1 + i \times t)$$

$$M = 146{,}41 \times (1 + 0{,}1 \times 0{,}5)$$

Observe que convertemos a unidade do tempo de aplicação (15 dias) para a unidade da taxa de juros (mensal) pois **necessariamente** devem coincidir. 15 dias é igual a meio (0,5) mês.

$$M = 146{,}41 \times (1 + 0{,}05)$$

$$M = 146{,}41 \times 1{,}05 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M = 157{,}73}$$

Existe uma fórmula para o cálculo direto do Montante pela Convenção Linear. Mas, como expliquei na parte de Taxas Equivalentes, **uma vez entendido o que fazer**, **não precisa decorar a fórmula**.

FIQUE ATENTO!

Fórmula do Montante pela **Convenção Linear:**

$$\boldsymbol{M = C \times (1+i)^{t_1} \times (1 + i \times t_2)}$$

Onde,

$t_1 = parte\ inteira\ do\ período\ de\ aplicação$

$t_2 = parte\ fracionária\ do\ período\ de\ aplicação$

Perceba que essa fórmula, nada mais é que a aglutinação dos dois passos que fizemos acima.

Primeiro, aplicamos **Juros Compostos para a parte inteira** do período de aplicação e, posteriormente, **Juros Simples para a parte fracionária**.

$$M = C \times \underbrace{(1+i)^{t_1}}_{\substack{parte \\ inteira}} \times \underbrace{(1 + i \times t_2)}_{\substack{parte \\ fracionária}}$$

Vamos esquematizar essa distinção entre as convenções:

ESQUEMATIZANDO

Convenção Exponencial x *Convenção Linear*

Convenção Exponencial ↓

Juros Compostos para TODO o período (tanto parte inteira quanto parte fracionária)

↓

$$M = C \times (1+i)^t$$

Convenção Linear ↓

Juros Compostos → Parte inteira

Juros Simples → Parte fracionária

↓

$$M = C \times \underbrace{(1+i)^{t_1}}_{\substack{parte \\ inteira}} \times \underbrace{(1 + i \times t_2)}_{\substack{parte \\ fracionária}}$$

Vejamos como esse tópico é cobrado em concursos.

(SMF Campinas - 2019) A empresa A contrata a empresa B para prestação de um serviço cujo valor à vista é V. Pelo contrato, A vai pagar B no prazo de 2 anos e meio, em uma única parcela que incluirá o valor à vista mais juros contratuais de 10% ao ano. Se o contrato firmado entre as partes para a quitação da dívida prevê taxa de juros compostos com convenção linear, então o valor mais próximo do total de juros que B deve pagar a A ao quitar a dívida no prazo é de, aproximadamente:

a) 0,25V
b) 0,20V
c) 0,27V
d) 0,30V
e) 2,50V

Comentários:

Observe que a Taxa é anual e o prazo de pagamento é composto por uma parte inteira (2 anos) e outra fracionária (meio ano). O enunciado nos informa que é adotada a Convenção Linear.

Iremos calcular, então, o Montante para a parte inteira do período (2 anos) utilizando a fórmula dos Juros Compostos.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = V \times (1 + 0{,}1)^2$$

$$M = V \times 1{,}1^2 \quad \rightarrow \quad M = 1{,}21V$$

E, em seguida, calcular o Montante final utilizando a fórmula dos Juros Simples para a parte fracionária (meio ano).

$$M = C \times (1 + i \times t)$$

$$M = 1{,}21V \times (1 + 0{,}1 \times 0{,}5)$$

$$M = 1{,}21V \times (1 + 0{,}05)$$

$$M = 1{,}21V \times 1{,}05 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M \cong 1{,}27V}}$$

Então o valor mais próximo do total de juros que B deve pagar a A ao quitar a dívida no prazo é de, aproximadamente:

$$J = M - C$$

$$J = 1{,}27V - V \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{J = 0{,}27V}$$

Gabarito: Alternativa **C**

(SEFAZ RJ – 2014) Sabe-se que um capital é aplicado, durante 2 meses e 12 dias, à taxa de juros compostos de 2% ao mês. Utilizando a convenção linear, obteve-se que, no final do prazo de aplicação, o valor dos juros simples correspondente ao período de 12 dias foi igual a R$ 104,04. Este mesmo capital, aplicado durante 2 bimestres, a uma taxa de juros compostos de 4% ao bimestre, apresentará no final do período um total de juros igual a

a) R$ 1.020,00
b) R$ 959,60
c) R$ 938,40
d) R$ 897,60
e) R$ 877,20

Comentários:

Questão bastante interessante que caiu na prova de Auditor Fiscal da Secretaria da Fazenda do Estado do Rio de Janeiro.

Um capital é aplicado, durante 2 meses e 12 dias, à taxa de juros compostos de 2% ao mês pela convenção linear. O valor dos juros simples correspondente ao período de 12 dias foi igual a R$ 104,04.

Estudamos que, pela convenção linear, a parte fracionária é calculada pelas fórmulas do Regime de Juros Simples. Então, o valor do Capital para o cálculo da parte fracionária será:

$$J = C \times i \times t$$

$$104{,}04 = C \times 0{,}02 \times \frac{12}{30}$$

Atente-se para a conversão da unidade do tempo fracionário de aplicação (dia) para a unidade da taxa de juros (mensal) pois **necessariamente** devem coincidir. 12 dias é igual a 12/30 do mês.

$$104{,}04 = C \times 0{,}02 \times \frac{12}{30}$$

$$C = \frac{104{,}04 \times 30}{12 \times 0{,}02} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{C = 13.005}}$$

Perceba que esse Capital que calculamos equivale ao Montante final da aplicação da parte inteira.

Vamos esmiuçar essa parte para você entender.

Na convenção linear, aplicamos um Capital Inicial e achamos o Montante para o período inteiro do tempo de aplicação. Depois, de posse desse Montante (que agora é o Capital da fórmula dos Juros Simples) calculamos a parte final relativa à parte fracionária.

Observe que este exercício é o **"caminho inverso"** do que estamos acostumados a fazer. O Capital calculado de R$ 13.005 é o Montante resultante da parte inteira que foi capitalizado em Juros Simples na parte fracionária e rende R$ 104,04 de Juros.

Iremos agora calcular o Capital Inicial da operação e vamos utilizar a fórmula dos Juros Compostos para a parte inteira do tempo de aplicação.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$13.005 = C \times (1 + 0{,}02)^2$$

$$13.005 = C \times 1{,}02^2$$

$$13.005 = C \times 1{,}0404$$

$$C = \frac{13.005}{1{,}0404} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{C = 12.500}}$$

Este mesmo capital, aplicado durante 2 bimestres, a uma taxa de juros compostos de 4% ao bimestre, apresentará ao final do período um Montante de:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 12.500 \times (1 + 0{,}04)^2$$

$$M = 12.500 \times 1{,}04^2$$

$$M = 12.500 \times 1{,}0816 \rightarrow \boldsymbol{M = 13.520}$$

De posse do Montante e do Capital, calculamos os Juros questionados pela banca.

$$J = M - C$$

$$J = 13.520 - 12.500 \rightarrow \boldsymbol{J = 1.020}$$

Gabarito: Alternativa **A**

(SEFAZ PB – 2006) Um capital no valor de R$ 20.000,00 foi investido a uma taxa de juros compostos de 10% ao ano, durante 2 anos e 3 meses. O montante no final do período, adotando a convenção linear, foi igual a

a) R$ 22.755,00
b) R$ 23.780,00
c) R$ 24.805,00
d) R$ 24.932,05
e) R$ 25.500,00

Comentários:

Vamos utilizar diretamente a fórmula do Montante na Convenção Linear.

$$M = C \times (1+i)^{t_1} \times (1 + i \times t_2)$$

Onde,

$t_1 = parte\ inteira\ do\ período\ de\ aplicação = 2\ anos$

$t_2 = parte\ fracionária\ do\ período\ de\ aplicação = 3\ meses = 0{,}25\ ano$

Atente-se para a **conversão** da unidade do tempo fracionário de aplicação (mês) para a unidade da taxa de juros (anual) pois **necessariamente** devem coincidir.

$$t_2 = 3\ meses \ \rightarrow \ t_2 = \frac{3}{12}\ ano \ \rightarrow \ t_2 = 0{,}25\ ano$$

Logo, o Montante será igual a:

$$M = C \times (1+i)^{t_1} \times (1 + i \times t_2)$$

$$M = 20.000 \times (1+0{,}1)^2 \times (1 + 0{,}1 \times 0{,}25)$$

$$M = 20.000 \times 1{,}1^2 \times (1 + 0{,}025)$$

$$M = 20.000 \times 1{,}21 \times 1{,}025 \ \rightarrow \ \boldsymbol{M = 24.805}$$

Gabarito: Alternativa **C**

TABELA FINANCEIRA - FATOR DE ACUMULAÇÃO DE CAPITAIS

Em Juros Compostos, utilizaremos constantemente a potência relacionada ao **Fator de Acumulação de Capitais** $(1+i)^t$, que é a série que nos informa a acumulação de capitais tomando como base uma taxa em determinado período de tempo.

$$\boxed{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{t}} \quad \rightarrow \quad fator\ de\ acumulação\ de\ capitais}$$

Pense como seria trabalhoso em uma prova, no meio de uma questão de Juros Compostos, resolver a seguinte passagem:

$$(1+0{,}07)^9$$

Seria bastante complicado, certo? Algumas bancas fornecem esse valor nos dados do enunciado. Já outras, fornecem uma tabela financeira para que o candidato busque o valor.

Vamos aprender agora como usar esta tabela em Juros Compostos.

Uma **tabela financeira de fator de acumulação de capitais** tem o seguinte aspecto:

Fator de Acumulação de Capitais $(1+i)^t$

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	1,0100	1,0200	1,0300	1,0400	1,0500	1,0600	1,0700	1,0800	1,0900	1,1000
2	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664	1,1881	1,2100
3	1,0303	1,0612	1,0927	1,1249	1,1576	1,1910	1,2250	1,2597	1,2950	1,3310
4	1,0406	1,0824	1,1255	1,1699	1,2155	1,2625	1,3108	1,3605	1,4116	1,4641
5	1,0510	1,1041	1,1593	1,2167	1,2763	1,3382	1,4026	1,4693	1,5386	1,6105
6	1,0615	1,1262	1,1941	1,2653	1,3401	1,4185	1,5007	1,5869	1,6771	1,7716
7	1,0721	1,1487	1,2299	1,3159	1,4071	1,5036	1,6058	1,7138	1,8280	1,9487
8	1,0829	1,1717	1,2668	1,3686	1,4775	1,5938	1,7182	1,8509	1,9926	2,1436
9	1,0937	1,1951	1,3048	1,4233	1,5513	1,6895	1,8385	1,9990	2,1719	2,3579
10	1,1046	1,2190	1,3439	1,4802	1,6289	1,7908	1,9672	2,1589	2,3674	2,5937
11	1,1157	1,2434	1,3842	1,5395	1,7103	1,8983	2,1049	2,3316	2,5804	2,8531
12	1,1268	1,2682	1,4258	1,6010	1,7959	2,0122	2,2522	2,5182	2,8127	3,1384
13	1,1381	1,2936	1,4685	1,6651	1,8856	2,1329	2,4098	2,7196	3,0658	3,4523
14	1,1495	1,3195	1,5126	1,7317	1,9799	2,2609	2,5785	2,9372	3,3417	3,7975
15	1,1610	1,3459	1,5580	1,8009	2,0789	2,3966	2,7590	3,1722	3,6425	4,1772

- Essa é uma tabela para o fator $(1+\mathrm{i})^{\mathrm{t}}$ na qual "i" está na coluna e "t" está na linha.

Perceba que precisamos entrar com a Taxa na coluna e com o tempo de aplicação na linha e, assim, a tabela nos retornará o valor da potência.

Então, vamos voltar ao nosso exemplo e calcular a potência $(1+0{,}07)^9$.

Neste exemplo, $i = 0{,}07 \rightarrow 7\%$ e $t = 9$.

Buscaremos, então, o valor de 7% na coluna e de 9 unidades de tempo na linha.

$i = 7\%$

$t = 9$

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	1,0100	1,0200	1,0300	1,0400	1,0500	1,0600	1,0700	1,0800	1,0900	1,1000
2	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664	1,1881	1,2100
3	1,0303	1,0612	1,0927	1,1249	1,1576	1,1910	1,2250	1,2597	1,2950	1,3310
4	1,0406	1,0824	1,1255	1,1699	1,2155	1,2625	1,3108	1,3605	1,4116	1,4641
5	1,0510	1,1041	1,1593	1,2167	1,2763	1,3382	1,4026	1,4693	1,5386	1,6105
6	1,0615	1,1262	1,1941	1,2653	1,3401	1,4185	1,5007	1,5869	1,6771	1,7716
7	1,0721	1,1487	1,2299	1,3159	1,4071	1,5036	1,6058	1,7138	1,8280	1,9487
8	1,0829	1,1717	1,2668	1,3686	1,4775	1,5938	1,7182	1,8509	1,9926	2,1436
9	1,0937	1,1951	1,3048	1,4233	1,5513	1,6895	$\boxed{1,8385}$	1,9990	2,1719	2,3579
10	1,1046	1,2190	1,3439	1,4802	1,6289	1,7908	1,9672	2,1589	2,3674	2,5937
11	1,1157	1,2434	1,3842	1,5395	1,7103	1,8983	2,1049	2,3316	2,5804	2,8531
12	1,1268	1,2682	1,4258	1,6010	1,7959	2,0122	2,2522	2,5182	2,8127	3,1384
13	1,1381	1,2936	1,4685	1,6651	1,8856	2,1329	2,4098	2,7196	3,0658	3,4523
14	1,1495	1,3195	1,5126	1,7317	1,9799	2,2609	2,5785	2,9372	3,3417	3,7975
15	1,1610	1,3459	1,5580	1,8009	2,0789	2,3966	2,7590	3,1722	3,6425	4,1772

Ou seja,

$$(1+0{,}07)^9 = 1{,}8385$$

Vejamos algumas questões de concursos em que a banca fornece a tabela financeira para o candidato encontrar o resultado da potência.

HORA DE PRATICAR!

(Pref. Porto Alegre RS – 2019) Qual o valor do montante composto recebido na aplicação de R$ 50.000,00, durante oito meses, o qual rende com uma taxa de 6% ao trimestre, capitalizada mensalmente?

Tabela para o fator $(1+i)^n$ na qual "i" está na coluna e "n" está na linha.

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	1,0100	1,0200	1,0300	1,0400	1,0500	1,0600	1,0700	1,0800	1,0900	1,1000
2	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664	1,1881	1,2100
3	1,0303	1,0612	1,0927	1,1249	1,1576	1,1910	1,2250	1,2597	1,2950	1,3310
4	1,0406	1,0824	1,1255	1,1699	1,2155	1,2625	1,3108	1,3605	1,4116	1,4641
5	1,0510	1,1041	1,1593	1,2167	1,2763	1,3382	1,4026	1,4693	1,5386	1,6105
6	1,0615	1,1262	1,1941	1,2653	1,3401	1,4185	1,5007	1,5869	1,6771	1,7716
7	1,0721	1,1487	1,2299	1,3159	1,4071	1,5036	1,6058	1,7138	1,8280	1,9487
8	1,0829	1,1717	1,2668	1,3686	1,4775	1,5938	1,7182	1,8509	1,9926	2,1436
9	1,0937	1,1951	1,3048	1,4233	1,5513	1,6895	1,8385	1,9990	2,1719	2,3579
10	1,1046	1,2190	1,3439	1,4802	1,6289	1,7908	1,9672	2,1589	2,3674	2,5937
11	1,1157	1,2434	1,3842	1,5395	1,7103	1,8983	2,1049	2,3316	2,5804	2,8531
12	1,1268	1,2682	1,4258	1,6010	1,7959	2,0122	2,2522	2,5182	2,8127	3,1384
13	1,1381	1,2936	1,4685	1,6651	1,8856	2,1329	2,4098	2,7196	3,0658	3,4523
14	1,1495	1,3195	1,5126	1,7317	1,9799	2,2609	2,5785	2,9372	3,3417	3,7975
15	1,1610	1,3459	1,5580	1,8009	2,0789	2,3966	2,7590	3,1722	3,6425	4,1772

a) R$ 56.585,00
b) R$ 57.585,00
c) R$ 58.585,00
d) R$ 59.585,00
e) R$ 60.585,00

Comentários:

Primeiro passo é converter a Taxa Nominal para a Taxa Efetiva.

Taxa Nominal, como vimos, é a taxa de juros cuja unidade de tempo **não coincide** com a unidade de tempo do período de capitalização. Observe que a taxa fornecida no enunciado é uma taxa nominal.

$$i_{Nominal} = 6\%\ ao\ trimestre\ capitalizada\ mensalmente$$

Nunca resolva um exercício usando a taxa nominal. Sempre devemos passar para a unidade de tempo do período de capitalização. Então tenha em mente: "**quem manda é o período de capitalização**".

E como passamos da unidade de tempo do período da taxa nominal para a unidade de tempo do período de capitalização?

Basta fazermos uma simples divisão/multiplicação. Em 1 trimestre há 3 meses. Então, a Taxa Efetiva mensal será igual a:

$$i_{Efetiva\ mensal} = \frac{6\%}{3} \quad \rightarrow \quad i_{Efetiva\ mensal} = 2\%\ ao\ mês\ capitalizados\ mensalmente$$

Ou, simplesmente,

$$\boxed{i_{Efetiva} = 2\%\ ao\ mês}$$

- ✓ Essa será a taxa que iremos usar no problema.

Em regime de Juros Compostos, o Montante é calculado pela seguinte equação:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 50.000$

$i = Taxa\ de\ Juros = 2\%\ ao\ mês = 0{,}02$

$t = tempo = 8\ meses$

Vamos substituir os valores e calcular o Montante.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 50.000 \times (1 + 0{,}02)^8$$

Para calcular o valor da potência usaremos a Tabela Financeira com fator $(1 + i)^n$ pra $i = 2\%$ e $n = 8$.

Observe o valor na tabela abaixo.

$i = 2\%$ ↓

$t = 8$ →

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	1,0100	1,0[illegible]00	1,0300	1,0400	1,0500	1,0600	1,0700	1,0800	1,0900	1,1000
2	1,0201	1,0[illegible]04	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664	1,1881	1,2100
3	1,0303	1,0[illegible]12	1,0927	1,1249	1,1576	1,1910	1,2250	1,2597	1,2950	1,3310
4	1,0406	1,0[illegible]24	1,1255	1,1699	1,2155	1,2625	1,3108	1,3605	1,4116	1,4641
5	1,0510	1,1[illegible]41	1,1593	1,2167	1,2763	1,3382	1,4026	1,4693	1,5386	1,6105
6	1,0615	1,1[illegible]62	1,1941	1,2653	1,3401	1,4185	1,5007	1,5869	1,6771	1,7716
7	1,0721	1,1[illegible]87	1,2299	1,3159	1,4071	1,5036	1,6058	1,7138	1,8280	1,9487
8	[illegible]	1,1717	1,2668	1,3686	1,4775	1,5938	1,7182	1,8509	1,9926	2,1436
9	1,0937	1,1951	1,3048	1,4233	1,5513	1,6895	1,8385	1,9990	2,1719	2,3579
10	1,1046	1,2190	1,3439	1,4802	1,6289	1,7908	1,9672	2,1589	2,3674	2,5937
11	1,1157	1,2434	1,3842	1,5395	1,7103	1,8983	2,1049	2,3316	2,5804	2,8531
12	1,1268	1,2682	1,4258	1,6010	1,7959	2,0122	2,2522	2,5182	2,8127	3,1384
13	1,1381	1,2936	1,4685	1,6651	1,8856	2,1329	2,4098	2,7196	3,0658	3,4523
14	1,1495	1,3195	1,5126	1,7317	1,9799	2,2609	2,5785	2,9372	3,3417	3,7975
15	1,1610	1,3459	1,5580	1,8009	2,0789	2,3966	2,7590	3,1722	3,6425	4,1772

Ou seja,

$$(1+0{,}02)^8 = 1{,}1717$$

Iremos substituir o valor da potência e calcular o Montante final.

$$M = 50.000 \times (1+0{,}02)^8$$

$$M = 50.000 \times 1{,}1717 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M = 58.585}$$

Gabarito: Alternativa **C**

(BRDE – 2015) A Industrial Rio da Prata Ltda. contratou um financiamento bancário no valor de R$ 120.000,00 para ser liquidado em uma única vez, após 12 meses. A operação foi contratada a uma taxa de juros compostos, com capitalização mensal de 3% ao mês. Calcule o valor de liquidação do empréstimo, sabendo que quatro meses antes do vencimento a empresa fez um pagamento extra de R$ 40.000,00.

TABELA FINANCEIRA - FATOR DE ACUMULAÇÃO DE CAPITAL EM JUROS COMPOSTOS							
FATOR	(1+i)^n						
n/i	0,5%	1,5%	2,0%	2,5%	3,0%	3,5%	4,0%
1	1,005000	1,015000	1,020000	1,025000	1,030000	1,035000	1,040000
2	1,010025	1,030225	1,040400	1,050625	1,060900	1,071225	1,081600
3	1,015075	1,045678	1,061208	1,076891	1,092727	1,108718	1,124864
4	1,020151	1,061364	1,082432	1,103813	1,125509	1,147523	1,169859
5	1,025251	1,077284	1,104081	1,131408	1,159274	1,187686	1,216653
6	1,030378	1,093443	1,126162	1,159693	1,194052	1,229255	1,265319
7	1,035529	1,109845	1,148686	1,188686	1,229874	1,272279	1,315932
8	1,040707	1,126493	1,171659	1,218403	1,266770	1,316809	1,368569
9	1,045911	1,143390	1,195093	1,248863	1,304773	1,362897	1,423312
10	1,051140	1,160541	1,218994	1,280085	1,343916	1,410599	1,480244
11	1,056396	1,177949	1,243374	1,312087	1,384234	1,459970	1,539454
12	1,061678	1,195618	1,268242	1,344889	1,425761	1,511069	1,601032

a) R$ 171.910,30
b) R$ 171.091,30
c) R$ 126.070,91
d) R$ 126.060,91
e) R$ 126.007,91

Comentários:

4 meses antes do vencimento, a empresa fez um pagamento de R$ 40.000,00. Ou seja, primeiro precisamos calcular o valor do Montante em 8 meses de financiamento. Se a empresa pagou este valor faltando 4 meses e o tempo total do financiamento é de 12 meses, o primeiro montante a ser calculado é o Montante decorrido 8 meses do início.

Vamos calcular, então, o Montante resultante de um Capital C de R$ 120.000 a uma taxa de juros i de 3% ao mês por um período t de 8 meses.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 120.000 \times (1 + 0{,}03)^8$$

Para calcular o valor da potência usaremos a Tabela Financeira com fator $(1 + i)^n$ pra $i = 3\%$ e $n = 8$.

Observe o valor na tabela abaixo.

TABELA FINANCEIRA - FATOR DE ACUMULAÇÃO DE CAPITAL EM JUROS COMPOSTOS							
FATOR	(1+i)^n						
n/i	0,5%	1,5%	2,0%	2,5%	3,0%	3,5%	4,0%
1	1,005000	1,015000	1,020000	1,025000	1,030000	1,035000	1,040000
2	1,010025	1,030225	1,040400	1,050625	1,060900	1,071225	1,081600
3	1,015075	1,045678	1,061208	1,076891	1,092727	1,108718	1,124864
4	1,020151	1,061364	1,082432	1,103813	1,125509	1,147523	1,169859
5	1,025251	1,077284	1,104081	1,131408	1,159274	1,187686	1,216653
6	1,030378	1,093443	1,126162	1,159693	1,194052	1,229255	1,265319
7	1,035529	1,109845	1,148686	1,188686	1,229874	1,272279	1,315932
8	1,040707	1,126493	1,171659	1,218403	1,266770	1,316809	1,368569
9	1,045911	1,143390	1,195093	1,248863	1,304773	1,362897	1,423312
10	1,051140	1,160541	1,218994	1,280085	1,343916	1,410599	1,480244
11	1,056396	1,177949	1,243374	1,312087	1,384234	1,459970	1,539454
12	1,061678	1,195618	1,268242	1,344889	1,425761	1,511069	1,601032

Ou seja,

$$(1 + 0{,}03)^8 = 1{,}26677$$

Iremos substituir o valor da potência e calcular o Montante em 8 meses.

$$M = 120.000 \times (1 + 0{,}03)^8$$

$$M = 120.000 \times 1{,}26677 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{M = 152.012,40}}$$

Ao final desses 8 meses, houve um pagamento de R$ 40.000, restando a pagar um valor igual a:

$$pagar = 152.012{,}40 - 40.000{,}00 \quad \rightarrow \quad pagar = 112.012{,}40$$

Em cima desse Capital que resta a pagar, **incidirão Juros Compostos por mais 4 meses**.

Iremos utilizar novamente a fórmula do Montante em regime de Juros Compostos e calcular o Montante a pagar para liquidar o empréstimo que será igual a:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 112.012{,}40 \times (1 + 0{,}03)^4$$

Para calcular o valor da potência iremos utilizar novamente a Tabela Financeira com fator $(1+i)^n$ pra $i = 3\%$ e $n = 4$.

TABELA FINANCEIRA - FATOR DE ACUMULAÇÃO DE CAPITAL EM JUROS COMPOSTOS							
FATOR		(1+i)^n					
n/i	0,5%	1,5%	2,0%	2,5%	3,0%	3,5%	4,0%
1	1,005000	1,015000	1,020000	1,025000	1,030000	1,035000	1,040000
2	1,010025	1,030225	1,040400	1,050625	1,060900	1,071225	1,081600
3	1,015075	1,045678	1,061208	1,076891	1,092727	1,108718	1,124864
4	1,020151	1,061364	1,082432	1,103813	1,125509	1,147523	1,169859
5	1,025251	1,077284	1,104081	1,131408	1,159274	1,187686	1,216653
6	1,030378	1,093443	1,126162	1,159693	1,194052	1,229255	1,265319
7	1,035529	1,109845	1,148686	1,188686	1,229874	1,272279	1,315932
8	1,040707	1,126493	1,171659	1,218403	1,266770	1,316809	1,368569
9	1,045911	1,143390	1,195093	1,248863	1,304773	1,362897	1,423312
10	1,051140	1,160541	1,218994	1,280085	1,343916	1,410599	1,480244
11	1,056396	1,177949	1,243374	1,312087	1,384234	1,459970	1,539454
12	1,061678	1,195618	1,268242	1,344889	1,425761	1,511069	1,601032

Ou seja,

$$(1+0{,}03)^4 \approx 1{,}1255$$

E, por fim, substituímos na equação acima e calculamos nosso gabarito:

$$M = 112.012{,}40 \times (1+0{,}03)^4$$

$$M = 112.012{,}40 \times 1{,}1255 \quad \rightarrow \boldsymbol{M \approx 126.070{,}00}$$

Observe que **não poderíamos arredondar muito** pois as alternativas estão muito próximas umas das outras em termos de valor.

Gabarito: Alternativa **C**

(Pref. Porto Alegre – 2019) Em um sistema composto de capitalização, a taxa de 5% ao mês é equivalente a uma taxa anual de:

Tabela para o fator $\frac{1}{(1+i)^n}$ na qual "i" está na coluna e "n" está na linha.

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	0,9901	0,9804	0,9709	0,9615	0,9524	0,9434	0,9346	0,9259	0,9174	0,9091
2	0,9803	0,9612	0,9426	0,9246	0,9070	0,8900	0,8734	0,8573	0,8417	0,8264
3	0,9706	0,9423	0,9151	0,8890	0,8638	0,8396	0,8163	0,7938	0,7722	0,7513
4	0,9610	0,9238	0,8885	0,8548	0,8227	0,7921	0,7629	0,7350	0,7084	0,6830
5	0,9515	0,9057	0,8626	0,8219	0,7835	0,7473	0,7130	0,6806	0,6499	0,6209
6	0,9420	0,8880	0,8375	0,7903	0,7462	0,7050	0,6663	0,6302	0,5963	0,5645
7	0,9327	0,8706	0,8131	0,7599	0,7107	0,6651	0,6227	0,5835	0,5470	0,5132
8	0,9235	0,8535	0,7894	0,7307	0,6768	0,6274	0,5820	0,5403	0,5019	0,4665
9	0,9143	0,8368	0,7664	0,7026	0,6446	0,5919	0,5439	0,5002	0,4604	0,4241
10	0,9053	0,8203	0,7441	0,6756	0,6139	0,5584	0,5083	0,4632	0,4224	0,3855
11	0,8963	0,8043	0,7224	0,6496	0,5847	0,5268	0,4751	0,4289	0,3875	0,3505
12	0,8874	0,7885	0,7014	0,6246	0,5568	0,4970	0,4440	0,3971	0,3555	0,3186
13	0,8787	0,7730	0,6810	0,6006	0,5303	0,4688	0,4150	0,3677	0,3262	0,2897
14	0,8700	0,7579	0,6611	0,5775	0,5051	0,4423	0,3878	0,3405	0,2992	0,2633
15	0,8613	0,7430	0,6419	0,5553	0,4810	0,4173	0,3624	0,3152	0,2745	0,2394

a) 60%
b) 65%
c) 70,29%
d) 75,49%
e) 79,59%

Comentários:

Resolvemos essa mesma questão na parte de Taxas Equivalentes e, agora, vamos resolver através do auxílio da tabela financeira e irei mostrar **uma particularidade** que a banca pode cobrar na hora da prova.

O enunciado nos questiona a Taxa Equivalente anual. Ou seja, a Taxa mensal de 5% capitalizada por 12 meses (1 ano) será igual a que Taxa Equivalente anual?

$$(1 + i_{mensal})^{12} = (1 + i_{anual})$$

$$(1 + 0{,}05)^{12} = (1 + i_{anual})$$

Iremos utilizar a tabela financeira para o cálculo da potência. Porém, **observe que a banca nos fornece a tabela financeira**, **mas não para o valor** de $(1 + i)^t$, e sim para o valor de $1/(1 + i)^t$.

Então, **vamos calcular o valor na tabela dada e fazer o inverso do resultado encontrado**.

Tabela para o fator $\frac{1}{(1+i)^n}$ na qual "i" está na coluna e "n" está na linha.

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	0,9901	0,9804	0,9709	0,9615	0,9524	0,9434	0,9346	0,9259	0,9174	0,9091
2	0,9803	0,9612	0,9426	0,9246	0,9070	0,8900	0,8734	0,8573	0,8417	0,8264
3	0,9706	0,9423	0,9151	0,8890	0,8638	0,8396	0,8163	0,7938	0,7722	0,7513
4	0,9610	0,9238	0,8885	0,8548	0,8227	0,7921	0,7629	0,7350	0,7084	0,6830
5	0,9515	0,9057	0,8626	0,8219	0,7835	0,7473	0,7130	0,6806	0,6499	0,6209
6	0,9420	0,8880	0,8375	0,7903	0,7462	0,7050	0,6663	0,6302	0,5963	0,5645
7	0,9327	0,8706	0,8131	0,7599	0,7107	0,6651	0,6227	0,5835	0,5470	0,5132
8	0,9235	0,8535	0,7894	0,7307	0,6768	0,6274	0,5820	0,5403	0,5019	0,4665
9	0,9143	0,8368	0,7664	0,7026	0,6446	0,5919	0,5439	0,5002	0,4604	0,4241
10	0,9053	0,8203	0,7441	0,6756	0,6139	0,5584	0,5083	0,4632	0,4224	0,3855
11	0,8963	0,8043	0,7224	0,6496	0,5847	0,5268	0,4751	0,4289	0,3875	0,3505
12	0,8874	0,7885	0,7014	0,6246	0,5568	0,4970	0,4440	0,3971	0,3555	0,3186
13	0,8787	0,7730	0,6810	0,6006	0,5303	0,4688	0,4150	0,3677	0,3262	0,2897
14	0,8700	0,7579	0,6611	0,5775	0,5051	0,4423	0,3878	0,3405	0,2992	0,2633
15	0,8613	0,7430	0,6419	0,5553	0,4810	0,4173	0,3624	0,3152	0,2745	0,2394

$$\frac{1}{(1+0{,}05)^{12}} = 0{,}5568$$

$$(1+0{,}05)^{12} = \frac{1}{0{,}5568} \quad \rightarrow \quad (1+0{,}05)^{12} = 1{,}7959$$

Vamos substituir na equação e calcular a Taxa mensal equivalente.

$$(1+0{,}05)^{12} = (1+i_{anual})$$

$$1{,}7959 = 1 + i_{anual}$$

$$i_{anual} = 1{,}7959 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{anual} = 0{,}7959 \ \ ou \ \ 79{,}59\%}$$

Gabarito: Alternativa **E**

Chegamos ao <u>fim da teoria</u>. Iremos comentar agora uma **bateria de questões de concursos** que sintetizam todo o conteúdo estudado.

RESUMO DA AULA

Cálculo do Montante e dos Juros Compostos

Juros Compostos

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$J = M - C \quad ou \quad J = C \times [(1 + i)^t - 1]$$

- "i" e "t" ***obrigatoriamente*** *na* ***mesma unidade*** *de grandeza*

Taxa Nominal e Taxa Efetiva

Divisão/Multiplicação $\longrightarrow$ "Quem manda é o período de capitalização"

Taxa Efetiva

Unidade de tempo da taxa é coincidente com a unidade de tempo do período de capitalização

Taxa Nominal

Unidade de tempo da taxa NÃO É coincidente com a unidade de tempo do período de capitalização

Taxas Equivalentes

Taxas Equivalentes são as taxas de juros com **unidades de tempo diferentes** que, **aplicadas a um mesmo Capital,** por um mesmo período, sob o regime de juros compostos, produziriam **o mesmo Montante** (e, por consequência, mesmo Juro).

Diferentemente do que ocorre no Regime de Capitalização Simples, em Juros Compostos, **as Taxas Equivalentes NÃO SÃO proporcionais**.

Para calcular a Taxa Equivalente, iremos tomar como base a **potenciação**.

Convenção Exponencial x Convenção Linear

Convenção Exponecial	x	Convenção Linear
Juros Compostos para TODO o período (tanto parte inteira quanto parte fracionária)		Juros Compostos $\rightarrow$ Parte inteira Juros Simples $\rightarrow$ Parte fracionária
$M = C \times (1+i)^t$		$M = C \times \underbrace{(1+i)^{t_1}}_{\text{parte inteira}} \times \underbrace{(1 + i \times t_2)}_{\text{parte fracionária}}$

Tabela Financeira – Fator de Acumulação de Capitais

Uma **tabela financeira de fator de acumulação de capitais** tem o seguinte aspecto:

Fator de Acumulação de Capitais $(1+i)^t$

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	1,0100	1,0200	1,0300	1,0400	1,0500	1,0600	1,0700	1,0800	1,0900	1,1000
2	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664	1,1881	1,2100
3	1,0303	1,0612	1,0927	1,1249	1,1576	1,1910	1,2250	1,2597	1,2950	1,3310
4	1,0406	1,0824	1,1255	1,1699	1,2155	1,2625	1,3108	1,3605	1,4116	1,4641
5	1,0510	1,1041	1,1593	1,2167	1,2763	1,3382	1,4026	1,4693	1,5386	1,6105
6	1,0615	1,1262	1,1941	1,2653	1,3401	1,4185	1,5007	1,5869	1,6771	1,7716
7	1,0721	1,1487	1,2299	1,3159	1,4071	1,5036	1,6058	1,7138	1,8280	1,9487
8	1,0829	1,1717	1,2668	1,3686	1,4775	1,5938	1,7182	1,8509	1,9926	2,1436
9	1,0937	1,1951	1,3048	1,4233	1,5513	1,6895	1,8385	1,9990	2,1719	2,3579
10	1,1046	1,2190	1,3439	1,4802	1,6289	1,7908	1,9672	2,1589	2,3674	2,5937
11	1,1157	1,2434	1,3842	1,5395	1,7103	1,8983	2,1049	2,3316	2,5804	2,8531
12	1,1268	1,2682	1,4258	1,6010	1,7959	2,0122	2,2522	2,5182	2,8127	3,1384
13	1,1381	1,2936	1,4685	1,6651	1,8856	2,1329	2,4098	2,7196	3,0658	3,4523
14	1,1495	1,3195	1,5126	1,7317	1,9799	2,2609	2,5785	2,9372	3,3417	3,7975
15	1,1610	1,3459	1,5580	1,8009	2,0789	2,3966	2,7590	3,1722	3,6425	4,1772

- Essa é uma tabela para o fator $(1+\mathrm{i})^{\mathrm{t}}$ na qual “i” está na coluna e “t” está na linha.