INTRODUÇÃO

A média é um número que, de algum modo, resume as características de um grupo. Em nosso cotidiano, com certa frequência, temos contato com exemplos de média: expectativa de vida dos brasileiros; idade média de uma população; renda domiciliar per capita no Brasil; consumo médio de combustível; tempo médio de deslocamento em um trajeto.

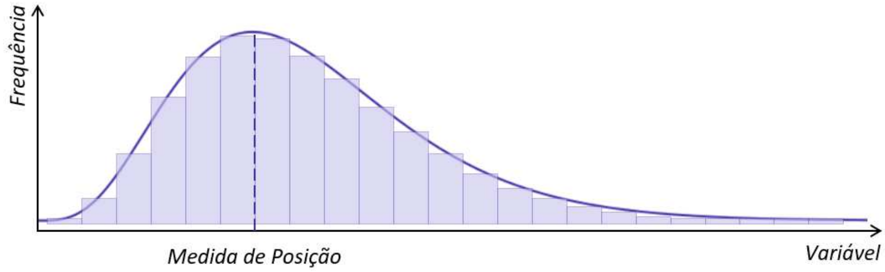
Vamos analisar o primeiro exemplo. Quando o noticiário diz que expectativa de vida no Japão teve um aumento recorde na última década, chegando a 84,2 anos. O que você entende diante dessa informação? Essa informação reflete a qualidade de vida da população japonesa. Ela nos mostra que a população japonesa está envelhecendo de forma saudável e que o sistema de saúde está sendo eficaz.

Se o noticiário também disser que a expectativa de vida em Angola gira em torno de 60 anos, você será capaz comparar essas duas populações, certo? A resposta é sim. Quando comparados, os números mostram que a qualidade de vida em Angola não é tão boa quanto a do Japão. Também nos dizem que os angolanos tendem a viver, em média, 24 anos a menos que os japoneses.

Ao longo dessa aula, aprenderemos a calcular a média em diversas situações. Vamos ver que, a depender de como os dados nos forem apresentados, o cálculo será feito de uma forma diferente. Além disso, conheceremos algumas propriedades da média que facilitam a resolução de questões.

MEDIDAS DE POSIÇÃO

Muitas vezes, queremos resumir um conjunto de dados apresentando um ou alguns valores que sejam representativos de uma série toda. **As medidas de posição são estatísticas que caracterizam o comportamento dos elementos de uma série de dados, orientando quanto à posição da distribuição em relação ao eixo horizontal do gráfico da curva de frequência**. Por exemplo, podemos ter uma medida para representar a posição de maior frequência de uma distribuição:

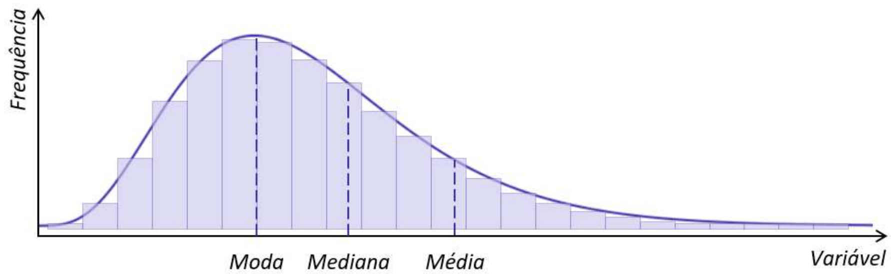


As medidas de posição podem ser divididas em:

a) **medidas de tendência central**: representam o **ponto central** ou o **valor típico** de um conjunto de dados, indicando onde está localizada a maioria dos valores de uma distribuição. As medidas mais utilizadas são:

- média aritmética: **valor resultante da divisão entre a soma de todos os valores de uma série de observações pelo número de observações;**
- mediana: **valor que ocupa a posição central de uma série de observações**, quando organizadas em ordem **crescente ou decrescente**; e
- moda: **valor mais frequente em uma série de observações**, ou seja, o que aparece o maior número de vezes dentro de um conjunto de valores observados.

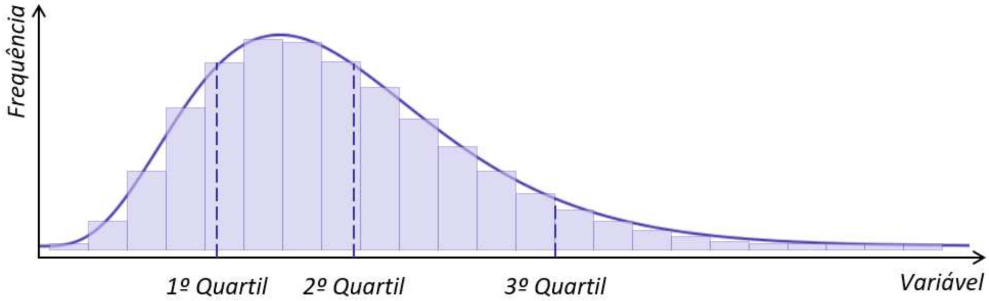
Apenas a título de exemplo, vejamos como as medidas de tendência central se posicionam em relação a uma distribuição de frequências. Notem que essas medidas tendem a ocupar as posições centrais da distribuição, por isso são denominadas de medidas de tendência **central**.



b) **medidas separatrizes**: **dividem (ou separam) uma série em duas ou mais partes, cada uma contendo a mesma quantidade de elementos.** As medidas mais utilizadas são:

- mediana: divide uma série em **duas** partes iguais. Reparem que, além de ser uma medida separatriz, **a mediana também é uma medida de tendência central**;
- quartis: dividem uma série em **quatro** partes iguais;
- decis: dividem uma série em **dez** partes iguais; e
- percentis: dividem uma série em **cem** partes iguais.

Novamente, apenas a título ilustrativo, vejamos como os quartis se relacionam com uma determinada distribuição de frequências. Reparem que os quartis dividem a distribuição em quatro partes com iguais quantidades de elementos.



RESUMINDO

- **Medidas de Posição**
  - **Medidas de Tendência Central**
    - **Média**
      - **Média Aritmética**
      - **Média Geométrica**
      - **Média Harmônica**
    - **Moda**
    - **Mediana**
  - **Medidas Separatrizes**
    - **Mediana**
    - **Quartis**
    - **Decis**
    - **Percentis**

NOTAÇÃO DE SOMATÓRIO

Com frequência, as fórmulas matemáticas exigem a adição de muitas variáveis, como é o caso da média aritmética. **O somatório** ou **notação sigma** é uma forma simples e conveniente de abreviação, usada para fornecer uma expressão concisa para a soma dos valores de uma variável. Por exemplo, se quisermos representar a soma de um número de termos tais como

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

ou

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

em que há um padrão evidente para os números envolvidos.

De modo geral, se tomarmos uma sequência de números $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$, então podemos escrever a soma desses números como $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$. Nesse conjunto, x_1 representa o primeiro termo; x_2 representa o segundo; x_3, o terceiro; e x_i o *i*-ésimo termo da soma.

Essa soma pode ser representada de uma forma mais simples e concisa, deixando que x_i represente o **termo geral** da sequência. Para isso, empregamos a seguinte notação:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Essa notação envolve um símbolo de somatório, Σ, que é a letra grega maiúscula Sigma (S). Basicamente, esse símbolo está nos instruindo a somar determinados elementos de uma sequência. **Os elementos típicos da sequência que está sendo somada aparecem à direita do símbolo de somatório**:

$$\sum_{\square}^{\square} x_i$$

Observe que essa notação também **requer a definição de um índice, que fica localizado abaixo do símbolo de somatório**. **Esse índice é frequentemente representado por i**, embora também seja comum encontrarmos questões adotando j ou n.

Esse índice normalmente aparece como uma expressão, por exemplo, $i = a$, em que **o índice assume um valor inicial atribuído no lado direito da equação**, conhecido como **limite inferior** (a). A **condição de parada** ou **limite superior do somatório** é o valor localizado acima do símbolo, no caso (b).

$$\sum_{i=a}^{b} x_i$$

Vejamos alguns exemplos típicos de operações envolvendo somatórios. Para isso, tomaremos como exemplo a sequência $\{x_i\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$:

$\sum_{i=1}^{n} x_i$	Representa a soma dos valores de x, começando em x_1 e terminando em x_n. $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$ $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55$
$\sum_{i=1}^{10} x_i$	Representa a soma dos valores de x, começando em x_1 e terminando em x_{10}. $\sum_{i=1}^{10} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}$ $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$
$\sum_{i=3}^{10} x_i$	Representa a soma dos valores de x, começando em x_3 e terminando em x_{10}. $\sum_{i=3}^{10} x_i = x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}$ $\sum_{i=3}^{10} x_i = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$
$\sum x$	Os limites do somatório são frequentemente entendidos como sendo $i = 1$ e n. Assim, a notação abaixo e acima do símbolo de somatório pode ser omitida. Portanto, essa expressão representa a soma dos valores de x, começando em x_1 e terminando em x_n. $\sum x = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$ $\sum x = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55$
$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$	Representa a soma dos quadrados dos valores de x, começando em x_1 e terminando em x_n. $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2$

	$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = 385$$
$$\sum_{k=1}^{4}(2x_k + 1)$$	Representa a soma dos termos da sequência $\{2n + 1\}$, com k começando em 1 e terminando em 4. $$\sum_{k=1}^{4}(2x_k + 1) = (2 \times 1 + 1) + (2 \times 2 + 1) + (2 \times 3 + 1) + (2 \times 4 + 1)$$ $$\sum_{k=1}^{4}(2x_k + 1) = 3 + 5 + 7 + 9 = 24$$
$$\sum_{i=3}^{5}\left(\frac{x_i}{x_i + 1}\right)$$	Representa a soma dos termos da sequência $\left\{\frac{x_i}{x_i+1}\right\}$, com i começando em 3 e terminando em 5. $$\sum_{i=3}^{5}\left(\frac{x_i}{x_i + 1}\right) = \frac{3}{3+1} + \frac{4}{4+1} + \frac{5}{5+1}$$ $$\sum_{i=3}^{5}\left(\frac{x_i}{x_i + 1}\right) = \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{45 + 48 + 50}{60} = \frac{143}{60}$$

Agora que já entendemos o funcionamento básico dessa notação, precisamos analisar outras operações aritméticas que também podem ser realizadas com as variáveis dentro de um somatório. Para tanto, vamos tomar como base as sequências $\{x_i\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e $\{y_i\} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$.

Por exemplo, na **SOMA DOS PRODUTOS**, multiplicamos x_1 por y_1; x_2 por y_2; e assim por diante, até x_n por y_n. Em seguida, somamos os resultados de cada multiplicação. A **SOMA DOS PRODUTOS** da variável x pela variável y, com i variando de 1 a 10, pode ser representada por meio da seguinte expressão:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i = x_1 \times y_1 + x_2 \times y_2 + x_3 \times y_3 + \cdots + x_n \times y_n$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i \times y_i = 1 \times 3 + 2 \times 6 + 3 \times 9 + \cdots + 10 \times 30 = 1155$$

Observe que essa expressão é diferente de $\sum_{i=1}^{n} x_i \times \sum_{i=1}^{n} y_i$, que representa o **PRODUTO DAS SOMAS** dessas duas variáveis. No **PRODUTO DAS SOMAS**, primeiro somamos toda a sequência x, depois toda a sequência y e, em seguida, multiplicamos o resultado das somas:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i \times \sum_{i=1}^{10} y_i = (1 + 2 + 3 + \cdots + 10) \times (3 + 6 + 9 + \cdots + 30)$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i \times \sum_{i=1}^{10} y_i = 55 \times 165 = 9075$$

Dessa forma, temos que a **SOMA DOS PRODUTOS** é diferente do **PRODUTO DAS SOMAS**:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{10} x_i \times y_i \neq \sum_{i=1}^{10} x_i \times \sum_{i=1}^{10} y_i}$$

$$x_1 \times y_1 + x_2 \times y_2 + x_3 \times y_3 + \cdots + x_n \times y_n \neq (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n) \times (y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n)$$

$$1 \times 3 + 2 \times 6 + 3 \times 9 + \cdots + 10 \times 30 \neq (1 + 2 + 3 + \cdots + 10) \times (3 + 6 + 9 + \cdots + 30)$$

$$1155 \neq 9075$$

Também podemos utilizar a notação para representar o **QUADRADO DA SOMA** dos valores de x, com i iniciando em 1 e terminando em 10. No **QUADRADO DA SOMA**, somamos toda a sequência e elevamos o resultado ao quadrado:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = (1 + 2 + 3 + \cdots + 10)^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = (55)^2 = 3025$$

Veja que essa expressão é diferente de $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, que representa a **SOMA DOS QUADRADOS**. Na **SOMA DOS QUADRADOS**, cada elemento da sequência é elevado ao quadrado e depois os resultados são somados:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = 385$$

Logo, podemos afirmar que o **QUADRADO DA SOMA** é diferente da **SOMA DOS QUADRADOS**:

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \neq \sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)^2 \neq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2$$

Por fim, ainda podemos representar o somatório de uma constante k. Digamos que essa constante tenha valor igual a 3:

$$\sum_{i=1}^{n} k = k + k + \cdots + k = k \times n$$

$$\sum_{i=1}^{n} 3 = 3 + 3 + \cdots + 3 = 3 \times n$$

Propriedades do Somatório

As propriedades apresentadas nesta seção facilitam o desenvolvimento de expressões algébricas com a notação de somatório.

TOME NOTA!

1ª. Propriedade: O somatório de uma constante k é igual ao produto do número de termos pela constante.

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} + \boldsymbol{k} + \cdots + \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{n}$$

Para demonstrar essa propriedade, consideraremos que cada constante está multiplicada pelo valor um, isto é:

$$\sum_{i=1}^{n} k = k \times 1 + k \times 1 + \cdots + k \times 1$$

Agora, colocaremos os novos valores em evidência:

$$\sum_{i=1}^{n} k = k \times \left(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\ termos} \right) = k \times n$$

EXEMPLIFICANDO

Considere uma lista composta por **noventa e nove** elementos repetidos e iguais a 9:

$$\underbrace{\{9, 9, 9, 9, 9, \cdots, 9\}}_{99\ termos\ repetidos}.$$

O somatório dos elementos dessa lista será:

$$\sum_{i=1}^{99} 9 = \underbrace{9+9+9+9+9+\cdots+9}_{99\ termos\ repetidos} = 9 \times \left(\underbrace{1+1+1+1+1+\cdots+1}_{99\ termos}\right) = 9 \times 99 = 891$$

TOME NOTA!

2ª. Propriedade: O somatório do produto de uma constante por uma variável é igual ao produto da constante pelo somatório da variável.

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} k \times x_i = k \times x_1 + k \times x_2 + \cdots + k \times x_n = k \times \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Para demonstrarmos essa propriedade, colocaremos em evidência cada constante k:

$$\sum_{i=1}^{n} k \times x_i = k \times x_1 + k \times x_2 + \cdots + k \times x_n = k \times (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

Já sabemos que $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Logo:

$$\sum_{i=1}^{n} k \times x_i = k \times \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Portanto, a constante pode sair de dentro do somatório, passando a multiplicá-lo.

EXEMPLIFICANDO

Cinco funcionários de um escritório de contabilidade recebem os seguintes salários: $R\$\ 1.000$, $R\$\ 1.250$, $R\$\ 1.500$, $R\$\ 1.750$ e $R\$\ 2.000$. O patrão propõe dobrar seus salários quando o faturamento do escritório aumentar em 50%. Quando a meta for alcançada, quanto o patrão passará a desembolsar por essa equipe?

Os salários atuais podem ser representados pela sequência:

$$\{x_n\} = \{1.000, 1.250, 1.500, 1.750, 2.000\}$$

A soma dos termos dessa sequência é dada por:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 1.000 + 1.250 + 1.500 + 1.750 + 2.000 = 7.500$$

Agora, vamos multiplicar cada um dos termos por 2, tendo em vista que os salários serão dobrados.

$$\{2 \times x_n\} = \{2.000, 2.500, 3.000, 3.500, 4.000\}$$

A soma dos termos da nova sequência será:

$$\sum_{i=1}^{5} 2 \times x_i = 2.000 + 2.500 + 3.000 + 3.500 + 4.000 = 15.000$$

Como base na propriedade ora analisada, também poderíamos simplesmente ter feito:

$$\sum_{i=1}^{5} 2 \times x_i = 2 \times \sum_{i=1}^{5} x_i = 2 \times 7.500 = 15.000$$

TOME NOTA!

3ª. Propriedade: O somatório de uma soma ou subtração é igual à soma ou à subtração dos somatórios dessas variáveis.

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i \pm \boldsymbol{y}_i) = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i \pm \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{y}_i$$

Podemos demonstrar essa propriedade da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i \pm y_i) = (x_1 \pm y_1) + (x_2 \pm y_2) + \cdots + (x_n \pm y_n)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i \pm y_i) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \pm (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i \pm y_i) = \sum_{i=1}^{n}x_i \pm \sum_{i=1}^{n}y_i$$

EXEMPLIFICANDO

Cinco funcionários de uma fábrica de bolas de futebol recebem os seguintes salários: $R\$ \ 1.500$, $R\$ \ 2.000$, $R\$ \ 2.500$, $R\$ \ 3.000$ e $R\$ \ 3.500$. O patrão propõe um bônus de R$ 1.000, para cada funcionário, nos meses em que houver um aumento de produção acima de 10%. Nos meses em que a meta for alcançada, quanto o patrão pagará a essa equipe?

Os salários atuais podem ser representados pela seguinte sequência:

$$\{x_n\} = \{1.500, 2.000, 2.500, 3.000, 3.500\}$$

O bônus de cada funcionário pode ser representado pela sequência:

$$\{y_n\} = \{1.000, 1.000, 1.000, 1.000, 1.000\}$$

Assim, a sequência $\{x_n + y_n\}$ é dada por:

$$\{x_n + y_n\} = \{2.500, 3.000, 3.500, 4.000, 4.500\}$$

Dessa forma, temos que:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 1.500 + 2.000 + 2.500 + 3.000 + 3.500 = 12.500$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = 1.000 + 1.000 + 1.000 + 1.000 + 1.000 = 5.000$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i + \sum_{i=1}^{5} y_i = 12.500 + 5.000 = 17.500$$

Além disso, sabemos que $\sum_{i=1}^{5}(x_i + y_i)$ representa o somatório dos termos da sequência $\{x_n + y_n\}$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i + y_i) = 2.500 + 3.000 + 3.500 + 4.000 + 4.500 = 17.500$$

Portanto, em conformidade com a propriedade ora em análise, temos que:

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{5} x_i + \sum_{i=1}^{5} y_i$$

MÉDIA ARITMÉTICA SIMPLES

A **média aritmética simples** está muito presente em nosso cotidiano, seja no **consumo médio de combustível**, na **temperatura média** ou na **renda per capita**. Essa medida é definida como **o quociente entre a soma de todos os elementos e o número deles**. **A propriedade principal da média é preservar a soma dos elementos de um conjunto de dados.**

Podemos adotar o seguinte raciocínio para encontrarmos a fórmula da média aritmética. Dada uma lista de n números, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, a soma de seus termos é igual a:

$$\underbrace{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}_{n\ fatores}.$$

A média aritmética dessa lista é um número $\bar{x}$, tal que, se todos os elementos forem substituídos por $\bar{x}$, a soma da lista permanecerá preservada. Assim, substituindo todos os elementos por $\bar{x}$, teremos uma nova lista, $\{\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x}\}$, cuja soma é:

$$\underbrace{\bar{x} + \bar{x} + \cdots + \bar{x}}_{n\ fatores} = n \times \bar{x}$$

Como as somas das duas listas são iguais, temos:

$$n \times \bar{x} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Portanto, a média aritmética é:

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}}{\boldsymbol{n}}}$$

Reparem que no numerador somamos todos os elementos, ao passo que no denominador temos a quantidade de elementos somados (n).

EXEMPLIFICANDO

Calcule a média aritmética dos números 8, 16, 26 e 30.

Para responder a essa questão, somaremos os quatro números e, em seguida, dividiremos o resultado por quatro:

$$\bar{x} = \frac{8 + 16 + 26 + 30}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

Portanto, 20 é o valor da média aritmética dos números 8, 16, 26 e 30.

Repare que a soma dos números da lista é $8 + 16 + 26 + 30 = 80$. Se os quatro números forem substituídos por 20, a soma também será $20 + 20 + 20 + 20 = 80$. Por isso, dizemos que **a média aritmética preserva a soma dos números.**

FIQUE ATENTO!

Sempre que a questão não especificar qual o tipo de média, faremos o cálculo da média aritmética.

RESUMINDO

Sobre a média aritmética, podemos afirmar que:

I – ela preserva a soma dos elementos da lista de números;

II – ela é obtida pelo quociente entre a soma de todos os elementos de um conjunto e quantidade de elementos nele existentes $\left(\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)$.

DESPENCA NA PROVA!

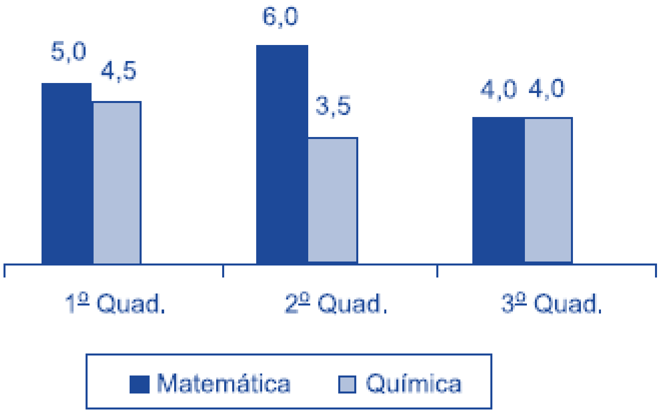
A soma total de um conjunto de dados é dada pela multiplicação entre a média do conjunto e a quantidade de termos. Isso decorre da própria definição de média aritmética:

$$\bar{x} = \frac{soma}{n} \Rightarrow soma = n \times \bar{x}$$

Trata-se da mesma fórmula apresentada anteriormente, tendo apenas o termo “n” passado para o outro lado da igualdade, multiplicando a média.

HORA DE PRATICAR!

(VUNESP/FITO/2020) O gráfico apresenta as notas de um aluno, nas disciplinas de matemática e química, nos três quadrimestres de 2019.



A média das notas de matemática desse aluno corresponde, da média das notas de química, a

a) 120%

b) 125%

c) 130%

d) 135%

e) 140%

Comentários:

A média aritmética é definida pelo quociente entre a soma dos valores de um determinado conjunto e a quantidade de valores nele existentes. Pelos valores dados no enunciado, a média das notas de matemática é:

$$\bar{x}_{mat} = \frac{5+6+4}{3}$$

$$\bar{x}_{mat} = \frac{15}{3}$$

$$\bar{x}_{mat} = 5$$

Já a média das notas de química é:

$$\bar{x}_{quím} = \frac{4{,}5+3{,}5+4}{3}$$

$$\bar{x}_{quím} = \frac{12}{3}$$

$$\bar{x}_{quím} = 4$$

Com isso, em termos percentuais, a média das notas de matemática desse aluno corresponde, da média das notas de química, a:

$$\frac{5}{4} = 1{,}25 = 125\%$$

Gabarito: B.

(CESPE/UNCISAL/2019) A crise mundial tem contribuído para o aumento da entrada de estrangeiros no Brasil. A maior parte vem de países vizinhos, a exemplo do Paraguai. A tabela a seguir apresenta, de acordo com dados do Ministério da Justiça, a quantidade de paraguaios que vieram para o Brasil nos anos de 2009, 2011 e 2012.

Ano	Paraguaios
2009	11000
2010	?
2011	19000
2012	27300

Disponível em: http://reporterbrasil.org.br. Acesso em: 9 nov. 2018 (adaptado).

Se a média anual de imigrantes paraguaios para o Brasil, no período de 2009 a 2012, foi de 17 600, então, quantos paraguaios imigraram para o Brasil em 2010?

a) 13 100

b) 14 325

c) 15 000

d) 15 840

e) 17 600

Comentários:

A questão informa que a média anual de imigrantes paraguaios no Brasil, no período de 2009 a 2012, foi de 17.600. Como sabemos, a média é dada pela soma dos dados dividida pelo número de observações. Então, se considerarmos que o número de imigrantes em 2010 foi x, teremos:

$$\bar{x} = \frac{11000 + x + 19000 + 27300}{4}$$

$$17600 = \frac{57300 + x}{4}$$

$$4 \times 17600 = 57300 + x$$

$$70400 = 57300 + x$$

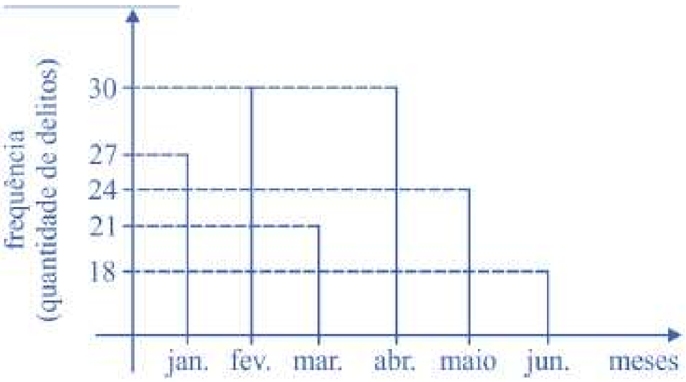
$$x = 70400 - 57300$$

$$x = 13.100$$

Gabarito: A.

(CESPE/PM AL/2018*)* Acerca de análise de dados, julgue o próximo item.

O gráfico a seguir mostra a distribuição de frequência de delitos ocorridos em determinado bairro nos seis primeiros meses de 2018.



Nesse caso, a média dos delitos ocorridos no semestre considerado foi superior à média dos delitos ocorridos no segundo trimestre.

Comentários:

Precisamos calcular duas médias: do segundo trimestre e do semestre inteiro.

Conforme o gráfico, para o segundo trimestre, temos:

$$\begin{cases} abril = 30\ delitos \\ maio = 24\ delitos \\ junho = 18\ delitos \end{cases}$$

A média é dada pela soma de todos os valores dividida pelo número de meses. Logo:

$$\bar{x} = \frac{30 + 24 + 18}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{72}{3} = 24$$

Para o semestre, temos:

$$\begin{cases} janeiro = 27\ delitos \\ fevereiro = 30\ delitos \\ março = 21\ delitos \\ segundo\ trimestre = 72\ delitos \end{cases}$$

Logo:

$$\bar{x} = \frac{27 + 30 + 21 + 72}{6}0$$

$$\bar{x} = \frac{150}{6} = 25$$

Então, podemos concluir que o número de delitos no semestre foi maior que no segundo trimestre.

Gabarito: Certo.

Propriedades da Média Aritmética

Nessa seção, vamos estudar algumas propriedades importantes sobre a média aritmética.

TOME NOTA!

1ª Propriedade: Dado um conjunto com $n \geq 1$ elementos, a média aritmética sempre existirá e será única.

Desde que o conjunto tenha pelo menos um elemento, podemos afirmar que a média aritmética sempre existe, pois sempre conseguiremos calcular o quociente entre a soma dos elementos e o número deles. Além disso, como o somatório dos elementos resulta em um único número, o valor da média também sempre será único.

TOME NOTA!

<u>**2ª Propriedade:**</u> **A média aritmética $\bar{x}$ de um conjunto de dados satisfaz a expressão $m \leq \bar{x} \leq M$, em que m e M são, respectivamente, os elementos que representam o valor mínimo e o valor máximo desse conjunto.**

$$\boldsymbol{mínimo \leq \bar{x} \leq Máximo}$$

Essa propriedade diz respeito ao fato de a média aritmética sempre se encontrar entre os números mínimo e máximo de um conjunto.

EXEMPLIFICANDO

Para exemplificar essa propriedade, vamos tomar como base a sequência $\{x_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, com média $\bar{x} = 3$.

Reparem que o valor mínimo desse conjunto é 1 e o máximo é 5. Portanto, a média encontrada satisfaz a 2ª propriedade:

$$1 \leq \bar{x} \leq 5$$

Se a sequência fosse $\{y_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, teríamos como média:

$$\bar{y} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9}{9} = \frac{45}{9} = 5$$

Assim, o valor mínimo seria 1 e o máximo 9. Novamente a propriedade continuaria válida, pois:

$$1 \leq \bar{x} \leq 9$$

Essa propriedade sempre será válida, seja qual for a sequência escolhida.

INDO MAIS FUNDO!

Alguns alunos costumam me pedir para demonstrar as propriedades apresentadas na aula, pois sentem mais facilidade de assimilar o conteúdo dessa maneira. Entendo, porém, que essa informação não é relevante para a maioria. Por isso, sempre que a demonstração for um pouco mais complexa, colocarei a dedução em uma seção "indo mais fundo!". Vamos lá!

Se m e M são os valores mínimo e máximo de um conjunto, então, necessariamente, todos os elementos desse conjunto serão maiores ou iguais a m e menores ou iguais a M, ou seja, $m \leq x_i \leq M$, para $i = 1, 2, 3, \cdots, n$. Assim, podemos fazer:

$$m \leq x_1 \leq M$$

$$m \leq x_2 \leq M$$

$$\vdots$$

$$m \leq x_n \leq M$$

Somando as n inequações, obtemos:

$$n \times m \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq n \times M$$

Agora, dividindo tudo por n, temos:

$$m \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq M$$

Portanto, concluímos que a média está sempre entre os valores mínimo e máximo de um conjunto:

$$\boldsymbol{m \leq \bar{x} \leq M}$$

TOME NOTA!

3ª Propriedade: Somando-se (ou subtraindo-se) uma constante c de todos os valores de uma variável, a média do conjunto fica aumentada (ou diminuída) dessa constante.

$$\bar{y} = \bar{x} + c \quad \text{ou} \quad \bar{y} = \bar{x} - c$$

EXEMPLIFICANDO

Para exemplificar essa propriedade, vamos tomar como base a sequência $\{x_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, com média $\bar{x} = 3$.

Se adicionarmos uma constante 5 a cada um de seus números, vamos obter uma nova lista $\{x_n + 5\} = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, cuja média é:

$$\overline{x+5} = \frac{6+7+8+9+10}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

Veja que, como acrescentamos 5 a cada um dos números da lista, a média também aumentou 5 unidades, de 3 foi para 8.

INDO MAIS FUNDO!

Vejamos como demonstrar a propriedade para a adição de uma constante. Esse mesmo raciocínio pode ser seguido para a subtração de uma constante.

Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números:

$$\{x_n\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\},$$

e $\bar{x}$ a média aritmética dos termos dessa sequência:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Seja $\{y_n\}$ uma sequência de números formada pela adição de uma constante c a cada um dos termos de $\{x_n\}$:

$$\{y_n\} = \{x_n + c\} = \{x_1 + c, x_2 + c, \cdots, x_n + c\},$$

e $\bar{y}$ a média aritmética dos termos dessa nova sequência:

$$\bar{y} = \frac{(x_1 + c) + (x_2 + c) + \cdots + (x_n + c)}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + \overbrace{(c + c + \cdots + c)}^{n\ termos}}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + n \times c}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n} + \frac{n \times c}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n} + c$$

Portanto, ao adicionarmos uma constante c aos elementos de um conjunto, a média do novo conjunto foi aumentada em c:

$$\bar{y} = \bar{x} + c$$

TOME NOTA!

4ª Propriedade: **Multiplicando-se (ou dividindo-se) uma constante c de todos os valores de uma variável, a média do conjunto fica multiplicada (ou dividida) por esta constante.**

$$\overline{y} = \overline{x} \times c \quad \text{ou} \quad \overline{y} = \overline{x} \div c$$

EXEMPLIFICANDO

Para exemplificar essa propriedade, vamos tomar como base a sequência $\{x_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, com média $\bar{x} = 3$.

Se multiplicarmos cada um de seus elementos por uma constante 5, vamos obter uma nova lista $\{x_n \times 5\} = \{5, 10, 15, 20, 25\}$, cuja média é:

$$\overline{x \times 5} = \frac{5 + 10 + 15 + 20 + 25}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

Veja que, como multiplicamos cada um dos números da lista por 5, a média também foi multiplicada por 5, aumentando de 3 para 15.

INDO MAIS FUNDO!

Vejamos como demonstrar a propriedade para a multiplicação por uma constante. Esse mesmo raciocínio pode ser seguido para a divisão por uma constante.

Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números:

$$\{x_n\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\},$$

e $\bar{x}$ a média aritmética dos termos dessa sequência:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Seja $\{y_n\}$ uma sequência de números formada pela multiplicação de cada um dos termos de $\{x_n\}$ por uma constante c:

$$\{y_n\} = \{x_n \times c\} = \{x_1 \times c, x_2 \times c, \cdots, x_n \times c\},$$

e $\bar{y}$ a média aritmética dos termos dessa nova sequência:

$$\bar{y} = \frac{(x_1 \times c) + (x_2 \times c) + \cdots + (x_n \times c)}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \times c}{n}$$

$$\bar{y} = \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \times c$$

Portanto, ao multiplicarmos os elementos de um conjunto por uma constante c, a média do novo conjunto também foi multiplicada por c:

$$\bar{y} = \bar{x} \times c$$

TOME NOTA!

5ª Propriedade: A soma algébrica dos desvios em relação à média é nula.

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0$$

EXEMPLIFICANDO

Para exemplificar essa propriedade, vamos tomar como base a sequência $\{x_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, com média $\bar{x} = 4$.

O desvio em relação à média é a diferença entre cada elemento da sequência e a média aritmética. Como a sequência possui 7 elementos, teremos o mesmo número de desvios para calcular. Logo, basta encontrarmos a diferença entre cada elemento e a média:

$$d_1 = x_1 - \bar{x} = 1 - 4 = -3$$
$$d_2 = x_2 - \bar{x} = 2 - 4 = -2$$
$$d_3 = x_3 - \bar{x} = 3 - 4 = -1$$
$$d_4 = x_4 - \bar{x} = 4 - 4 = 0$$
$$d_5 = x_5 - \bar{x} = 5 - 4 = 1$$
$$d_6 = x_6 - \bar{x} = 6 - 4 = 2$$
$$d_7 = x_7 - \bar{x} = 7 - 4 = 3$$

Agora, somaremos todos esses desvios:

$$\sum_{i=1}^{7} d_i = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_7$$
$$\sum_{i=1}^{7} d_i = (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3$$
$$\sum_{i=1}^{7} d_i = 0$$

Portanto, não importa qual a sequência de números, a soma dos desvios em relação à média é sempre igual a zero.

INDO MAIS FUNDO!

Vejamos como demonstrar essa propriedade.

Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números:

$$\{x_n\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\},$$

e $\bar{x}$ a média aritmética dos termos dessa sequência:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \Rightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \bar{x} \times n$$

A soma dos desvios em relação à média é dada por:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{x}$$

A média é um valor constante para essa sequência de números, portanto, podemos tirá-la do somatório:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x} \times \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x} \times n$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - \bar{x} \times n$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \bar{x} \times n - \bar{x} \times n$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$$

TOME NOTA!

6ª Propriedade: **A soma dos quadrados dos desvios da sequência de números $\{x_i\}$, em relação a um número a, é mínima se a for a média aritmética dos números.**

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 \geq \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Essa propriedade afirma que, caso os desvios sejam calculados com relação a um número diferente da média, e os resultados de tais desvios sejam elevados ao quadrado e somados, teremos um número necessariamente maior do que obteríamos caso a mesma operação fosse realizada utilizando-se a média.

EXEMPLIFICANDO

Para exemplificar essa propriedade, vamos tomar como exemplo a sequência $\{x_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, com média $\bar{x} = 4$. Já calculamos os desvios desses números em relação à média, vamos relembrar:

$$d_1 = x_1 - \bar{x} = 1 - 4 = -3$$
$$d_2 = x_2 - \bar{x} = 2 - 4 = -2$$
$$d_3 = x_3 - \bar{x} = 3 - 4 = -1$$
$$d_4 = x_4 - \bar{x} = 4 - 4 = 0$$
$$d_5 = x_5 - \bar{x} = 5 - 4 = 1$$
$$d_6 = x_6 - \bar{x} = 6 - 4 = 2$$
$$d_7 = x_7 - \bar{x} = 7 - 4 = 3$$

Na propriedade anterior, vimos que a soma dos desvios é sempre igual a zero. Agora, calcularemos a soma dos quadrados desses desvios. Em outras palavras, vamos elevar cada um deles ao quadrado e somar todos os resultados:

$$\sum_{i=1}^{7} d_i^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 + d_6^2 + d_7^2$$

$$\sum_{i=1}^{7} d_i^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2$$

$$\sum_{i=1}^{7} d_i^2 = 9 + 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9$$

$$\sum_{i=1}^{7} d_i^2 = 28$$

A propriedade nos garante que, para essa sequência numérica, o valor 28 é o menor valor possível. Isto é, se encontrarmos os desvios em relação a outro número (diferente da média) e, em seguida, calcularmos a soma dos quadrados dos desvios, o valor obtido será maior que 28.

Vamos ver o que acontece ao calcularmos o desvio em relação ao número 6:

$$d_1 = x_1 - \bar{x} = 1 - 6 = -5$$

$$d_2 = x_2 - \bar{x} = 2 - 6 = -4$$

$$d_3 = x_3 - \bar{x} = 3 - 6 = -3$$

$$d_4 = x_4 - \bar{x} = 4 - 6 = -2$$

$$d_5 = x_5 - \bar{x} = 5 - 6 = -1$$

$$d_6 = x_6 - \bar{x} = 6 - 6 = 0$$

$$d_7 = x_7 - \bar{x} = 7 - 6 = 1$$

Agora, calcularemos a soma dos quadrados desses números:

$$\sum_{i=1}^{7} d_i^2 = (-5)^2 + (-4)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2$$

$$\sum_{i=1}^{7} d_i^2 = 25 + 16 + 9 + 4 + 1 + 0 + 1 = 56$$

Como esperávamos, o resultado foi maior do que 28.

Vejamos como demonstrar essa propriedade.

Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números:

$\{x_n\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$,

e $\bar{x}$ a média aritmética dos termos dessa sequência:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \Rightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \bar{x} \times n$$

A soma dos quadrados dos desvios em relação a um número $\boldsymbol{a}$ é dada por:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n} [(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - a)]^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n} [2 \times (x_i - \bar{x}) \times (\bar{x} - a)] + \sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - a)^2$$

O valor de $(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{a})$ é uma constante, portanto, podemos simplificar essa expressão:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 + 2 \times (\bar{x} - a) \times \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - a)^2 \sum_{i=1}^{n} 1$$

Pela propriedade anterior, sabemos que o somatório dos desvios em relação à média é zero, logo:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 + 2 \times (\bar{x} - a) \times 0 + (\bar{x} - a)^2 \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 + n \times (\bar{x} - a)^2$$

Para que o valor da soma seja mínimo, é necessário que $(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{a})^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{0}$. Para qualquer valor diferente disso, teremos um valor maior que o mínimo. Logo, para que a soma dos quadrados tenha valor mínimo, obrigatoriamente, teremos $a = \bar{x}$.

MÉDIA PONDERADA

Muitas vezes, certos elementos de um conjunto de dados possuem relevância maior que os demais. Nessa situação, para calcular a média de tais conjuntos, devemos encontrar uma média ponderada. **Uma média ponderada é a média de um conjunto de dados cujos valores possuem pesos variados.** Ela é calculada pela igualdade a seguir, em que p é o peso de cada valor de x:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i \times p_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i}}$$

Observe que no numerador cada valor será multiplicado pelo seu respectivo peso, enquanto no denominador teremos a soma de todos os pesos.

Suponha que um candidato tenha prestado um concurso público para o cargo de Auditor Fiscal, alcançando as seguintes notas:

Disciplina	Nota (x_i)
Língua Portuguesa	4,0
Direito Administrativo	4,0
Direito Constitucional	4,0
Direito Tributário	7,0
Legislação Tributária	7,0
Contabilidade	8,0
Auditoria	8,0

Considere, também, que o edital desse concurso previa que algumas disciplinas teriam importância maior do que outras, por isso foram atribuídos pesos diferentes às várias disciplinas. Digamos que os pesos tenham sido distribuídos da seguinte forma:

Disciplina	Peso (p_i)
Língua Portuguesa	1
Direito Administrativo	2
Direito Constitucional	2
Direito Tributário	3
Legislação Tributária	3

Contabilidade	3
Auditoria	3

Agora, admita que o candidato deveria alcançar uma nota 7,0 ou superior na prova objetiva para que fosse convocado para a etapa discursiva. Se você fosse um dos avaliadores desse concurso, você consideraria o candidato aprovado na prova objetiva?

Para responder a esse questionamento, devemos calcular a média aritmética ponderada desse candidato, levando em consideração os pesos de cada disciplina. Dessa forma, devemos multiplicar cada nota pelo seu respectivo peso, somar esses produtos e dividir pela soma dos pesos.

Disciplina	Nota (x_i)	Peso (p_i)	$x_i \times p_i$
Língua Portuguesa	4,0	1	4,0 x 1 = 4,0
Direito Administrativo	4,0	2	4,0 x 2 = 8,0
Direito Constitucional	4,0	2	4,0 x 2 = 8,0
Direito Tributário	6,0	3	6,0 x 3 = 18,0
Legislação Tributária	6,0	3	6,0 x 3 = 18,0
Contabilidade	7,0	3	7,0 x 3 = 21,0
Auditoria	7,0	3	7,0 x 3 = 21,0

Nesse ponto, temos uma lista contendo todos os produtos de notas e pesos. Então, a média aritmética ponderada é dada por:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \cdots + x_n \times p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

$$\bar{x} = \frac{4{,}0 + 8{,}0 + 8{,}0 + 18{,}0 + 18{,}0 + 21{,}0 + 21{,}0}{1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3} = \frac{98}{15} \cong 6{,}53$$

Veja que, com essas notas, o candidato não seria convocado para a etapa discursiva.

(VUNESP/AVAREPREV/2020) Uma loja trabalha com produtos que são classificados em apenas três tipos. Na tabela, constam os preços de venda de cada tipo do produto:

Tipo do produto	Preço unitário de venda
A	R$ 10,00
B	R$ 12,00
C	R$ 15,00

No último dia útil de funcionamento, foram vendidos produtos dos três tipos, sendo que, do total de unidades vendidas, $\frac{1}{4}$ foi de produtos do tipo A, $\frac{2}{5}$ foi de produtos do tipo B, e o restante, de produtos do tipo C. Naquele dia, o preço médio unitário de venda dos produtos vendidos foi de

a) R$ 11,95.

b) R$ 12,30.

c) R$ 12,55.

d) R$ 13,50.

e) R$ 13,95.

Comentários:

Segundo o enunciado, temos que:

- total de produtos do tipo A vendidos: $\frac{1}{4} = 25\%$;
- total de produtos do tipo B vendidos: $\frac{2}{5} = 40\%$;
- total de produtos do tipo C vendidos: $100\% - 25\% - 40\% = 35\%$.

Portanto, o preço médio unitário de venda será definido como uma média ponderada, em que os pesos serão as porcentagens acima. Nesse sentido, devemos lembrar que a média ponderada é o somatório dos produtos de cada valor por seu respectivo peso, dividido pela soma dos pesos.

Logo,

$$\bar{x} = \frac{10 \times 25\% + 12 \times 40\% + 15 \times 35\%}{25\% + 40\% + 35\%}$$

$$\bar{x} = \frac{10 \times 25\% + 12 \times 40\% + 15 \times 35\%}{100\%}$$

$$\bar{x} = 10 \times 0{,}25 + 12 \times 0{,}40 + 15 \times 0{,}35$$

$$\bar{x} = 2{,}5 + 4{,}8 + 5{,}25$$

$$\bar{x} = R\$\ 12{,}55$$

Gabarito: C.

(CESPE/Pref. São Cristóvão/2019) A tabela seguinte mostra a distribuição das idades dos 30 alunos da turma A do quinto ano de uma escola de ensino fundamental.

Idade (em anos)	9	10	11	12	13	14
Quantidade de estudantes	6	22	0	1	0	1

A partir dessa tabela, julgue o item.

Se, em outra turma B, as frequências das idades fossem respectivamente iguais ao dobro das frequências da turma A, então a média aritmética das idades da turma B seria igual ao dobro da média da turma A.

Comentários:

A média das idades da turma A é uma média ponderada, em que os pesos são representados pelas quantidades de alunos. Assim, a média resulta da divisão entre o somatório dos produtos de idades e quantidades de estudantes e o total de estudantes:

$$\bar{x} = \frac{9 \times 6 + 10 \times 22 + 11 \times 0 + 12 \times 1 + 13 \times 0 + 14 \times 1}{6 + 22 + 0 + 1 + 0 + 1}$$

$$\bar{x} = \frac{300}{30}$$

$$\bar{x} = 10$$

Na turma B, teremos que duplicar as frequências. Dessa forma, a média da turma B será dada por:

$$\bar{x} = \frac{9 \times 12 + 10 \times 44 + 11 \times 0 + 12 \times 1 + 13 \times 0 + 14 \times 2}{12 + 44 + 0 + 2 + 0 + 2}$$

$$\bar{x} = \frac{600}{60}$$

$$\bar{x} = 10$$

Com isso, percebemos que a média não mudará o seu valor.

Gabarito: Errado.

(CESPE/IFF/2018) No registro das quantidades de filhos de 200 casais, verificaram-se os valores mostrados na tabela seguinte.

Quantidade de filhos	1	2	0	3	4	5	6
Quantidade de casais	50	40	40	30	25	10	5

Nesse caso, a quantidade média de filhos para esse grupo de casais é igual a

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) 2,5.

e) 3.

Comentários:

A quantidade média de filhos é uma média ponderada, em que os pesos são representados pelas quantidades de casais. Portanto, a média é resultado da divisão entre o somatório dos produtos de quantidades de filhos e quantidades de casais, dividido pelo total de casais:

$$\bar{x} = \frac{1 \times 50 + 2 \times 40 + 0 \times 40 + 3 \times 30 + 4 \times 25 + 5 \times 10 + 6 \times 5}{200}$$

$$\bar{x} = \frac{50 + 80 + 90 + 100 + 50 + 30}{200}$$

$$\bar{x} = \frac{400}{200}$$

$$\bar{x} = 2$$

Gabarito: C.

Média para Dados Agrupados

Em estatística, os dados podem ser definidos como informações que representam os atributos qualitativos ou quantitativos de uma variável ou de um conjunto de variáveis. Esses dados podem ser classificados em agrupados e não-agrupados. Normalmente, logo após a etapa de coleta, temos dados não-agrupados ou dados brutos.

Por exemplo, suponha que o Estratégia Concursos esteja realizando um experimento com um grupo de dez alunos, para mensurar o tempo médio de resposta a uma questão de estatística. Logo após a coleta, os dados ainda estão brutos, pois não passaram por nenhuma análise nem foram agrupados de alguma forma. Então, teríamos uma tabela similar a seguinte:

Aluno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tempo médio (em min)	1	3	5	7	9	6	6	5	3	9

Por sua vez, os dados agrupados são aqueles que passaram por algum nível de análise, o que significa que já não são brutos. **Os dados agrupados podem ser organizados por frequência de um determinado valor ou por intervalos de classes**. Quando por frequência de valor, os dados são organizados de forma ascendente e suas ocorrências são contabilizadas:

Tempo médio (X_i)	Frequência (f_i)
1	1
3	2
5	2
6	2
7	1
9	2

Quando por intervalos de classes, os dados também são organizados de forma ascendente, porém, em classes preestabelecidas, e as ocorrências de cada classe são contabilizadas:

Tempo médio (X_i)	Frequência (f_i)
$\mathbf{0 \leq x < 2}$	1
$\mathbf{2 \leq x < 4}$	2
$\mathbf{4 \leq x < 6}$	2
$\mathbf{6 \leq x < 8}$	3
$\mathbf{8 \leq x < 10}$	2

Para dados agrupados e apresentados como diagramas ou tabelas, a definição da média permanece inalterada, mas o método de obtenção difere do usado para dados não agrupados. A seguir, veremos como proceder em cada caso.

Média para Dados Agrupados por Valor

Dando continuidade ao nosso exemplo, vamos a calcular a média aritmética de dados que estão agrupados por valor. Os dados foram organizados na tabela a seguir:

Tempo médio (X_i)	Frequência (f_i)
1	1
3	2
5	2
6	2
7	1
9	2

Como podemos interpretar essa tabela? Basta você saber que as frequências refletem o número de repetições de cada valor da nossa variável tempo médio. Isto é, um aluno conseguiu responder à questão em 1 minuto, dois alunos conseguiram em 3 minutos, dois alunos conseguiram em 5 minutos, e assim sucessivamente.

Para calcularmos a média a partir de uma tabela de frequências como esta, devemos utilizar a seguinte fórmula:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i \times f_i)}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

A aplicação dessa fórmula é bem simples. O raciocínio é exatamente o mesmo adotado para a média ponderada, sendo que, agora, o peso é representado pela frequência. Desse modo, vamos multiplicar cada valor por sua respectiva frequência, somar tudo e dividir pela soma das frequências:

Tempo médio (X_i)	Frequência (f_i)	$X_i \times f_i$
1	1	1 x 1 = 1
3	2	3 x 2 = 6
5	2	5 x 2 = 10
6	2	6 x 2 = 12
7	1	7 x 1 = 7
9	2	9 x 2 = 18

Após isso, somaremos todos os valores da coluna $X_i \times f_i$, obtendo o termo $\sum_{i=1}^{n}(X_i \times f_i)$, e também somaremos os termos da coluna f_i, obtendo o termo $\sum_{i=1}^{n} f_i$. Veja a última linha da tabela:

Tempo médio (X_i)	Frequência (f_i)	$X_i \times f_i$
1	1	1 x 1 = 1
3	2	3 x 2 = 6
5	2	5 x 2 = 10
6	2	6 x 2 = 12
7	1	7 x 1 = 7
9	2	9 x 2 = 18
Total	**10**	**54**

Agora, basta dividirmos um valor pelo outro, obtendo:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i \times f_i)}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{54}{10} = 5{,}4$$

Portanto, a média dos dados apresentados na tabela é 5,4.

(VUNESP/Pref. Cananéia/2020) Na tabela, identificam-se informações sobre as notas tiradas por 30 alunos, em uma prova cujas notas variaram de 0,0 a 5,0.

Nota	Quantidade de Alunos
0,0	1
1,0	3
2,0	4
3,0	7
4,0	?
5,0	?

Sabendo que o número de alunos que tirou nota 4,0 foi o dobro do número de alunos que tirou nota 5,0, a média aritmética simples das notas dessa prova foi maior que

a) 3,0 e menor ou igual a 3,1.

b) 3,1 e menor ou igual a 3,2.

c) 3,2 e menor ou igual a 3,3.

d) 3,3 e menor ou igual a 3,4.

e) 3,4 e menor ou igual a 3,5.

Comentários:

Seja x a quantidade de alunos que tirou nota 5,0 e $2x$ a quantidade de alunos tirou nota igual a 4,0. Sabemos que o total de alunos é igual a 30. Portanto, temos:

$$1+3+4+7+2x+x=30$$

$$15+3x=30$$

$$3x=15$$

$$x\ =\ 5\,alunos.$$

Agora, com base nos valores apresentados na tabela, temos que a média das notas é dado por

$$\bar{x}=\frac{0\times1+1\times3+2\times4+3\times7+4\times2x+5\times x}{1+3+4+7+2x+x}$$

$$\bar{x} = \frac{0 \times 1 + 1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 7 + 4 \times 10 + 5 \times 5}{1 + 3 + 4 + 7 + 10 + 5}$$

$$\bar{x} = \frac{3 + 8 + 21 + 40 + 25}{30}$$

$$\bar{x} = \frac{97}{30}$$

$$\bar{x} \cong 3{,}23$$

Gabarito: C.

(VUNESP/IPSM-SJC/2018) A tabela mostra grupos de funcionários de uma empresa e os respectivos salários individuais dos componentes de cada grupo.

DISTRIBUIÇÃO SALARIAL POR GRUPO		
GRUPO	NÚMERO DE FUNCIONÁRIOS	SALÁRIO (R$)
A	8	800,00
B	10	1.100,00
C	12	1.200,00

A diferença de salário de cada funcionário do grupo A e a média aritmética ponderada de todos os salários é de aproximadamente

a) 15%

b) 18%

c) 22%

d) 25%

e) 27%

Comentários:

Primeiro, vamos calcular a média aritmética de todos os salários:

Grupo	Salário (x)	Frequência (f)	$x \times f$
A	800	8	6.400
B	1.100	10	11.000
C	1.200	12	14.400
Total		**30**	**31.800**

A média é dada pela divisão entre os dois totais:

$$\bar{x} = \frac{31.800}{30} = \frac{3.180}{3} = 1.060$$

No grupo A, cada funcionário tem salário de R$ 800,00. Portanto, a diferença para a média é:

$$1.060 - 800 = 260$$

Para determinar a diferença percentual, basta dividirmos esse valor pela média:

$$\frac{260}{1.060} \cong 24{,}52\%$$

Gabarito: D.

(CESPE/FUB/2016) Em um almoxarifado há, em estoque, 100 caixas na forma de paralelepípedos retângulos. Na tabela a seguir são mostrados alguns valores da frequência absoluta, da frequência relativa e da porcentagem da variável, volume interno da caixa, em litros (L).

Volume da caixa (L)	Frequência absoluta	Frequência relativa	Porcentagem (%)
10	10	*	*
20	*	*	*
45	*	0,2	*
60	*	*	40
Total	100	1	100

Considerando essas informações, julgue o seguinte item.

A média aritmética dos volumes dessas caixas é igual a 40 L.

Comentários:

Nessa questão, teremos que calcular a frequência relativa e completar a tabela apresentada. Assim, temos que a frequência relativa é dada pela divisão entre a frequência absoluta e o total de elementos. Iniciaremos completando a tabela pelas linhas que já possuem informações de frequência e porcentagem.

Na primeira linha (Vol. = 10 litros), temos que a frequência absoluta é igual a 10. Como a frequência absoluta total é 100, podemos usar regra de três simples para encontrar a porcentagem (%) e a frequência relativa:

$$f_{abs} - \%$$

$$10 - x$$

$$100 - 100$$

Assim, temos que:

$$x = \frac{100 \times 10}{100} = 10\%$$

Logo, a porcentagem é 10% e a frequência relativa é 0,1.

Na terceira linha (Vol = 45 litros), temos que a frequência relativa é igual a 0,2. Como a frequência relativa total é 1, podemos usar regra de três simples para encontrar a frequência absoluta:

$$f_{abs} - f_{rel}$$
$$y - 0{,}2$$
$$100 - 1{,}0$$

Dessa forma, descobrimos que:

$$y = \frac{100 \times 0{,}2}{1{,}0} = 20$$

Portanto, a frequência absoluta é 20.

O mesmo raciocínio deve ser seguido para a quarta linha da tabela, restando, portanto, apenas a segunda linha. Essa linha será descoberta pelo confronto com a linha totalizadora. Assim, após descobrirmos os valores de todas as células, teremos a seguinte tabela:

Volume da caixa (L)	Frequência absoluta	Frequência relativa	Porcentagem (%)
10	10	0,1	10
20	30	0,3	30
45	20	0,2	20
60	40	0,4	40
Total	100	1	100

Calculando a média:

$$\bar{x} = \frac{10 \times 10 + 20 \times 30 + 45 \times 20 + 60 \times 40}{100}$$
$$\bar{x} = \frac{100 + 600 + 900 + 2.400}{100}$$
$$\bar{x} = \frac{4.000}{100}$$
$$\bar{x} = 40$$

Gabarito: Certo.

(CESPE/PRF/2012)

Q	P (%)
1	50
2	20
3	15
4	10
5	5

A tabela acima mostra a distribuição da quantidade Q de pessoas transportadas, incluindo o condutor, por veículo de passeio circulando em determinado município, obtida como resultado de uma pesquisa feita nesse município para se avaliar o sistema de transporte local. Nessa tabela, P representa a porcentagem dos veículos de passeio circulando no município que transportam Q pessoas, para Q = 1, ..., 5. Com base nessas informações, julgue o seguinte item.

Em média, cada veículo de passeio que circula no referido município transporta duas pessoas. Portanto, se, em determinado momento, houver 10 mil veículos circulando nesse município, a quantidade esperada de pessoas que estão sendo transportadas por todos esses veículos, incluindo-se os condutores, será igual a 20 mil.

Comentários:

Inicialmente, precisamos verificar se a média realmente vale 2. Para isso, basta multiplicarmos a quantidade de pessoas por suas respectivas frequências. Assim, temos:

$$1 \times 0{,}5 = 0{,}5$$

$$2 \times 0{,}2 = 0{,}4$$

$$3 \times 0{,}15 = 0{,}45$$

$$4 \times 0{,}1 = 0{,}4$$

$$5 \times 0{,}05 = 0{,}25$$

Somando todos os resultados:

$$\frac{0{,}5 + 0{,}4 + 0{,}45 + 0{,}4 + 0{,}25}{0{,}5 + 0{,}2 + 0{,}15 + 0{,}1 + 0{,}05} = 2$$

Portanto, a média realmente vale 2.

Assim, basta multiplicarmos a média por 10.000:

$$2 \times 10.000 = 20.000\ pessoas$$

Gabarito: Certo.

Média para Dados Agrupados por Classe

Retomando nosso exemplo, vamos calcular a média aritmética de dados que estão agrupados por classe. Os dados foram organizados na tabela a seguir:

Tempo médio (X_i)	Frequência (f_i)
$\mathbf{0 \leq x < 2}$	1
$\mathbf{2 \leq x < 4}$	2
$\mathbf{4 \leq x < 6}$	2
$\mathbf{6 \leq x < 8}$	3
$\mathbf{8 \leq x < 10}$	2

Como podemos interpretar essa tabela? Basta sabermos que as frequências refletem o número de ocorrências em cada um dos intervalos definidos para a variável tempo médio. Isto é, um aluno respondeu à questão com tempo médio abaixo de 2 minutos, dois responderam com tempo médio entre 2 e 4 minutos, dois com tempo médio entre 4 e 6 minutos, e assim sucessivamente.

Ao agruparmos os dados em classes, precisaremos fazer uma modificação em relação ao cálculo anterior: substituir os intervalos pelos seus respectivos pontos médios. Como assim? Ao invés de considerarmos o intervalo de 0 a 2 minutos, por exemplo, substituiremos pelo valor de 1 minuto.

Em nosso exemplo, a identificação dos pontos médios é relativamente fácil. Mas é possível que você encontre situações em que isso não seja tão trivial. Como fazer nesses casos? Devemos calcular a média dos dois extremos do intervalo. Assim, o **ponto médio (PM)** é calculado pela seguinte expressão:

$$\boxed{\boldsymbol{PM = \frac{l_{inf} + l_{sup}}{2}}}$$

em que l_{inf} e l_{sup} são, respectivamente, os limites inferior e superior do intervalo considerado.

Na tabela abaixo, repare que foi incluída uma nova coluna para o cálculo dos pontos médios:

Tempo médio (X_i)	Ponto Médio (PM_i)	Frequência (f_i)
$\mathbf{0 \leq x < 2}$	$(0+2)/2 = 1$	1
$\mathbf{2 \leq x < 4}$	$(2+4)/2 = 3$	2
$\mathbf{4 \leq x < 6}$	$(4+6)/2 = 5$	2
$\mathbf{6 \leq x < 8}$	$(6+8)/2 = 7$	3

$\mathbf{8 \leq x < 10}$	$(8+10)/2 = 9$	2

O próximo passo consiste em calcular os valores das multiplicações $PM_i \times f_i$, multiplicando essas duas colunas. Vamos ver:

Tempo médio (X_i)	Ponto Médio (PM_i)	Frequência (f_i)	$PM_i \times f_i$
$\mathbf{0 \leq x < 2}$	1	1	1 x 1 = 1
$\mathbf{2 \leq x < 4}$	3	2	3 x 2 = 6
$\mathbf{4 \leq x < 6}$	5	2	5 x 2 = 10
$\mathbf{6 \leq x < 8}$	7	3	7 x 3 = 21
$\mathbf{8 \leq x < 10}$	9	2	9 x 2 = 18

Após isso, somaremos todos os valores da coluna $PM_i \times f_i$, obtendo o termo $\sum_{i=1}^{n}(PM_i \times f_i)$, e também somaremos os termos da coluna f_i, obtendo o termo $\sum_{i=1}^{n} f_i$. Veja a última linha da tabela:

Tempo médio (X_i)	Ponto Médio (PM_i)	Frequência (f_i)	$PM_i \times f_i$
$\mathbf{0 \leq x < 2}$	1	1	1 x 1 = 1
$\mathbf{2 \leq x < 4}$	3	2	3 x 2 = 6
$\mathbf{4 \leq x < 6}$	5	2	5 x 2 = 10
$\mathbf{6 \leq x < 8}$	7	3	7 x 3 = 21
$\mathbf{8 \leq x < 10}$	9	2	9 x 2 = 18
Total		**10**	**56**

Agora, basta dividirmos um valor pelo outro, obtendo:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(PM_i \times f_i)}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{56}{10} = 5{,}6$$

Finalmente, repare que a média de dados agrupados por classe (5,6) foi diferente da média de dados agrupados por valor (5,4). Por que isso ocorreu? Isso ocorreu porque, ao agruparmos os valores da variável em classes, perdemos detalhes que eram relevantes para o cálculo exato da média, embora a forma de apresentação tenha sido simplificada.

(CSEP/IFPI/2019) Na tabela abaixo, estão relacionadas as durações das chamadas telefônicas feitas em um dia, em uma empresa.

Duração (em minutos)	Frequência (f_i)
$0 \vdash 2$	90
$2 \vdash 6$	55
$6 \vdash 10$	35
$10 \vdash 15$	20
$15 \vdash 20$	12
$20 \vdash 30$	17
$30 \vdash 40$	5
$40 \vdash 60$	1
Total	**235**

Assim, a duração média das chamadas telefônicas é mais próxima de

a) 6 min e 14 seg.

b) 7 min e 14 seg.

c) 7 min e 23 seg.

d) 7 min e 32 seg.

e) 8 min e 23 seg.

Comentários:

Para dados agrupados em classes, a média aritmética é calculada a partir da média dos pontos centrais de cada classe. Vejamos:

Duração (em minutos)	Ponto Médio (PM_i)	Frequência (f_i)	$PM_i \times f_i$
$0 \vdash 2$	$\frac{0+2}{2} = 1$	90	$1 \times 90 = 90$
$2 \vdash 6$	$\frac{2+6}{2} = 4$	55	$4 \times 55 = 220$
$6 \vdash 10$	$\frac{6+10}{2} = 8$	35	$8 \times 35 = 280$
$10 \vdash 15$	$\frac{10+15}{2} = 12{,}5$	20	$12{,}5 \times 20 = 250$
$15 \vdash 20$	$\frac{15+20}{2} = 17{,}5$	12	$17{,}5 \times 12 = 210$
$20 \vdash 30$	$\frac{20+30}{2} = 25$	17	$25 \times 17 = 425$
$30 \vdash 40$	$\frac{30+40}{2} = 35$	5	$35 \times 5 = 175$
$40 \vdash 60$	$\frac{40+60}{2} = 50$	1	$50 \times 1 = 50$
Total		**235**	**1700**

A média é dada pela divisão entre os dois totais:

$$\bar{x} = \frac{1700}{235} \cong 7{,}23\ min$$

Transformando 0,23 minutos em segundos:

$$0{,}23 \times 60seg = 13{,}8seg$$

Portanto, a média em segundos é:

$$\bar{x} = 7min14seg$$

Gabarito: D.

(CESPE/DEPEN/2015)

Idade (x)	Percentual
$18 \leq x < 25$	30%
$25 \leq x < 30$	25%
$30 \leq x < 35$	20%
$35 \leq x < 45$	15%
$45 \leq x < 60$	10%
Total	100%

Felipe M. Monteiro, Gabriela R. Cardoso e Rafael da Silva. A seletividade do sistema prisional brasileiro e as políticas de segurança pública. *In*: XV Congresso Brasileiro de Sociologia, 26 a 29 de julho de 2011. Curitiba (PR). Grupo de Trabalhos - Violência e Sociedade (com adaptações).

A tabela precedente apresenta a distribuição percentual de presos no Brasil por faixa etária em 2010, segundo levantamento feito por Monteiro et al. (2011), indicando que a população prisional brasileira nesse ano era predominantemente jovem. Com base nos dados dessa tabela, julgue os itens a seguir.

A maior parte da população prisional brasileira em 2010 era formada por pessoas com idades inferiores a 30 anos. Porém, a média da distribuição das idades dos presos no Brasil nesse ano foi superior a 30 anos.

Comentários:

A tabela nos permite concluir que a primeira parte do item está correta, pois há 30% + 25% = 55% de pessoas com idades inferiores a 30 anos. Agora, para terminarmos de analisar o item, teremos que calcular a média.

Como os dados estão agrupados em classe, devemos calcular o ponto médio de cada uma das classes:

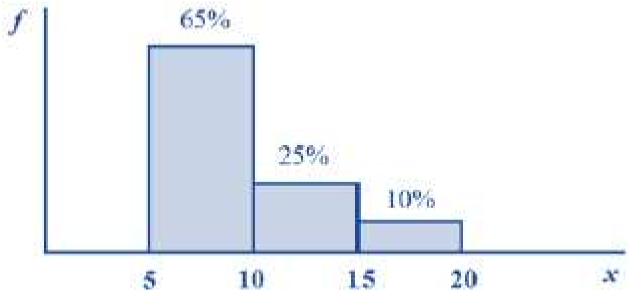
Idade (x)	Percentual (f_i)	Ponto Médio (PM_i)	$PM_i \times f_i$
$\mathbf{18 \leq x < 25}$	30% = 0,30	21,5	6,450
$\mathbf{25 \leq x < 30}$	25% = 0,25	27,5	6,875
$\mathbf{30 \leq x < 35}$	20% = 0,20	32,5	6,500
$\mathbf{35 \leq x < 45}$	15% = 0,15	40,0	6,000
$\mathbf{45 \leq x < 60}$	10% = 0,10	52,5	5,250
	100% = 1,00		**31,075**

Portanto, a média é:

$$\bar{x} = \frac{\sum(PM_i \times f_i)}{\sum f_i} = \frac{31{,}075}{1} = 31{,}075$$

Gabarito: Certo.

(CESPE/STF/2013)



Com referência à figura acima, que mostra a distribuição da renda mensal — x, em quantidades de salários mínimos (sm) — das pessoas que residem em determinada região, julgue o item subsequente.

Considerando a forma de cálculo para dados agrupados, a distribuição da renda mensal x possui média igual a 9,75 sm.

Comentários:

A questão requer o cálculo da média de dados agrupados. Para achar a média precisamos, inicialmente, determinar o ponto médio de cada classe. Teremos:

- de 5 a 10 ponto médio = 7,5;
- de 10 a 15 ponto médio = 12,5;
- de 15 a 20 ponto médio = 17,5.

Agora, a média da amostra é dada pela média ponderada dos pontos médios multiplicados por suas respectivas frequências.

$$\bar{x} = \frac{7{,}5 \times 65\% + 12{,}5 \times 25\% + 17{,}5 \times 10\%}{65\% + 25\% + 10\%}$$

$$\bar{x} = \frac{4{,}875 + 3{,}125 + 1{,}75}{1{,}00}$$

$$\bar{x} = 9{,}75$$

Gabarito: Certo.

MÉDIA GEOMÉTRICA

A **média geométrica** é uma medida estatística muito utilizada em situações de **acumulação de percentuais**, fato muito comum em problemas financeiros. Também é encontrada na **geometria plana**, quando, por exemplo, devemos fazer com que a área de um quadrado seja igual à área de um retângulo.

Essa medida é definida, para o conjunto de números positivos, como a raiz n-ésima do produto de n elementos de um conjunto de dados. A propriedade principal dessa média é preservar o produto dos elementos de um conjunto de dados.

O raciocínio para encontrarmos a fórmula da média geométrica é análogo ao adotado para a média aritmética. Dada uma lista de n números, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, o produto de seus termos é igual a:

$$\underbrace{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n}_{n\ fatores}.$$

A média geométrica dessa lista é um número G, tal que, se todos os elementos forem substituídos por G, o produto da lista permanecerá preservado. Assim, substituindo todos os elementos por G, teremos uma nova lista, $\{G, G, \cdots, G\}$, cujo produto é:

$$\underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_{n\ fatores} = G^n$$

Como os produtos das duas listas são iguais, temos:

$$G^n = x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n$$

Portanto, temos que:

$$\boxed{\boldsymbol{G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n}}}$$

Repare que a raiz varia de acordo com a quantidade de elementos da lista de números, isto é, se a lista contém dois números, teremos uma raiz quadrada; se a lista contém três números, teremos uma raiz cúbica.

EXEMPLIFICANDO

Vejamos um exemplo numérico: qual a média geométrica dos números 4, 20 e 100?

Para responder a essa questão, primeiro, calcularemos o produto dos três números e, em seguida, a raiz cúbica dele:

$$G = \sqrt[3]{4 \times 20 \times 100} = \sqrt[3]{8000} = 20$$

Extrair a raiz cúbica de um número, contudo, nem sempre é tão trivial. Na hora da prova, é mais fácil adotarmos o processo de fatoração:

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Vocês lembram como fazemos para fatorar um número? Primeiro, dividimos esse número pelo seu menor divisor primo $(2, 3, 5, 7, 11, 13, \cdots)$. Em seguida, dividimos o quociente obtido pelo seu menor divisor primo. Depois, fazemos isso de forma sucessiva até obtermos o valor 1.

Por meio da fatoração, concluímos que:

$$4 = 2 \times 2 = 2^2$$

$$20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$$

$$100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 5^2$$

Levando essa informação para a fórmula da média geométrica, temos que:

$$G = \sqrt[3]{4 \times 20 \times 100}$$

$$G = \sqrt[3]{(2^2) \times (2^2 \times 5^1) \times (2^2 \times 5^2)}$$

E agora? Vocês lembram como fazemos multiplicação de potências de mesma base? Sim, é isso mesmo, repetiremos as bases e somaremos os expoentes. Assim, $2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 2^6$ e $5^1 \times 5^2 = 5^3$. Portanto, ficaremos com:

$$G = \sqrt[3]{2^6 \times 5^3}$$

Agora, por ser uma raiz cúbica, devemos dividir cada um dos expoentes por 3:

$$G = 2^{6/3} \times 5^{3/3}$$

$$G = 2^2 \times 5^1 = 4 \times 5 = 20$$

Portanto, 20 é o valor da média geométrica dos números 4, 20 e 100.

Reparem que o produto dos números da lista é $4 \times 20 \times 100 = 8000$. Se os três números forem substituídos por 20, o produto também será $20 \times 20 \times 20 = 8000$. Por isso, dizemos que a média geométrica preserva o produto dos números.

INDO MAIS FUNDO!

Vejamos algumas situações em que empregamos a média geométrica:

1) no setor financeiro: o preço de um produto, nos últimos 3 meses, sofreu aumentos de, respectivamente, 3%, 8%, 9%. Qual foi o aumento médio percentual nesse período?

$$j = \sqrt[3]{3 \times 8 \times 9}$$
$$j = \sqrt[3]{3 \times 2^3 \times 3^2}$$
$$j = \sqrt[3]{2^3 \times 3^3} = 6\%$$

2) na geometria espacial: um prisma de base retangular possui o mesmo volume que um cubo. Se as dimensões do prisma são 4 cm x 10 cm x 25 cm, qual é o valor do lado do cubo em centímetros?

$$l^3 = 4 \times 10 \times 25$$

$$l = \sqrt[3]{4 \times 10 \times 25}$$

$$l = \sqrt[3]{2^2 \times 2 \times 5 \times 5^2}$$

$$l = \sqrt[3]{2^3 \times 5^3} = 10cm$$

RESUMINDO

Sobre a média geométrica, podemos afirmar que:

I – ela preserva o produto dos elementos de uma lista de números;

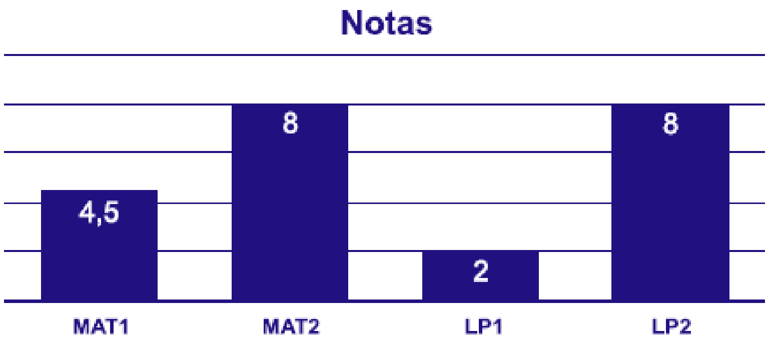
II – ela é obtida por meio da raiz n-ésima do produto de n elementos de um conjunto, $\boldsymbol{G} = \sqrt[n]{\boldsymbol{x_1} \times \boldsymbol{x_2} \times \cdots \times \boldsymbol{x_n}}$.

ESCLARECENDO!

Somente definimos a média geométrica para números não-negativos. Assim, evitamos situações em que a média geométrica não existe. Por exemplo, não conseguiríamos calcular a média geométrica de 1 e -1, pois a raiz quadrada de -1 não existe no campo dos números reais.

HORA DE PRATICAR!

(VUNESP/Pref. de Sertãozinho/2018) O gráfico a seguir mostra as notas das duas provas obtidas por um aluno em matemática e as duas notas obtidas em língua portuguesa, nesse bimestre.



Seus professores afirmaram que, nesse bimestre, a média de matemática e de língua portuguesa será a raiz quadrada do produto de Mat1 x Mat2e a raiz quadrada do produto de LP1 e LP2. Dessa forma, a média de matemática desse aluno será maior que sua média de língua portuguesa em

a) 0,5 ponto.

b) 1,0 ponto.

c) 1,5 ponto.

d) 2,0 pontos.

e) 2,5 pontos.

Comentários:

Do gráfico, extraímos que:

$$\begin{cases} Mat_1 = 4{,}5 \\ Mat_2 = 8{,}0 \end{cases} e \begin{cases} LP_1 = 2{,}0 \\ LP_2 = 8{,}0 \end{cases}.$$

Como a média de matemática será calculada pela raiz quadrada do produto de $Mat_1 \times Mat_2$, então a média desse aluno em matemática será de:

$$\sqrt{Mat_1 \times Mat_2} = \sqrt{4{,}5 \times 8} = \sqrt{36} = 6{,}0\ pontos$$

A média de língua portuguesa, por sua vez, será dada pela raiz quadrada de $LP_1 \times LP_2$. Assim, a média desse aluno em português será de:

$$\sqrt{LP_1 \times LP_2} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4{,}0\ pontos$$

Portanto, a média de matemática desse aluno será maior que sua média de língua portuguesa em:

$$6{,}0 - 4{,}0 = 2{,}0\ pontos$$

Gabarito: D.

(**AOCP/Pref. de Pinhais/2017) Sejam a, b, e c três números reais e positivos tais que:**

• A média aritmética entre a e b é igual a 15;

• A média aritmética entre b e c é igual a 11;

• A média aritmética entre a e c é igual a 5.

Dessa forma, a média geométrica entre a, b, e c será igual a

a) $3\sqrt[3]{7}$

b) $\sqrt[2]{7}$

c) $7\sqrt[3]{3}$

d) $\sqrt[2]{3}$

e) $\sqrt[2]{189}$

Comentários:

Por definição, a média aritmética é a soma total dos termos dividida pelo número total dos termos.

Pelos dados apresentados, sabemos que:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = 15 \\ \dfrac{b+c}{2} = 11 \\ \dfrac{a+c}{2} = 5 \end{cases}$$

De forma equivalente, temos que:

$$\begin{cases} a+b = 30 \\ b+c = 22 \\ a+c = 10 \end{cases}$$

Temos um sistema de equações lineares formado por três equações e três incógnitas. Para resolvê-lo, podemos utilizar a técnica de substituição de incógnitas. Pela primeira equação, temos que:

$$a = 30 - b$$

Isolando a incógnita c na segunda equação, teremos:

$$c = 22 - b$$

Agora, vamos substituir o valor na terceira equação:

$$a + c = 10$$

$$(30 - b) + (22 - b) = 10$$

$$52 - 2b = 10$$

$$52 - 10 = 2b$$

$$42 = 2b$$

$$b = 21$$

Dessa forma, teremos:

$$a = 30 - b = 30 - 21 = 9$$

$$c = 22 - b = 22 - 21 = 1$$

Logo, ao resolver o sistema, descobrimos que $a = 9$, $b = 21$ e $c = 1$. Assim, sendo a média geométrica a raiz cúbica do produto desses números, então:

$$G = \sqrt[3]{a \times b \times c}$$

$$G = \sqrt[3]{9 \times 21 \times 1}$$

$$G = \sqrt[3]{3^2 \times (3 \times 7) \times 1}$$

$$G = \sqrt[3]{3^3 \times 7}$$

$$G = 3 \times \sqrt[3]{7}$$

Gabarito: A.

MÉDIA HARMÔNICA

A **média harmônica** é muito utilizada quando precisamos trabalhar com grandezas inversamente proporcionais. É o caso de problemas clássicos, como o **cálculo da velocidade média de um automóvel** ou da **vazão de torneiras** (quanto tempo duas ou mais torneiras levam para encher um tanque).

Essa medida é definida, para o conjunto de números positivos, como o inverso da média aritmética dos inversos. A propriedade principal dessa média é preservar a soma dos inversos dos elementos de um conjunto de números.

O raciocínio para encontrarmos a fórmula da média harmônica é similar ao adotado para as médias aritmética e geométrica. Dada uma lista de n números, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, a soma dos inversos de seus termos é igual a:

$$\underbrace{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}_{n\ fatores}$$

A média harmônica dessa lista é um número H, tal que, se todos os elementos forem substituídos por H, a soma dos inversos permanecerá preservada. Assim, substituindo todos os elementos por H, teremos uma lista, $\{H, H, \cdots, H\}$, cuja soma dos inversos é:

$$\underbrace{\frac{1}{H} + \frac{1}{H} + \cdots + \frac{1}{H}}_{n\ fatores} = \frac{n}{H}$$

Como as somas dos inversos das duas listas são iguais, temos:

$$\frac{n}{H} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}$$

$$n = H \times \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}}}$$

em que n corresponde à quantidade de termos que integram o conjunto.

Como vimos no início, muitas vezes, **a média harmônica é descrita como o inverso da média aritmética dos inversos**. Isso porque a fórmula acima também pode ser escrita na forma mostrada a seguir, em que $\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)/n$ corresponde à média aritmética dos inversos.

$$\boxed{\boldsymbol{H = \frac{1}{\frac{\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}{n}}}}$$

EXEMPLIFICANDO

Vejamos um exemplo numérico. Qual a média harmônica dos números 15 e 60?

Para responder a essa questão, iniciaremos calculando o valor da soma dos inversos desses números:

$$\frac{1}{15}+\frac{1}{60}$$

Calculando o M.M.C de 15 e 60, temos:

$$\begin{array}{rr|l} 15, & 60 & 2 \\ 15, & 30 & 2 \\ 15, & 15 & 3 \\ 5, & 5 & 5 \\ 1, & 1 & \end{array}$$

$$2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

Então, temos que:

$$\frac{1}{15}+\frac{1}{60}=\frac{4+1}{60}=\frac{5}{60}=\frac{1}{12}$$

Agora, por serem somente dois números, devemos dividir a soma dos inversos por 2. Dessa forma encontraremos a média dos inversos:

$$\frac{\left(\frac{1}{12}\right)}{2}=\frac{1}{12}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$$

Desse modo, temos que:

$$H=\frac{1}{\left(\frac{1}{24}\right)}=1\times 24=24$$

Portanto, 24 é o valor da média harmônica dos números 15 e 60.

Repare que a soma dos inversos dos números da lista é $1/15+1/60=1/12$. Se os dois números forem substituídos por 24, a soma dos inversos também será $1/24+1/24=1/12$. Por isso, dizemos que a média harmônica preserva a soma dos inversos dos números.

Vejamos algumas situações em que empregamos a média harmônica:

1) no cálculo da velocidade média: durante a metade de um percurso um veículo manteve a velocidade de 80 km/h e durante a metade restante sua velocidade foi de 120 km/h. Qual a velocidade média do veículo durante o percurso?

Primeiro, precisa ficar claro o motivo de adotarmos a média harmônica. Note que as distâncias percorridas são iguais, o que muda é a velocidade e, consequentemente, o tempo. Se aumentarmos a velocidade, o tempo que levaremos para percorrer uma mesma distância diminuirá, logo, essas grandezas são inversamente proporcionais.

$$v_{méd} = \frac{n}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{80} + \frac{1}{120}}$$

Calculando o M.M.C de (80, 120):

$$\begin{array}{rr|l} 80, & 120 & 2 \\ 40, & 60 & 2 \\ 20, & 30 & 2 \\ 10, & 15 & 2 \\ 5, & 15 & 3 \\ 5, & 5 & 5 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

$$2^4 \times 5 \times 3 = 240$$

Então, temos que:

$$v_{méd} = \frac{2}{\frac{3+2}{240}} = \frac{2}{\frac{5}{240}}$$

$$v_{méd} = 2 \times \left(\frac{240}{5}\right)$$

$$v_{méd} = \frac{480}{5} = 96\ km/h$$

2) no cálculo da vazão de duas torneiras: para encher um tanque, uma torneira leva 12 horas. Para encher esse mesmo tanque, outra torneira leva 6 horas. Caso as duas torneiras fossem abertas ao mesmo tempo, quanto tempo elas levariam para encher o tanque?

Repare que vazão e tempo são grandezas inversamente proporcionais, pois, quanto maior a vazão da torneira, menor será o tempo que ela levará para encher o tanque. Desse modo, utilizaremos a média harmônica para encontrarmos o tempo médio das duas torneiras.

$$t_{méd} = \frac{2}{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}}$$

$$t_{méd} = \frac{2}{\frac{2+1}{12}}$$

$$t_{méd} = \frac{2}{\frac{3}{12}}$$

$$t_{méd} = 2 \times \left(\frac{12}{3}\right)$$

$$t_{méd} = \frac{24}{3} = 8\ horas$$

Como as torneiras serão ligadas simultaneamente em um único tanque, precisamos dividir esse tempo por 2, pois cada torneira leva, em média, 8 horas. Então, concluímos que o tempo de espera com as duas torneiras ligadas seria de 4 horas.

$$8 \div 2 = 4\ horas$$

RESUMINDO

Sobre a média harmônica, podemos afirmar que:

I – ela preserva a soma dos inversos de uma lista de números;

II – ela é definida como o inverso da média aritmética dos inversos, $\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{n}}{\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)}$.

ESCLARECENDO!

==Somente definimos a média harmônica para números não-negativos==. Assim, evitamos situações em que a média harmônica não existe. Por exemplo, não conseguiríamos calcular a média geométrica de 1 e -1, pois a soma dos inversos resultaria em zero e, como sabemos, a divisão por zero é impossível de ser calculada.

HORA DE PRATICAR!

(FCC/SEFAZ-GO/2018) Os matemáticos definem diferentes tipos de médias entre dois números positivos e, para cada aplicação, escolhem qual o tipo mais adequado a ser utilizado. A média harmônica H entre os números positivos a e b, por exemplo, é definida como o inverso da média aritmética dos inversos desses números, ou seja,

$$\boldsymbol{H = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}}}$$

A média aritmética dos números 5 e 20 supera a média harmônica desses mesmos números em

a) 4,75 unidades.

b) 5 unidades.

c) 4 unidades.

d) 4,25 unidades.

e) 4,5 unidades.

Comentários:

A média aritmética é dada por:

$$\frac{5+20}{2} = 12{,}5$$

A média harmônica é o inverso da média aritmética dos inversos. O primeiro passo é calcularmos a soma dos inversos:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{4+1}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Assim, podemos calcular a média aritmética dos inversos. Para isso, basta dividirmos a soma dos termos por 2:

$$\frac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Portanto, a média aritmética supera a média harmônica em $12{,}5 - 8 = 4{,}5$ unidades.

Também, podemos calcular a média harmônica de dois números de forma mais rápida. Para tanto, basta desenvolvermos a própria fórmula que foi dada na questão:

$$H = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}}$$

$$H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

$$H = \frac{2}{\frac{a+b}{a \times b}}$$

$$H = \frac{2 \times a \times b}{a + b}$$

Assim, a média harmônica de dois números é o quociente do dobro do produto dos números pela soma dos números. Voltando ao enunciado, queremos calcular a média harmônica dos números 5 e 20, logo:

$$H = \frac{2 \times 5 \times 20}{5 + 20} = \frac{200}{25} = 8$$

Gabarito: E.

(FCC/ARTESP/2017) Considere as seguintes informações

I. (A) = média harmônica dos números 4, 6 e 12.

II. (B) = média geométrica dos números 4, 6 e 12.

A média aritmética entre (A) e (B) é igual a

a) 6,81.

b) 5,68.

c) 6,30.

d) 5,41.

e) 6,93.

Comentários:

A média geométrica é:

$$G = \sqrt[3]{4 \times 6 \times 12}$$

$$G = \sqrt[3]{2^2 \times 2 \times 3 \times 2^2 \times 3}$$

$$G = 2 \times \sqrt[3]{36}$$

Agora, a nossa dificuldade será encontrar a raiz cúbica de 36. Sabemos que $3^3 = 27$ e que $4^3 = 64$. Portanto, o número que procuramos está entre 3 e 4. E deve ser ligeiramente maior que 3. Vamos aproximar uma só casa, testando valores:

$$3{,}1^3 = 29{,}791$$

$$3{,}2^3 = 32{,}768$$

$$3{,}3^3 = 35{,}937$$

Portanto, já chegamos bem próximo do valor que queríamos (36). Assim, vamos considerar a raiz cúbica de 36 aproximadamente igual a 3,3.

$$G = 2 \times \sqrt[3]{36}$$

$$G = 2 \times 3{,}3$$

$$G = 6{,}6$$

A média harmônica é

$$H = \frac{1}{\frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}}{3}}$$

Vamos calcular, em primeiro lugar, a soma dos inversos:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3 + 2 + 1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Agora, vamos calcular o valor médio da soma dos inversos:

$$\frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}}{3} = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Finalmente, vamos encontrar o inverso da média da média aritmética dos inversos:

$$H = \frac{1}{\frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 1 \times 6 = 6$$

$$H = 6$$

Agora, vamos descobrir o valor da média aritmética entre G e H:

$$\frac{6{,}6 + 6}{2} = 6{,}3$$

Gabarito: C.

Desigualdade das Médias

Dada uma lista de n números positivos, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, podemos afirmar que:

$$\boxed{\boldsymbol{\bar{x} \geq G \geq H}}$$

em que $\bar{x}$ é a média aritmética; G é a média geométrica e H é a média harmônica.

Significa dizer que a média aritmética será sempre maior ou igual a média geométrica que, por seu turno, será sempre maior ou igual a harmônica. A igualdade ocorrerá quando os números da lista forem todos iguais.

Tomemos como exemplo os números 4, 12 e 20. Como sabemos, a média aritmética será:

$$\bar{x} = \frac{4 + 12 + 20}{3} = 12$$

A média geométrica será:

$$G = \sqrt[3]{4 \times 12 \times 20} \cong 9{,}86$$

E a média harmônica será:

$$H = \frac{3}{\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}} \cong 2{,}61$$

Obtivemos, portanto, uma média aritmética ($\bar{x} = 12$) maior que a média geométrica ($G = 9{,}86$) que, por sua vez, é maior que a média harmônica ($H = 2{,}61$).

Agora, analisaremos um caso em que as três médias são iguais: considere uma lista composta pelos números 5, 5 e 5. Nesse caso, temos que $\bar{x}$, G e H são, respectivamente:

$$\bar{x} = \frac{5 + 5 + 5}{3} = 5$$

$$G = \sqrt[3]{5 \times 5 \times 5} = 5$$

$$H = \frac{3}{\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}} = 5$$

Portanto, quando todos os números da lista são iguais, as médias aritmética ($\bar{x}$), geométrica (G) e harmônica (H) também são iguais.

(CESPE/SEFAZ-RS/2018) Para a, b e c, números reais, positivos e distintos, são verdadeiras as seguintes propriedades:

- $\boldsymbol{a < c}$
- $\boldsymbol{b < \frac{a+c}{2} < \sqrt{bc}}$

A partir dessas propriedades, é correto concluir que

a) $\frac{a+c}{2} < \frac{a+b+c}{3}$

b) $a > b$

c) $c < \frac{a+b}{2}$

d) $a < b < c$

e) $b > c$

Comentários:

Essa questão pode ser respondida de duas formas numericamente, por meio da atribuição de valores às variáveis, ou algebricamente, por meio da manipulação das variáveis.

Primeiro, vamos resolver de forma numérica. Para isso, devemos considerar que, para a, b e c, números reais positivos e distintos, são verdadeiras as seguintes propriedades:

$$a < c$$

$$b < \frac{a+c}{2} < \sqrt{bc}$$

Como temos $\sqrt{bc}$, podemos atribuir valores às variáveis b e c, tais como $b = 9$ e $c = 16$, de forma que a raiz resulte em um número inteiro. Dessa forma, $\sqrt{bc} = \sqrt{9 \times 16} = \sqrt{144} = 12$. Assim, temos que:

$$a < c$$

$$a < 16$$

Temos ainda que:

$$b < \frac{a+c}{2} < \sqrt{bc}$$

$$9 < \frac{a+16}{2} < 12$$

Vamos multiplicar todos os termos por 2.

$$18 < a + 16 < 24$$

Nesse ponto, devemos subtrair 16 de todos os termos.

$$18 - 16 < a < 24 - 16$$

$$2 < a < 8$$

Portanto, a pode ser qualquer valor nesse intervalo. Vamos supor que $a = 4$. Assim, vamos assumir que $a = 4$, $b = 9$ e $c = 16$. Agora, podemos partir para a análise das alternativas:

a) $\frac{\boldsymbol{a+c}}{\boldsymbol{2}} < \frac{\boldsymbol{a+b+c}}{\boldsymbol{3}}$

$$\frac{4 + 16}{2} < \frac{4 + 9 + 16}{3}$$

$$10 < 9{,}666\ (falso)$$

b) $a > b$

$$4 > 9\ (falso)$$

c) $c < \frac{a+b}{2}$

$$16 < \frac{4 + 9}{2}$$

$$16 < 6{,}5\ (falso)$$

d) $a < b < c$

$$4 < 9 < 16\ (verdadeiro)$$

e) $b > c$

$$9 > 16\ (falso)$$

Agora, vamos usar o método algébrico para responder à questão. Retomando o que diz o enunciado, temos que, para a, b e c, números reais positivos e distintos, são verdadeiras as seguintes propriedades:

$$a < c$$

$$b < \frac{a + c}{2} < \sqrt{bc}$$

Assim, já sabemos que $a < c$.

A segunda desigualdade nos diz que $b < \sqrt{bc}$. Em outras palavras, b é menor que a média geométrica entre b e c. Como a **média geométrica** sempre fica entre os números, podemos concluir que $b < c$. Podemos verificar isso da seguinte forma:

$$b^2 < bc$$

$$b < c$$

Precisamos, agora, saber a relação entre a e b.

A segunda desigualdade informou que $\frac{a+c}{2} < \sqrt{bc}$. O lado esquerdo representa a **média aritmética** entre os números a e c. Sabemos que a **média aritmética** é sempre maior que a média geométrica. Portanto,

$$\sqrt{ac} < \frac{a+c}{2}$$

Logo,

$$\sqrt{ac} < \frac{a+c}{2} < \sqrt{bc}$$

Agora, sabemos que:

$$\sqrt{ac} < \sqrt{bc}$$

$$ac < bc$$

$$a < b$$

Assim, temos que $a < b$ e $b < c$. Portanto, $a < b < c$. A resposta está na alternativa D, mas analisaremos as demais alternativas.

a) $\frac{\boldsymbol{a+c}}{\mathbf{2}} < \frac{\boldsymbol{a+b+c}}{\mathbf{3}}$

Sabemos que $b < a + c$, isto é, b é menor que a média entre a e c. Assim, se formos incluir no cálculo da média, o resultado dessa média diminuirá. Logo, a alternativa A está errada.

b) $a > b$

Falso, pois concluímos que $a < b$.

c) $c < \frac{a+b}{2}$

Falso, pois c é o maior valor. Logo, também será maior que a média dos dois menores.

d) $a < b < c$

Alternativa correta

e) $b > c$

Falso, pois $b \ < \ c$.

Assim, comprovamos que a resposta correta é a alternativa D.

Gabarito: D.

RESUMO DA AULA

MEDIDAS DE POSIÇÃO

- **Medidas de Posição**
  - **Medidas de Tendência Central**
    - **Média**
      - **Média Aritmética**
      - **Média Geométrica**
      - **Média Harmônica**
    - **Moda**
    - **Mediana**
  - **Medidas Separatrizes**
    - **Mediana**
    - **Quartis**
    - **Decis**
    - **Percentis**

NOTAÇÃO DE SOMATÓRIO

Nessa notação, temos:

1) um **símbolo de somatório**, Σ, que é a letra grega maiúscula Sigma (S);
2) um **índice** que vai variar do limite inferior a até o limite superior b;
3) um **limite inferior**;
4) um **limite superior** ou condição de parada;
5) o **termo geral** de uma sequência.

$$\sum_{i=a}^{b} x_i$$

Símbolo de Somatório (Sigma) ← $\sum$

Índice ← i

b → Limite Superior ou Condição de Parada

x_i → Termo Geral da Sequência a ser somada

$i=a$ → Limite Inferior ou Ponto de Partida

Propriedades do Somatório

1ª. Propriedade: **O somatório de uma constante k é igual ao produto do número de termos pela constante.**

$$\sum_{i=1}^{n} k = k + k + \cdots + k = k \times n$$

2ª. Propriedade: **O somatório do produto de uma constante por uma variável é igual ao produto da constante pelo somatório da variável.**

$$\sum_{i=1}^{n} k \times x_i = k \times x_1 + k \times x_2 + \cdots + k \times x_n = k \times \sum_{i=1}^{n} x_i$$

3ª. Propriedade: O somatório de uma soma ou subtração é igual à soma ou à subtração dos somatórios dessas variáveis.

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i \pm y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \pm \sum_{i=1}^{n} y_i$$

MÉDIA ARITMÉTICA SIMPLES

A média aritmética de um conjunto de dados é definida como o **quociente entre a soma de todos os elementos e o número deles**.

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}}$$

A propriedade principal da média é preservar a soma dos elementos de um conjunto de dados.

A soma total de um conjunto de dados é calculada pela multiplicação entre a média do conjunto e a quantidade de elementos nele existentes. Trata-se da mesma fórmula apresentada anteriormente, tendo apenas o termo “n” passado para o outro lado da igualdade, multiplicando a média.

$$\bar{x} = \frac{soma}{n} \Longrightarrow soma = n \times \bar{x}$$

Propriedades da Média Aritmética

1ª Propriedade: **Dado um conjunto com $n \geq 1$ elementos, a média aritmética sempre existirá e será única.**

2ª Propriedade: **A média aritmética $\bar{x}$ de um conjunto de dados satisfaz a expressão $m \leq \bar{x} \leq M$, em que m e M são, respectivamente, os elementos que representam o valor mínimo e o valor máximo desse conjunto.**

$$mínimo \leq \bar{x} \leq Máximo$$

3ª Propriedade: **Somando-se (ou subtraindo-se) uma constante c de todos os valores de uma variável, a média do conjunto fica aumentada (ou diminuída) dessa constante.**

$$\bar{y} = \bar{x} + c \quad \text{ou} \quad \bar{y} = \bar{x} - c$$

4ª Propriedade: **Multiplicando-se (ou dividindo-se) uma constante c de todos os valores de uma variável, a média do conjunto fica multiplicada (ou dividida) por esta constante.**

$$\bar{y} = \bar{x} \times c \quad \text{ou} \quad \bar{y} = \bar{x} \div c$$

5ª Propriedade: **A soma algébrica dos desvios em relação à média é nula.**

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0$$

6ª Propriedade: **A soma dos quadrados dos desvios da sequência de números $\{x_i\}$, em relação a um número a, é mínima se a for a média aritmética dos números.**

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

MÉDIA PONDERADA

A média ponderada é a média de um conjunto cujos valores possuem pesos variados. Ela é calculada pela igualdade a seguir, em que p é o peso de cada valor de x:

$$\boldsymbol{\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i \times p_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i}}$$

Observe que no numerador cada valor será multiplicado pelo seu respectivo peso, enquanto no denominador teremos a soma de todos os pesos.

MÉDIA PARA DADOS AGRUPADOS

Média para Dados Agrupados por Valor

A média para dados agrupados por valor é calculada pela seguinte fórmula:

$$\boldsymbol{\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i \times f_i)}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

O raciocínio é exatamente o mesmo adotado para a média ponderada, sendo que, agora, o peso é representado pela frequência. Desse modo, multiplicamos cada valor por sua respectiva frequência, somamos tudo e dividimos pela soma das frequências.

Média para Dados Agrupados por Classe

A diferença em relação ao cálculo anterior consiste na substituição dos intervalos pelos seus respectivos **pontos médios**. O **ponto médio (PM)** é calculado pela média dos dois extremos do intervalo, pela seguinte expressão:

$$\boldsymbol{PM = \frac{l_{inf} + l_{sup}}{2}}$$

A média para dados agrupados por classe é calculada pela seguinte fórmula:

$$\boldsymbol{\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(PM_i \times f_i)}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

MÉDIA GEOMÉTRICA

A média geométrica é definida como a raiz n-ésima do produto de n elementos de um conjunto de dados:

$$\boxed{G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n}}$$

A propriedade principal dessa média é preservar o produto dos elementos de um conjunto de dados.

Somente definimos a média geométrica para números não-negativos.

MÉDIA HARMÔNICA

A média harmônica é definida como o inverso da média aritmética dos inversos:

$$\boxed{H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}}$$

A propriedade principal dessa média é preservar a soma dos inversos dos elementos de um conjunto de números.

Somente definimos a média geométrica para números não-negativos.

DESIGUALDADE DAS MÉDIAS

A média aritmética ($\bar{x}$) é sempre maior ou igual a média geométrica (G) que, por seu turno, é sempre maior ou igual a harmônica (H).

$$\boxed{\bar{x} \geq G \geq H}$$

A igualdade ocorre quando os números da lista são todos iguais.