Aula 15

Unioeste (Superior) Raciocínio Lógico e Matemática - 2023 (Pós-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

16 de Junho de 2023

Índice

Considerações Iniciais

Fala, concurseiro! Estamos juntos em mais uma aula e hoje falaremos sobre:

Sequências, Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas

Trata-se de um **assunto bastante comum** em provas e, portanto, fundamental na sua preparação. Nas próximas páginas, você entenderá o que é uma sequência, faremos também **uma análise das sequências mais famosas** e traremos bastante exemplos para não ficarmos apenas na teoria.

Nessa aula, existem algumas fórmulas que você deve guardar na memória. Portanto, anote-as em um canto de fácil visualização e faça a lista de exercícios proposta ao final desse livro. A prática de questões é nossa maior aliada quando temos que memorizar alguma fórmula. Portanto, nada de só ver a teoria! *Ok?!*

Um forte abraço,
Prof. Francisco Rebouças.

Para **tirar dúvidas**, não deixe de utilizar o nosso fórum. Lá, estaremos sempre à disposição para ajudá-lo. Se preferir, você também **pode entrar em contato diretamente comigo** através dos seguintes canais:

E-mail - Prof. Francisco Rebouças:

prof.franciscoreboucas@gmail.com

Telegram - Prof. Francisco Rebouças:

https://t.me/prof_fco

"Tente uma, duas, três vezes e se possível tente a quarta, a quinta e quantas vezes for necessário. Só não desista nas primeiras tentativas, a persistência é amiga da conquista. Se você quer chegar onde a maioria não chega, faça o que a maioria não faz." (Bill Gates)

RACIOCÍNIO SEQUENCIAL

Sequências Numéricas

O assunto de Raciocínio Sequencial **possui uma teoria muito discreta** que muitas vezes não chega a ser requisitada para a resolução das questões dessa parte da matéria. As questões exigem muito mais que você seja capaz de **desenvolver um raciocínio coerente do que realmente saber se você aprendeu alguma teoria a respeito**. Apesar disso, darei aqui uma introdução ao estudo das sequências para que você possa desenvolver uma noção intuitiva da matéria que te ajudará na hora desenvolver seu raciocínio. Mãos à obra!

De modo objetivo, podemos definir as sequências afirmando que são **listas de números em que os termos obedecem a uma determinada regra de sucessão**. Vamos ver alguns exemplos?

- (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...);
- (1, 1 ,2 ,2 ,3 ,3, 4, 4, ...);
- (2, 4, 8, 16, 32, ...);
- (1, -1, 1, -1, 1, -1, ...);

Normalmente, as sequências aparecem representadas na forma acima: **entre parênteses, termo separados por vírgulas e com as reticências ao final, caso necessário**. De modo geral, também é possível representar as sequências da seguinte forma:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots)$$

Nesse tipo de representação, temos que o $\boldsymbol{a_1}$ **é lido como "a índice um"**, a_2 é o "a índice dois", a_3 é o "a índice três" e assim sucessivamente. Por exemplo, na sequência $(3, 6, 9, 12, 15, \ldots)$ temos que:

- $a_1 = 3$
- $a_2 = 6$
- $a_3 = 9$
- $a_4 = 12$
- $a_5 = 15$

Esse índice que está subscrito ao "a" indica a ordem do termo! a_1é o primeiro termo da sequência, a_2 é o segundo termo da sequência, a_3 é o terceiro. Quando queremos representar um termo de uma sequência e não sabemos qual a sua ordem, **simplesmente o denotamos como** $\boldsymbol{a_n}$ e o lemos **"a índice n"**. Essa mesma notação pode ser usada para denotar um termo genérico e a sua lei de formação. Vamos detalhar.

A sequência $(3, 6, 9, 12, 15, \ldots)$ pode ser representada simplesmente como $\boldsymbol{a_n = 3 \cdot n}$. O n é qualquer número pertencente **ao conjunto dos números naturais excluindo o zero** ($\mathbb{N}^*$), relembre-se:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

Assim, ficamos com:

- Quando $n = 1$, então $a_1 = 3 \cdot 1 \implies a_1 = 3$
- Quando $n = 2$, então $a_2 = 3 \cdot 2 \implies a_2 = 6$
- Quando $n = 3$, então $a_3 = 3 \cdot 3 \implies a_3 = 9$
- Quando $n = 4$, então $a_4 = 3 \cdot 4 \implies a_4 = 12$
- Quando $n = 5$, então $a_5 = 3 \cdot 5 \implies a_5 = 15$

Veja que obtivemos exatamente **os mesmos números** da sequência que estávamos tratando, inclusive na ordem dada. Conclusão: nossas sequências podem ser representadas de formas diferentes, por meio da lei de formação, e não só na forma explícita $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots)$.

Existem **sequências que apresentam um padrão muito específico**. Essas sequências ganham um nome especial e trataremos delas nas seções subsequentes. Faremos, a partir desse ponto, uma intersecção com a disciplina de matemática, apresentando a vocês **a sequência de Fibonacci, a progressão aritmética e a progressão geométrica**. Fique ciente que não esgotaremos nenhum desses conteúdos, apenas veremos o suficiente para desenvolver uma noção intuitiva que será suficiente para a resolução das questões.

(SEFAZ-AM/2022) Uma sequência de números inteiros é tal que cada termo, a partir do terceiro, é a soma do seu termo antecessor com o dobro do antecessor do antecessor. Sabe-se que o sexto termo dessa sequência é 85 e, o oitavo, é 341. O quarto termo da referida sequência é
a) 15.
b) 17
c) 19
d) 21
e) 23

Comentários:
Questão bem legal! Vamos analisar a informação crucial:

"Cada termo, a partir do terceiro, **é a soma do seu antecessor com o dobro do antecessor do antecessor**."

Na prática, temos o seguinte:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_2$$

$$a_3 = a_2 + 2a_1 \qquad (1)$$

$$a_4 = a_3 + 2a_2 \qquad (2)$$

$$a_5 = a_4 + 2a_3 \qquad (3)$$

$a_6 = a_5 + 2a_4 \qquad (4)$

$a_7 = a_6 + 2a_5 \qquad (5)$

$a_8 = a_7 + 2a_6 \qquad (6)$

Escrevi até a equação (6) **pois o enunciado deu o oitavo $(a_8 = 341)$ e o sexto $(a_6 = 85)$** termo. Com isso, por meio de (6), podemos encontrar o a_7.

$$a_8 = a_7 + 2a_6 \quad \rightarrow \quad 341 = a_7 + 2 \cdot 85 \quad \rightarrow \quad a_7 = 341 - 170 \quad \rightarrow \quad a_7 = 171$$

Com o valor de a_7, podemos usar a equação (5) para encontrar a_5.

$$a_7 = a_6 + 2a_5 \quad \rightarrow \quad 171 = 85 + 2 \cdot a_5 \quad \rightarrow \quad 86 = 2a_5 \quad \rightarrow \quad a_5 = 43$$

Com o valor de a_5, podemos usar a equação (4) para **encontrar a_4.**

$$a_6 = a_5 + 2a_4 \quad \rightarrow \quad 85 = 43 + 2a_4 \quad \rightarrow \quad 42 = 2a_4 \quad \rightarrow \quad \boxed{a_4 = 21}$$

Pronto! Podemos marcar a alternativa D.

Gabarito: LETRA D.

Sequência de Fibonacci

Pessoal, a sequência de Fibonacci **é muito conhecida no meio matemático**. Reconhecê-la na hora da prova pode ser um diferencial, de modo a propiciar mais confiança e agilidade na questão. *E qual é a sequência de Fibonacci?*

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots)$$

Você consegue desvendar o padrão dessa sequência? Destrincharemos essa sequência para você. A sequência de Fibonacci é definida a partir de dois valores iniciais: **o primeiro e o segundo termo**. Em uma sequência qualquer, chamaríamos esses termos de a_1 e a_2. No entanto, estamos falando da sequência de Fibonacci e por esse motivo, chamamos esses termos de **F_1 e F_2.**

Note que os dois primeiros termos dessa sequência são iguais a 1! Depois, **cada termo subsequente é formado pela soma dos dois anteriores**! Percebeu?

- $F_3 = F_1 + F_2 \implies F_3 = 1 + 1 = 2$
- $F_4 = F_3 + F_2 \implies F_4 = 2 + 1 = 3$
- $F_5 = F_4 + F_3 \implies F_5 = 3 + 2 = 5$
- $F_6 = F_5 + F_4 \implies F_6 = 5 + 3 = 8$
- Por aí vai...

Podemos representar esses fatos **de uma forma resumida e organizada**. Para essa finalidade, definimos a sequência de Fibonacci da seguinte forma:

$$F_n = \begin{cases} 1, se\ n = 1 \\ 1, se\ n = 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, se\ n\ \geq 3 \end{cases}$$

Veja que é tudo o que a gente falou até aqui, **mas utilizando a notação matemática**. Os dois primeiros termos **são iguais** a um e um termo genérico F_n é dado como a soma dos dois termos anteriores a ele: $\boldsymbol{F_{n-1} + F_{n-2}}$. Podemos, ainda, representar a sequência de Fibonacci de mais um jeito**, através de uma fórmula**! Qualquer termo da sequência de Fibonacci pode ser obtido usando a seguinte expressão:

$$F_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}}$$

É um jeito mais trabalhoso de obtermos os termos, pois precisaremos ficar desenvolvendo os binômios. Recomendo que, para escrever a sequência, utilize **nossa regra de somar os dois termos anteriores**, lembrando que **os dois primeiros termos são iguais a um**. No mais, é importante ter uma noção do aspecto da fórmula, pois poderá te ajudar em eventuais questões. Falando nelas, vamos fazer algumas?

(ALESE/2018) Um servidor público, no seu primeiro dia de trabalho, atendeu uma única pessoa, o que se repetiu no segundo dia. A partir do terceiro, o número de pessoas atendidas por ele sempre foi igual à soma dos números de pessoas atendidas nos dois dias anteriores. Seu supervisor prometeu que, se houvesse um dia em que ele atendesse 50 ou mais pessoas, ele ganharia uma folga extra. Considerando que o padrão de atendimentos descrito se manteve, o servidor ganhou sua primeira folga extra ao final do

A) oitavo dia de trabalho.
B) décimo dia de trabalho.
C) décimo segundo dia de trabalho.
D) vigésimo dia de trabalho.
E) vigésimo segundo dia de trabalho.

Comentários:

Vamos **montar uma sequência** com as informações fornecidas no enunciado. Temos que um servidor público atendeu uma pessoa no primeiro dia de trabalho, $\boldsymbol{a_1 = 1}$. No segundo dia, o servidor atendeu também uma pessoa, $\boldsymbol{a_2 = 1}$. A partir do terceiro dia, o número de pessoas atendidas **é igual à soma dos dois dias anteriores**. Por exemplo, $\boldsymbol{a_3 = a_1 + a_2 = 2}$.

Note que a sequência cujo os dois primeiros termos são 1 e os demais termos é a soma do dois anteriores é uma sequência muito conhecida no meio matemático: **é a sequência de Fibonacci**. Lembre-se:

$$F_n = \begin{cases} 1, se\ n = 1 \\ 1, se\ n = 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, se\ n\ \geq 3 \end{cases}$$

Logo, queremos achar **o primeiro termo da sequência de Fibonacci maior do que 50**. Como fazemos isso? O jeito mais fácil é escrever todos eles!

F_1	F_2	$F_3 = F_1 + F_2$	$F_4 = F_2 + F_3$	$F_5 = F_3 + F_4$
1	1	2	3	5
$F_6 = F_4 + F_5$	$F_7 = F_6 + F_5$	$F_8 = F_7 + F_6$	$F_9 = F_8 + F_7$	$F_{10} = F_9 + F_8$
8	13	21	34	55

Encontramos, portanto, que **ao fim do décimo dia** o servidor terá atendido **55 pessoas** e ganhará a sua primeira folga extra.

Gabarito: Letra B.

Noções Básicas de Progressão Aritmética

A **progressão aritmética** é o tipo de sequência mais comum em questões. De modo geral, é qualquer sequência cujo **termo subsequente difere do anterior por uma constante**. É mais fácil do que você está pensando! Vamos ver alguns exemplos para começar a destrinchar essa matéria!

- $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots)$
- $(2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots)$
- $(21, 14, 7, 0, -7, -14, -21, \ldots)$
- $(0, 50, 100, 150, 200, 250, \ldots)$

Você é capaz de identificar os padrões das sequências acima? Todas elas são exemplos de progressões aritméticas. À medida que "se anda" na sequência**, os termos sempre aumentam (ou diminuem) de um mesmo um valor**.

- $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots) \Longrightarrow$ Cada termo subsequente é igual ao anterior mais 1.
- $(2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots) \Longrightarrow$ Cada termo subsequente é igual ao anterior mais 2.
- $(21, 14, 7, 0, -7, \ \ldots) \Longrightarrow$ Cada termo subsequente é igual ao anterior menos 7.
- $(0, 50, 100, 150, 200, \ \ldots) \Longrightarrow$ Cada termo subsequente é igual ao anterior mais 50.

Esse número que somamos ou subtraímos de cada termo é chamado de razão (r). Quando a razão é positiva, nós dizemos que a **PA é crescente**, quando é negativa, dizemos que a **PA é decrescente**. Observe que em uma progressão aritmética de forma geral $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots)$, sempre poderemos escrever um termo como função da razão e do primeiro termo.

- $a_2 = a_1 + r$
- $a_3 = a_2 + r \quad \Longrightarrow \quad a_3 = (a_1 + r) + r \quad \Longrightarrow \quad a_3 = a_1 + 2r$
- $a_4 = a_3 + r \quad \Longrightarrow \quad a_4 = (a_1 + 2r) + r \quad \Longrightarrow \quad a_4 = a_1 + 3r$
- $a_5 = a_4 + r \quad \Longrightarrow \quad a_5 = (a_1 + 3r) + r \quad \Longrightarrow \quad a_5 = a_1 + 4r$

Note que utilizamos o fato de que, em uma PA, **um determinado termo é igual ao seu anterior mais uma constante**. Para descobrir o a_5, nós só precisamos do a_1 e da razão (r), **não sendo necessário escrever todos os termos da PA até o a_5**. Imagine, por exemplo, que você quer saber o a_{50} da sequência

$(2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots)$. Você concorda que listar os 50 termos não seria uma tarefa muito rápida? Se você souber o a_1 e a razão (r), é possível determiná-lo em segundos. A **fórmula do termo geral de uma progressão aritmética** é dada pela expressão abaixo, guarde ela bem!

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot r}$$

Por exemplo, para obter o a_{50} da sequência $(2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots)$, basta sabermos que $a_1 = 2$ e $r = 2$.

$$a_{50} = 2 + (50 - 1)\cdot 2$$

$$a_{50} = 2 + 49 \cdot 2$$

$$\boxed{a_{50} = 100}$$

E se a razão for negativa, como fazemos**? Absolutamente do mesmo jeito, não vai mudar nada**. Vamos pegar a sequência $(21, 14, 7, 0, -7, \ \dots)$ que possui razão $r = -7$ e primeiro termo $a_1 = 21$. Veja que é uma PA decrescente. Qual será o a_{75}? Da fórmula do termo geral de uma progressão aritmética, podemos fazer:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$$

$$a_{75} = 21 + (75 - 1)\cdot(-7)$$

$$a_{75} = 21 - 74 \cdot 7$$

$$a_{75} = -497$$

Um fato que eu gostaria de ressaltar com vocês é que a escolha da letra "a" para representar elementos de uma sequência **é só uma convenção**. Na prática, você poderá ver sequências representadas das mais diferentes maneiras, por exemplo, utilizando a letra "b" no lugar da letra "a": $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \dots)$ e escrevendo o termo geral como $b_n = b_1 + (n-1)\cdot r$. **Esse tipo de notação é válido**! Não tem problema algum, **é ao gosto do freguês**! Por isso, quando você ver sequências representadas com outras letras, continua sendo uma sequência e **a abordagem é exatamente a que estamos fazendo aqui**. *Entendido?*

Existe mais uma fórmula dentro do universo da progressão aritmética que é a da **soma dos n primeiros termos**. Não irei entrar no mérito da demonstração pois, apesar de ser uma demonstração simples, fugirá do escopo de uma aula de raciocínio lógico.

Imagine que temos a seguinte PA: $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots)$. Qual é a soma dos 100 primeiros termos? Para responder essa pergunta, temos que realizar uma tarefa que parece não ser tão imediata, concorda? Porém, utilizando a fórmula da **soma dos n primeiros termos de uma PA**, podemos responder de maneira rápida. A fórmula da soma dos n primeiros termos é dada por:

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}}$$

Ou seja, para calcularmos a soma dos n primeiros termos, precisamos do a_1 e do a_n. Como estamos atrás dos 100 primeiros termos, temos que $n = 100$ e precisamos encontrar o a_{100}.

$$a_{100} = 1 + (100 - 1) \cdot 1$$

$$a_{100} = 100$$

Substituindo na fórmula:

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot \cancel{100}}{\cancel{2}}$$

$$S_{100} = (1 + 100) \cdot 50$$

$$S_{100} = 5050$$

Portanto, a soma dos 100 primeiros termos da progressão aritmética $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots)$ **é 5050**.

HORA DE PRATICAR!

(CÂMARA DOS DEPUTADOS/2014) Em determinado colégio, todos os 215 alunos estiveram presentes no primeiro dia de aula; no segundo dia letivo, 2 alunos faltaram; no terceiro dia, 4 alunos faltaram; no quarto dia, 6 alunos faltaram, e assim sucessivamente. Com base nessas informações, julgue o próximo item, sabendo que o número de alunos presentes às aulas não pode ser negativo**.**

No vigésimo quinto dia de aula, faltaram 50 alunos

Comentários:

O número de faltosos aumenta conforme **uma progressão aritmética de razão 2**, observe:

$\boldsymbol{a_1 = 0}$

$\boldsymbol{a_2 = 2}$

$\boldsymbol{a_3 = 4}$

$\boldsymbol{a_4 = 6}$

Sabemos que **a fórmula do termo geral de uma PA** é dada por:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Queremos calcular quantos alunos faltaram no 25º dia $(n = 25)$. Como a razão é 2 $(r = 2)$, então:

$$a_{25} = 0 + (25 - 1) \cdot 2$$

$$a_{25} = 48$$

Logo, no 25º dia, **faltaram 48 alunos**.

Gabarito: ERRADO

Noções Básicas de Progressão Geométrica

Pessoal, não entraremos muito a fundo na parte de Progressão Geométrica pois é mais comum sua cobrança na matéria de Matemática, apenas. No entanto, **comentaremos aqui os aspectos relevantes da matéria que devem ser levados para a sua prova de Raciocínio Lógico**.

Na parte de progressões aritméticas, vimos que elas são caracterizadas pela presença de uma razão, que somamos ao termo anterior para obtermos o termo subsequente. **Na progressão geométrica, também teremos uma razão que entrará não somando o termo anterior, mas multiplicando-o**! Vamos com calma! São exemplos de PGs as seguintes sequências:

- $(2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots);$
- $(5, 25, 125, 625, \ldots);$
- $(100, 10, 1, 0.1, 0.01, \ldots);$

Veja que, na primeira sequência acima, **cada termo subsequente é o dobro do anterior**. Na segunda sequência, multiplicamos cada próximo termo por 5 em relação ao termo passado. Por fim, na nossa terceira sequência, cada termo subsequente está multiplicado por 0,1 em relação ao anterior. **Esses números que multiplicamos os termos são as razões de cada sequência e, no estudo das PGs, denotamos ela por q e não mais por r.**

HORA DE PRATICAR!

Texto para as próximas questões

Uma unidade da PRF interceptou, durante vários meses, lotes de mercadorias vendidas por uma empresa com a emissão de notas fiscais falsas. A sequência dos números das notas fiscais apreendidas, ordenados pela data de interceptação, é a seguinte: 25, 75, 50, 150, 100, 300, 200, 600, 400, 1.200, 800, ... Tendo como referência essa situação hipotética, julgue o item seguinte, considerando que a sequência dos números das notas fiscais apreendidas segue o padrão apresentado.

(PRF/2019) A partir do padrão da sequência, infere-se que o 12º termo é o número 1.600.

Comentários:
Vamos extrair do enunciado a sequência fornecida para uma melhor análise:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	
25,	75,	50,	150,	100,	300,	200,	600,	400,	1.200,	800,	x,	...

O examinador faz uma afirmação sobre o 12º termo, isto é, o a_{12}. Para conseguir encontrar o seu valor, é necessário determinar **o padrão da sequência**. Observe que existem **duas progressões geométricas** dentro dessa sequência principal. Vamos destacá-las?

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ \color{red}{25}, & 75, & \color{red}{50}, & 150, & \color{red}{100}, & 300, & \color{red}{200}, & 600, & \color{red}{400}, & 1.200, & \color{red}{800}, & x, \ldots \end{array}$$

$\times 2$ $\quad \times 2$ $\quad \times 2$ $\quad \times 2$ $\quad \times 2$

Veja que os números destacados em vermelho formam uma progressão geométrica de razão 2. Além disso, **os termos que formam essa sequência sempre pulam um termo da sequência principal**. A outra PG é formada com os demais termos que não estão destacados e também possui razão 2.

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ 25, & \color{blue}{75}, & 50, & \color{blue}{150}, & 100, & \color{blue}{300}, & 200, & \color{blue}{600}, & 400, & \color{blue}{1.200}, & 800, & \color{blue}{x}, \ldots \end{array}$$

$\times 2$ $\quad \times 2$ $\quad \times 2$ $\quad \times 2$ $\quad \times 2$

Para encontrarmos o valor do a_{12}, basta seguirmos o padrão acima, multiplicando o a_{10} por 2.

$$\boldsymbol{a_{12} = a_{10} \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad a_{12} = 1200 \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad a_{12} = 2400}$$

Gabarito: ERRADO.

A questão acima mostra que, na prática, **você não precisa de conhecimentos avançados em PG para resolver questões de Raciocínio Sequencial** (no entanto, é muito importante estar afiado nesse assunto para sua prova de Matemática, se houver previsão no edital!).

Observe que, se você conhece esse tipo de sequência, **fica bem mais fácil reconhecer os padrões trazidos pela questão**, facilitando muito resolvê-la. Para encerrar esse breve tópico, quero ainda apresentar-lhes algumas formas. Assim como na PA, a PG possui uma fórmula para o termo geral em função da razão (q), do primeiro termo (a_1) e da ordem (n) do termo procurado.

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Se, por acaso, você precisasse descobrir o a_{11} da sequência $(2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots)$, o que faria? Obviamente, uma **solução seria listar todos os termos até o a_{11}** sempre multiplicando o termo anterior por 2 para obter o termo subsequente. No entanto, você também poderia **aplicar a fórmula do termo geral** e descobrir de imediato:

$$a_{11} = 2 \cdot 2^{11-1} \quad \rightarrow \quad a_{11} = 2 \cdot 2^{10} \quad \rightarrow \quad a_{11} = 2^{11} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_{11} = 2048}$$

E como faríamos para obter a soma de todos os termos da sequência acima? Digo de a_1 até a_{11}? Temos uma fórmula para isso, anote (ou revise) aí.

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}}$$

Essa é a **fórmula da soma dos termos de uma P.G. finita**. Logo, a soma dos 11 primeiros termos da PG $(2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots)$ é:

$$S_{11} = \frac{2 \cdot (2^{11} - 1)}{2 - 1} \quad \rightarrow \quad S_{11} = \frac{2 \cdot (2048 - 1)}{1} \quad \rightarrow \quad S_{11} = 2 \cdot 2047 \quad \rightarrow \quad S_{11} = 4094$$

Ok! *Professor, vi que você comentou que essa é a fórmula para a soma dos termos de uma **P. G. finita**. Por acaso existe uma **P.G. infinita**?* Boa observação! Existe sim! **Uma sequência é tão grande quanto você queira** e caso ela tenha infinitos termos, sob algumas condições, você poderá somar todos eles por meio de uma fórmula específica. Vamos detalhar isso um pouco mais.

Continue considerando a PG que estávamos trabalhando: $(2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots)$. Observe que **os termos continuam aumentando cada vez mais**, de modo que a soma dos infinitos termos certamente também dará um **número estratosférico (infinito).**

Agora, imagine que estamos com a sequência $\left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right)$. Note que se trata de uma P.G. com razão $q = \frac{1}{2}$. **Os termos vão se tornando cada vez menores**. Com isso, a soma vai tender a se "estabilizar" em um valor e poderemos calculá-lo. Vamos ver?

- Soma dos dois primeiros termos: $2 + 1 = \mathbf{3}$
- Soma dos três primeiros termos: $2 + 1 + 1/2 = \mathbf{3,5}$
- Soma dos quatro primeiros termos: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \mathbf{3,75}$
- Soma dos cinco primeiros termos: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \mathbf{3,875}$
- Soma dos sete primeiros termos: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \mathbf{3,9375}$
- Soma dos oito primeiros termos: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \mathbf{3,96875}$
- Soma dos nove primeiros termos: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \mathbf{3,984375}$
- Soma dos dez primeiros termos: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \mathbf{3,9921875}$

Galera, vocês conseguem perceber que nossa primeira soma foi igual a 3 e depois de somar vários outros termos **não passamos nem do número 4**? Isso porque **os termos diminuem cada vez mais e mais**. O limite da soma quando o número de termos tender ao infinito será exatamente 4. A fórmula que nos fornece esse valor é:

$$\boxed{S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}}$$

Essa é **a fórmula da soma dos infinitos termos de uma PG**. Ressalto que ela **só será válida quando o módulo da razão for menor do que um, isto é, $|q| < 1$**. Agora, vamos ver na prática!

(SEFAZ-RS/2018) Sobre uma mesa há 9 caixas vazias. Em uma dessas caixas, será colocado um grão de feijão; depois, em outra caixa, serão colocados três grãos de feijão. Prosseguindo-se sucessivamente, será escolhida uma caixa vazia, e nela colocada uma quantidade de grãos de feijão igual ao triplo da quantidade colocada na caixa anteriormente escolhida, até que não reste caixa vazia. Nessa situação, nas 9 caixas será colocada uma quantidade de grãos de feijão igual a

A) $\frac{3^9-1}{2}$
B) 3^9-1
C) $\frac{3^{10}-1}{2}$
D) $3^{10}-1$
E) $\frac{3^8-3}{2}$

Comentários:

Pessoal, temos 9 caixas. Na primeira caixa será colocado um único grão de feijão, depois será colocado 3 grãos em outra, depois o triplo (9) e assim sucessivamente... Veja que está sendo formado uma sequência muito conhecida:

$$(1, 3, 9, 27, 81, \ldots)$$

Portanto, temos uma **P.G. de razão 3**. O enunciado pede a soma de todos os grãos colocados nas caixas. Em outras palavras, queremos **a soma dos 9 primeiros termos** dessa sequência (são 9 caixas). Lembre-se:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Olhando para a sequência, tiramos que $a_1 = 1$, $q = 3$ e $n = 9$. Logo,

$$S_9 = \frac{1 \cdot (3^9 - 1)}{3 - 1} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{S_9 = \frac{3^9 - 1}{2}}$$

Gabarito: LETRA A.

(CRMV-ES/2018) Marque a alternativa que apresente a soma da progressão geométrica infinita abaixo.

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots$$

A) 1
B) $\frac{5}{3}$
C) $\frac{2}{5}$
D) $\frac{2}{3}$
E) $\frac{4}{3}$

Comentários:

Pessoal, questão apenas para testarmos o que vimos. O enunciado quer a soma da progressão geométrica infinita dada. Sabemos que **a soma dos termos de uma P.G. infinita** é dada por:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

Para calcular essa soma, basta sabermos **o primeiro termo (a_1) e a razão (q)**. Olhando para a sequência do enunciado, temos que $a_1 = 1$. Além disso, a razão pode ser encontrada dividindo dois termos consecutivos:

$$q = \frac{a_2}{a_1} \quad \rightarrow \quad q = \frac{\frac{1}{4}}{1} \quad \rightarrow \quad q = \frac{1}{4}$$

Veja que $|q| < 1$ e, portanto, **a fórmula é aplicável**. Substituindo os valores de a_1 e q:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} \quad \rightarrow \quad S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \quad \rightarrow \quad S_\infty = \frac{1}{\frac{3}{4}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S_\infty = \frac{4}{3}}$$

Gabarito: LETRA E.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Conceito

A **progressão aritmética** é o tipo de sequência mais comum em questões. De modo geral, é qualquer sequência cujo **termo subsequente difere do anterior por uma constante**. É mais fácil do que você está pensando! Vamos ver alguns exemplos para começar a destrinchar essa matéria!

- $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots)$
- $(2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots)$
- $(21, 14, 7, 0, -7, -14, -21, \dots)$
- $(0, 50, 100, 150, 200, 250, \dots)$

Você é capaz de identificar os padrões das sequências acima? Todas elas são exemplos de progressões aritméticas. À medida que "se anda" na sequência**, os termos sempre aumentam (ou diminuem) de um mesmo um valor**.

- $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots) \Longrightarrow$ Cada termo subsequente é igual ao anterior mais 1.
- $(2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots) \Longrightarrow$ Cada termo subsequente é igual ao anterior mais 2.
- $(21, 14, 7, 0, -7, \ \dots) \Longrightarrow$ Cada termo subsequente é igual ao anterior menos 7.
- $(0, 50, 100, 150, 200, \ \dots) \Longrightarrow$ Cada termo subsequente é igual ao anterior mais 50.

Esse número que adicionamos a cada termo é chamado de razão (r). Quando a razão é positiva, nós dizemos que a **PA é crescente**, quando é negativa, dizemos que a **PA é decrescente**. Ademais, a razão de uma progressão aritmética também poderá ser igual a zero ($r = 0$), nesse caso, dizemos que a PA é constante.

PA	Condições	Exemplos
Crescente	$r > 0$	$(2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots)$
Decrescente	$r < 0$	$(100, 90, 80, 70, \dots)$
Constante	$r = 0$	$(5, 5, 5, 5, 5, \dots)$

Um fato que eu gostaria de ressaltar com vocês é que a escolha da letra "a" para representar elementos de uma sequência **é só uma convenção**. Na prática, você poderá ver sequências representadas das mais diferentes maneiras, por exemplo, utilizando a letra "b" no lugar da letra "a": $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots)$.

Esse tipo de notação é válido! Não tem problema algum, **é ao gosto do freguês**! Por isso, quando você ver sequências representadas com outras letras, continua sendo uma sequência e **a abordagem é exatamente a que estamos fazendo aqui**. *Entendido?*

HORA DE PRATICAR!

(PREF. LARANJAL PAUL/2019) A sequência numérica (50, 54, 58, 62, 66) é uma progressão do tipo:

A) Geométrica de razão 2.
B) Geométrica de razão 4.
C) Aritmética de razão 2.
D) Aritmética de razão 4.
E) Aritmética de razão 6.

Comentários:

Apesar de não termos estudado ainda a progressão geométrica, conseguimos perceber que a sequência do enunciado tem a seguinte propriedade: **a diferença entre qualquer um dos termos e o seu anterior é constante e igual a 4 (quatro)**. Dessa forma, temos caracterizada uma PA de razão igual a 4.

Gabarito: LETRA D.

(PREF. LARANJAL PAUL/2019/MOD) Assinale a alternativa que apresenta a sequência numérica que é uma Progressão Aritmética:

A) $(2{,}25;\ 2{,}5;\ 2{,}75, 3)$.
B) $(2;\ 4;\ 8;\ 16)$.
C) $(5{,}3;\ 5{,}5;\ 5{,}6;\ 5; 7)$.
D) $(6;\ 12;\ 16;\ 24)$.

Comentários:

A) **CERTO. A diferença entre um termo e o seu anterior é sempre constante**.

$$(2{,}25;\ 2{,}5;\ 2{,}75,\ \ 3)$$

$+0{,}25 \quad +0{,}25 \quad +0{,}25$

Os "saltos" são sempre constantes e iguais a 0,25 (essa é a razão). Dessa forma, **trata-se de uma PA**.

B) **ERRADO.** Nesse caso, a diferença entre um termo e o seu anterior não é constante.

$$(2;\ 4;\ 8;\ 16)$$

$$+2 \qquad +4 \qquad +8$$

C) **ERRADO.** Mesma justificativa da alternativa anterior. A diferença entre um termo e seu anterior não é constante (uma hora é 0,2 e outra hora é 0,1). Dessa forma não podemos dizer que é uma PA.

$$(5{,}3;\ 5{,}5;\ 5{,}6;\ 5{,}7)$$

$$+0{,}2 \qquad +0{,}1 \qquad +0{,}1$$

D) **ERRADO.** Mais uma vez, a diferença entre um termo e o seu anterior não é constante.

$$(6;\ 12;\ 16;\ 24)$$

$$+6 \qquad +4 \qquad +8$$

Gabarito: LETRA A.

Termo Geral de uma PA

Em uma progressão aritmética de forma geral $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots)$, sempre poderemos escrever um termo como **função da razão (r) e do primeiro termo (a_1)**.

- $a_2 = a_1 + r$
- $a_3 = a_2 + r \implies a_3 = (a_1 + r) + r \implies a_3 = a_1 + 2r$
- $a_4 = a_3 + r \implies a_4 = (a_1 + 2r) + r \implies a_4 = a_1 + 3r$

Utilizamos o fato de que, em uma PA, **um determinado termo é igual ao seu anterior mais uma constante**. Para descobrir o a_5, nós só precisamos do a_1 e da razão (r), **não sendo necessário escrever todos os termos da PA até o a_5**. Imagine, por exemplo, que você quer saber o a_{50} da sequência $(2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots)$.

Você concorda que listar os 50 termos não seria uma tarefa bacana, né? No entanto, se você souber o a_1 e a razão (r), é possível encontrá-lo em segundos. A **fórmula do termo geral de uma progressão aritmética** é dada pela expressão abaixo, guarde ela bem!

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Por exemplo, para obter o a_{50} da sequência $(2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots)$, basta sabermos que $a_1 = 2$ e $r = 2$.

$$a_{50} = 2 + (50-1) \cdot 2 \quad \rightarrow \quad a_{50} = 2 + 49 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad \boxed{a_{50} = 100}$$

E se a razão for negativa, como fazemos? **Absolutamente do mesmo jeito, não vai mudar nada**. Vamos pegar a sequência $(21, 14, 7, 0, -7, \ \dots)$ que possui razão $r = -7$ e primeiro termo $a_1 = 21$. Veja que é uma PA decrescente. Qual será o a_{75}? Da fórmula do termo geral de uma progressão aritmética, podemos fazer:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$a_{75} = 21 + (75-1) \cdot (-7) \quad \rightarrow \quad a_{75} = 21 - 74 \cdot 7 \quad \rightarrow \quad a_{75} = -497$$

HORA DE PRATICAR!

(CÂMARA DOS DEPUTADOS/2014) Em determinado colégio, todos os 215 alunos estiveram presentes no primeiro dia de aula; no segundo dia letivo, 2 alunos faltaram; no terceiro dia, 4 alunos faltaram; no quarto dia, 6 alunos faltaram, e assim sucessivamente. Com base nessas informações, julgue o próximo item, sabendo que o número de alunos presentes às aulas não pode ser negativo.

No vigésimo quinto dia de aula, faltaram 50 alunos

Comentários:

O número de faltosos aumenta conforme **uma progressão aritmética de razão 2**, observe:

$\boldsymbol{a_1 = 0}$
$\boldsymbol{a_2 = 2}$
$\boldsymbol{a_3 = 4}$
$\boldsymbol{a_4 = 6}$

Sabemos que **a fórmula do termo geral de uma PA** é dada por:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Queremos calcular quantos alunos faltaram no 25º dia ($n = 25$). Como a razão é 2 ($r = 2$), então:

$$a_{25} = 0 + (25-1) \cdot 2$$

$$a_{25} = 48$$

Logo, no 25º dia, **faltaram 48 alunos**.

Gabarito: ERRADO

(IFRR/2020) Em uma determinada Progressão Aritmética, sabe-se que a razão vale 3 e o termo 15 vale 40. Assinale a alternativa que indica corretamente o valor do termo 31 desta Progressão Aritmética.

A) 16.

B) 31.

C) 48.

D) 88.

E) 96.

Comentários:

A questão falou em progressão aritmética de **razão igual a 3 e de termo 15 igual a 40**. Dessa forma,

$$r = 3 \quad \text{e} \quad a_{15} = 40$$

Com essas duas informações, **precisamos descobrir o a_{31}**.

Na minha opinião, uma solução mais simples é encontrarmos o a_1 com as informações acima e, depois, encontrar o a_{31}. Lembre-se que com a **razão (r) e o primeiro termo (a_1), é possível encontrar qualquer termo da PA.**

$$a_{15} = a_1 + (15 - 1)r \quad \rightarrow \quad a_{15} = a_1 + 14r$$

Substituindo os valores que temos.

$$40 = a_1 + 14 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad a_1 = 40 - 42 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_1 = -2}$$

Agora, com a razão (r) e o primeiro termo (a_1), podemos determinar o a_{31}.

$$a_{31} = a_1 + (31 - 1) \cdot r \quad \rightarrow \quad a_{31} = a_1 + 30r$$

Substituindo os valores da razão e do primeiro termo.

$$a_{31} = -2 + 30 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_{31} = 88}$$

Gabarito: LETRA D.

Progressão Aritmética de 3 termos

É muito comum aparecer em provas uma progressão aritmética de 3 termos. Isso acontece pois elas possuem uma propriedade bem especial. Por exemplo, imagine que temos a seguinte PA: $(2, 4, 6)$. Note que **o termo central é a média aritmética dos outros dois**!

$$\frac{2\ (a_1) + 6\ (a_3)}{2} = 4\ (a_2)$$

Isso sempre será verdade, para qualquer PA. Vou lhe mostrar o porquê.

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{4-2} & \mathbf{4+2} \\ & \downarrow & \downarrow \\ (2, & 4, & 6) \end{array}$$

Note que o termo anterior ao termo central é igual ao **termo central menos a razão**. Analogamente, o termo posterior é o **termo central mais a razão**. No caso dessa PA que estamos trabalhando, **a razão é igual a 2**. Genericamente, podemos representar essa mesma situação da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{a_2 - r} & & \boldsymbol{a_2 + r} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (a_1, & a_2, & a_3) \end{array}$$

A média aritmética entre a_1 e a_3 é:

$$M = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Substituindo $a_1 = a_2 - r$ e $a_3 = a_2 + r$:

$$M = \frac{(a_2 - \cancel{r}) + (a_2 + \cancel{r})}{2} \quad \rightarrow \quad M = \frac{\cancel{2} \cdot a_2}{\cancel{2}} \quad \rightarrow \quad M = a_2$$

Ora, se $M = a_2$, então podemos escrever que:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Vamos ver na prática como saber isso pode nos ajudar?

HORA DE PRATICAR!

(PREF. LINHARES/2020) A sequência $(3x - 2, 2x + 3, 5x - 8)$ é uma progressão aritmética de três termos. O valor do segundo termo dessa sequência é:

A) 11.
B) 10.
C) 13.
D) 12.
E) 4.

Comentários:

Olha aí, moçada. **Uma progressão aritmética com três termos**. Vamos entendê-la.

$$\left(\underbrace{3x-2}_{a_1},\underbrace{2x+3}_{a_2},\underbrace{5x-8}_{a_3}\right)$$

Ora, sabemos que:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Assim, **substituindo pelas expressões**:

$$2x + 3 = \frac{(3x - 2) + (5x - 8)}{2}$$
$$4x + 6 = 3x - 2 + 5x - 8$$
$$4x + 6 = 8x - 10$$
$$4x = 16 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 4}$$

Com o valor de x determinado, basta substituí-lo na expressão do a_2.

$$a_2 = 2x + 3 \quad \rightarrow \quad a_2 = 2 \cdot 4 + 3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_2 = 11}$$

Gabarito: LETRA A.

Interpolação de termos em uma PA

Para entender o que significa interpolar, vou abrir essa teoria já com um exercício. Acredito que será mais fácil visualizarmos com um exemplo!

(PREF. JAGUAPITÃ/2020) A progressão aritmética $(8, \ldots , 29)$ possui 6 termos entre o primeiro e o último. Qual é o sexto termo dessa sequência?

A) 16.

B) 20.

C) 23.

D) 29.

Comentários:

Observe que o enunciado nos forneceu dois termos e pede para determinarmos outro termo que está entre esses dois. Simplificadamente, isso é interpolar, tudo bem? **Quando precisamos deduzir um ou mais valores que estão entre outros dois**. Vamos resolver esse exercício para entender como devemos proceder no contexto das PAs. É importantíssimo notar que o enunciado falou que existem **6 termos entre o primeiro e o último**. Assim,

$$\left(\overset{\overset{a_1}{\uparrow}}{8}, \underbrace{a_2, a_3, a_4, a_5, \boldsymbol{a_6}, a_7}_{\text{6 termos entre o primeiro e o último}}, \overset{\overset{a_8}{\uparrow}}{29}\right)$$

O enunciado pede o sexto termo (a_6), por isso, o destaque em vermelho.

Pronto, temos o problema esquematizado. **Lembre-se sempre que com o primeiro termo e a razão, conseguimos determinar qualquer outro termo da sequência**. Nós temos o primeiro termo, falta encontrarmos a razão dessa PA. Como fazemos isso?! **Por meio da fórmula do termo geral**. Sabemos o a_1 e o a_8. Assim,

$$a_8 = a_1 + 7r \quad \rightarrow \quad 29 = 8 + 7r \quad \rightarrow \quad 21 = 7r \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{r = 3}$$

Com o primeiro termo e a razão, conseguimos encontrar o a_6.

$$a_6 = a_1 + 5r \quad \rightarrow \quad a_6 = 8 + 5 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad a_6 = 8 + 15 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_6 = 23}$$

Gabarito: LETRA C.

Soma dos n primeiros termos de uma PA

Existe mais uma fórmula dentro do universo da progressão aritmética que é a da **soma dos n primeiros termos**. Imagine que temos a seguinte PA: $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots)$. *Qual é a soma dos 100 primeiros termos?* Utilizando a fórmula da **soma dos n primeiros termos de uma PA**, podemos responder isso rapidamente.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

INDO MAIS FUNDO!

Vamos tentar chegar na fórmula acima de uma maneira simplificada? Primeiro, considere a seguinte PA: (1, 2, 3, 4, ..., 96, 97, 98, 99, 100). É uma PA com 100 termos e razão 1. Agora, observe o esquema abaixo:

$2 + 98 = 101$

$4 + 97 = 101$

$$(1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 97, 98, 99, 100)$$

$3 + 98 = 101$

$1 + 100 = 101$

A intenção é visualizar o seguinte: a soma do primeiro com o último termo é igual a soma do segundo com o penúltimo termo e assim sucessivamente. Assim, podemos escrever que:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \cdots$$

Quantos pares conseguiremos formar? Ora, se são 100 termos, então faremos 50 pares, isto é, n/2. A soma dos termos será exatamente a soma desses 50 pares, concorda? Todos eles valem $(a_1 + a_n)$. Portanto, basta multiplicarmos $(a_1 + a_n)$ por $\frac{n}{2}$, que é quantidade de pares. Assim,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Vamos utilizar a fórmula para calcular a soma da PA em análise. Substituindo na fórmula $a_1 = 1$, $a_{100} = 100$ e $n = 100$:

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2} \quad \rightarrow \quad S_{100} = (1 + 100) \cdot 50 \quad \rightarrow \quad S_{100} = 5050$$

Portanto, a soma dos 100 primeiros termos da progressão aritmética $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots)$ **é 5050**.

HORA DE PRATICAR!

(PREF. TAPEJARA /2019) A soma dos 50 primeiros termos da sequência numérica $(-10, -5, 0, \ldots)$ é:

A) 5500.

B) 5625.

C) 5725.

D) 5800.

E) 5925.

Comentários:

O enunciado quer a soma dos 50 primeiros termos. Você deve lembrar da fórmula.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Como são os 50 primeiros termos, temos que $\boldsymbol{n = 50}$. Além disso, o primeiro termo da sequência é -10. Assim, $\boldsymbol{a_1 = -10}$. Portanto, falta apenas achar a_{50} para conseguirmos usar a fórmula. Nesse intuito, devemos usar:

$$a_{50} = a_1 + 49r$$

Olhando para a sequência, percebemos que **a diferença entre um termo e o seu anterior é sempre igual a 5.** Logo, essa é a nossa razão ($\boldsymbol{r = 5}$).

$$a_{50} = -10 + 49 \cdot 5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_{50} = 235}$$

Pronto, temos todos os valores para usarmos a fórmula da soma.

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} \quad \rightarrow \quad S_{50} = (-10 + 235) \cdot 25 \quad \rightarrow \quad S_{50} = 225 \cdot 25 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S_{50} = 5.625}$$

Gabarito: LETRA B.

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Conceito

Na parte de progressões aritméticas, vimos que elas são caracterizadas pela presença de uma razão, que somamos ao termo anterior para obtermos o termo subsequente. **Na progressão geométrica, também teremos uma razão que entrará não somando o termo anterior, mas multiplicando-o**! Vamos com calma! São exemplos de PGs as seguintes sequências:

- $(2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots);$
- $(5, 25, 125, 625, \dots);$

Veja que, na primeira sequência acima, **cada termo subsequente é o dobro do anterior**. Na segunda sequência, multiplicamos cada próximo termo por 5 em relação ao termo passado. **Esses números que multiplicamos os termos são as razões de cada sequência e, no estudo das PGs, denotamos ela por q e não mais por r.**

Podemos também pensar em uma PG em termos do quociente. Para identificarmos uma PG, podemos olhar para o quociente de dois termos consecutivos. Lembre-se que na PA falávamos da diferença entre dois termos, aqui nas progressões geométricas, falaremos de quociente. Vamos pegar, por exemplo, a PG $(2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots)$. Note que:

$$\frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{32}{16} = \frac{64}{32} = 2$$

Portanto, **2 é a razão dessa progressão geométrica**. Genericamente, escrevemos assim,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \quad ou \quad a_n = q \cdot a_{n-1}$$

EXEMPLIFICANDO

(PREF. HONÓRIO SERPA/2019) Sobre Progressões Aritméticas e Geométricas, é correto afirmar que:
A) Uma Progressão Aritmética é uma sequência de números composta por um valor inicial e um outro valor fixo, que é multiplicado ao valor anterior para encontrar o próximo.
B) Uma Progressão Geométrica é uma sequência de números composta por um valor inicial e um outro valor fixo, que é adicionado ao valor anterior para encontrar o próximo.

C) Não há Progressão Geométrica ou Aritmética com números negativos.
D) Progressões Aritméticas de razão negativa geram sequências de números decrescentes.

Comentários:
A) Uma ~~**Progressão Aritmética**~~ é uma sequência de números composta por um valor inicial e um outro valor fixo, que é multiplicado ao valor anterior para encontrar o próximo.
ERRADO. O enunciado trocou as sequências. Na verdade, essa é a definição **de progressão geométrica** e não de progressão aritmética.

B) Uma ~~**Progressão Geométrica**~~ é uma sequência de números composta por um valor inicial e um outro valor fixo, que é adicionado ao valor anterior para encontrar o próximo.
ERRADO. Mais uma vez, o enunciado inverteu os conceitos. Na verdade, trata-se de uma progressão aritmética, não de progressão geométrica, conforme afirma a alternativa.

C) ~~**Não há**~~ Progressão Geométrica ou Aritmética com números negativos.
ERRADO. Pessoal, não há problema algum existir PAs e PGs com números negativos. Inclusive, ao longo da aula trabalhamos com vários exemplos em que eles estarão presentes.

D) Progressões Aritméticas de razão negativa geram sequências de números decrescentes.
CERTO. Essa é verdade! Conforme vimos anteriormente, **quando a razão é negativa, a PA será decrescente.**

Gabarito: LETRA D.

(PREF. JANDAIA DO SUL/2019) Assinale a alternativa que apresenta CORRETAMENTE uma diferença entre progressões aritméticas e progressões geométricas.
A) Uma progressão aritmética é composta por um termo inicial e um fator que é multiplicado várias vezes a este termo inicial, já em uma progressão geométrica, esse fator é somado várias vezes ao termo inicial.
B) Uma progressão aritmética não tem fim, já uma progressão geométrica sempre converge a um valor.
C) Em uma progressão aritmética, os elementos são formados a partir de somas de um fator, já em uma progressão geométrica, os elementos são formados a partir de multiplicações de um fator.
D) A principal diferença entre uma progressão aritmética e geométrica é que a primeira possui termo inicial, e a segunda não.

Comentários:
Mais uma questão para reforçamos a diferença entre PA e PG.

A) Uma progressão aritmética é composta por um termo inicial e um fator que é multiplicado várias vezes a este termo inicial, já em uma progressão geométrica, esse fator é somado várias vezes ao termo inicial.
ERRADO. Alternativa inverteu os conceitos de PA e PG. Fique esperto! Você deve ter começado a perceber que **as bancas gostam de inverter as duas**!

B) Uma progressão aritmética não tem fim, já uma progressão geométrica sempre converge a um valor.
ERRADO. Nada disso, pessoal. Uma **PA pode ter fim**, não tem nada que impeça isso. Ademais, veremos que **nem sempre uma progressão geométrica converge a um valor**.

C) Em uma progressão aritmética, os elementos são formados a partir de somas de um fator, já em uma progressão geométrica, os elementos são formados a partir de multiplicações de um fator.
CERTO. Dessa vez, temos os conceitos apresentados corretamente!

D) A principal diferença entre uma progressão aritmética e geométrica é que a primeira possui termo inicial, e a segunda não.
ERRADO. Pessoal, toda sequência numérica possuirá um termo inicial. Não há como uma sequência existir sem um termo inicial.

Gabarito: LETRA C.

Classificação

Para **avaliar se uma progressão geométrica é crescente ou decrescente**, fazemos uma análise um pouco mais elaborada do que fizemos nas PAs. Veja as duas PGs a seguir.

I. $(1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots)$
II. $(-1, -2, -4, -8, -16, -32, \dots)$

Note que a razão das sequências acima é a mesma ($q = 2$). No entanto, **a sequência I é crescente, enquanto a sequência II é decrescente**. Assim, uma análise apenas da razão é insuficiente para determinarmos se uma PG é crescente ou decrescente. *E para quem devemos olhar também?!* **Para o primeiro termo**!

- Para razões maior que um $(q > 1)$
  - Se o primeiro termo for positivo ($a_1 > 0$), então a PG é crescente.
  - Se o primeiro termo for negativo ($a_1 < 0$), então a PG é decrescente.

Agora, veja essas outras duas sequências:

III. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right)$
IV. $\left(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}\right)$

Mais uma vez, **as duas sequências acima possuem a mesma razão** $\left(q = \frac{1}{2}\right)$. No entanto, a sequência III é decrescente, enquanto a sequência IV é crescente. Mais uma vez, vamos precisar olhar para o primeiro termo.

- Para razões entre 0 e 1 $(0 < q < 1)$

- Se o primeiro termo for positivo $(a_1 > 0)$, então a PG é decrescente.
- Se o primeiro termo for negativo $(a_1 < 0)$, então a PG é crescente.

E quando a razão for igual a um $(q = 1)$? Nesses casos, **a PG será constante**. Veja alguns exemplos:

$$(1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$$
$$(-5, -5, -5, -5, \dots)$$

Por fim, quando a razão for negativa $(q < 0)$, vamos ter o que chamamos de **PG alternada**. Considere uma PG com a razão $q = -2$.

$$(1, -2, 4, -8, 16, -32, \dots)$$

Quando temos uma razão negativa a sequência ficará alternando de sinal! Vamos fazer um resumo!

PG	Condições	Exemplos
Crescente	$a_1 > 0$ e $q > 1$	$(1, 2, 4, 8, 16, \dots)$
	$a_1 < 0$ e $0 < q < 1$	$\left(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots\right)$
Decrescente	$a_1 > 0$ e $0 < q < 1$	$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$
	$a_1 < 0$ e $q > 1$	$(-1, -3, -9, -27, \dots)$
Alternada	$q < 0$	$(1, -2, 4, -8, 16, -32, \dots)$
Constante	$q = 1$	$(2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots)$

Termo Geral de uma PG

Assim como na PA, a PG possui uma fórmula para o termo geral em função da razão (q), do primeiro termo (a_1) e da ordem (n) do termo procurado.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Se, por acaso, você precisasse descobrir o a_{11} da sequência $(2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots)$, o que faria? Obviamente, uma **solução seria listar todos os termos até o a_{11}** sempre multiplicando o termo anterior por 2 para obter o termo subsequente. No entanto, você também poderia **aplicar a fórmula do termo geral:**

$$a_{11} = 2 \cdot 2^{11-1} \quad \rightarrow \quad a_{11} = 2 \cdot 2^{10} \quad \rightarrow \quad a_{11} = 2^{11} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_{11} = 2048}$$

HORA DE PRATICAR!

(PREF. VILA VELHA/2020) Numa Progressão Geométrica, o primeiro termo da sequência é igual a 4096 e a razão dessa progressão é igual a 1/2. Com base nessas informações, o valor do 14º termo é:
A) 2.
B) 1.
C) 1/4.
D) 1/2.
E) 4.

Comentários:
Questão para treinarmos a fórmula do **termo geral de uma progressão geométrica**.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

O enunciado nos forneceu $\boldsymbol{a_1 = 4096}$ **e** $\boldsymbol{q = 1/2}$. Como estamos procurando o 14º termo, então $\boldsymbol{n = 14}$.

$$a_{14} = a_1 \cdot q^{14-1} \quad \rightarrow \quad a_{14} = a_1 \cdot q^{13}$$

Substituindo os valores.

$$a_{14} = 4096 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13} \quad \rightarrow \quad a_{14} = \frac{4096}{2^{13}} \quad \rightarrow \quad a_{14} = \frac{4096}{8192} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_{14} = \frac{1}{2}}$$

Gabarito: LETRA D.

Progressão Geométrica de 3 termos

Assim como vimos na PA, também temos uma **progressão geométrica de três termos** que costuma aparecer bastante em provas. Para resolvê-la, é preciso saber uma propriedade importante. *Você lembra que na PA a média aritmética do primeiro e do terceiro termo é igual ao segundo termo?* Pronto. Vamos buscar uma relação parecida aqui, mas que envolva os três termos de uma PG. Como exemplo, considere a seguinte PG.

$$(2, 8, 32)$$

Na progressão geométrica acima, **a razão é 4**. Observe.

$$(2, 8, 32)$$

$$\times 4 \qquad \times 4$$

Podemos também imaginá-la da seguinte forma:

$$8/4 \qquad 8 \times 4$$

$$(2, 8, 32)$$

Note que **o primeiro termo é igual ao termo central <u>dividido</u> pela razão**. Analogamente, **o terceiro termo é o termo central <u>multiplicado</u> pela razão**. Vamos pegar esse raciocínio e aplicar para uma PG genérica.

$$a_2/q \qquad a_2 \times q$$

$$(a_1, a_2, a_3)$$

Vamos multiplicar o primeiro e o terceiro termo:

$$M = a_1 \cdot a_3 \quad \rightarrow \quad M = \left(\frac{a_2}{q}\right) \cdot (a_2 \cdot q) \quad \rightarrow \quad M = a_2^2$$

Perceba então que o produto do primeiro e do terceiro termo é igual ao quadrado do termo central! Assim,

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3$$

Professor, esse resultado é importante mesmo? É sim, pessoal! Ele vai nos possibilitar resolver questões muito mais rapidamente. Observe!

HORA DE PRATICAR!

(PREF. IBIAÇÁ/2019) A sequência $(x - 120;\ x;\ x + 600)$ forma uma progressão geométrica. O valor de x é:
A) 40.
B) 120.
C) 150.
D) 200.
E) 250.

Comentários:
Temos uma **PG de três termos**! Nesses casos, sabemos que podemos usar a seguinte relação:

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3$$

Olhando para a sequência dada, temos que:

$$a_1 = x - 120$$
$$a_2 = x$$
$$a_3 = x + 600$$

Substituindo na expressão:

$$x^2 = (x - 120) \cdot (x + 600)$$

Aplicando a **propriedade distributiva da multiplicação** no lado direito da equação acima, ficamos com:

$$\cancel{x^2} = \cancel{x^2} - 120x + 600x - 72000$$

$$480x = 72000$$

$$x = \frac{72000}{480} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 150}$$

Gabarito: LETRA C.

Interpolação de termos em uma PG

Você deve ter começado a perceber que há muita semelhança entre os tópicos de PA e PG. Aqui, também tentaremos determinar um ou mais termos entre outros dois. Um jeito bom de explicar esse tópico continua sendo por uma questão. Vamos lá?

HORA DE PRATICAR!

(PREF. VN DO IMIGRANTE /2016) A sequência a seguir é uma progressão geométrica decrescente composta por 5 termos:

$$1000, \_\_\_\_, \_\_\_\_, \_\_\_\_, \quad 8/5$$

A soma dos três termos que preenchem corretamente as lacunas nessa sequência é igual a:
A) 248.
B) 264.
C) 275.
D) 292.

Comentários:
Moçada, temos o a_1 e o a_5. Queremos determinar três termos que existem entre esses dois, sabendo que a PG é decrescente. Dessa forma, observe o esquema abaixo.

$$\underset{\overset{\downarrow}{a_1}}{1000}, \ \underline{\ a_2\ }, \ \underline{\ a_3\ }, \ \underline{\ a_4\ }, \ \underset{\overset{\downarrow}{a_5}}{8/5}$$

Quando estamos diante situações como essa. O primeiro passo é descobrir a razão. Lembre-se que com o primeiro termo e a razão, podemos encontrar qualquer termo de uma PA ou PG. Nesse intuito, **vamos usar a fórmula do termo geral para relacionar a_1 e a_5**, que são os dois valores que possuímos.

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 \quad \rightarrow \quad \frac{8}{5} = 1000 \cdot q^4 \quad \rightarrow \quad q^4 = \frac{8}{5000} \quad \rightarrow \quad q^4 = \frac{1}{625} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{q = \frac{1}{5}}$$

Como a razão determinada, podemos encontrar a_2, a_3 e a_4.

$$a_2 = a_1 \cdot q \quad \rightarrow \quad a_2 = 1000 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_2 = 200}$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 \quad \rightarrow \quad a_3 = 1000 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \quad \rightarrow \quad a_3 = \frac{1000}{25} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_3 = 40}$$

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 \quad \rightarrow \quad a_4 = 1000 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \quad \rightarrow \quad a_4 = \frac{1000}{125} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_4 = 8}$$

Pronto, o enunciado pede a soma desses três valores.

$$a_2 + a_3 + a_4 = 200 + 40 + 8 = 248$$

Gabarito: LETRA A.

Pessoal, para interpolar termos, precisamos sempre **determinar a razão da progressão**. Vamos fazer isso utilizando a fórmula do termo geral. A intenção desse tópico é apenas deixá-lo esperto para esse tipo de cobrança. No fundo, **não envolve conhecimentos novos**. É apenas uma forma de aplicarmos o que já vimos. Tudo bem? Vamos prosseguir então!

Soma dos termos de uma PG

E como faríamos para obter a soma de n primeiros termos de uma progressão geométrica? Assim como na PA, também podemos somar os termos de uma PG por meio de uma fórmula. Visualize-a.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Essa é a **fórmula da soma dos n primeiro termos de uma PG**. Como exemplo, vamos calcular a soma dos 11 primeiros termos da PG $(2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots)$:

Primeiro passo é identificar a razão. Veja que um termo é sempre o dobro do anterior. Assim, $q = 2$. Além da razão, **também precisamos do primeiro termo**. Ao olhar para a sequência do exemplo, tiramos que $a_1 =$

2. Como estamos procurando a soma dos 11 primeiros termos, então $\boldsymbol{n = 11}$. Basta substituir esses valores na fórmula, vamos lá?

$$S_{11} = \frac{2 \cdot (2^{11} - 1)}{2 - 1} \quad \rightarrow \quad S_{11} = \frac{2 \cdot (2048 - 1)}{1} \quad \rightarrow \quad S_{11} = 2 \cdot 2047 \quad \rightarrow \quad S_{11} = 4094$$

Galera, essa é **a soma dos n primeiros termos**. No entanto, **uma sequência é tão grande quanto você queira** e caso ela tenha infinitos termos, sob algumas condições, você poderá somar todos eles por meio de uma fórmula específica. Vamos detalhar isso um pouco mais.

Continue considerando a PG que estávamos trabalhando: $(2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots)$. Observe que **os termos continuam aumentando cada vez mais**, de modo que a soma dos infinitos termos certamente também dará um **número estratosférico (infinito).**

Agora, imagine que estamos com a sequência $\left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$. Note que se trata de uma P.G. com razão $q = \frac{1}{2}$. **Os termos vão se tornando cada vez menores**. Com isso, a soma vai tender a se "estabilizar" em um valor e poderemos calculá-lo. Vamos ver?

- Soma dos dois primeiros termos: $2 + 1 = \mathbf{3}$
- Soma dos três primeiros termos: $2 + 1 + 1/2 = \mathbf{3,5}$
- Soma dos quatro primeiros termos: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \mathbf{3,75}$
- Soma dos cinco primeiros termos: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \mathbf{3,875}$
- Soma dos sete primeiros termos: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \mathbf{3,9375}$
- Soma dos oito primeiros termos: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \mathbf{3,96875}$
- Soma dos nove primeiros termos: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \mathbf{3,984375}$
- Soma dos dez primeiros termos: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \mathbf{3,9921875}$

Galera, vocês conseguem perceber que nossa primeira soma foi igual a 3 e depois de somar vários outros termos **não passamos nem do número 4**? Isso porque **os termos diminuem cada vez mais e mais**. O limite da soma quando o número de termos tender ao infinito será exatamente 4. A fórmula que nos fornece esse valor é:

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - q}$$

Essa é **a fórmula da soma dos infinitos termos de uma PG**. Ressalto que ela **só será válida <u>quando o módulo da razão for menor do que um</u>, isto é, $|q| < 1$**. Agora, vamos ver na prática!

HORA DE PRATICAR!

(SEFAZ-RS/2018) Sobre uma mesa há 9 caixas vazias. Em uma dessas caixas, será colocado um grão de feijão; depois, em outra caixa, serão colocados três grãos de feijão. Prosseguindo-se sucessivamente, será escolhida uma caixa vazia, e nela colocada uma quantidade de grãos de feijão igual ao triplo da quantidade colocada na caixa anteriormente escolhida, até que não reste caixa vazia. Nessa situação, nas 9 caixas será colocada uma quantidade de grãos de feijão igual a

A) $\frac{3^9-1}{2}$

B) $3^9 - 1$

C) $\frac{3^{10}-1}{2}$

D) $3^{10} - 1$

E) $\frac{3^8-3}{2}$

Comentários:

Pessoal, temos 9 caixas. Na primeira caixa será colocado um único grão de feijão, depois será colocado 3 grãos em outra, depois o triplo (9) e assim sucessivamente... Veja que está sendo formado uma sequência muito conhecida:

$$(1, 3, 9, 27, 81, \dots)$$

Portanto, temos uma **P.G. de razão 3**. O enunciado pede a soma de todos os grãos colocados nas caixas. Em outras palavras, queremos **a soma dos 9 primeiros termos** dessa sequência (são 9 caixas). Lembre-se:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Olhando para a sequência, tiramos que $a_1 = 1$, $q = 3$ e $n = 9$. Logo,

$$S_9 = \frac{1 \cdot (3^9 - 1)}{3 - 1} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S_9 = \frac{3^9 - 1}{2}}$$

Gabarito: LETRA A.

(CRMV-ES/2018) Marque a alternativa que apresente a soma da progressão geométrica infinita abaixo.

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$$

A) 1

B) $\frac{5}{3}$

C) $\frac{2}{5}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{4}{3}$

Comentários:

Pessoal, questão apenas para testarmos o que vimos. O enunciado quer a soma da progressão geométrica infinita dada. Sabemos que **a soma dos termos de uma P.G. infinita** é dada por:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

Para calcular essa soma, basta sabermos **o primeiro termo (a_1) e a razão (q)**. Olhando para a sequência do enunciado, temos que $a_1 = 1$. Além disso, a razão pode ser encontrada dividindo dois termos consecutivos:

$$q = \frac{a_2}{a_1} \quad \rightarrow \quad q = \frac{\frac{1}{4}}{1} \quad \rightarrow \quad q = \frac{1}{4}$$

Veja que $|q| < 1$ e, portanto, **a fórmula é aplicável**. Substituindo os valores de a_1 e q:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} \quad \rightarrow \quad S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \quad \rightarrow \quad S_\infty = \frac{1}{\frac{3}{4}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S_\infty = \frac{4}{3}}$$

Gabarito: LETRA E.

INDO MAIS FUNDO!

Algumas vezes, a soma de termos de uma progressão aritmética ou geométrica pode vim representada por meio do **símbolo do somatório**.

$$\sum$$

Você não precisa ter medo dele. **Ele existe para ajudar**. Ao invés de escrevermos longas somas, podemos simplesmente optar por essa notação. Isso resulta em **expressões mais enxutas**. Por exemplo,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

pode ser escrita na seguinte forma.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

A parte que fica abaixo do símbolo ($i = 1$) nos informa **quem é o índice** e seu **valor inicial**. Nesse caso, temos que o índice é o "i" e ele começará do valor "1". Por sua vez, o "n", que fica na parte superior do somatório, indica o valor de índice que pararemos a soma. Assim, sabemos que o índice i variará de "1" até "n".

Na parte central do somatório, teremos a expressão que comporá **cada termo da soma**. Pode ser que ainda esteja obscuro, mas vamos visualizar alguns exemplos.

Exemplo 1:

$$\sum_{i=1}^{5} 2^i = 2^{\mathbf{1}} + 2^{\mathbf{2}} + 2^{\mathbf{3}} + 2^{\mathbf{4}} + 2^{\mathbf{5}}$$

Note que a expressão acima pode representar a soma dos **5 primeiros termos de uma PG** com primeiro termo igual a 2 e razão igual 2.

$$(2, 4, 8, 16, 32)$$

Exemplo 2:

$$\sum_{i=1}^{4} (1 + i) = (1 + \mathbf{1}) + (1 + \mathbf{2}) + (1 + \mathbf{3}) + (1 + \mathbf{4}) = 2 + 3 + 4 + 5$$

A expressão acima pode ser interpretada como a soma dos **4 primeiros termos de uma PA** com primeiro termo igual a 2 e razão igual 1.

$$(2, 3, 4, 5)$$

Exemplo 3:

$$\sum_{i=1}^{5} 3^{-i} = 3^{-1} + 3^{-2} + 3^{-3} + 3^{-4} + 3^{-5} \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{5} 3^{-i} = \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5}$$

O somatório acima pode representar a soma dos 5 primeiros termos de uma PG de $a_1 = \frac{1}{3}$ e razão $q = \frac{1}{3}$.

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \dots\right)$$

Exemplo 4:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^i} = \frac{(-1)^1}{2^1} + \frac{(-1)^2}{2^2} + \frac{(-1)^3}{2^3} + \frac{(-1)^4}{2^4} + \cdots \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^i} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots$$

O somatório acima pode representar a **soma infinita** de uma PG com $a_1 = -\frac{1}{2}$ e $q = -\frac{1}{2}$.

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right)$$

Certo, aprendi que esses somatórios podem representar soma de termos de uma progressão aritmética ou geométrica. Mas, e aí professor?

Pessoal, se esses somatórios podem representar somas de progressões aritméticas ou geométricas, então **podemos calculá-los usando as fórmulas que aprendemos.** Por exemplo, se você perceber que o somatório pode representar a soma de n termos de uma PG, para calculá-lo, você poderá utilizar a fórmula:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Com isso, **vamos tentar tirar do somatório apenas os valores de a_1 e q**, para depois aplicarmos na fórmula em uma fórmula que já conhecemos.

(CRM-MT/2020) Seja a progressão geométrica definida pela sucessão de termos infinitos do somatório $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{4}{5^i}$. Assinale a alternativa que indica corretamente o valor para o qual essa série converge.

A) 1

B) 3

C) 5

D) 7

Comentários:

O enunciado fala de **progressão geométrica e de termos infinitos**. A fórmula que deve vir imediatamente a cabeça é:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

Ademais, ele também falou de um somatório.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{4}{5^i} = \frac{4}{5^0} + \frac{4}{5^1} + \frac{4}{5^2} + \frac{4}{5^3} + \cdots \quad \rightarrow \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{4}{5^i} = \frac{4}{1} + \frac{4}{5} + \frac{4}{25} + \frac{4}{125} + \cdots$$

O enunciado já nos falou que essa soma representa a soma de uma PG. Assim, o primeiro termo dessa sequência é $\boldsymbol{a_1 = 4}$. Para encontrar a razão, podemos **dividir dois termos consecutivos**.

$$q = \frac{a_2}{a_1} \quad \rightarrow \quad q = \frac{\frac{4}{5}}{4} \quad \rightarrow \quad q = \frac{1}{5}$$

Agora, é só aplicarmos a fórmula da soma infinita da PG.

$$S_\infty = \frac{4}{1-\frac{1}{5}} \quad \rightarrow \quad S_\infty = \frac{4}{\frac{4}{5}} \quad \rightarrow \quad S_\infty = 5$$

Gabarito: LETRA C.

Produto dos n primeiros termos de uma PG

Nesse tópico, esticaremos um pouco a baladeira para ficarmos 100% preparados para a prova. No estudo da PG, existe uma fórmula que não possui semelhante no estudo da PA. Além da soma, também existe o produto dos n primeiros termos!

$$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Você deve estar **interessado em saber como chegamos na fórmula acima**. Considere a PG: $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$. Queremos saber o produto nos n primeiros termos. Lembre-se:

$a_1 = a_1$
$a_2 = a_1 \cdot q$
$a_3 = a_1 \cdot q^2$
...
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

O produto dos n primeiros termos é:

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$$

Substituindo:

$$P_n = a_1 \cdot (a_1 \cdot q) \cdot (a_1 \cdot q^2) \cdot (a_1 \cdot q^3) \dots \cdot (a_1 \cdot q^{n-1})$$

$$P_n = a_1^n \cdot q^{1+2+3+\cdots+(n-1)}$$

Lembre-se que **o produto de potências de mesma base**, nós conservamos a base e somamos os expoentes. Ademais, a soma $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$ pode ser interpretada como **a soma dos $(n-1)$ termos de uma PA**. Assim, podemos usar a fórmula que vimos lá em PA para calcular essa soma.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \quad \rightarrow \quad S_n = \frac{\big(1 + (n-1)\big)(n-1)}{2} \quad \rightarrow \quad S_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

Pronto! Esse é o resultado daquela soma no expoente do q.

$$\boldsymbol{P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

Pessoal, essa é a forma mais comum de apresentar o produto dos n primeiros termos de uma PG. No entanto, existe uma fórmula "mais apresentável":

$$P_n = (a_1 . a_n)^{\frac{n}{2}}$$

Ela é obtida manipulando algebricamente a expressão que já deduzimos. Qualquer uma delas vai oferecer o mesmo resultado para o produto, tudo bem?

HORA DE PRATICAR!

(ESFCEX/2021) Considere uma progressão geométrica em que o primeiro termo é igual a 1 e a razão é igual a $\sqrt{2}$. Sabendo-se que o produto dos termos dessa progressão é 2^{18} e que $P_n = (a_1 . a_n)^{n/2}$, então o número de termos dessa progressão é igual a

A) 8.
B) 9.
C) 7.
D) 6.
E) 12.

Comentários:

O enunciado nos forneceu as seguintes informações:

$$a_1 = 1$$
$$q = \sqrt{2}$$
$$P_n = 2^{18}$$

Como o enunciado pede **o número de termos dessa progressão**, ele está nos perguntando quem é n. Veja que temos o primeiro termo e a razão, uma fórmula melhor para trabalhar seria:

$$\boldsymbol{P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

Caso não se lembrasse, você poderia substituir $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ na expressão fornecida no enunciado, que obteria a mesma coisa! Faça o teste!

$$2^{18} = 1^n \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Como $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, fazemos:

$$2^{18} = 2^{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{n(n-1)}{2}} \quad \rightarrow \quad 2^{18} = 2^{(n^2-n)/4}$$

De equações exponenciais, sabemos que **quando temos a mesma base, podemos igualar os expoentes**.

$$18 = \frac{n^2 - n}{4} \quad \rightarrow \quad n^2 - n = 72 \quad \rightarrow \quad n^2 - n - 72 = 0$$

Precisamos resolver essa equação de segundo. Devemos usar **Bhaskara**.

- Cálculo do Discriminante (Δ)

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \rightarrow \quad \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-72) \quad \rightarrow \quad \Delta = 1 + 288 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\Delta = 289}$$

- Cálculo das raízes (n_1 e n_2)

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \rightarrow \quad n_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{289}}{2 \cdot 1} \quad \rightarrow \quad n_1 = \frac{1 - 17}{2} \quad \rightarrow \quad n_1 = -8$$

$$n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \rightarrow \quad n_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{289}}{2 \cdot 1} \quad \rightarrow \quad n_2 = \frac{1 + 17}{2} \quad \rightarrow \quad n_2 = 9$$

A raiz negativa não tem sentido para nós, uma vez que estamos querendo saber o número de termos da progressão (é necessariamente um número maior que zero). Assim, **apenas a raiz positiva nos interessa**.

$$\boldsymbol{n = 9}$$

Gabarito: LETRA B.

QUESTÕES COMENTADAS

Sequências Numéricas

Outras Bancas

1. (RBO/PREF. NAVEGANTES/2022) Na sequência: 2, 3, 4, 7, 8, 9, 12, 13, ... os próximos três números são:

A) 14, 17, 18

B) 14, 15, 16

C) 16, 17, 18

D) 16, 19, 20

E) 15, 16, 17

Comentários:

Para responder essa questão, precisamos decifrar **o padrão da sequência** do enunciado.

Para isso, visualize a imagem abaixo.

$$2,\ 3,\ 4,\ 7,\ 8,\ 9,\ 12,\ 13,\ \ldots$$

$$+1 \quad +1 \quad +3 \quad +1 \quad +1 \quad +3 \quad +1 \quad +1$$

Assim, veja que o padrão é esse: **aumenta 1, aumenta 1, aumenta 3. <u>Repete</u>**.

Sabendo disso, podemos determinar **os próximos três números**.

$$2,\ 3,\ 4,\ 7,\ 8,\ 9,\ 12,\ 13,\ 14,\ 17,\ 18$$

$$+1 \quad +1 \quad +3 \quad +1 \quad +1 \quad +3 \quad +1 \quad +1 \quad +3 \quad +1$$

Gabarito: LETRA A.

2. (IBADE/CRM AC/2022) Qual é o próximo termo da sequência (1, - 2, 7, - 20, ...)?

A) 61

B) 27

C) 52

D) 35

E) 31

Comentários:

Vamos decifrar **o padrão da sequência.** Para isso, visualize o esquema abaixo.

$$\mathbf{1, -2, 7, -20, \ldots}$$

$$-3 \quad +9 \quad -27$$

A primeira coisa que devemos perceber é que **uma hora subtraímos** e **outra hora somamos** algum número.

Depois, note que as quantidades subtraídas e somadas são as **potências de 3**.

Primeiro, **subtraímos** **3** $(\mathbf{3^1})$.
Depois, **somamos** **9** $(\mathbf{3^2})$..
Depois, **subtraímos** **27** $(\mathbf{3^3})$..
Agora, **somamos** **81** $(\mathbf{3^4})$. (que é a **próxima potência de 3**).

Com isso, o próximo termo de sequência é:

$$-20 + 81 = 61$$

Gabarito: LETRA A.

3. (INST. MAIS/PREF. PRAIA GRANDE/2022) Dada a sequência -1, 0, 3, 8, 15, x, 35, y e 63, assinale a alternativa que apresenta o valor de $x + y$.

A) 48.
B) 55.
C) 72.
D) 96.

Comentários:

Vamos lá, moçada! Mais uma questão sobre sequências numéricas. Para isso, veja o esquema que fiz abaixo.

$$\mathbf{-1, 0, 3, 8, 15, \boldsymbol{x}, 35, \boldsymbol{y}, 63}$$

$$+1 \quad +3 \quad +5 \quad +7 \quad +9 \quad +11 \quad +13 \quad +15$$

Observe que **os números sempre <u>aumentam</u>**. Mas eles aumentam quanto? Sempre **o próximo ímpar**.

De início, aumentou **1**.
Depois, aumentou **3**.

Depois, aumentou **5**.
Depois, aumentou **7**.

Assim, *do "15" para o "x" vai aumentar quanto?!* **Vai aumentar 9, pois é o próximo ímpar**. Depois 11, depois, 13 e, por fim, 15. Com isso, podemos escrever.

$$x = 15 + 9 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 24}$$

$$y = 35 + 13 \quad \rightarrow \quad \boxed{y = 48}$$

O enunciado pede a soma $x + y$

$$x + y = 24 + 48 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{x + y = 72}}$$

Gabarito: LETRA C.

4. (IDIB/GOINFRA/2022) Seja a sequência $\{4, \frac{11}{3}, \frac{10}{3}, 3, x, \ldots\}$. Determine o valor de x para que a sequência continue seguindo o mesmo padrão.
A) $x = 0$
B) $x = 1/3$
C) $x = 4/3$
D) $x = 5/3$
E) $x = 8/3$

Comentários:
Para começar, visualize o esquema abaixo.

$$4 \xrightarrow{-\frac{1}{3}} \frac{11}{3} \xrightarrow{-\frac{1}{3}} \frac{10}{3} \xrightarrow{-\frac{1}{3}} 3 \xrightarrow{-\frac{1}{3}} x, \ldots$$

Observe que os números da sequência **estão diminuindo**, indicando que uma determinada quantidade está sendo subtraída dos termos. Para determinarmos essa quantidade, **fazemos a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos**. Com isso, percebemos que a quantidade subtraída de cada termo é igual a 1/3. Destarte, o próximo termo da sequência é:

$$x = 3 - \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad x = \frac{9-1}{3} \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \frac{8}{3}}$$

Gabarito: LETRA E.

5. (IDECAN/PM-CE/2023) Os boletins de ocorrência curiosamente têm aumentado no decorrer dos anos de acordo com o seguinte conjunto de números ordenados {0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, ...}. Essa sequência é dita de recorrência, em que $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$. Qual a lei de formação que define o padrão desses números e quantos boletins de ocorrência foram expedidos no nono ano conforme esta sequência?

A) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ e $171.$
B) $a_n = a_{n-1} + 2.a_{n-2}$ e $341.$
C) $a_n = a_{n-1} + 2.a_{n-2}$ e $171.$
D) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ e $427.$
E) $a_n = 2.a_{n-2}$ e $170.$

Comentários:

A sequência que temos que analisar é:

$$\{0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, \ldots\}$$

Vamos organizá-la de uma forma a facilitar a visualização de cada um dos termos.

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
0	1	1	3	5	11	21	43	85	?

Em um primeiro momento, é difícil perceber qual o padrão seguido. No entanto, nesse tipo de questão, **use as alternativas a seu favor!** O padrão está em alguma delas, basta testarmos!

A) D) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Esse padrão nos diz que um termo é a soma dos dois anteriores. Podemos testar, veja que:

$$a_3 \neq a_2 + a_1$$

Portanto, **<u>não</u> pode ser a lei de formação que estamos procurando**! Ela já falha no primeiro caso!

B) C) $a_n = a_{n-1} + 2.a_{n-2}$

Esse padrão diz que um termo é a soma do anterior com o dobro do "anterior do anterior". Vamos testar:

$$a_3 = a_2 + 2a_1 = 1 + 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3 \checkmark$$

Opa! O primeiro deu certo! Vamos testar mais.

$$a_4 = a_3 + 2a_2 = 3 + 2 \cdot 1 = 3 + 2 = 5 \checkmark$$

$$a_5 = a_4 + 2a_3 = 5 + 2 \cdot 3 = 5 + 5 = 11 \checkmark$$

$$a_6 = a_5 + 2a_4 = 11 + 2 \cdot 5 = 11 + 10 = 21 \checkmark$$

$$a_7 = a_6 + 2a_5 = 21 + 2 \cdot 11 = 21 + 22 = 43 \checkmark$$

$$a_8 = a_7 + 2a_6 = 43 + 2 \cdot 21 = 43 + 42 = 85 \checkmark$$

Galera, veja que bateu certinho todos! Portanto, essa é a lei de formação que estamos procurando! Agora, calma! **Temos duas alternativa**s que apresentam a mesma lei de formação: a "B" e a "C". Precisamos determinar o a_9 para marcar a correta.

$$a_9 = a_8 + 2a_7$$

$$a_9 = 85 + 2 \cdot 43$$

$$a_9 = 85 + 86$$

$$\boxed{\boldsymbol{a_9 = 171}}$$

Opa! Agora sim podemos marcar a alternativa C.

Gabarito: LETRA C.

6. (IBADE/CRC-RO/2022) Uma sequência numérica é uma lista formada por números que possui uma ordem, geralmente, bem definida. Dessa forma, determine o valor da metade do próximo termo da sequência

$$\boldsymbol{0, 2, 6, 38, \ldots}$$

A) 1446
B) 1200
C) 650
D) 76
E) 723

Comentários:

Questãozinha com uma sequência que pode dar um trabalho para pegar! Com algum traquejo, conseguimos perceber que o próximo termo é formado pela **soma do quadrado do termo anterior com o 2**. Observe!

$$a_2 = a_1^2 + 2 \quad \rightarrow \quad a_2 = 0^2 + 2 \quad \rightarrow \quad a_2 = 0 + 2 \quad \rightarrow \quad a_2 = 2$$

$$a_3 = a_2^2 + 2 \quad \rightarrow \quad a_3 = 2^2 + 2 \quad \rightarrow \quad a_3 = 4 + 2 \quad \rightarrow \quad a_3 = 6$$

$$a_4 = a_3^2 + 2 \quad \rightarrow \quad a_4 = 6^2 + 2 \quad \rightarrow \quad a_4 = 36 + 2 \quad \rightarrow \quad a_4 = 38$$

Uma vez determinada a **lei de formação**, podemos calcular o próximo termo.

$$a_5 = a_4^2 + 2 \quad \rightarrow \quad a_5 = 38^2 + 2 \quad \rightarrow \quad a_5 = 1444 + 2 \quad \rightarrow \quad a_5 = 1446$$

A questão pede **a metade** desse valor!

$$R = \frac{a_5}{2} \quad \rightarrow \quad R = \frac{1446}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{R = 723}$$

Gabarito: LETRA E.

7. (FUNDATEC/CM BAGÉ/2022) Observe a seguinte sequência: $\{18, 37, 75, \ldots\}$. O próximo termo da sequência, mantendo o padrão lógico, será:

A) 147.
B) 148.
C) 149.
D) 150.
E) 151.

Comentários:

Observe que do primeiro para o segundo termo, aumentou 19.

Por sua vez, do segundo para o terceiro termo, aumentou 38 (**o dobro de 19**).

É de se esperar que, mantendo o padrão lógico, do terceiro para o quarto aumente 76 (**o dobro de 38**).

Assim, ficamos com:

$$18 \xrightarrow{+19} 37 \xrightarrow{+38} 75 \xrightarrow{+76} \boxed{151}$$

Com isso, podemos marcar a alternativa E.

Gabarito: LETRA E.

8. (Inst. AOCP/AGESAN-RS/2022) Considerando a lei de formação da sequência de números quadrados (1, 4, 9, 16, 25, 36, ...) e a lei de formação da sequência de números triangulares (1, 3, 6, 10, 15, ...), é possível

determinar qualquer elemento, em especial, de cada sequência. Diante do exposto, assinale a alternativa que apresenta a soma do décimo número quadrado ao décimo número triangular.

A) 126

B) 136

C) 155

D) 176

E) 187

Comentários:

Questão bacana! Vamos colocar essas sequências em uma tabela para melhor visualizar o que acontece.

Números Quadrados	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2
	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Assim, a **lei de formação** dos números quadrados é:

$$a_n = n^2$$

Por sua vez, nos **números triangulares**, temos:

Números Triangulares	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
	1 $+0$	2 $+1$	3 $+3$	4 $+6$	5 $+10$	6 $+15$	7 $+21$	8 $+28$	9 $+36$	10 $+45$
	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

Com isso, podemos dizer que a lei de formação dos **números triangulares** é:

$$a_n = n + a_{n-1}$$

Obs.: existem outras formas de se determinar o n-ésimo número triangular.

Observe que na própria questão já fomos até o <u>**décimo termo**</u>, de forma que podemos somá-los para obter a resposta do exercício. Assim:

$$S = a_{10,q} + a_{10,t} \quad \rightarrow \quad S = 100 + 55 \quad \rightarrow \quad \boxed{S = 155}$$

Gabarito: LETRA C.

9. (IDIB/CRF-MS/2021) Os seguintes números estão dispostos em uma sequência: 1, 3, 2, 5, 4, 8, 7, X. Assinale o valor de X para que o próximo termo obedeça a sequência.

A) 12

B) 11

C) 10

D) 9

Comentários:

Vamos lá! Vou escrever a sequência de uma forma melhor de visualizar o padrão! Acompanhe:

$$1 \overset{+2}{\rightarrow} 3 \overset{-1}{\rightarrow} 2 \overset{+3}{\rightarrow} 5 \overset{-1}{\rightarrow} 4 \overset{+4}{\rightarrow} 8 \overset{-1}{\rightarrow} 7 \overset{+5}{\rightarrow} X$$

Observe que uma hora nós **somamos um número**, na outra, nós **subtraímos 1**. O número que é somado sobe uma unidade à medida que vamos avançando na sequência. Com isso:

$$X = 7 + 5 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{X = 12}$$

Gabarito: LETRA A.

10. (IBADE/ISE-AC/2021) Considere a sequência abaixo.

$$\mathbf{10, 25, 70, 205, \ldots}$$

A alternativa que corresponde ao termo que falta na sequência é:

A) 610.

B) 430.

C) 600.

D) 470.

E) 570.

Comentários:

Vamos visualizar o que está acontecendo!

$$10 \overset{+15}{\rightarrow} 25 \overset{+45}{\rightarrow} 70 \overset{+135}{\rightarrow} 205 \overset{+405}{\rightarrow} X$$

Observe que primeiro soma-se 15.

Depois, soma-se 45 (o triplo de 15).

Depois, soma-se 135 (o triplo de 45).

É de se esperar, mantendo **o padrão lógico**, que a próxima soma seja de 405 (o triplo de 135). Com isso:

$$X = 205 + 405 \quad \rightarrow \quad \boxed{X = 610}$$

Gabarito: LETRA A.

FGV

11. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) Na sequência a seguir são utilizados apenas os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5, e seus elementos obedecem a um determinado padrão.

$$\mathbf{1\ 2\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 4\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 2\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 4\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 2\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 4\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 2\ 1\ 2\ 3\ 4 \ldots}$$

O 500º termo dessa sequência é:

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Comentários:

Problemas de Raciocínio Sequencial nos exigem sempre a determinação dos padrões da sequência. Algumas vezes tal tarefa pode ser mostrar bem penosa, mas observe que nessa questão temos um padrão bem claro!

$$\underbrace{\mathbf{1\ 2\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 4\ 5\ 4\ 3\ 2}}_{\mathbf{1^a\ vez}}\ \underbrace{\mathbf{1\ 2\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 4\ 5\ 4\ 3\ 2}}_{\mathbf{2^a\ vez}}\ \underbrace{\mathbf{1\ 2\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 4\ 5\ 4\ 3\ 2}}_{\mathbf{3^a\ vez}}\ \mathbf{1\ 2\ 1\ 2\ 3\ 4 \ldots}$$

Observe que a sequência de 12 (doze) números $\mathbf{1\ 2\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 4\ 5\ 4\ 3\ 2}$ é o que se repete.

Beleza, professor! Já vi que esses 12 números ficam se repetindo. Mas, como faço para obter o 500º termo?

Para isso, podemos seguir um pequeno procedimento. O primeiro passo é dividir 500 por 12.

$$\frac{500}{12} = 41{,}66 \ldots$$

Por quê?

Ao fazer essa divisão inicial, conseguimos descobrir quantas vezes a sequência de 12 números aparece por completo. Observe que quando dividimos 500 por 12, o resultado foi **41 e uns quebrados**... Isso significa que até o 500º termo, a sequência **1 2 1 2 3 4 5 4 5 4 3 2** apareceu 41 vezes por inteiro!!

E o segundo passo?

O segundo passo é descobrir em qual termo a sequência completa essa 41ª aparição. Para isso. Devemos multiplicar 41 por 12.

$$41 \cdot 12 = 492$$

Pronto! Esse resultado nos indica que no 492º termo, completa-se mais um ciclo. Vamos esquematizar.

$$\underbrace{\underbrace{1\,2\,1\,2\,3\,4\,5\,4\,5\,4\,3\,2}_{1^{\text{a}}\text{ vez}}\ \underbrace{1\,2\,1\,2\,3\,4\,5\,4\,5\,4\,3\,2}_{2^{\text{a}}\text{ vez}}\ \ldots\ldots\ldots\ \underbrace{1\,2\,1\,2\,3\,4\,5\,4\,5\,4\,3\,2}_{41^{\text{a}}\text{ vez}}}_{\textbf{492 termos aqui dentro}}\ 1\,2\,1\,2\,3\,4\,5\,\underset{\Uparrow}{4}\ldots$$

Agora, observe que para chegarmos até o 500º termos, basta escrevermos os próximos 8 termos. Ao fazer isso, vemos que o 500º termo é o "4".

Gabarito: LETRA D.

▪

12. (FGV/SEFAZ-AM/2022) Uma sequência de números inteiros é tal que cada termo, a partir do terceiro, é a soma do seu termo antecessor com o dobro do antecessor do antecessor. Sabe-se que o sexto termo dessa sequência é 85 e, o oitavo, é 341. O quarto termo da referida sequência é

A) 15.
B) 17.
C) 19.
D) 21.
E) 23.

Comentários:

Questão bem legal! Vamos analisar a informação crucial:

"Cada termo, a partir do terceiro, **é a soma do seu antecessor com o dobro do antecessor do antecessor**."

Na prática, temos o seguinte:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_2$$
$$a_3 = a_2 + 2a_1 \qquad (1)$$
$$a_4 = a_3 + 2a_2 \qquad (2)$$

$$a_5 = a_4 + 2a_3 \qquad (3)$$
$$a_6 = a_5 + 2a_4 \qquad (4)$$
$$a_7 = a_6 + 2a_5 \qquad (5)$$
$$a_8 = a_7 + 2a_6 \qquad (6)$$

Escrevi até a equação (6) pois **o enunciado deu o oitavo $(a_8 = 341)$ e o sexto $(a_6 = 85)$** termo. Com isso, por meio de (6), podemos encontrar o a_7.

$$a_8 = a_7 + 2a_6 \quad \rightarrow \quad 341 = a_7 + 2 \cdot 85 \quad \rightarrow \quad a_7 = 341 - 170 \quad \rightarrow \quad a_7 = 171$$

Com o valor de a_7, podemos usar a equação (5) para encontrar a_5.

$$a_7 = a_6 + 2a_5 \quad \rightarrow \quad 171 = 85 + 2 \cdot a_5 \quad \rightarrow \quad 86 = 2a_5 \quad \rightarrow \quad a_5 = 43$$

Com o valor de a_5, podemos usar a equação (4) para **encontrar a_4.**

$$a_6 = a_5 + 2a_4 \quad \rightarrow \quad 85 = 43 + 2a_4 \quad \rightarrow \quad 42 = 2a_4 \quad \rightarrow \quad \boxed{a_4 = 21}$$

Pronto! Podemos marcar a alternativa D.

Gabarito: LETRA D.

13. (FGV/CM ARACAJU/2021) Sejam:

$$X = 2 + 4 + 6 + \ldots + 96 + 98 \quad \text{e} \quad Y = 1 + 3 + 5 + \ldots + 95 + 97.$$

O valor de $X - Y$ é:
A) 2;
B) 49;
C) 50;
D) 51;
E) 102.

Comentários:
Questão bem interessante! Temos:

$$X = 2 + 4 + 6 + \ldots + 96 + 98$$
$$Y = 1 + 3 + 5 + \ldots + 95 + 97$$

Antes de qualquer coisa, é bom fazermos algumas **observações <u>iniciais</u>**:

- X e Y contém apenas números entre 1 e 98.
- X é a soma dos termos **pares** de 1 até 98.
- Y é a soma dos termos **ímpares** de 1 até 98.

Agora, devemos nos perguntar: *quantos números estão sendo somados em "X" e quantos em "Y"?*

Note que de 1 a 98 são 98 números em que temos 49 pares e 49 ímpares, ou seja, **temos 49 números em "X" e 49 em "Y"**. Nesse momento, vamos fazer a subtração que está sendo pedida!

$$X - Y = (2 + 4 + 6 + \cdots + 96 + 98) - (1 + 3 + 5 + \cdots + 95 + 97)$$

Podemos reorganizar essa subtração da seguinte maneira:

$$X - Y = (2 - 1) + (4 - 3) + (6 - 5) + \cdots + (96 - 95) + (98 - 97)$$

Ou seja, podemos transformar a subtração do enunciado em **49 "subtrações internas"**, que são mais simples para serem resolvidas, pois todas fornecem o mesmo resultado: **"1"!** Com isso,

$$X - Y = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + 1 \quad \rightarrow \quad X - Y = 49$$

Gabarito: LETRA B.

14. (FGV/PREF. SALVADOR/2019) Considere a sequência infinita de algarismos:

$$\mathbf{246802468024680246...}$$

A soma dos 2019 primeiros algarismos dessa sequência é

A) 8020.
B) 8040.
C) 8060.
D) 8080.
E) 8100.

Comentários:

Questão bem parecida com a anterior, só que não temos uma palavra se repetindo, **mas sim um número**. Note que o número que está se repetindo é o "24680". **Esse número possui 5 algarismos**. Como estamos interessados nos algarismos até o 2019º**, vamos dividir 2019 por 5**.

$$\begin{array}{r|l} 2019 & 5 \\ \cline{2-2} -\underline{20} & 403 \\ 01 & \\ -\underline{00} & \\ 19 & \\ -\underline{15} & \\ 4 & \end{array}$$

O que essa divisão nos revela? Ela nos diz que **o número "24680" apareceu 403 vezes por completo**. Além disso, **o resto igual a 4 nos indica que o 2019º algarismo será o 4º algarismo** do número "246**8**0", ou seja, o 8. Acompanhe o esquema abaixo para melhor visualização do que está acontecendo.

$$\underbrace{24680}_{1^{\underline{a}}}\ \underbrace{24680}_{2^{\underline{a}}}\ \underbrace{24680}_{3^{\underline{a}}} \ldots \underbrace{24680}_{402^{\underline{a}}}\ \underbrace{24680}_{403^{\underline{a}}}\ 246\mathbf{8}$$

Queremos **o resultado da <u>soma</u> de todos os algarismos**. Para isso, devemos perceber que a soma dos algarismos de "24680" é $\mathbf{2+4+6+8+0=20}$. Como **"24680" se repete 403 vezes**, então a soma de todos os algarismos até lá pode ser calculado como:

$$403 \cdot 20 = 8.060$$

Como ainda **temos 4 algarismos após o último "24680" completo**, devemos somá-los também:

$$8.060 + 2 + 4 + 6 + 8 = 8.080$$

Gabarito: LETRA D.

15. (FGV/ALERO/2018) Uma sequência de números naturais é tal que dado um termo x qualquer dessa sequência, se ele é par, então o próximo termo será x/2; se ele é ímpar, então o próximo termo será x+5. Se o primeiro termo dessa sequência é 6, então o décimo termo será

A) 2.
B) 3.
C) 4.
D) 6.
E) 8.

Comentários:

Opa! Beleza, **se o termo é par, o próximo é metade dele**. Por sua vez, **se o termo for ímpar, o próximo será ele somado com 5**. É como se fosse um jogo, moçada! Temos só que **seguir as regras**.

Primeiro Termo = 6 (foi dado pelo enunciado).

Com o primeiro termo é par, então o segundo termo será metade dele (x/2).

Segundo Termo = 3.

Opa, aqui temos um termo ímpar! Para o próximo termo, teremos que somar 5.

Terceiro Termo = 3 + 5 = 8.

Mais uma vez, um termo par. O próximo termo será metade dele.

Quarto Termo = 4.

Continuamos com um termo par. O próximo também será metade dele.

Quinto Termo = 2.

Ainda com termo par. O próximo será metade dele.

Sexto Termo = 1.

Agora chegamos a um termo ímpar. Nessas condições, o próximo termo é obtido somando 5.

Sétimo Termo = 1 + 5 = 6.

Termo par. O próximo será metade dele.

Oitavo Termo = 3.

Termo Ímpar. Vamos somar 5.

Nono Termo = 3 + 5 = 8.

Por fim, temos um termo par. Logo, o próximo será metade dele.

Décimo Termo = 4.

O enunciado pediu o décimo termo. Podemos marcar a alternativa "C".

Gabarito: LETRA C.

FCC

16. (FCC/TRT-23/2022) Uma sequência numérica é uma lista ordenada de números. Em algumas sequências, a obtenção dos termos segue alguma regra bem definida. Considere as duas sequências descritas a seguir:

– Sequência 1: o primeiro termo é igual a 10 e qualquer outro termo, a partir do segundo, é igual ao anterior acrescido de duas unidades.
– Sequência 2: o primeiro termo é igual a 1, o segundo termo é igual a 3 e qualquer outro termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores.

O menor número que aparece nas duas sequências é:

A) 14
B) 12
C) 20
D) 18
E) 16

Comentários:

A primeira sequência é uma progressão aritmética, temos que os próximos termos são sempre formados pela **soma do termo anterior com uma constante**. Como **o primeiro termo é 10 e a razão é 2**, os primeiros termos dessa sequência numérica é:

$$10, 12, 14, 16, \mathbf{18}, 20, \ldots$$

Por sua vez, a segunda sequência parece uma Sequência de Fibonacci (mas não é!!). Digo isso pois os termos são formados pela **soma dos dois anteriores**. Sendo assim, podemos escrever os primeiros termos dessa sequência também:

$$1, 3, 4, 7, 11, \mathbf{18}, 29 \ldots$$

Note que **o 18 é o menor número que é comum as duas sequências**. Sendo assim, é o número procurado.

Gabarito: LETRA D.

17. (FCC/TRT-4/2022) Os apartamentos de um moderno edifício são numerados com três algarismos da seguinte maneira: o primeiro algarismo indica o andar e os dois seguintes o número do apartamento. Por

exemplo, o apartamento numerado com 201 é o apartamento 01 do segundo andar. O edifício tem 6 andares com 15 apartamentos por andar. Os andares são numerados de 1 a 6, e, em cada andar, os apartamentos são numerados de 01 a 15. A quantidade de algarismos 2 necessária para numerar todos os apartamentos da forma descrita acima é:

A) 15

B) 12

C) 27

D) 21

E) 20

Comentários:

Pessoal, vamos listar alguns desses apartamentos! Mas fique tranquilo, pois não são muitos!

Sem contar o segundo andar, todos os demais terão dois apartamentos em que aparecerão o algarismo 2.

No primeiro andar, teremos o 10**2** e 11**2**.
No terceiro andar, teremos o 30**2** e 31**2**.
No quarto andar, teremos o 40**2** e 41**2**.
No quinto andar, teremos o 50**2** e 51**2**.
No sexto e último andar, teremos o 60**2** e o 61**2**.

Note que só nesses apartamentos já usamos **10 algarismos** 2.

Pronto! Agora, vamos analisar o segundo andar. Todos os apartamentos do segundo andar **começam com o número "2"**.

$$\mathbf{2}01, \dots, \mathbf{2}14, \mathbf{2}15$$

Como temos **15 apartamentos por andar**, já podemos contar aí 15 números 2.

Ademais, temos mais dois apartamentos em que o algarismo 2 aparece duas vezes: o 202 e o 212.

Portanto, **o total de algarismos 2** será:

$$10 + 15 + 2 = 27$$

Gabarito: LETRA C.

18. (FCC/MANAUS PREV./2021) Ao longo de um mês, uma vinícola produz seis lotes de um vinho. Os lotes são numerados sequencialmente de 1 a 6, conforme vão sendo fabricados, o que quer dizer que o primeiro a ser fabricado é o lote 1, depois o lote 2 e assim sucessivamente até o lote 6. Para a venda dos lotes, o

setor responsável deve sempre vender primeiro os lotes em estoque que foram fabricados mais recentemente. Se os seis lotes foram vendidos nesse mês, uma ordem das vendas que NÃO atende às orientações da empresa é

A) $\overrightarrow{2-3-1-4-5-6}$

B) $\overrightarrow{1-2-3-5-4-6}$

C) $\overrightarrow{1-3-5-6-2-4}$

D) $\overrightarrow{1-2-3-4-5-6}$

E) $\overrightarrow{6-5-4-3-2-1}$

Comentários:

Questão que pode dar um pouco de trabalho para entendê-la, mas vamos lá! A primeira coisa que pode vir na mente é a seguinte: ora, **se ela vende primeiro o lote mais recente**, então a ordem de venda será:

$$6 \to 5 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$$

Vemos, portanto, que a alternativa E mostra uma ordem de venda que atende as especificações da empresa.

Pessoal, **atente-se que <u>entre</u> a fabricação de um lote e outro, podemos ter um comprador!** Sendo assim, a vinícola pode fabricar o lote 1 e vender em seguida. Pode fabricar o lote 2 e vender. Fabricar o lote 3 e vender. Com isso, é também uma ordem possível:

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6$$

Basta que apareça um comprador depois da fabricação de cada lote. Com isso, a alternativa D também apresenta uma ordem de venda válida. Vamos ver as demais alternativas.

A) $\overrightarrow{2-3-1-4-5-6}$

Note que essa é uma ordem válida. Ela aconteceria caso o primeiro comprador aparecesse depois da fabricação do lote 2. Dessa forma, o lote 2, por se mais recente, **seria vendido primeiro**. Após a fabricação do lote 3, **apareceriam mais <u>dois</u> compradores**! Nessa hora, é vendido o lote 3 e, logo em seguida, o lote 1 (pois já não temos o lote 2). Depois desse lote, **a cada lote fabricado, aparece um comprador**.

B) $\overrightarrow{1-2-3-5-4-6}$

Essa situação parece muito a já explicada para a letra D. O primeiro lote é fabricado e vendido. O segundo e o terceiro lote seguem o mesmo. No entanto, após a fabricação do lote 4, **não aparece comprador**. Daí o lote 5 é fabricado e **aí sim aparecem dois compradores**. Por ser o lote 5 mais recente, ele entra na frente do 4 na hora da venda e apenas depois que é vendido o lote 4.

C) $\overrightarrow{1-3-5-6-2-4}$

Essa é a ordem de venda que não atende as exigências da empresa. A ordem está correta até:

$$1 \to 3 \to 5 \to 6$$

Lembre-se que **o último lote a ser fabricado é o 6.** Assim, se ele já foi vendido, o próximo mais recente será o 4, de forma que **não poderia ter sido vendido o lote 2**. A ordem correta seria:

$$1 \to 3 \to 5 \to 6 \to 4 \to 2$$

Gabarito: LETRA C.

19. (FCC/SABESP/2019) Em 1655, o matemático John Wallis desenvolveu uma série infinita para o cálculo de $\frac{\pi}{2}$, conforme mostra a fórmula abaixo:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \ldots$$

Com os termos desse produto infinito ordenados exatamente como na fórmula, a fração na 50ª posição é:

A) $\frac{51}{53}$

B) $\frac{50}{49}$

C) $\frac{26}{25}$

D) $\frac{26}{27}$

E) $\frac{50}{51}$

Comentários:

Inicialmente, note que no **numerador** da fração (parte de cima) **há apenas números pares**. No **denominador** (parte de baixo), **há apenas números ímpares**. Só observando isso, poderíamos eliminar a letra A, pois traz um número ímpar tanto no numerador como no denominador.

Veja que cada número par aparece 2 vezes e pula para o próximo. De modo análogo, no denominador da expressão, cada número ímpar aparece 2 vezes e pula para o próximo, **com exceção do 1**, que aparece uma única vez. Observe um esquema para entender melhor o que está sendo pedido no enunciado:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\underbrace{1}_{1^{\circ}}} \cdot \frac{2}{\underbrace{3}_{2^{\circ}}} \cdot \frac{4}{\underbrace{3}_{3^{\circ}}} \cdot \frac{4}{\underbrace{5}_{4^{\circ}}} \cdot \frac{6}{\underbrace{5}_{5^{\circ}}} \cdot \frac{6}{\underbrace{7}_{6^{\circ}}} \cdot \frac{8}{\underbrace{7}_{7^{\circ}}} \cdot \frac{8}{\underbrace{9}_{8^{\circ}}} \cdot \frac{10}{\underbrace{9}_{9^{\circ}}} \cdot \ldots \cdot \frac{?}{\underbrace{?}_{48^{\circ}}} \cdot \frac{?}{\underbrace{?}_{49^{\circ}}} \cdot \frac{?}{\underbrace{?}_{50^{\circ}}} \cdot \ldots$$

Queremos o **50º termo** dessa sequência de frações. Podemos observar que os números que aparecem na fração sempre **são próximos ou iguais à ordem do termo**. Como assim? No primeiro termo (1º) temos 2 no numerador e 1 no denominador. No segundo termo (2º), temos 2 no numerador e 3 no denominador.

Pensando assim, no 50º termo teremos **números próximos a 50** tanto no numerador como no denominador. Nessa linha de raciocínio, podemos eliminar mais 2 alternativas: as letras C e D, pois trazem números distantes de 50. Como resolver agora entre a letra B e a letra E? Note que os termos de ordem par (isto é, 2º, 4º, 6º, ...) **possuem o numerador igual a ordem do termo**:

$$\frac{\pi}{2}=\underbrace{\frac{2}{1}}_{1º}\cdot\underbrace{\frac{2}{3}}_{2º}\cdot\underbrace{\frac{4}{3}}_{3º}\cdot\underbrace{\frac{4}{5}}_{4º}\cdot\underbrace{\frac{6}{5}}_{5º}\cdot\underbrace{\frac{6}{7}}_{6º}\cdot\underbrace{\frac{8}{7}}_{7º}\cdot\underbrace{\frac{8}{9}}_{8º}\cdot\underbrace{\frac{10}{9}}_{9º}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{48}{?}}_{48º}\cdot\underbrace{\frac{?}{?}}_{49º}\cdot\underbrace{\frac{50}{?}}_{50º}\cdot\ldots$$

Portanto, como 50 é um número par, então **o numerador do termo dessa ordem será o próprio 50**, conforme esquematizado acima. E o denominador? Note que o denominador dos termos de ordem par **são sempre uma unidade a mais que a ordem**! Logo, o denominador do 50º termo será 51!

$$\frac{\pi}{2}=\underbrace{\frac{2}{1}}_{1º}\cdot\underbrace{\frac{2}{3}}_{2º}\cdot\underbrace{\frac{4}{3}}_{3º}\cdot\underbrace{\frac{4}{5}}_{4º}\cdot\underbrace{\frac{6}{5}}_{5º}\cdot\underbrace{\frac{6}{7}}_{6º}\cdot\underbrace{\frac{8}{7}}_{7º}\cdot\underbrace{\frac{8}{9}}_{8º}\cdot\underbrace{\frac{10}{9}}_{9º}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{48}{49}}_{48º}\cdot\underbrace{\frac{50}{49}}_{49º}\cdot\underbrace{\frac{50}{51}}_{50º}\cdot\ldots$$

Gabarito: LETRA E.

20. (FCC/TJ-MA/2019) Observando o padrão de formação da sequência infinita (2, 1, 3, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 6, ...), nota-se que os termos iguais a 1 aparecem nas posições 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, e assim por diante. A 300ª vez em que o termo igual a 1 aparece nessa sequência está na posição:

A) 342.

B) 330.

C) 336.

D) 324.

E) 348.

Comentários:

A sequência do enunciado é formada da seguinte maneira: estamos **intercalando** quantidades de números "1" **entre dois números consecutivos** diferentes de "1". Entre os números "2" e "3" existe um único "1". Entre os números "3" e "4" existem dois números "1". Acompanhe na figura:

2, 1, 3, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 6, ...

A questão pede **a posição** em que o número "1" aparecerá pela 300ª vez.

$$\overset{a_1}{2},\ \underset{\downarrow\,1^{\text{a}}\text{ vez}}{\overset{a_2}{1}},\ \overset{a_3}{3},\ \underset{\downarrow\,2^{\text{a}}\text{ vez}}{\overset{a_4}{1}},\ \underset{\downarrow\,3^{\text{a}}\text{ vez}}{\overset{a_5}{1}},\ \overset{a_6}{4},\ \underset{\downarrow\,4^{\text{a}}\text{ vez}}{\overset{a_7}{1}},\ \underset{\downarrow\,5^{\text{a}}\text{ vez}}{\overset{a_8}{1}},\ \underset{\downarrow\,6^{\text{a}}\text{ vez}}{\overset{a_9}{1}},\ \overset{a_{10}}{5},\ \ldots,\underset{\downarrow\,299^{\text{a}}\text{ vez}}{\overset{a_{n-1}}{1}},\underset{\downarrow\,\mathbf{300^{\text{a}}\text{ vez}}}{\overset{a_n}{1}},\ \ldots$$

Em outras palavras, queremos descobrir **qual o valor de n na representação acima**. Nesse intuito, podemos dividir nossa sequência nos seguintes blocos:

$$\underbrace{2,\ 1,}_{1^{\text{o}}\text{ BLOCO}}\ \underbrace{3,\ 1,\ 1,}_{2^{\text{o}}\text{ BLOCO}}\ \underbrace{4,\ 1,\ 1,\ 1,}_{3^{\text{o}}\text{ BLOCO}}\ \underbrace{5,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,}_{4^{\text{o}}\text{ BLOCO}}\ 6,\ \ldots$$

Uma coisa muito importante que devemos notar é que **a ordem do bloco é exatamente a quantidade de números "1" que ele possui**. Por exemplo: **no primeiro bloco temos apenas um único número "1"**. No segundo bloco, temos 2 números "1" e por aí vai.

Perceba que a quantidade de números "1" aumenta de uma unidade a cada bloco. Podemos separamos essas quantidades em uma nova sequência:

$$B = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots, N)$$

O primeiro elemento representa a quantidade de números "1" no primeiro bloco, o segundo elemento representa a quantidade de números "1" no segundo bloco e assim sucessivamente.

Com isso, percebemos que **essa nova sequência formada é uma progressão aritmética de razão 1**. Vamos somar os termos dessa P.A. para descobrir em qual bloco aparecerá o "1" pela 300ª vez.

$$S = \frac{(b_1 + b_N) \cdot N}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{(1 + N) \cdot N}{2} = 300 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{N^2 + N - 600 = 0}$$

Resolvendo a equação de segundo grau acima, encontramos como raízes $\boldsymbol{N' = -25}$ e $\boldsymbol{N'' = 24}$. Como sabemos que N é um número natural, pois é com ele que estamos contando os termos, só podemos ter que $\boldsymbol{N = 24}$. Acabamos de descobrir o bloco em que está o 300º número "1": **o 24º bloco**.

Ao chegarmos no 24º bloco, terão aparecido **24 números diferente de "1"**, **que iniciam cada bloco**. Além deles, terão sido **300 números "1" que apareceram**. Logo, o 300º número "1" aparecerá na posição:

$$300 + 24 = \boldsymbol{324}.$$

Gabarito: LETRA D.

CEBRASPE

Texto para as próximas questões

Uma unidade da PRF interceptou, durante vários meses, lotes de mercadorias vendidas por uma empresa com a emissão de notas fiscais falsas. A sequência dos números das notas fiscais apreendidas, ordenados pela data de interceptação, é a seguinte: 25, 75, 50, 150, 100, 300, 200, 600, 400, 1.200, 800, ...

Tendo como referência essa situação hipotética, julgue o item seguinte, considerando que a sequência dos números das notas fiscais apreendidas segue o padrão apresentado.

21. (CESPE/PRF/2019) A partir do padrão da sequência, infere-se que o 12º termo é o número 1.600.

Comentários:

Vamos extrair do enunciado a sequência fornecida para uma melhor análise:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	
25,	75,	50,	150,	100,	300,	200,	600,	400,	1.200,	800,	x,	...

O examinador faz uma afirmação sobre o 12º termo, isto é, o a_{12}. Para conseguir encontrar o seu valor, é necessário determinar **o padrão da sequência**. Observe que existem **duas progressões geométricas** dentro dessa sequência principal. Vamos destacá-las?

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	
25,	75,	50,	150,	100,	300,	200,	600,	400,	1.200,	800,	x,	...

× 2 × 2 × 2 × 2 × 2

Veja que os números destacados em vermelho formam uma progressão geométrica **de razão 2**. Além disso, **os termos que formam essa sequência sempre pulam um termo da sequência principal**. A outra PG é formada com os demais termos que não estão destacados e **também possui razão 2**. Acompanhe no esquema abaixo:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	
25,	75,	50,	150,	100,	300,	200,	600,	400,	1.200,	800,	x,	...

× 2 × 2 × 2 × 2 × 2

Para encontrarmos o valor do a_{12}, basta seguirmos o padrão acima, multiplicando o a_{10} por 2.

$$\boldsymbol{a_{12} = a_{10} \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad a_{12} = 1200 \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad a_{12} = 2400}$$

Gabarito: ERRADO.

22. (CESPE/PRF/2019) Se a_n for o n-ésimo termo da sequência, em que $n = 1, 2, 3, \dots$, então, para $n \geq 3$, tem-se que $a_n = 2 \times a_{n-2}$.

Comentários:

Vamos extrair do enunciado a sequência fornecida para uma melhor análise:

$$\overset{a_1}{25}, \overset{a_2}{75}, \overset{a_3}{50}, \overset{a_4}{150}, \overset{a_5}{100}, \overset{a_6}{300}, \overset{a_7}{200}, \overset{a_8}{600}, \overset{a_9}{400}, \overset{a_{10}}{1.200}, \overset{a_{11}}{800}, \overset{a_{12}}{x}, \dots$$

O examinador faz uma afirmação sobre o 12º termo, isto é, o a_{12}. Para conseguir encontrar o seu valor, é necessário determinar **o padrão da sequência**. Observe que existem **duas progressões geométricas** dentro dessa sequência principal. Vamos destacá-las?

$$\overset{a_1}{25}, \overset{a_2}{75}, \overset{a_3}{50}, \overset{a_4}{150}, \overset{a_5}{100}, \overset{a_6}{300}, \overset{a_7}{200}, \overset{a_8}{600}, \overset{a_9}{400}, \overset{a_{10}}{1.200}, \overset{a_{11}}{800}, \overset{a_{12}}{x}, \dots$$

$$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$$

Veja que os números destacados em vermelho formam uma progressão geométrica **de razão 2**. Além disso, **os termos que formam essa sequência sempre pulam um termo da sequência principal**. A outra PG é formada com os demais termos que não estão destacados e **também possui razão 2**. Acompanhe no esquema abaixo:

$$\overset{a_1}{25}, \overset{a_2}{75}, \overset{a_3}{50}, \overset{a_4}{150}, \overset{a_5}{100}, \overset{a_6}{300}, \overset{a_7}{200}, \overset{a_8}{600}, \overset{a_9}{400}, \overset{a_{10}}{1.200}, \overset{a_{11}}{800}, \overset{a_{12}}{x}, \dots$$

$$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$$

Observe que, a partir do terceiro termo, qualquer outro número da sequência pode ser obtido ao multiplicar por 2 o "termo anterior do anterior". Ou seja, pulamos um olhando para trás na fila. Logo, de uma maneira genérica representamos isso como $a_n = 2 \times a_{n-2}$.

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-3}, \boldsymbol{a_{n-2}}, a_{n-1}, \boldsymbol{a_n}$$

Gabarito: CERTO

23. (CESPE/PRE. SÃO CRISTOVÃO/2019) Julgue o item a seguir: Na sequência de Fibonacci - (F_m), em que $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, \dots$, os elementos podem ser obtidos a partir da fórmula:

$$F_m = \frac{(1+\sqrt{3})^m - (1-\sqrt{3})^m}{2^m\sqrt{3}}$$

Comentários:

Essa é uma questão que sai muito rápido quando conhecemos **a sequência de Fibonacci**. Relembre-se da aula que os dois jeitos mais comum de representar essa sequência são:

$$F_n = \begin{cases} 1, se\ n = 1 \\ 1, se\ n = 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, se\ n\ \geq 3 \end{cases}$$

ou

$$F_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}}$$

Certamente **o examinador tentou confundir o candidato trocando a $\sqrt{5}$ por $\sqrt{3}$** na fórmula explícita da sequência. No entanto, mesmo que você não saiba disso, você pode **testar a fórmula do enunciado e ver se bate com os números da sequência** que são fornecidos no enunciado:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, \dots$$

Pessoal, para **desenvolver os binômios** que aparecerão a seguir, utilizaremos as seguintes relações que aprendemos no estudo dos **produtos notáveis**:

1. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
2. $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
3. $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
4. $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

Vamos aos cálculos:

- Para $\boldsymbol{m = 1}$:

$$F_1 = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^1 - \left(1-\sqrt{3}\right)^1}{2^1\sqrt{3}} \Rightarrow F_1 = \frac{\cancel{1} + \sqrt{3} - \cancel{1} + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow F_1 = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \boldsymbol{F_1 = 1}$$

- Para $\boldsymbol{m = 2}$:

$$F_2 = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2 - \left(1-\sqrt{3}\right)^2}{2^2\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$F_2 = \frac{\left(1^2 + 2\cdot 1\cdot\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2\right) - \left(1^2 - 2\cdot 1\cdot\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2\right)}{2^2\sqrt{3}} \Rightarrow F_2 = \frac{4\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \Rightarrow \boldsymbol{F_2 = 1}$$

- Para $m = 3$

$$F_3 = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^3 - \left(1-\sqrt{3}\right)^3}{2^3\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow$$

$$F_3 = \frac{\left(1^3 + 3\cdot 1^2\cdot\sqrt{3} + 3\cdot 1\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^3\right) - \left(1^3 - 3\cdot 1^2\cdot\sqrt{3} + 3\cdot 1\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^3\right)}{2^3\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow$$

$$F_3 = \frac{1 \cancel{+3}\sqrt{3} + 9 \cancel{+3}\sqrt{3} \; - 1 \cancel{+3}\sqrt{3} - 9 \cancel{+3}\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad F_3 = \frac{12\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{F_3 = 1,5} \quad \times$$

Como encontramos que **o terceiro termo fornecido pela fórmula não bateu com terceiro termo dado na sequência do enunciado**, significa que os elementos da sequência não podem ser obtidos a partir da fórmula dada.

Gabarito: ERRADO

24. (CESPE/SEFAZ-RS/2018) Para construir a sequência a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, de números positivos, foram dados a_1 e a_2, e, a partir de a_3, cada termo foi construído como sendo o produto de todos os termos anteriores. Se $a_5 < 1$, então, nessa sequência,

A) todos os termos são, necessariamente, menores que 1.

B) apenas dois termos são menores que 1.

C) apenas três termos são menores que 1.

D) apenas um termo pode ser maior que 1.

E) dois termos podem ser maiores que 1.

Comentários:

Primeira coisa a perceber: **todos os números da sequência são positivos**. Além disso, dados a_1 e a_2, **os demais termos são obtidos pelo produto de todos os anteriores**. Assim, podemos escrever:

$a_3 = a_1 \cdot a_2$
$a_4 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$
$a_5 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$

Vamos escrever cada um dos termos em função de a_1 e a_2.

$a_3 = a_1 \cdot a_2$
$a_4 = a_1 \cdot a_2 \cdot (a_1 \cdot a_2) = (a_1 \cdot a_2)^2$
$a_5 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = a_1 \cdot a_2 \cdot (a_1 \cdot a_2) \cdot (a_1 \cdot a_2)^2 = (a_1 \cdot a_2)^4$

O enunciado diz que $a_5 < 1$, para isso acontecer temos que ter:

$$(a_1 \cdot a_2)^4 < 1 \quad \rightarrow \quad a_1 \cdot a_2 < 1$$

Logo, para que $a_1 \cdot a_2 < 1$, **pelo menos um dos dois deve ser menor do que 1**. Pode ser até que os dois sejam menores do que 1, mas **só precisamos de que um seja**. Além disso, observe que $\boldsymbol{a_3 = a_1 \cdot a_2 < 1}$. Se elevarmos ao quadrado, ficamos com $\boldsymbol{a_4 = (a_1 \cdot a_2)^2 < 1}$.

Nas condições do enunciado, obrigatoriamente temos que **a_3, a_4 e a_5 são menores do que 1**. Ademais, já sabemos que **a_1 ou a_2 é menor do que 1**. Com isso, **temos espaço apenas para um dos termos dados ser maior do que um.**

Gabarito: LETRA D

Texto para as próximas questões

A sequência infinita $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ é definida por $a_0 = 1, a_1 = 3$, e, para número cada inteiro $n \geq 1$, $a_{2n} = a_{2n-1} + a_{2n-2}$ e $a_{2n+1} = a_{2n} - a_{2n-1}$. Com relação a essa sequência, julgue os itens:

25. (CESPE/ABIN/2018) Existem infinitos valores inteiros de p e q tais que $a_p = a_q$.

Comentários:

O enunciado fornece os dois primeiros termos da sequência: $\boldsymbol{a_0 = 1}$ e $\boldsymbol{a_1 = 3}$. Usando esses dois primeiros termos, ele espera que seja possível obter os demais termos da sequência utilizando as leis de formação:

$$(1) \quad \boldsymbol{a_{2n} = a_{2n-1} + a_{2n-2}} \qquad\qquad (2) \quad \boldsymbol{a_{2n+1} = a_{2n} - a_{2n-1}}$$

Vamos **substituir o a_{2n}** da relação (2) **usando a primeira expressão** (1).

$$\boldsymbol{a_{2n+1} = a_{2n} - a_{2n-1}}$$

$$\boldsymbol{a_{2n+1} = (\cancel{a_{2n-1}} + a_{2n-2}) - \cancel{a_{2n-1}}}$$

$$\boldsymbol{a_{2n+1} = a_{2n-1} + a_{2n-2} - a_{2n-1}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a_{2n+1} = a_{2n-2}}}$$

Se dizermos que $p = 2n + 1$ e $q = 2n - 2$, então:

$$\boxed{\boldsymbol{a_p = a_q}}$$

Como **existem infinitos números inteiros $n \geq 1$**, então **vão existir infinitos pares p e q**, tal que a relação acima é satisfeita.

Gabarito: CERTO

VUNESP

26. (VUNESP/CMSJC/2022) Considere a sequência de números 7123459, 8224360, 5223441, 6224332, 4223442, ..., em que cada termo, do segundo termo em diante, é formado a partir de um padrão que altera os algarismos do termo anterior. Utilizando- se esse mesmo padrão, o 100º termo da sequência que se inicia por 359982721 é:

A) 222222222

B) 342232422

C) 343434343

D) 422222222

E) 432242322

Comentários:

Pessoal, na minha opinião, essa é uma **questão armadilha**, colocada na prova para fazer bons alunos perderem tempo. Ela foge um tanto dos "padrões" que estamos acostumados e exigiria uma **boa dose de maturidade na disciplina** para que o aluno a visualizasse rapidamente. Dito isso, vamos à resolução, primeiramente dispondo a sequência da seguinte maneira:

Termo	7º Algarismo	6º Algarismo	5º Algarismo	4º Algarismo	3º Algarismo	2º Algarismo	1º Algarismo
1º termo	7	1	2	3	4	5	9
2º termo	8	2	2	4	3	6	0
3º termo	5	2	2	3	4	4	1
4º termo	6	2	2	4	3	3	2
5º termo	4	2	2	3	4	4	2

O que era suficiente perceber que para matarmos a questão?

1º) A sequência se desenvolve, mas a partir do momento em que algum algarismo se torna o "2", o mesmo algarismo dos demais termos **sempre será o "2"**.

2º) A sequência se desenvolve, mas a partir do momento em que o "3" ou o "4" aparece, **eles começam a se alternar nos demais termos**.

3º) A sequência se desenvolve, mas sempre que aparece o "5", logo em seguida aparece o "6" e, depois, aparece o "4". Nesse ponto, entramos na situação acima, de forma que ficamos com **5 -> 6 -> 4 -> 3 -> 4 -> 3**...

Termo	7º Algarismo	6º Algarismo	5º Algarismo	4º Algarismo	3º Algarismo	2º Algarismo	1º Algarismo
1º termo	7	1	2	3	4	5	9
2º termo	8	2	2	4	3	6	0
3º termo	5	2	2	3	4	4	1
4º termo	6	2	2	4	3	3	2
5º termo	4	2	2	3	4	4	2

Com essas **três informações**, vamos procurar o 100º termo da sequência iniciada por **359982721.**

Termo	9º Alg.	8º Alg.	7º Alg.	6º Alg.	5º Alg.	4º Alg.	3º Alg.	2º Alg.	1º Alg.
1º termo	3	5	9	9	8	2	7	2	1
2º termo						2		2	
3º termo						2		2	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
100º termo						2		2	

Note que **os algarismos 2º e 4º estão com número "2"**. Dessa forma, o 100º também terá o algarismo "2" no 2º e 4º algarismo. Essa conclusão nos levaria a **eliminar a alternativa C**.

Da mesma forma, note que **o 9º algarismo já começa com o número "3"**. Dessa forma, sabemos que nessa coluna **o "3" ficará se alternando com o "4"**.

Termo	9º Alg.	8º Alg.	7º Alg.	6º Alg.	5º Alg.	4º Alg.	3º Alg.	2º Alg.	1º Alg.
1º termo	3	5	9	9	8	2	7	2	1
2º termo	4					2		2	
3º termo	3					2		2	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
100º termo	4					2		2	

Note que **nos termos ímpares aparecerá o "3"**, enquanto **nos termos pares aparecerá o "4"**. Logo, o 100º termo, que é um **termo par**, **começará com o "4".** Com essa segunda observação, já eliminaríamos as alternativas A e B também.

Para cravar a alternativa, precisamos da **terceira observação**: sempre que o "5" aparece, depois vem o "6", depois vem o "4". A partir daqui, começa o revezamento de "4" e "3".

Termo	9º Alg.	8º Alg.	7º Alg.	6º Alg.	5º Alg.	4º Alg.	3º Alg.	2º Alg.	1º Alg.
1º termo	3	5	9	9	8	2	7	2	1
2º termo	4	6				2		2	
3º termo	3	4				2		2	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
100º termo	**4**	3				**2**		**2**	

Com isso, já poderíamos concluir que **8º algarismo nunca poderia ser o número "2"**, uma vez que começa com o "5" e, a sequência do "5" sempre cai, inevitavelmente, naquele loop entre "4" e "3". Com isso, a única resposta possível seria a **letra E.**

Observação: pessoal, existe padrões para cada um dos números, por exemplo, depois do "1" é sempre o "2", depois do "9" é sempre o "0"... Na minha opinião, a estratégia para essa questão não é transformar algarismo por algarismo de cada termo, mas sim **usar as alternativas para balizar nossa procura**.

Quando fazemos assim, **ganhamos mais velocidade**, de forma que **poderia** até ser possível fazer essa questão na prova em um tempo razoável.

Gabarito: LETRA E.

27. (VUNESP/TJ-SP/2019) Considere a sequência $\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{10}, \ \ldots\right)$. O produto entre o 7º, o 11º e o 20º termos é igual a

A) $10/11$
B) $3/4$
C) $5/6$
D) $21/13$
E) $15/19$

Comentários:

Como a questão pede o produto entre o 7º, 11º e 20º termo, **conseguimos listá-los** sem muito trabalho. Observe como a sequência avança.

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{4}{3} \qquad \frac{5}{6} \qquad \frac{8}{7} \qquad \frac{9}{10} \qquad \ldots$$

Os números vão **crescendo de "1" em "1"** seguindo o caminho acima. Se continuarmos repetindo o padrão, podemos chegar até o 20º termo.

$$\left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{1º},\underbrace{\frac{4}{3}}_{2º},\underbrace{\frac{5}{6}}_{3º},\underbrace{\frac{8}{7}}_{4º},\underbrace{\frac{9}{10}}_{5º},\underbrace{\frac{12}{11}}_{6º},\underbrace{\mathbf{\frac{13}{14}}}_{\mathbf{7º}},\underbrace{\frac{16}{15}}_{8º},\underbrace{\frac{17}{18}}_{9º},\underbrace{\frac{20}{19}}_{10º},\underbrace{\mathbf{\frac{21}{22}}}_{\mathbf{11º}},\underbrace{\frac{24}{23}}_{12º},\underbrace{\frac{25}{26}}_{13º},\underbrace{\frac{28}{27}}_{14º},\underbrace{\frac{29}{30}}_{15º},\underbrace{\frac{32}{31}}_{16°},\underbrace{\frac{33}{34}}_{17º},\underbrace{\frac{36}{35}}_{18º},\underbrace{\frac{37}{38}}_{19º},\underbrace{\mathbf{\frac{40}{39}}}_{\mathbf{20º}}\right).$$

Agora que **encontramos os três termos**, podemos fazer o produto.

$$P=\frac{13}{14}\cdot\frac{21}{22}\cdot\frac{40}{39} \quad\rightarrow\quad P=\frac{13}{7}\cdot\frac{21}{11}\cdot\frac{10}{39} \quad\rightarrow\quad P=\frac{13}{1}\cdot\frac{3}{11}\cdot\frac{10}{39} \quad\rightarrow\quad P=\frac{10}{11}$$

Gabarito: LETRA A.

28. (VUNESP/TJ-SP/2019) Considere a sequência $\left(\frac{1}{5};\frac{5}{10};\frac{10}{15};\frac{15}{20};\frac{20}{25};\ldots\right)$ O produto entre o 30º e o 31º termos é igual a

A) 27/29
B) 25/27
C) 31/33
D) 23/25
E) 29/31

Comentários:

Nessa questão, já fica um pouco mais difícil de listar todos os termos até o 30º e 31º. Temos que deduzir a fórmula do termo geral para essa sequência.

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}};\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}};\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{15}};\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{20}};\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{25}};\ldots\right)$$

A primeira coisa que conseguimos perceber é que os denominadores são múltiplos de 5.

No **primeiro** termo, o denominador é $5\cdot\mathbf{1}=5$.
No **segundo** termo, o denominador é $5\cdot\mathbf{2}=10$.
No **terceiro** termo, o denominador é $5\cdot\mathbf{3}=15$.

No **quarto** termo, o denominador é $5 \cdot \mathbf{4} = 20$.
No **quinto** termo, o denominador é $5 \cdot \mathbf{5} = 25$.

Assim, percebemos que o denominador é na forma "$5n$", onde n é a ordem do termo procurado. Agora, veja que o numerador é bem parecido. O problema é que ele começa no "1" e, depois, começam os múltiplos de 5. Com isso, a partir do segundo termo, o numerador é dado por "$5 \cdot (\mathrm{n} - 1)$".

No **segundo** termo, o numerador é $5 \cdot (\mathbf{2} - 1) = 5 \cdot 1 = 5$.
No **terceiro** termo, o numerador é $5 \cdot (\mathbf{3} - 1) = 5 \cdot 2 = 10$.
No **quarto** termo, o numerador é $5 \cdot (\mathbf{4} - 1) = 5 \cdot 3 = 15$.
No **quinto** termo, o numerador é $5 \cdot (\mathbf{5} - 1) = 5 \cdot 4 = 20$.

A partir do segundo termo, podemos dizer que o termo geral é dado por:

$$a_n = \frac{5 \cdot (n-1)}{5 \cdot n}$$

Para $n = 30$:

$$a_{30} = \frac{5 \cdot (30-1)}{5 \cdot 30} \quad \rightarrow \quad a_{30} = \frac{5 \cdot 29}{5 \cdot 30}$$

Não precisamos simplificar agora!

Para $n = 31$:

$$a_{31} = \frac{5 \cdot (31-1)}{5 \cdot 31} \quad \rightarrow \quad a_{31} = \frac{5 \cdot 30}{5 \cdot 31}$$

Vamos multiplicar os dois:

$$P = a_{30} \cdot a_{31} \quad \rightarrow \quad P = \left(\frac{\cancel{5 \cdot} 29}{\cancel{5 \cdot 30}}\right) \cdot \left(\frac{\cancel{5 \cdot 30}}{\cancel{5 \cdot} 31}\right) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P = \frac{29}{31}}$$

Gabarito: LETRA E.

29. (VUNESP/PM-SP/2020) Na sequência de números: 4, 8, 6, 12, 10, 20, 18, 36, 34, ..., o primeiro termo que é maior do que 100 é o número
a) 122.
b) 126.
c) 132.
d) 136.

Comentários:

A primeira coisa que podemos notar na sequência dada, é que **alguns termos são o dobro do anterior**.

$$4,\ 8,\ 6,\ 12,\ 10,\ 20,\ 18,\ 36,\ 34,\ \ldots,$$

Observe ainda que o número que multiplicamos por dois é **duas unidades menor do que o seu anterior**.

$$4,\ 8,\ 6,\ 12,\ 10,\ 20,\ 18,\ 36,\ 34,\ 68,\ \ldots$$

Seguindo essa lógica, podemos completar a sequência **para achar o primeiro termo que é maior do que 100**.

$$4,\ 8,\ 6,\ 12,\ 10,\ 20,\ 18,\ 36,\ 34,\ 68,\ 66,\ 132\ \ldots$$

Gabarito: LETRA C

30. (VUNESP/FITO/2020) Considere a sequência de números naturais:

$$(\mathbf{30}, \mathbf{35}, \mathbf{45}, \mathbf{60}, \mathbf{80}, \mathbf{105}, \mathbf{135}, \ldots)$$

A diferença entre o 14º e o 11º termos dessa sequência é

a) 165.

b) 170.

c) 175.

d) 180.

e) 185.

Comentários:

Observe que só temos números "bonitos". Se pegarmos **a diferença entre um termo e o seu anterior**, é possível notar que essa diferença **aumenta 5 unidades ao longo da sequência**. Desse modo,

$$30, 35, 45, 60, 80, 105, 135, \dots$$

$$+5 \quad +10 \quad +15 \quad +20 \quad +25 \quad +30$$

Pronto, desvendamos o segredo. Agora, **é só seguir o padrão até encontrarmos o 11º e o 14º termos**.

$$\overset{a_1}{30}, \overset{a_2}{35}, \overset{a_3}{45}, \overset{a_4}{60}, \overset{a_5}{80}, \overset{a_6}{105}, \overset{a_7}{135}, \overset{a_8}{170}, \overset{a_9}{210} \dots$$

$$+5 \quad +10 \quad +15 \quad +20 \quad +25 \quad +30 \quad +35 \quad +40$$

$$\overset{a_8}{170}, \overset{a_9}{210}, \overset{a_{10}}{255}, \overset{a_{11}}{305}, \overset{a_{12}}{360}, \overset{a_{13}}{420}, \overset{a_{14}}{485}$$

$$+40 \quad +45 \quad +50 \quad +55 \quad +60 \quad +65$$

Obtemos $a_{11} = 305$ e $a_{14} = 485$, ao fazer a diferença entre os dois:

$$a_{14} - a_{11} = 485 - 305 = \mathbf{180}$$

Gabarito: LETRA D

Questões Comentadas

Progressão Aritmética

Outras Bancas

1. (NUCEPE/PM-PI/2022) No treinamento para o teste físico da PM, Marinho estabeleceu que sempre correria 500m a mais que no dia anterior. Sabe-se que, no terceiro dia de treinamento, ele percorreu 3200m. Quantos quilômetros Marinho percorrerá no décimo quinto dia de treinamento?

A) 9,2 km
B) 9,5 km
C) 9,8 km
D) 10,0 km
E) 10,2 km

Comentários:

Pessoal, vamos lá! Essa é uma questão que pode ser resolvida por meio dos nossos conhecimentos em progressão aritmética. Note que o Marinho sempre corre **500 metros a mais que no dia anterior**. Essa é a nossa razão (r).

$$r = 500$$

Vamos encarar **o quanto ele corre no dia i como o a_i**. Sendo assim, se no terceiro dia ele percorreu 3200 m, então podemos escrever:

$$a_3 = 3200$$

Com o a_3 e a razão, é possível determinar o a_1.

$$a_3 = a_1 + 2r \quad \rightarrow \quad a_1 = a_3 - 2r \quad \rightarrow \quad a_1 = 3200 - 2 \cdot 500$$

$$a_1 = 3200 - 1000 \quad \rightarrow \quad \boxed{a_1 = 2200}$$

Pronto! Lembre-se sempre que com a_1 e a razão, é possível determinar **qualquer termo da PA**.

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

O enunciado pede o quanto Marinho correrá no **décimo quinto dia de treinamento**, ou seja, a_{15}.

$$a_{15} = a_1 + 14r \quad \rightarrow \quad a_{15} = 2200 + 14 \cdot 500 \quad \rightarrow \quad a_{15} = 2200 + 7000$$

$$\boxed{\mathbf{a_{15} = 9200\ m = 9,2\ km}}$$

Gabarito: LETRA A.

2. (OBJETIVA/CM IPIRANGA DO NORTE/2022) Considerando-se que a razão de certa progressão aritmética é igual a 12, e que o seu primeiro termo é igual a 9, assinalar a alternativa que apresenta o valor da soma dos 8 primeiros termos dessa progressão:

A) 396
B) 400
C) 404
D) 408

Comentários:

Questão bem direta para **treinarmos as fórmulas**! O enunciado nos forneceu o seguinte:

$$a_1 = 9 \qquad r = 12$$

Ele pede a soma dos 8 primeiros termos. Lembre-se que **a soma dos "n" primeiros termos** é igual a:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Note, portanto, que precisaremos encontrar o $\boldsymbol{a_8}$.

$$a_8 = a_1 + 7r \quad \rightarrow \quad a_8 = 9 + 7 \cdot 12 \quad \rightarrow \quad a_8 = 9 + 84 \quad \rightarrow \quad a_8 = 93$$

Agora, vamos usar **a fórmula da soma**.

$$S_8 = \frac{(a_1 + a_8) \cdot 8}{2} \quad \rightarrow \quad S_8 = 4 \cdot (9 + 93) \quad \rightarrow \quad S_8 = 4 \cdot 102 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{S_8 = 408}}$$

Gabarito: LETRA D.

3. (FAUEL/CM DOURADINA/2022) Mariana faz caminhada em seu bairro toda segunda-feira. A cada semana, ela aumenta 0,5 km no seu trajeto. Na primeira vez que caminhou, ela percorreu 800 m. Depois de 8 semanas, quantos km Mariana estará caminhando?

A) 2,3 km
B) 3,5 km
C) 4,3 km
D) 8,35 km

Comentários:

Questão bem parecida com uma que já fizemos. Observe que a cada semana, **Mariana aumenta 0,5 km (500 metros) no seu trajeto**. Sendo assim, essa é a nossa razão.

$$\mathrm{r} = 0{,}5 \text{ km}$$

Se **na <u>primeira</u> vez ela percorreu 800 m** (0,8 km), então esse é nosso a_1.

$$\mathrm{a}_1 = 0{,}8 \text{ km}$$

Com a_1 e r, encontramos **qualquer termo da PA**.

A questão pergunta quanto Mariana caminhará na **8ª semana**, ou seja, a_8.

$$a_8 = a_1 + 7r$$

$$a_8 = 0{,}8 + 7 \cdot 0{,}5 \quad \rightarrow \quad a_8 = 0{,}8 + 3{,}5 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{a_8 = 4,3 \text{ km}}}$$

Gabarito: LETRA C.

4. (INST. MAIS/IPREV SANTOS/2022) Em um estacionamento, o preço da primeira hora é de R$ 10,00, e o preço das horas seguintes, a partir da segunda, cai em progressão aritmética. Sabendo que o preço da segunda hora é de R$ 9,00 e o preço da oitava hora é de R$ 4,50, é correto afirmar que um motorista que deixar o veículo neste estacionamento por sete horas pagará

A) R$ 37,25.

B) R$ 42,75.

C) R$ 47,25.

D) R$ 52,75.

Comentários:

Essa questão tem uma pegadinha. A progressão aritmética começa **a partir da segunda hora**. Sendo assim, **o primeiro termo da PA é 9**.

$$a_1 = 9$$

Por sua vez, **o preço da oitava hora é o a_7**.

$$a_7 = 4{,}50$$

Com o a_1 e o a_7 conseguimos determinar **a razão da PA**.

$$a_7 = a_1 + 6r$$

$$4{,}50 = 9 + 6r \quad \rightarrow \quad 6r = -4{,}50 \quad \rightarrow \quad r = -\frac{4{,}50}{6} \quad \rightarrow \quad \boxed{r = -0{,}75}$$

Ou seja, a cada hora que passa, a partir da segunda, **o preço cai R$ 0,75**. Com isso, podemos encontrar quanto o motorista vai pagar por 7 horas.

1ª Hora	R$ 10,00
2ª Hora (a_1)	R$ 9,00
3ª Hora (a_2)	R$ 8,25
4ª Hora (a_3)	R$ 7,50
5ª Hora (a_4)	R$ 6,75
6ª Hora (a_5)	R$ 6,00
7ª Hora (a_6)	R$ 5,25
Total	R$ 52,75

Gabarito: LETRA D.

5. (AOCP/CM BAURU/2022) Assinale a alternativa que apresenta o valor de x para que $(x+2, 5x, 4x^2)$ forme uma progressão aritmética decrescente.

A) 1

B) 1/4

C) 4

D) 1/2

E) 2

Comentários:

Sabemos que se três termos estão em progressão aritmética, então **o termo central é igual a média dos extremos**. Assim,

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Vamos substituir o termos da progressão aritmética do enunciado na fórmula acima.

$$5x = \frac{(x+2) + 4x^2}{2}$$

$$4x^2 + x + 2 = 10x \quad \rightarrow \quad 4x^2 - 9x + 2 = 0$$

Observe que obtivemos uma **equação de segundo grau**. Para resolvê-la, vamos usar Bhaskara.

- Cálculo do Discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \rightarrow \quad \Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad \Delta = 81 - 32 \quad \rightarrow \quad \Delta = 49$$

- Cálculo das Raízes

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 4} \quad \rightarrow \quad x = \frac{9 \pm 7}{8}$$

$$x_1 = \frac{9+7}{8} \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{16}{8} \quad \rightarrow \quad x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{9-7}{8} \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{2}{8} \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{4}$$

Cuidado aqui, temos **dois valores para x**. Devemos verificar **qual dos dois torna a PA decrescente**.

i) Para $x = 2$

$$(\boldsymbol{x+2, 5x, 4x^2}) = (\boldsymbol{2+2, 5 \cdot 2, 4 \cdot 2^2}) = (\boldsymbol{4, 10, 16})$$

ii) Para $x = \frac{1}{4}$

$$(\boldsymbol{x+2, 5x, 4x^2}) = \left(\boldsymbol{2 + \frac{1}{4}, 5 \cdot \frac{1}{4}, 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2}\right) = \left(\boldsymbol{\frac{9}{4}, \frac{5}{4}, \frac{1}{4}}\right)$$

Observe que **a PA é decrescente quando $x = 1/4$**. Sendo assim, é o que devemos marcar!

Gabarito: LETRA B.

6. (DIRENS/EEAR/2022) Três números estão em Progressão Aritmética (PA). A soma desses números é 18 e o produto é 192. Calcule a diferença entre o maior e o menor desses números. Marque a opção correta.
A) 14.
B) 7.
C) 4.
D) 2.

Comentários:
A famosa PA de três termos! Vimos sobre ela na teoria.

$$PA \quad = \quad \{ \quad a_2 - r, \quad a_2, \quad a_2 + r \quad \}$$

Observe que quando somamos os termos, ficamos com:

$$S = (a_2 - r) + a_2 + (a_2 + r)$$

$$S = 3a_2$$

Ou seja, a soma dos três termos é equivalente ao **triplo do termo central** (a_2).

A **soma** dos três termos é 18:

$$3a_2 = 18 \qquad \rightarrow \qquad a_2 = 6$$

Vamos guardar o resultado. Por sua vez o produto dos três termos é:

$$P = a_2(a_2 - r)(a_2 + r)$$

$$P = a_2(a_2^2 - r^2)$$

O **produto dos três termos é 192**. Vamos usá-lo e substituir o a_2 que encontramos.

$$192 = 6 \cdot (6^2 - r^2)$$

$$36 - r^2 = 32$$

$$r^2 = 4$$

$$r = \pm 2$$

Pronto! Com o valor da **razão** e o **termo central**, determinarmos nossa PA!

$$PA = \{4, 6, 8\}$$

A questão pede **a diferença** entre o maior e o menor valor.

$$D = 8 - 4 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\boldsymbol{D = 4}}$$

Gabarito: LETRA C.

7. (Inst. Consulplan/PREF. VOLTA GRANDE/2022) O padrinho de Luciana deposita, semanalmente, uma certa quantia em reais na conta bancária de sua afilhada. A cada semana, o valor depositado é acrescido em R$ 5,00 em relação à semana anterior. Se na primeira semana o valor depositado é de R$ 30,00, qual a quantia total depositada ao fim da vigésima quarta semana?

A) R$ 1.950,00

B) R$ 1.975,00

C) R$ 2.000,00
D) R$ 2.100,00

Comentários:
Observe que a quantia depositada semanalmente aumenta de acordo com uma progressão aritmética de **primeiro termo igual a R$ 30,00** e **razão igual a R$ 5,00**. Como estamos buscando **a quantia total** depositada ao fim da vigésima quarta semana, devemos usar a **fórmula da soma**:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Para $n = 24$:

$$S_{24} = \frac{(a_1 + a_{24}) \cdot 24}{2} \qquad \rightarrow \qquad S_{24} = 12 \cdot (a_1 + a_{24})$$

Precisamos encontrar o a_{24}. Para isso, usamos a fórmula do termo geral:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$a_{24} = a_1 + (24-1)r$$

$$a_{24} = a_1 + 23r$$

Substituindo $a_1 = 30$ e $r = 5$, temos:

$$a_{24} = 30 + 23 \cdot 5$$

$$a_{24} = 30 + 115$$

$$a_{24} = 145$$

Pronto! temos tudo que precisamos para encontrar S_{24}!

$$S_{24} = 12 \cdot (30 + 145) \qquad \rightarrow \qquad S_{24} = 12 \cdot 175 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\mathbf{S_{24} = 2100}}$$

Portanto, ao final da 24ª semana, a **quantia total** depositada será de R$ 2.100,00.

Gabarito: LETRA D.

8. (IDIB/CRM-PB/2022) Determine a soma dos primeiros 150 termos de uma sequência formada pelos números ímpares positivos.

A) $S_{150} = 21.500$
B) $S_{150} = 22.500$
C) $S_{150} = 23.500$
D) $S_{150} = 24.500$
E) $S_{150} = 20.500$

Comentários:
Os **números ímpares positivos** são:

$$1, 3, 5, 7, \dots$$

Observe que eles evoluem conforme uma **PA de razão igual a 2**.

Sendo assim, para determinar **a soma dos 150 primeiros termos**, podemos usar:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Para $n = 150$:

$$S_{150} = \frac{(a_1 + a_{150}) \cdot 150}{2} \quad \rightarrow \quad S_{150} = 75 \cdot (a_1 + a_{150})$$

Precisamos usar a **fórmula do termo geral** para encontrar o a_{150}.

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$a_{150} = a_1 + (150-1)r$$

$$a_{150} = a_1 + 149r$$

Substituindo $\boldsymbol{a_1 = 1}$ e $\boldsymbol{r = 2}$, temos:

$$a_{150} = 1 + 149 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad a_{150} = 299$$

Pronto! Agora vamos usar esse resultado em S_{150}:

$$S_{150} = 75 \cdot (a_1 + a_{150}) \quad \rightarrow \quad S_{150} = 75 \cdot (1 + 299) \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{S_{150} = 22.500}}$$

Gabarito: LETRA B.

9. (AOCP/PREF. PINHAIS/2022) Os números das casas do lado esquerdo de determinada rua da cidade de Pinhais estão em progressão aritmética. Se a primeira casa tem o número 10 e a décima segunda tem o número 142, qual é o número da trigésima casa do lado esquerdo dessa rua?

A) 356.
B) 350.
C) 354.
D) 352.
E) 358.

Comentários:

O enunciado nos disse que $a_1 = 10$ e $a_{12} = 142$. Precisamos encontrar a_{30}.

Para isso, podemos usar a **fórmula do termo geral** e determinar a razão dessa PA.

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Para $n = 12$:

$$a_{12} = a_1 + 11r$$

Substituindo $\boldsymbol{a_1 = 10}$ e $\boldsymbol{a_{12} = 142}$:

$$142 = 10 + 11r \quad \rightarrow \quad r = \frac{132}{11} \quad \rightarrow \quad r = 12$$

Com a razão e o primeiro termo, conseguimos determinar **qualquer termo** dessa PA!

Para $n = 30$:

$$a_{30} = a_1 + 29r$$

Substituindo $a_1 = 10$ e $r = 12$:

$$a_{30} = 10 + 29 \cdot 12 \quad \rightarrow \quad a_{30} = 10 + 348 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{a_{30} = 358}}$$

Gabarito: LETRA E.

10. (Inst. AOCP/PC-GO/2022) Para um exercício de tiros, certo Agente de Polícia estabeleceu que faria sequências de 21 disparos antes de verificar seus acertos. Entretanto, diante do quantitativo inicial Q de munições disponíveis, decidiu que, após a primeira sequência de 21 disparos, sempre dispararia 3 tiros a

menos que a sequência anterior até que, na última sequência, de exatamente 3 disparos, esgote-se a quantidade Q de munições. Caso se cumpra o que foi planejado, a quantidade inicial Q é igual a

A) 60.

B) 84.

C) 120.

D) 160.

E) 210.

Comentários:

Observe que teremos uma **primeira sequência com 21 disparos** (a_1), **uma segunda sequência com 18** (a_2)... até uma última sequência de 3 disparos (a_n). Trata-se de uma progressão aritmética **decrescente** de **razão igual a** -3. Ora, a quantidade inicial de munições (Q) é a **soma** de todos esses disparos! Ou seja, a soma de uma PA:

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Note que não temos o **número de termos** dessa PA (n). Para encontrá-lo, podemos usar:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$3 = 21 + (n-1)(-3)$$

$$3(n-1) = 18 \quad \rightarrow \quad n - 1 = 6 \quad \rightarrow \quad n = 7$$

Com o valor de n, podemos usar a fórmula da soma:

$$S = \frac{(21+3)\cdot 7}{2} \quad \rightarrow \quad S = 12 \cdot 7 \quad \rightarrow \quad \boxed{S = 84}$$

Gabarito: LETRA B.

FGV

11. (FGV/SEMSA-MANAUS/2022) Escreva todos os números pares desde 10 até 100. Coloque sinais negativos em todos os números de ordem ímpar, ou seja, no 1º, 3º, 5º, e assim por diante, deixando todos os restantes com sinais positivos. A soma de todos esses números com seus respectivos sinais é

A) 44.

B) 45.

C) 46.

D) 47.

E) 48.

Comentários:

Vamos escrever os números pares de 10 até 100.

$$P = \{10, 12, 14, \dots, 98, 100\}$$

Observe que podemos interpretar essa sequência como uma **PA de razão igual a 2**. Sabendo disso, podemos determinar o número de termos por meio da **fórmula do termo geral**.

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$100 = 10 + (n-1) \cdot 2$$

$$n - 1 = \frac{90}{2}$$

$$\boldsymbol{n = 46}$$

Agora, veja que o enunciado pede para colocar **sinal negativo em todos os termos de ordem ímpar**.

$$P = \{-10, 12, -14, 16, -18, \dots, -98, 100\}$$

Professor, como você sabia que o sinal negativo ia no 98 e não no 100?

Galera, vimos que **P tem 46 elementos**. Sendo assim, **o 100 será 46º termo**, pois é o último. Logo, por ser um termo de ordem par, ele não recebe o sinal negativo. Por sua vez, o 98, que é o 45º termo da lista, recebe. Dito isso, podemos dividir P em duas sequências distintas!

$$A_1 = \{12, 16, 20, \dots 96, 100\}$$

$$A_2 = \{-10, -14, -18, \dots . -94, -98\}$$

Cada uma delas possui **23 termos**. Agora, note que A_1 também pode ser vista como uma PA, mas dessa vez de razão igual a 4. É possível encontrarmos a soma desses termos por meio da fórmula da **soma dos n primeiros termos**.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$S_{A_1} = \frac{(12 + 100) \cdot 23}{2} \quad \rightarrow \quad S_{A_1} = \frac{112 \cdot 23}{2} \quad \rightarrow \quad S_{A_1} = 1288$$

Podemos fazer a mesma coisa para A_2.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$S_{A_2} = \frac{(-10 - 98) \cdot 23}{2} \quad \rightarrow \quad S_{A_2} = \frac{-108 \cdot 23}{2} \quad \rightarrow \quad S_{A_2} = -1242$$

Pronto! Para encontrarmos a soma de todos os números, basta somarmos S_{A_1} e S_{A_2}.

$$S = S_{A_1} + S_{A_2}$$

$$S = 1288 - 1242$$

$$\boxed{S = 46}$$

Gabarito: LETRA C.

12. (FGV/CBM-AM/2022) A soma de 8 números inteiros consecutivos é 5764. O maior desses números é
A) 724.
B) 723.
C) 720.
D) 717.
E) 707.

Comentários:
Galera, 8 **inteiros consecutivos formam sempre uma PA de razão igual a 1**.

Como queremos **a soma dos 8 primeiros**, então:

$$S_8 = \frac{(a_1 + a_8) \cdot 8}{2} \quad \rightarrow \quad S_8 = (a_1 + a_8) \cdot 4$$

Para encontrar o a_8, usamos **a fórmula do termo geral**:

$$a_8 = a_1 + 7r \quad \rightarrow \quad a_8 = a_1 + 7 \cdot 1 \quad \rightarrow \quad a_8 = a_1 + 7$$

Usando essa informação em S_8.

$$S_8 = (a_1 + a_1 + 7) \cdot 4 \quad \rightarrow \quad S_8 = (2a_1 + 7) \cdot 4$$

O enunciado fala que **essa soma vale 5764**.

$$(2a_1 + 7) \cdot 4 = 5764 \quad \rightarrow \quad 2a_1 + 7 = 1441 \quad \rightarrow \quad 2a_1 = 1434 \quad \rightarrow \quad a_1 = 717$$

Opa! Determinarmos o primeiro termo dessa sequência! **A questão quer o maior, ou seja, o a_8.**

$$a_8 = 717 + 7 \quad \rightarrow \quad \boxed{a_8 = 724}$$

Gabarito: LETRA A.

13. (FGV/SEAD-AP/2022) Na tabela a seguir, os elementos de cada linha e de cada coluna formam progressões aritméticas.

	17		41	
		N		
39				23

O valor de N é:

a) 29.
b) 30.
c) 31.
d) 32.
e) 33.

Comentários:

Vamos começar observando **a primeira linha**. A questão afirma que os elementos na mesma linha ou coluna estão em **progressão aritmética**. Portanto, 17 e 41 estão em uma PA. Com isso, podemos escrever que:

$$a_2 = 17$$

$$a_4 = 41$$

Nós podemos reescrever as igualdades acima da seguinte forma:

$$a_1 + r = 17 \qquad (1)$$

$$a_1 + 3r = 41 \qquad (2)$$

Veja que temos um sistema com **duas equações e duas incógnitas**. Para resolvê-lo, podemos subtrair (1) de (2), membro a membro.

$$(a_1 + 3r) - (a_1 + r) = 41 - 17$$

$$2r = 24 \quad \rightarrow \quad r = 12$$

Pronto, essa é a razão da PA da primeira linha. Podemos encontrar o primeiro termo usando r em (1).

$$a_1 + 12 = 17 \quad \rightarrow \quad a_1 = 5$$

Pronto! Com **o primeiro termo e a razão**, temos qualquer elemento da PA. Com isso, a **primeira linha** fica:

5	17	29	41	53
		N		
39				23

Opa! Agora temos **dois elementos na primeira coluna**. Como eles estão em PA, podemos escrever:

$$b_1 = 5 \qquad b_5 = 39$$

Nós podemos escrever b_5 da seguinte forma:

$$b_5 = b_1 + 4r = 39$$

Usando o valor de b_1 podemos **determinar a razão r dessa PA**.

$$5 + 4r = 39 \quad \rightarrow \quad 4r = 34 \quad \rightarrow \quad r = 8{,}5$$

Pronto! Com o primeiro termo e a razão, podemos escrever toda **a primeira coluna.**

5	17	29	41	53
13,5				
22		N		
30,5				
39				23

Nesse momento, devemos ir para **a quinta coluna**! Temos dois elementos da PA de lá e isso significa que podemos determinar a razão dessa PA.

$$c_1 = 53$$

$$c_5 = c_1 + 4r = 23$$

Ora, usando o valor de c_1 em c_5:

$$53 + 4r = 23 \qquad \rightarrow \qquad 4r = -30 \qquad \rightarrow \qquad r = -7{,}5$$

Assim, com o primeiro termo c_1 e a razão, determinamos qualquer termo dessa PA. Vamos colocá-los também na tabela.

5	17	29	41	53
13,5				45,5
22		N		38
30,5				30,5
39				23

Agora estamos preparados para encontrar o N! Observe a **terceira linha**, temos:

$$d_1 = 22$$

$$d_5 = d_1 + 4r = 38$$

Usando d_1 em d_5, podemos determinar a razão da PA da terceira linha:

$$22 + 4r = 38 \qquad \rightarrow \qquad 4r = 16 \qquad \rightarrow \qquad r = 4$$

Com o primeiro termo d_1 e a razão, **é possível determinar qualquer termo da PA**. Vamos completar a tabela.

5	17	29	41	53
13,5				45,5
22	26	**30**	34	38
30,5				30,5
39				23

Gabarito: LETRA B.

14. (FGV/FUNSAUDE-CE/2021) Ulisses escreveu todos os números pares positivos de 2 até 2022. Depois, ele pintou de azul todos os números que também eram múltiplos de 3 e pintou de amarelo os demais. A quantidade de números que Ulisses pintou de amarelo é:

A) 1485.

B) 1011.

C) 886.

D) 752.

E) 674.

Comentários:

Vamos começar escrevendo **os números pares de 2 até 2022**.

$$A = \{2, 4, 6, 8, \dots, 2020, 2022\}$$

Observe que a sequência que escrevemos acima pode ser interpretada como uma **PA de razão igual a 2**. Sendo assim, é possível encontrarmos a quantidade de termos de A por meio da **fórmula do termo geral**.

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$2022 = 2 + (n-1) \cdot 2$$

$$n - 1 = \frac{2020}{2}$$

$$n = 1011$$

Pronto, concluímos que **A tem 1011 termos**. Agora, vamos colocar nossa atenção nos múltiplos de 3 em A. Se todos os elementos de A são múltiplos de 2, então um eventual múltiplo de 3 nesse conjunto, **também será múltiplo de 6**.

Lembre-se que se o número é múltiplo de 2 e 3 simultaneamente, então ele será um múltiplo de 6 também. Dessa forma, devemos **procurar pelos números múltiplos de 6 em A**.

Para isso, devemos encontrar qual **o maior múltiplo de 6 que seja menor que 2022** (último número de A).

$$\frac{2022}{6} = 337$$

Observe que quando dividimos 2022 por 6, obtemos um **número inteiro**. Logo, **2022 é um múltiplo de 6**.

$$M = \{6, 12, 18, \dots 2022\}$$

Além disso, o 337 que encontramos é exatamente a quantidade de múltiplos de 6 em M. O enunciado disse que Ulisses pintou de azul todos os números em M, ou seja, **337 números**. Os demais, ele pintou de amarelo. Como temos **1011 elementos em A**, a quantidade pintada de amarelo é:

$$\text{Amarelo} = 1011 - 337$$

$$\boxed{\textbf{Amarelo} = \mathbf{674}}$$

Gabarito: LETRA E.

15. (FGV/PM-SP/2021) Um sargento organizou um grupo de soldados em 16 filas, com 2 soldados na primeira fila e 3 soldados a mais em cada fila subsequente: 2, 5, 8, 11, ... Se o sargento organizasse o mesmo grupo de soldados em filas de 14 soldados cada uma, o número total de filas seria

A) 14.
B) 16.
C) 24.
D) 28.
E) 32.

Comentários:

O primeiro passo é descobrir quantos soldados compõem esse grupo. Note que as quantidades de soldados em cada fila vão formando uma **progressão aritmética**.

$$2, 5, 8, 11, \ldots$$

Ademais, podemos perceber que **a razão dessa PA é 3**, pois as quantidades vão subindo sempre de três em três. Como temos 16 filas, para determinarmos o total de soldados desse grupo, devemos calcular **a soma dos 16 primeiros termos da PA**. Sendo assim, lembre-se:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Como $n = 16$, precisaremos encontrar a_{16}. Para isso, podemos usar a **fórmula do termo geral** de uma PA.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_{16} = 2 + (16 - 1) \cdot 3$$

$$a_{16} = 2 + 15 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad a_{16} = 2 + 45 \quad \rightarrow \quad a_{16} = 47$$

Agora, usando essa informação na fórmula da soma:

$$S_{16} = \frac{(a_1 + a_{16}) \cdot 16}{2} \quad \rightarrow \quad S_{16} = (2 + 47) \cdot 8 \quad \rightarrow \quad S_{16} = 49 \cdot 8 \quad \rightarrow \quad S_{16} = 392$$

Pronto! Sabemos que **temos 392 soldados**. Como queremos reorganizá-los em filas com 14 soldados cada uma, para determinamos o total de filas, basta dividirmos o número de soldados pela quantidade de soldado que queremos em cada fila.

$$\frac{392}{14} = 28$$

Portanto, precisaremos de **28 filas**.

Gabarito: LETRA D.

CEBRASPE

(CESPE/TELEBRAS/2022) Texto para as próximas questões

João acaba de assumir um cargo de assistente administrativo em uma empresa e foi designado para a tarefa de examinar as demandas de clientes e dar a elas o devido encaminhamento. Considerando que João ainda não tem experiência com essa tarefa, seu chefe decide que passará para ele, no primeiro dia, 10 demandas, no segundo, 15, no terceiro, 20, e assim sucessivamente, crescendo segundo uma Progressão Aritmética até o oitavo dia, quando então estabilizará o número de demandas diárias.

Para executar sua tarefa, João leva sempre 5 minutos para tomar conhecimento dos detalhes de cada demanda, enquanto a fase de encaminhamento (decidir o que fazer e executar os procedimentos necessários) leva 12 minutos nas demandas do primeiro dia, 6 minutos nas demandas do segundo, 3 minutos nas demandas do terceiro dia, e assim sucessivamente, decrescendo segundo uma Progressão Geométrica até o oitavo dia, quando então o tempo de encaminhamento se estabiliza. Com base nessa situação hipotética, julgue os itens seguinte.

16. (CESPE/TELEBRAS/2022) Quando estabilizar sua tarefa, João estará recebendo para exame mais de 50 demandas de clientes por dia.

Comentários:
O enunciado disse que o número de demandas cresce conforme uma progressão aritmética. No primeiro dia, como **o chefe passa 10 demandas**, temos que:

$$a_1 = 10$$

Perceba também que a cada dia que passa, **o número de demandas cresce em 5**. Sendo assim,

$$r = 5$$

O número de demandas **cresce até o oitavo dia**, quando então se estabiliza. Portanto, vamos achar o a_8.

$$a_8 = a_1 + 7r$$

$$a_8 = 10 + 7 \cdot 5 \quad \rightarrow \quad a_8 = 10 + 35 \quad \rightarrow \quad a_8 = 45$$

Ou seja, **a demanda se estabiliza em 45, que é menor que 50** e não maior, conforme apontou o item.

Gabarito: ERRADO.

17. (CESPE/TELEBRAS/2022) A sequência formada pelos tempos diários que João leva para examinar todas as demandas de cada dia forma uma Progressão Aritmética.

Comentários:

Pessoal, vamos lá. Primeiramente, é interessante organizarmos as informações do enunciado numa tabela.

Dia	Demandas	Tempo Fase de Conhecimento (por demanda)	Tempo Fase de Encaminhamento (por demanda)	Tempo Total Gasto (por demanda)
1º dia	10	5 min	12 min	17 min
2º dia	15	5 min	6 min	11 min
3º dia	20	5 min	3 min	8 min
4º dia	25	5 min	1,5 min	6,5 min

Note que a fase de conhecimento nunca muda, **é sempre 5 minutos**. O tempo da fase de encaminhamento **diminui sempre pela metade até o 8º dia**. O tempo total gasto por demanda é a soma dos tempos despendidos nessas duas fases. Para determinar o tempo total diário gasto com as demandas, basta **multiplicar a quantidade de demandas pelo tempo total gasto com cada uma**.

Dia	Demandas	Tempo Fase de Conhecimento (por demanda)	Tempo Fase de Encaminhamento (por demanda)	Tempo Total Gasto (por demanda)	Tempo p/ examinar todas as demandas
1º dia	10	5 min	12 min	17 min	$10 \cdot 17 = 170$ min
2º dia	15	5 min	6 min	11 min	$15 \cdot 11 = 165$ min
3º dia	20	5 min	3 min	8 min	$20 \cdot 8 = 160$ min
4º dia	25	5 min	1,5 min	6,5 min	$25 \cdot 6{,}5 = 162{,}5$ min

Observe que **a questão foi maldosa!** Quem fez apenas até o terceiro dia marcou o item como certo, já que $(170, 165, 160)$ forma uma progressão aritmética de razão igual a -5.

No entanto, **a partir do quarto dia** é que a sequência formada pelos tempos **não obedece mais a uma PA**. Sendo assim, essa sequência não forma uma PA, "falhando" do quarto dia em diante.

Gabarito: ERRADO.

18. (CESPE/TELEBRAS/2022) Julgue o item a seguir, relacionados a problemas aritméticos.

Se, para uma progressão aritmética, a soma dos 2 primeiros termos é 100 e a soma dos 6 primeiros termos é 276, então existirá um $n \in N$ tal que a soma dos primeiros termos dessa progressão aritmética será negativa.

Comentários:
Vamos por partes!

Se **a soma dos 2 primeiros termos é 100**, podemos escrever:

$$a_1 + a_2 = 100 \quad \rightarrow \quad a_1 + a_1 + r = 100 \quad \rightarrow \quad 2a_1 + r = 100 \quad (1)$$

Ademais, se **a soma dos 6 primeiros termos é 276**, podemos escrever também:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 276$$

$$a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + (a_1 + 3r) + (a_1 + 4r) + (a_1 + 5r) = 276$$

$$6a_1 + 15r = 276$$

Vamos simplificar **dividindo toda a equação por 3**.

$$2a_1 + 5r = 92 \qquad (2)$$

Pronto, temos **um sistema com duas equações e duas incógnitas**. Vamos resolvê-lo.

De (1), escrevemos:

$$2a_1 = 100 - r$$

Substituindo em (2):

$$(100 - r) + 5r = 92 \quad \rightarrow \quad 4r = -8 \quad \rightarrow \quad \boxed{r = -2}$$

Pronto! Já sabemos a razão dessa PA. Agora, podemos aplicá-la em (1) e determinar o a_1.

$$2a_1 = 100 - (-2) \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{102}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{a_1 = 51}$$

Agora sim. Com o primeiro termo e a razão conseguimos analisar o item melhor. Galera, **a questão quer saber se existe um número natural "n" tal que S_n seja <u>negativo</u>**.

$$S_n < 0 \quad \rightarrow \quad \frac{(a_1 + a_n)n}{2} < 0$$

$$[a_1 + a_1 + (n-1)r]n < 0$$

Para que a expressão acima seja negativa, **basta que o que está entre colchetes seja negativo**, pois "n" nunca é negativo, já que é natural. Sendo assim,

$$2a_1 + (n-1)r < 0$$

Substituindo os valores de a_1 e r:

$$2 \cdot 51 + (n-1) \cdot (-2) < 0 \quad \rightarrow \quad 102 - 2n + 2 < 0 \quad \rightarrow \quad 2n > 104 \quad \rightarrow \quad n > 52$$

Assim, percebemos que **para valores de "n" acima de 52, a soma S_n será negativa**. Façamos o teste!
Seja $n = 53$:

$$a_{53} = a_1 + 52r \quad \rightarrow \quad a_{53} = 51 + 52 \cdot (-2) \quad \rightarrow \quad a_{53} = 51 - 104 \quad \rightarrow \quad a_{53} = -53$$

Logo,

$$S_{53} = \frac{(a_1 + a_{53}) \cdot 53}{2} \quad \rightarrow \quad S_{53} = \frac{(51 - 53) \cdot 53}{2} \quad \rightarrow \quad S_{53} = \frac{(-2) \cdot 53}{2} \quad \rightarrow \quad S_{53} = -53$$

Logo, existe sim um número natural "n" (vários na verdade**, qualquer um acima de 52**) que torna a soma dos "n" primeiros termos **negativa**.

Gabarito: CERTO.

CESGRANRIO

19. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) O quarto, o quinto e o sexto termos de uma progressão aritmética são expressos por $x + 1, x^2 + 4$ e $2x^2 + 3$, respectivamente. A soma dos dez primeiros termos dessa progressão aritmética é igual a

A) 260
B) 265
C) 270
D) 275
E) 280

Comentários:
Temos **três termos consecutivos** de uma PA.

$a_4 = x + 1$
$a_5 = x^2 + 4$
$a_6 = 2x^2 + 3$

Sabemos que **o termo central é a média aritmética dos termos extremos**. Assim,

$$a_5 = \frac{a_4 + a_6}{2}$$

Substituindo pelas expressões do enunciado:

$$x^2 + 4 = \frac{(x+1) + (2x^2 + 3)}{2}$$

Multiplicando cruzado.

$$2 \cdot (x^2 + 4) = 2x^2 + x + 4$$

Usando a propriedade **distributiva** da multiplicação no lado esquerdo.

$$\cancel{2x^2} + 8 = \cancel{2x^2} + x + 4$$

Cortando o **"$2x^2$"** que aparece em ambos os lados.

$$x + 4 = 8 \quad \rightarrow \quad x = 4$$

Determinamos o valor de x, então sabemos quem é cada um dos termos.

$a_4 = x + 1 \quad \rightarrow \quad a_4 = 4 + 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_4 = 5}$
$a_5 = x^2 + 4 \quad \rightarrow \quad a_5 = 4^2 + 4 \quad \rightarrow \quad a_5 = 16 + 4 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_5 = 20}$
$a_6 = 2x^2 + 3 \quad \rightarrow \quad a_6 = 2 \cdot 4^2 + 3 \quad \rightarrow \quad a_6 = 2 \cdot 16 + 3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_6 = 35}$

Observe que **a razão da PA é igual a 15**.

$$r = a_5 - a_4 = 20 - 5 = 15$$

Só para confirmar, poderíamos fazer também

$$r = a_6 - a_5 = 35 - 20 = 15$$

Com a razão, conseguimos encontrar o primeiro termo dessa PA, basta usarmos **a fórmula do termo geral**.

$$a_4 = a_1 + 3r$$

Sabemos que $\boldsymbol{a_4 = 5}$ e que $\boldsymbol{r = 15}$.

$$5 = a_1 + 3 \cdot 15 \quad \rightarrow \quad 5 = a_1 + 45 \quad \rightarrow \quad a_1 = -40$$

O enunciado pergunta **a soma dos dez primeiros termos**. Por esse motivo, precisamos do a_{10}.

$$a_{10} = a_1 + 9r \quad \rightarrow \quad a_{10} = -40 + 9 \cdot 15 \quad \rightarrow \quad a_{10} = -40 + 135 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_{10} = 95}$$

Agora sim podemos usar a fórmula da soma dos n primeiros termos.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \quad \rightarrow \quad S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} \quad \rightarrow \quad S_{10} = (-40 + 95) \cdot 5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S_{10} = 275}$$

Gabarito: LETRA D.

20. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Em uma progressão aritmética, o décimo termo é o quádruplo do terceiro. Se o sétimo termo é igual a 19, então o segundo termo é igual a

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7

Comentários:

O enunciado disse que **o décimo termo é o quádruplo do terceiro**. Assim,

$$a_{10} = 4 \cdot a_3$$

Usando que $a_{10} = a_1 + 9r$ e que $a_3 = a_1 + 2r$, podemos **substituir** na expressão acima.

$$a_1 + 9r = 4 \cdot (a_1 + 2r)$$

Aplicando **a propriedade distributiva** da multiplicação no lado direito.

$$a_1 + 9r = 4a_1 + 8r$$

Isolando $\boldsymbol{a_1}$ **no lado esquerdo** e a **razão $\boldsymbol{r}$ do lado direito**, resulta em:

$$3a_1 = r \qquad \rightarrow \qquad a_1 = \frac{r}{3} \qquad (1)$$

Agora, devemos usar a segunda informação que o enunciado nos deu: **o sétimo termo é igual a 19**.

$$a_7 = a_1 + 6r \qquad \rightarrow \qquad a_1 + 6r = 19 \qquad (2)$$

Usando (1) em (2):

$$\frac{r}{3} + 6r = 19 \qquad \rightarrow \qquad \frac{r + 18r}{3} = 19 \qquad \rightarrow \qquad \frac{19r}{3} = 19 \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{r = 3}$$

Podemos determinar o a_1 também, substituindo o valor da razão em (1).

$$a_1 = \frac{r}{3} \qquad \rightarrow \qquad a_1 = \frac{3}{3} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{a_1 = 1}$$

Pronto. **Obtemos $\boldsymbol{a_1}$ e $\boldsymbol{r}$**, podemos encontrar **qualquer termo da PA**. O enunciado quer o a_2.

$$a_2 = a_1 + r \qquad \rightarrow \qquad a_2 = 1 + 3 \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{a_2 = 4}$$

Gabarito: LETRA B.

21. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Considere uma progressão aritmética, em que $\boldsymbol{a_8 = a_2 + a_6}$, e a soma dos 10 primeiros termos dessa sequência é igual a 330. Assim, a razão dessa progressão é igual a

A) 6

B) 8

C) 10

D) 12

E) 13

Comentários:

O enunciado disse que $\boldsymbol{a_8 = a_2 + a_6}$. Podemos usar a fórmula do termo geral, $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, para escrever essa mesma expressão em termos de a_1 e r. Note que:

$a_8 = a_1 + 7r$
$a_6 = a_1 + 5r$
$a_2 = a_1 + r$

Fazendo a substituição na expressão do enunciado.

$$(a_1 + 7r) = (a_1 + r) + (a_1 + 5r)$$

$$a_1 + 7r = 2a_1 + 6r$$

Deixando tudo que tem $\boldsymbol{a_1}$ **do lado esquerdo** e tudo que tem $\boldsymbol{r}$ **do lado direito**.

$$a_1 = r \qquad (1)$$

Ademais, o enunciado revelou que **a soma dos 10 primeiros termos é igual a 330**.

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2}$$

Vamos utilizar que $\boldsymbol{S_{10} = 330}$ e que $\boldsymbol{a_{10} = a_1 + 9r}$.

$$\frac{[a_1 + (a_1 + 9r)] \cdot 10}{2} = 330 \qquad \rightarrow \qquad (2a_1 + 9r) \cdot 5 = 330$$

Dividindo os dois lados da equação por 5 (o famoso passando o "5" dividindo), ficamos com:

$$2a_1 + 9r = 66 \qquad (2)$$

As equações (1) e (2) formam um sistema de duas equações e duas incógnitas, podemos resolvê-lo. Substituindo (1) em (2).

$$2r + 9r = 66 \qquad \rightarrow \qquad 11r = 66 \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{r = 6}$$

Encontramos **a razão da PA**! Podemos marcar o gabarito, letra A.

Gabarito: LETRA A.

Vunesp

22. (VUNESP/PREF. VALINHOS/2019) André e Daniel receberam uma mesma quantia em dinheiro. Eles gastaram, desse dinheiro, a mesma quantia por dia durante vários dias. Após 57 dias, André ficou com R$ 43,00, e após 58 dias, Daniel ficou com R$ 29,00. O valor que cada um desses rapazes recebeu foi

A) R$ 613,00.

B) R$ 783,00.

C) R$ 841,00.

D) R$ 910,00.

E) R$ 1.002,00.

Comentários:

Vamos interpretar a questão assim: **a quantia que eles receberam no primeiro dia é a_1**. Ademais, considere que **o dinheiro que eles gastam todo dia é r**.

Após o **primeiro dia**, os dois estarão com $a_2 = a_1 - r$.
Após o **segundo dia**, os dois estarão com $a_3 = a_1 - 2r$
Após o **terceiro dia**, os dois estarão com $a_4 = a_1 - 3r$.

Note que temos uma **progressão aritmética de primeiro termo a_1** e **razão igual a $-r$**.

Sendo assim, **após 57 dias** André ficou com:

$$a_{58} = a_1 - 57r \quad \rightarrow \quad a_1 - 57r = 43 \quad (1)$$

Analogamente, **após 58 dias**, Daniel ficou com:

$$a_{59} = a_1 - 58r \quad \rightarrow \quad a_1 - 58r = 29 \quad (2)$$

Subtraindo as equações (1) e (2) membro a membro:

$$(a_1 - 57r) - (a_1 - 58r) = 43 - 29$$

$$r = 14$$

Logo, **eles gastam 14 reais todos os dias**. Para descobrir o valor inicial que eles receberam, basta **substituir o valor de r encontrado** em qualquer uma das equações (1) ou (2).

$$a_1 - 57 \cdot 14 = 43 \quad \rightarrow \quad a_1 = 43 + 798 \quad \rightarrow \quad a_1 = 841$$

Gabarito: LETRA C.

23. (VUNESP/PM-SP/2020) O percurso de um treinamento de corrida é composto por 5 etapas com distâncias diferentes em cada uma delas. Uma nova etapa sempre tem 100 metros a mais que a etapa anterior. Sabendo que a quarta etapa do treinamento é percorrer 1200 metros, a distância total do percurso é igual a

A) 6 100 metros.
B) 5 900 metros.
C) 5 700 metros.
D) 5 500 metros.

Comentários:

Imagine a seguinte sequência:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$$

O $\boldsymbol{a_1}$ **representa a distância da primeira etapa**, o $\boldsymbol{a_2}$ **representa a distância da segunda etapa**, o a_3, da terceira etapa e assim sucessivamente.

Como uma nova etapa sempre tem 100 a mais que a etapa anterior, então essa sequência é uma **progressão aritmética de razão igual a 100**. Ademais, o enunciado nos disse que $\boldsymbol{a_4 = 1200}$. Sabendo desses dois fatos, podemos encontrar a distância da primeira etapa.

$$a_4 = a_1 + 3r$$

Substituindo $a_4 = 1200$ e $r = 100$, ficamos com:

$$1200 = a_1 + 3 \cdot 100 \quad \rightarrow \quad a_1 = 1200 - 300 \quad \rightarrow \quad a_1 = 900$$

Pronto, **com o primeiro termo e a razão**, determinamos todas as distâncias das etapas.

$$(900, 1000, 1100, 1200, 1300)$$

A questão quer **a distância total do percurso**. Podemos somar os cinco termos ou usar **a fórmula** da soma dos n primeiros termos de uma PA.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \quad \rightarrow \quad S_5 = \frac{(a_1 + a_5) \cdot 5}{2}$$

$$S_5 = \frac{(900 + 1300) \cdot 5}{2} \quad \rightarrow \quad S_5 = \frac{2200 \cdot 5}{2} \quad \rightarrow \quad S_5 = 1100 \cdot 5 \quad \rightarrow \quad S_5 = 5500$$

Gabarito: LETRA D.

24. (VUNESP/PREF. BARRETOS/2018) Dois colegas estão treinando para uma competição de ciclismo marcada para o mês que vem. A cada dia de treino, eles percorrem 5 km a mais do que percorreram no dia anterior. Sabendo-se que, em quatro dias de treino, eles percorreram um total de 150 km, é correto afirmar que no 4º dia, em km, eles percorreram

A) 30.

B) 35.

C) 45.

D) 50.

E) 55.

Comentários:

Considere:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

O a_1 é a distância percorrida no primeiro dia; o a_2 é a distância percorrida no segundo dia... Ademais, como em cada dia **eles percorrem um total de 5 km** a mais, podemos interpretar essa sequência como uma **progressão aritmética de razão igual a 5**. Sendo assim, podemos escrever:

$$a_2 = a_1 + 5$$

$$a_3 = a_2 + 500 \qquad \rightarrow \qquad a_3 = a_1 + 10$$

$$a_4 = a_3 + 500 \qquad \rightarrow \qquad a_4 = a_1 + 15$$

Como em **quatro dias eles percorreram 150 km**,

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 150$$

$$a_1 + (a_1 + 5) + (a_1 + 10) + (a_1 + 15) = 150$$

$$4a_1 + 30 = 150 \qquad \rightarrow \qquad 4a_1 = 120 \qquad \rightarrow \qquad a_1 = \frac{120}{4} \qquad \rightarrow \qquad a_1 = 30$$

Logo, determinamos que **no primeiro dia eles percorreram 30 km**. Para encontrarmos quanto eles percorreram no quarto dia, basta calcularmos a_4.

$$a_4 = a_1 + 15 \qquad \rightarrow \qquad a_4 = 30 + 15 \qquad \rightarrow \qquad a_4 = 45$$

Gabarito: LETRA C.

QUESTÕES COMENTADAS

Progressão Geométrica

Outras Bancas

1. (INST. MAIS/IPREV. SANTOS/2022) Seja a sequência:

$$\boldsymbol{(5; a; a + 60; \ldots)}$$

Sabendo que essa sequência consiste em uma progressão geométrica e que a é um número par, é correto afirmar que o seu 4º termo vale
A) 250
B) 320
C) 420
D) 480

Comentários:
Sabemos que se temos três termos consecutivos a_1, a_2 e $a_3$em progressão geométrica, então vale a relação:

$$\boldsymbol{a_2^2 = a_1 \cdot a_3}$$

Do enunciado, podemos tirar $a_1 = 5$, $a_2 = a$ e $a_3 = a + 60$. Substituindo,

$$a^2 = 5 \cdot (a + 60) \quad \rightarrow \quad a^2 = 5a + 300 \quad \rightarrow \quad a^2 - 5a - 300 = 0$$

Temos uma **equação de segundo grau**, vamos **usar Bhaskara** para resolvê-la.

- Cálculo do Discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \rightarrow \quad \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-300) \quad \rightarrow \quad \Delta = 25 + 1200 \quad \rightarrow \quad \Delta = 1225$$

- Cálculo das Raízes

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a_e} \quad \rightarrow \quad a = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1225}}{2 \cdot 1} \quad \rightarrow \quad a = \frac{5 \pm 35}{2}$$

$$a' = \frac{5 + 35}{2} \quad \rightarrow \quad a' = \frac{40}{2} \quad \rightarrow \quad a' = 20$$

$$a'' = \frac{5-35}{2} \quad \rightarrow \quad a'' = \frac{-30}{2} \quad \rightarrow \quad a'' = -15$$

Como o enunciado fala que **"a" é par**, então

$$\boxed{a = 20}$$

Com o valor de "a", podemos escrever nossa progressão geométrica.

$$\mathbf{(5; 20; 80; \dots)}$$

Observe que se trata de uma **PG de razão igual a 4**. Sendo assim, o quarto termo é dado por:

$$a_4 = a_3 q \quad \rightarrow \quad a_4 = 80 \cdot 4 \quad \rightarrow \quad a_4 = 320$$

Gabarito: LETRA B.

2. (CETREDE/UFC/2022) Considere a soma $S = 1 + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{7}{10^5} + \dots$.

Marque a alternativa que corresponde ao valor de S.

A) 977/90

B) 97/90

C) 17/15

D) 177/90

Comentários:

Pessoal, sempre que a gente se deparar com somas infinitas, é **super válido pensarmos naquela fórmula da soma dos infinitos termos de uma PG**. Lembre-se que poderemos utilizá-la quando $|q| < 1$. Note que os seguintes termos formam uma PG infinita:

$$\left(\frac{7}{10^2}, \frac{7}{10^3}, \frac{7}{10^4}, \frac{7}{10^5}, \dots\right)$$

Como você pode ter observado, a razão dessa PG é:

$$q = \frac{1}{10}$$

Sendo assim, **temos uma PG infinita com $|q| < 1$**, podemos usar a fórmula:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

Substituindo os valores de a_1 e q:

$$S_\infty = \frac{\frac{7}{10^2}}{1 - \frac{1}{10}} \quad \rightarrow \quad S_\infty = \frac{\frac{7}{10^2}}{\frac{9}{10}} \quad \rightarrow \quad S_\infty = \frac{7}{90}$$

A soma do enunciado é:

$$\boldsymbol{S = 1 + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{7}{10^5} + \dots}$$

Logo,

$$S = 1 + S_\infty \quad \rightarrow \quad S = 1 + \frac{7}{90} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{S = \frac{97}{90}}}$$

Gabarito: LETRA B.

3. (INST. MAIS/CM PRAIA GRANDE/2022) Carmem começou a juntar dinheiro em seu cofrinho. No 1º domingo do ano ela depositou certa quantidade e todo domingo posterior ela dobrou a quantidade depositada no domingo anterior. Sabendo que no 7º domingo ela depositou R$ 384,00 em seu cofrinho, assinale a alternativa que apresenta a quantia total que Carmem possuía em seu cofrinho um dia antes do 7º domingo.
A) R$ 192,00.
B) R$ 378,00.
C) R$ 540,00.
D) R$ 762,00.

Comentários:
Opa, questão que contextualizou bem as **progressões geométricas**!

Se Carmem **dobra a quantidade** depositada no cofre a cada domingo, então **a razão dessa PG é igual a 2**.

$$q = 2$$

Além disso, como o enunciado afirma **que no 7º domingo ela depositou R$ 384,00**. Com isso,

$$a_7 = 384$$

Da fórmula do termo geral, podemos encontrar **quanto ela depositou no 1º domingo**, isto é, a_1.

$$a_7 = a_1 \cdot q^6 \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{384}{2^6} \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{384}{64} \quad \rightarrow \quad a_1 = 6$$

Para determinar quanto Carmem tem no cofre um dia antes do 7º domingo, basta **somarmos os 6 primeiros** termos dessa PG.

$$S_6 = \frac{a_1(q^6 - 1)}{q - 1} \quad \rightarrow \quad S_6 = \frac{6 \cdot (2^6 - 1)}{2 - 1} \quad \rightarrow \quad S_6 = 6 \cdot 63 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{S_6 = 378}}$$

Gabarito: LETRA B.

4. (INST. AOCP/CM BAURU/2022) Assinale a alternativa que apresenta o valor de x na equação:

$$\boldsymbol{2x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \cdots = 12}$$

A) 8/3
B) 3
C) 11/3
D) 2
E) 9/2

Comentários:
Observe que temos uma **soma infinita de uma PG**. Com isso, vamos usar:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

Da soma fornecida pela questão, tiramos:

$$a_1 = 2x \qquad q = \frac{1}{2} \qquad S_\infty = 12$$

Substituindo essas valores na fórmula da soma, temos:

$$12 = \frac{2x}{1 - \frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad 4x = 12 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{x = 3}}$$

Gabarito: LETRA B.

5. (DIRENS/EEAR/2022) Considere a sequência numérica $(5, a, b, 135)$. Sabendo que essa sequência está em uma progressão geométrica, calcule o valor de $(b - a)$ e marque a opção correta.
A) 10.
B) 30.
C) 45.

D) 60.

Comentários:
A questão fornece a seguinte sequência (que está em **progressão geométrica**):

$$(\mathbf{5}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \mathbf{135})$$

Como temos o a_1 e o a_4, podemos usar a fórmula do termo geral para calcular a razão q.

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Para $\boldsymbol{n = 4}$:

$$a_4 = a_1 q^3$$

Substituindo $\boldsymbol{a_1 = 5}$ e $\boldsymbol{a_4 = 135}$:

$$135 = 5q^3 \quad \rightarrow \quad q^3 = 27 \quad \rightarrow \quad q = 3$$

Com o primeiro termo (a_1) e a razão (r), podemos calcular qualquer termo.

$$a_2 = a = a_1 q \quad \rightarrow \quad a = 5 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad a = 15$$

$$a_3 = b = a_1 q^2 \quad \rightarrow \quad b = 5 \cdot 3^2 \quad \rightarrow \quad b = 45$$

Pronto, com os valores de a e b, é possível calcular **a diferença** pedida pela questão.

$$b - a = 45 - 15 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{b - a = 30}}$$

Gabarito: LETRA B.

6. (INST. AOCP/CBM-PA/2022) Considere que a seguinte sequência numérica

$$(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{x} - \mathbf{2};\ \boldsymbol{x} + \mathbf{8};\ \ldots)$$

representa uma progressão geométrica. Dessa forma, pode-se afirmar que
A) sua razão será igual a 1/3.
B) a sequência contém números inteiros.
C) seu primeiro termo é negativo.
D) a progressão geométrica é crescente.
E) o quarto termo da sequência é −125/3.

Comentários:

Temos os três primeiros termos de uma **progressão geométrica**. Sabemos que vale:

$$a_2^2 = a_1 a_3$$

Vamos substituí-los na fórmula.

$$(x-2)^2 = x(x+8)$$

$$x^2 - 4x + 4 = x^2 + 8x$$

$$12x = 4 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = \frac{1}{3}}$$

Pessoal, cuidado nessa hora! **1/3 é o valor de "x"**, não da razão. Dessa forma, podemos reescrever:

$$\boldsymbol{(x;\ x\ -\ 2;\ x\ +\ 8;\ \dots)}$$

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}};\quad -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}};\quad \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{3}};\quad \dots\right)$$

Com a sequência, podemos avaliar nossas alternativas.

A) sua razão será igual a 1/3.

Errado. Observe que temos uma PG alternante, logo, **a razão é negativa**. No caso da questão, ela será:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}} \quad \rightarrow \quad q = -5$$

B) a sequência contém números inteiros.

Errado! 1/3, -5/3 e 25/3 são todos não inteiros.

C) seu primeiro termo é negativo.

Errado. O primeiro termo é 1/3. Logo, um **número positivo**.

D) a progressão geométrica é crescente.

Errado. Trata-se de uma PG **alternante**!

E) o quarto termo da sequência é −125/3.

Correto! Vamos calcular o quarto termo (a_4):

$$a_4 = a_1 q^3 \quad \rightarrow \quad a_4 = \frac{1}{3} \cdot (-5)^3 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{a_4 = -\frac{125}{3}}}$$

Gabarito: LETRA E.

7. (INST. CONSULPLAN/PM-RN/2022) No mês de julho, 100 medicamentos foram produzidos em uma indústria. Em novembro desse mesmo ano, foram produzidos 1.600 medicamentos. Considere que a quantidade de medicamentos produzidos a partir de julho forma uma progressão geométrica crescente. Dessa forma, o número de medicamentos produzidos em setembro é:

A) 200
B) 250
C) 400
D) 500
E) 800

Comentários:

De acordo com o enunciado, o número de medicamentos produzidos estão aumentando na forma de uma **progressão geométrica crescente**. Se no mês de julho foram produzidos 100 medicamentos, escrevemos:

$$a_1 = 100$$

Se no mês de novembro (**5 meses após julho**) foram produzidos 1600, escrevemos:

$$a_5 = 1600$$

Com esses dois termos, podemos encontrar **a razão dessa PG**.

$$a_5 = a_1 q^4$$

$$1600 = 100q^4 \quad \rightarrow \quad q^4 = 16 \quad \rightarrow \quad q = 2$$

Com a razão da PG e o primeiro termo, é possível determinar o número de medicamentos produzidos em setembro (a_3):

$$a_3 = a_1 q^2$$

$$a_3 = 100 \cdot 2^2 \quad \rightarrow \quad a_3 = 100 \cdot 4 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{a_3 = 400}}$$

Gabarito: LETRA C.

8. (IBADE/SEA-SC/2022) Considere uma sequência onde os elementos são perímetros de triângulos equiláteros. O primeiro elemento é o perímetro do triângulo equilátero com lado igual a 3. Sabe-se que a razão entre os lados de dois triângulos consecutivos é um terço. Sendo assim, a soma dos perímetros dos triângulos em questão é:

A) 27.

B) 28.

C) 27/2.

D) 25/2.

E) 15/2.

Comentários:

O perímetro de um triângulo nada mais é do que **a soma dos seus lados**. Em um triângulo equilátero (todos os lados iguais) com **lado igual a 3**, o perímetro desse primeiro triângulo é:

$$a_1 = 3 + 3 + 3 \quad \rightarrow \quad a_1 = 9$$

Quando o enunciado fala que a razão entre os lados de dois triângulos consecutivos é **um terço**, ele está nos fornecendo **a razão dessa progressão geométrica**. Logo:

$$q = \frac{1}{3}$$

Por fim, quando ele pede **a soma dos perímetros**, ele quer a soma infinita dos termos dessa PG, ou seja:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

Professor, como o senhor sabe que é a soma infinita? A questão não fala.

Galera, alguns indícios na questão nos apontam nesse caminho como, por exemplo: a razão tal que $|q| < 1$. Sabemos que, nessas condições, **a soma da PG converge**. Além disso, em nenhum momento a questão fala em um número fixo de triângulos, o que nos sugere que ele quer a soma de todos (infinitos).

Dito isso, vamos substituir o que temos na fórmula:

$$S_\infty = \frac{9}{1 - \frac{1}{3}} \quad \rightarrow \quad \boxed{S_\infty = \frac{27}{2}}$$

Gabarito: LETRA C.

9. (IBADE/PREF. VILHA VELHA/2021) Numa Progressão Geométrica, o primeiro termo da sequência é igual a 4096 e a razão dessa progressão é igual a 1/2. Com base nessas informações, o valor do 14º termo é:

A) 2.

B) 1.

C) 1/4.

D) 1/2.

E) 4.

Comentários:

Questão bem direta! O enunciado nos forneceu:

$$a_1 = 4096 \quad \text{e} \quad q = \frac{1}{2}$$

Com o primeiro termo e a razão, determinamos **qualquer outro termo** dessa PG! A questão pede o a_{14}.

$$a_{14} = a_1 q^{13}$$

$$a_{14} = 4096 \cdot \frac{1}{2^{13}} \quad \rightarrow \quad a_{14} = \frac{2^{12}}{2^{13}} \quad \rightarrow \quad \boxed{a_{14} = \frac{1}{2}}$$

Gabarito: LETRA D.

10. (IDECAN/IF-RR/2020) Considere uma Progressão Geométrica crescente e limitada com razão 3. O último termo desta Progressão Geométrica é 8748 e o primeiro termo é 4. Pode-se concluir que o número de termos desta P.G. é

A) 7.

B) 8.

C) 9.

D) 10.

E) 11.

Comentários:

Vamos separar as informações que o enunciado forneceu:

- Razão igual a 3:

$$q = 3$$

- Primeiro termo igual a 4:

$$a_1 = 4$$

- Último termo igual a 8748:

$$a_n = 8748$$

Queremos determinar **o número de termos dessa PG**, ou seja, o n.

Com as informações que foram passadas, teremos que usar a **fórmula do termo geral**:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Vamos substituir o que o enunciado passou:

$$8748 = 4 \cdot 3^{n-1}$$

$$3^{n-1} = 2187$$

Nesse momento, teríamos que encontrar que $\mathbf{3^7 = 2187}$. Assim:

$$3^{n-1} = 3^7$$

Igualando os expoentes:

$$n - 1 = 7 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\boldsymbol{n = 8}}$$

Logo, essa PG possui **8 termos**.

Gabarito: LETRA B.

FGV

11. (FGV/EPE/2022) O número de bactérias em uma certa cultura aumenta a uma taxa de 10% ao dia. Assim, o número de bactérias diárias nessa cultura aumenta de acordo com uma progressão

A) aritmética de razão 10.

B) aritmética de razão 1,1.

C) aritmética de razão 110.

D) geométrica de razão 1,1.

E) geométrica de razão 10.

Comentários:

Galera, vamos visualizar o problema com alguns números!

Imagine que temos uma cultura com 100 bactérias.

Se ela aumenta a uma taxa de **10% ao dia**, então no próximo dia teremos 110 bactérias.

Depois desse dia, teremos 10% a mais! **Cuidado aqui**, pois não é 10% da quantidade inicial (100 bactérias), é 10% da quantidade no dia anterior! Ou seja, **10% de 110 bactérias**. Assim, no próximo dia teremos **121 bactérias**. Vamos colocar essas informações numa tabela.

Dia 0	100
Dia 1	110
Dia 2	121

Observe que do dia 0 para o dia 1, o número de bactérias **aumenta 10**.

Por sua vez, do dia 1 para o dia 2, o número de bactérias **aumenta 11**.

Como **o aumento não é constante**, já podemos concluir que não temos uma progressão aritmética.

Ficamos então com uma **PG**. Para determinar a razão dessa PG, basta observarmos que:

$$\frac{110}{100} = 1{,}1 \qquad \text{e} \qquad \frac{121}{110} = 1{,}1$$

Com isso,

$$\boxed{\boldsymbol{q = 1,1}}$$

Gabarito: LETRA D.

12. (FGV/EPE/2022) Os números x, y e z, com xyz ≠ 0, formam uma PA. Se somarmos 10 ao primeiro termo ou se somarmos 20 ao terceiro termo, esses números passam a constituir uma PG. A razão dessa PG é

A) 1/3
B) 1/2
C) 3/2
D) 4/3
E) 5/4

Comentários:

Nessa questão, usaremos muito o que vimos sobre PA e PG de três termos.

Lembre-se que se (a_1, a_2, a_3) formam uma PA, então podemos escrever:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Por sua vez, se (a_1, a_2, a_3) formam uma PG, então podemos escrever:

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3$$

Feita essa breve revisão, vamos ver o que o enunciado nos trouxe.

Se **x, y e z formam uma PA**, então:

$$y = \frac{x + z}{2} \qquad (1)$$

Ademais, o enunciado fala que **se somarmos 10 ao primeiro termo**, a sequência passa a ser uma PG.

$$(x + 10, y, z)$$

Se esses três números formam uma PG, podemos escrever:

$$y^2 = z \cdot (x + 10) \qquad (2)$$

Por sua vez, o enunciado também fala que **se somarmos 20 ao terceiro termo**, teremos **outra PG**.

$$(x, y, z + 20)$$

Logo:

$$y^2 = x(z + 20) \qquad (3)$$

Agora, vamos fazer um certo algebrismo para encontrarmos x, y e z. Inicialmente, vamos igualar (2) e (3).

$$z(x + 10) = x(z + 20)$$

Usando a propriedade distributiva da multiplicação.

$$xz + 10z = zx + 20x$$

$$10z = 20x$$

$$\boldsymbol{z = 2x}$$

Vamos usar esse resultado agora em (1).

$$y = \frac{x+z}{2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{x+2x}{2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{3x}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{y}{x} = \frac{3}{2}}$$

Agora, vamos dar uma olhada de novo na PG:

$$(x, y, z + 20)$$

A razão dessa PG é encontrada por:

$$q = \frac{y}{x}$$

Ora, essa foi a razão que acabamos de encontrar! Logo:

$$\boxed{q = \frac{3}{2}}$$

Essa era a razão que o examinador queria que encontrássemos, pois foi a alternativa dada como correta.

No entanto, essa não é a mesma razão da PG:

$$(x + 10, y, z)$$

A razão dessa PG pode ser encontrada por:

$$q' = \frac{z}{y}$$

Como já sabemos que $z = 2x$, então:

$$q' = \frac{2x}{y}$$

Ora, x/y **é o inverso** de y/x. Como sabemos que $y/x = 3/2$, então:

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$$

Logo, podemos usar esse resultado:

$$q' = 2 \cdot \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad \boxed{q' = \frac{4}{3}}$$

Assim, essa PG tem uma outra razão, que também consta entre as alternativas.

Como **a questão não explicitou de qual PG é a razão procurada** e, além disso, **colocou alternativas com os dois resultados**, o correto seria a anulação da questão.

Gabarito: LETRA C/ANULADA.

13. (FGV/ALERO/2018) Se x - 1, x + 1, x + 7 são, nessa ordem, os três primeiros termos de uma progressão geométrica, o quarto termo é

A) 27.

B) 18.

C) 16.

D) 9.

E) 8.

Comentários:

Lembre-se que se temos três termos consecutivos de uma PG, podemos escrever que **o quadrado do termo central é igual ao produto dos termos vizinhos**. Com a PG do enunciado, podemos escrever:

$$(x+1)^2 = (x-1)(x+7)$$

Desenvolvendo o quadrado e usando a **propriedade distributiva** no produto:

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 - x + 7x - 7$$

$$4x = 8 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Com o valor de x encontrado, podemos **determinar os três primeiros** termos dessa PG:

$$1, 3, 9$$

Note que **o primeiro termo (a_1) é 1 e a razão (q) é 3**. Para achar o quarto termo dessa sequência, basta multiplicarmos o terceiro termo pela razão.

$$a_4 = a_3 \cdot q \quad \rightarrow \quad a_4 = 9 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_4 = 27}$$

Gabarito: LETRA A.

14. (FGV/SSP-AM/2015) Um supersapo faz uma sequência de saltos dobrando sempre, a cada salto, a distância do salto anterior. No 1º, 2º e 3º saltos, o supersapo saltou, respectivamente, 5 cm, 10 cm e 20 cm. O salto em que o supersapo saltou pela primeira vez mais de 10 metros foi o:

A) 8º salto;

B) 9º salto;

C) 10º salto;

D) 11º salto;

E) 12º salto;

Comentários:

Note que a distâncias saltadas pelo supersapo formam uma **progressão geométrica de razão igual a 2**.

- 1ª salto (a_1) é igual a 5 cm.
- 2ª salto (a_2) é igual a 10 cm.
- 3ª salto (a_3) é igual a 20 cm.

...

- 8ª salto (a_8) é igual a x cm.
- 9ª salto (a_9) é igual a y cm.

Como estamos procurando **a primeira vez que ele salta mais do que 10 m (1000 cm)**, então vamos começar encontrando quanto ele salta no 8º salto (primeiro salto das alternativas). Para isso, devemos usar **a fórmula do termo geral da PG**.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$\mathrm{a_8 = a_1 \cdot q^7} \quad \rightarrow \quad \mathrm{a_8 = 5 \cdot 2^7} \quad \rightarrow \quad \mathrm{a_8 = 5 \cdot 128} \quad \rightarrow \quad \mathrm{a_8 = 640\ cm}$$

Note que **o 8º salto ainda é <u>menor</u> do que 1000 cm** (10 m). Vamos ver o 9º salto.

$$\mathrm{a_9 = a_1 \cdot q^8} \quad \rightarrow \quad \mathrm{a_8 = 5 \cdot 2^8} \quad \rightarrow \quad \mathrm{a_8 = 5 \cdot 256} \quad \rightarrow \quad \mathrm{a_8 = 1280\ cm}$$

Agora, sim! **O nono salto é o primeiro <u>maior</u> que 10 metros! Será um salto de 12,8 m!** Podemos marcar a alternativa B.

Gabarito: LETRA B.

15. (FGV/PREF. OSASCO/2014) Observe a expressão abaixo.

$$\boldsymbol{S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots}$$

Considerando-se um número muito grande de termos sendo adicionados, o valor de S tende a:

A) 1

B) 2

C) 4

D) 8

E) ∞

Comentários:

Ora, sempre que você ver somas infinitas em sua prova, pense na soma dos termos de uma PG infinita. **Ela pode ser sua saída!** Note que a soma S do enunciado é a soma dos termos de uma PG com **primeiro termo igual $(\boldsymbol{a_1})$ a 1** e **razão (q) igual a 1/2**.

Aprendemos que quando $|q| < 1$, então **a soma dos termos de uma PG infinita irá convergir** para um número e essa soma pode ser encontrada por meio da expressão:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

É exatamente a fórmula que precisamos. **Vamos substituir os valores de $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{q}$**.

$$S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad S_\infty = 2$$

Gabarito: LETRA B.

CEBRASPE

16. (CESPE/PETROBRAS/2022) Uma empresa distribuidora de combustíveis atendia, ao término do ano de 2020, apenas 30 clientes. Após a implementação de medidas administrativas, a quantidade de novos clientes dessa empresa, no primeiro semestre de 2021 (contada sempre em relação ao mês anterior), aumentou em progressão geométrica. Na tabela a seguir, está registrada a quantidade total de clientes da empresa no final dos 4 primeiros meses de 2021.

Total de Clientes da Empresa				
Meses	Janeiro/2021	Fevereiro/2021	Março/2021	Abril/2021
Total de Clientes	32	36	44	60

Com base nessa situação hipotética e nos dados apresentados na tabela, julgue o item a seguir.

A quantidade de clientes da empresa no final de junho de 2021 era superior a 150.

Comentários:
A questão nos informa que **a quantidade de novos clientes** está aumentando conforme uma PG.

De janeiro/2021 para fevereiro/2021, a empresa ganhou **4 clientes**.
De fevereiro/2021 para março/2021, a empresa ganhou **8 clientes**.
De março/2021 para abril/2021, a empresa ganhou **16 clientes**.

Note que a tabela do enunciado corrobora com o que é informado. Assim, podemos concluir que a quantidade de novos clientes **sempre dobra de um mês para o outro**. Sendo assim,

De abril/2021 para maio/2021, a empresa ganhará 32 clientes, totalizando 92.
De maio/2021 para junho/2021, a empresa ganhará 64 clientes, **totalizando 156**.

Sendo, perceba que em junho/2021 **a empresa terá um total de 156 clientes**, quantia essa **superior a 150**, conforme aponta o item.

Gabarito: CERTO.

17. (CESPE/PETROBRAS/2022) Considere que $P(t) = 160 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t$ expresse a quantidade aproximada de moradores de um determinado condomínio em t anos para $0 \leq t \leq 15$, em que $t = 0$ corresponda ao momento de constituição do condomínio. Com base nessa situação hipotética, julgue o item que se segue.

Os quinze primeiros termos da progressão geométrica de primeiro termo igual a 240 e terceiro termo igual a 540 são iguais ao valor da função no $P(t)$ nos números $1{,}2,\ \ldots{,}15$.

Comentários:
A questão falou de uma **progressão geométrica** com $a_1 = 240$ e $a_3 = 540$.

Com esses dois valores, conseguimos **determinar a_2** por meio da seguinte relação:

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3 \quad \rightarrow \quad a_2^2 = 240 \cdot 540 \quad \rightarrow \quad a_2^2 = 129600 \quad \rightarrow \quad a_2 = 360$$

Com o valor de a_2, é possível determinar **a razão dessa PG**.

$$q = \frac{a_2}{a_1} \quad \rightarrow \quad q = \frac{360}{240} \quad \rightarrow \quad q = \frac{3}{2}$$

Sendo assim, o termo geral dessa PG pode ser escrito como:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \rightarrow \quad a_n = 240 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \quad \rightarrow \quad a_n = 240 \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{2}\right)} \quad \rightarrow \quad \boxed{a_n = 160 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n}$$

Note que **a expressão do termo geral é <u>igual</u> a função $P(t)$**. Sendo assim, os termos dessa PG serão iguais ao aos valores da função no $P(t)$ quando $t = 1,2,\ \ldots,15$.

Gabarito: CERTO.

18. (CESPE/TELEBRAS/2022) João acaba de assumir um cargo de assistente administrativo em uma empresa e foi designado para a tarefa de examinar as demandas de clientes e dar a elas o devido encaminhamento. Considerando que João ainda não tem experiência com essa tarefa, seu chefe decide que passará para ele, no primeiro dia, 10 demandas, no segundo, 15, no terceiro, 20, e assim sucessivamente, crescendo segundo uma Progressão Aritmética até o oitavo dia, quando então estabilizará o número de demandas diárias.

Para executar sua tarefa, João leva sempre 5 minutos para tomar conhecimento dos detalhes de cada demanda, enquanto a fase de encaminhamento (decidir o que fazer e executar os procedimentos necessários) leva 12 minutos nas demandas do primeiro dia, 6 minutos nas demandas do segundo, 3 minutos nas demandas do terceiro dia, e assim sucessivamente, decrescendo segundo uma Progressão Geométrica até o oitavo dia, quando então o tempo de encaminhamento se estabiliza. Com base nessa situação hipotética, julgue o item seguinte.

No quinto dia de trabalho João já estará levando menos de 6 minutos no exame de cada demanda de cliente.

Comentários:

Pessoal, é superimportante perceber que o tempo gasto na fase de conhecimento **<u>não</u> muda**. É sempre 5 minutos por demanda. Por sua vez, o tempo da fase encaminhando **<u>cai pela metade</u> a cada dia**, conforme uma progressão geométrica de **razão igual a 1/2**. Com isso, podemos organizar uma tabela.

Dia	Tempo Fase de Conhecimento	Tempo Fase de Encaminhamento	Tempo Total Gasto (por demanda)
1º dia	5 min	12 min	17 min
2º dia	5 min	6 min	11 min
3º dia	5 min	3 min	8 min
4º dia	5 min	1,5 min	6,5 min
5º dia	5 min	0,75 min	**5,75 min**

Com isso, vemos que é verdade que **no 5º dia** o tempo gasto por demanda já **será inferior a 6 minutos**.

Gabarito: CERTO.

CESGRANRIO

19. (CESGRANRIO/BASA/2018) Considere a sequência numérica cujo termo geral é dado por $a_n = 2^{1-3n}$, para $n \geq 1$. Essa sequência numérica é uma progressão

A) geométrica, cuja razão é 1/8

B) geométrica, cuja razão é -6.

C) geométrica, cuja razão é -3.

D) aritmética, cuja razão é -3.

E) aritmética, cuja razão é 1/8

Comentários:

O enunciado deu uma fórmula bem estranha para o termo geral. Vamos s**ubstituir alguns valores de n** para determinar os termos dessa PG.

- Para $n = 1$:

$$a_1 = 2^{1-3\cdot 1} \quad \rightarrow \quad a_1 = 2^{1-3} \quad \rightarrow \quad a_1 = 2^{-2} \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{2^2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_1 = \frac{1}{4}}$$

- Para $n = 2$:

$$a_2 = 2^{1-3\cdot 2} \quad \rightarrow \quad a_2 = 2^{1-6} \quad \rightarrow \quad a_2 = 2^{-5} \quad \rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2^5} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_2 = \frac{1}{32}}$$

- Para $n = 3$:

$$a_3 = 2^{1-3\cdot 3} \quad \rightarrow \quad a_3 = 2^{1-9} \quad \rightarrow \quad a_3 = 2^{-8} \quad \rightarrow \quad a_3 = \frac{1}{2^8} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_3 = \frac{1}{256}}$$

- Para $n = 4$:

$$a_4 = 2^{1-3\cdot 4} \quad \rightarrow \quad a_4 = 2^{1-12} \quad \rightarrow \quad a_4 = 2^{-11} \quad \rightarrow \quad a_4 = \frac{1}{2^{11}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a_4 = \frac{1}{2048}}$$

Observe que temos uma sequência com a seguinte forma:

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{32}, \frac{1}{256}, \frac{1}{2048}, \dots\right)$$

Está com uma "carazona" de progressão geométrica, não é verdade? Para confirmar, vamos ver se **a razão entre termos consecutivos é constante.**

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{4}}=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$$

Devemos achar **o mesmo resultado** para:

$$q=\frac{a_3}{a_2}=\frac{\frac{1}{256}}{\frac{1}{32}}=\frac{32}{256}=\frac{1}{8}$$

Portanto, veja que realmente temos uma **progressão geométrica cuja razão é 1/8**. Podemos marcar letra A.

Gabarito: LETRA A.

20. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Sabe-se que, em uma determinada progressão geométrica, a razão é 0,8. Se o quinto termo é 4.096; então, o Limite da Soma dos n primeiros dessa P.G., quando n tende a infinito, é igual a

A) 10.000

B) 20.000

C) 30.000

D) 40.000

E) 50.000

Comentários:

Em outras palavras, o enunciado nos informou sobre uma **progressão geométrica infinita**. Note que a razão dela é tal que $|q|<1$. Nessas condições, podemos aplicar a fórmula que vimos na teoria.

$$\boldsymbol{S_\infty=\frac{a_1}{1-q}} \qquad (1)$$

A fórmula acima nos fornece a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica com razão $|q|<1$. Para calcular a soma pedida, **nós precisamos do a_1**. No entanto, o enunciado nos disse o a_5. Para determinar o a_5, podemos usar a fórmula do termo geral.

$$a_5=a_1\cdot q^4 \quad \rightarrow \quad a_1=\frac{a_5}{q^4}$$

Substituindo $\boldsymbol{a_5=4.096}$ e $\boldsymbol{q=0,8=\frac{8}{10}}$, ficamos com:

$$a_1=\frac{4.096}{\left(\frac{8}{10}\right)^4} \quad \rightarrow \quad a_1=\frac{4.096}{\frac{8^4}{10.000}} \quad \rightarrow \quad a_1=\frac{\cancel{4.096}}{\cancel{4.096}}\cdot 10.000 \quad \rightarrow \quad a_1=10.000$$

Pronto, agora vamos substituir em (1).

$$S_\infty = \frac{10.000}{1-0{,}8} \quad \rightarrow \quad S_\infty = \frac{10.000}{0{,}2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S_\infty = 50.000}$$

Assim, podemos marcar a alternativa E.

Gabarito: LETRA E.

21. (CESGRANRIO/BB/2018) Para $x > 0$, seja S_x a soma

$$\boldsymbol{S_x = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-nx} = 2^{-x} + 4^{-x} + 8^{-x} + \cdots}$$

O número real x para o qual se tem $S_x = \frac{1}{4}$.

A) 4
B) $\log_2 5$
C) $3/2$
D) $5/2$
E) $\log_2 3$

Comentários:
Galera, **não se preocupem com o símbolo do somatório**. Veja que o enunciado deu a soma:

$$S_x = 2^{-x} + 4^{-x} + 8^{-x} + \cdots$$

Sempre que vocês se depararem com uma soma infinita**, vale a pena lembrar de uma PG**. Lembre-se que na PG infinita com $|q| < 1$, temos uma fórmula bem legal para calcular **a soma de infinitos números**.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

Vamos associar os elementos da soma do enunciado aos termos de uma PG.

$$a_1 = 2^{-x} \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{2^x}$$

$$a_2 = 4^{-x} \quad \rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{4^x}$$

$$a_3 = 8^{-x} \quad \rightarrow \quad a_3 = \frac{1}{8^x}$$

A razão q é dada por:

$$q = \frac{a_2}{a_1} \quad \rightarrow \quad q = \frac{\left(\frac{1}{4^x}\right)}{\left(\frac{1}{2^x}\right)} \quad \rightarrow \quad q = \frac{2^x}{4^x} \quad \rightarrow \quad q = \left(\frac{2}{4}\right)^x \quad \rightarrow \quad q = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \rightarrow \quad q = \frac{1}{2^x}$$

Agora, podemos substituir $a_1 = \frac{1}{2^x}$ e $q = \frac{1}{2^x}$ na fórmula da soma dos infinitos termos da PG.

$$S_\infty = \frac{\frac{1}{2^x}}{1 - \frac{1}{2^x}} \quad \rightarrow \quad S_\infty = \frac{1}{2^x - 1}$$

O enunciado disse que **o valor dessa soma é igual a 1/4**.

$$\frac{1}{2^x - 1} = \frac{1}{4}$$

Multiplicando cruzado.

$$2^x - 1 = 4 \quad \rightarrow \quad 2^x = 5$$

Nessa situação, precisamos **aplicar log nos dois lados para descer o expoente**.

$$\log_2 2^x = \log_2 5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = \log_2 5}$$

Gabarito: LETRA B.

Vunesp

22. (VUNESP/EsFCEx/2021) Três números cuja soma é 36 formam uma progressão aritmética de razão r, sendo $r > 0$. Se somarmos 2 ao terceiro termo dessa progressão aritmética, sem alterar os outros dois termos, eles vão formar uma progressão geométrica de razão q. O resultado da operação $\sqrt{\frac{r}{q}}$ é:

A) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$
B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
C) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$
D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Comentários:

Vamos trabalhar com a primeira informação:

- Três números cuja soma é 36 formam uma progressão aritmética de razão r.

$$(a_1, a_2, a_3)$$

Podemos ainda escrever essa mesma sequência da seguinte forma:

$$(a_2 - r, \qquad a_2, \qquad a_2 + r)$$

Quando **somamos esses três números**, ficamos com:

$$(a_2 - r) + a_2 + (a_2 + r) = 36$$

$$3a_2 = 36 \qquad \rightarrow \qquad a_2 = 12$$

Com isso, a sequência fica assim:

$$(12 - r, \qquad 12, \qquad 12 + r)$$

Agora vamos para a segunda informação:

- **Se somarmos 2 ao terceiro termo dessa progressão aritmética, sem alterar os outros dois termos, eles vão formar uma progressão geométrica de razão q.**

$$(12 - r, \qquad 12, \qquad 14 + r)$$

Agora, como **somamos 2 ao terceiro termo**, ficamos com uma PG. Nessas situações, sabemos que **o quadrado do termo central é igual ao produto dos outros dois**.

$$(12 - r)(14 + r) = 12^2$$

$$168 + 12r - 14r - r^2 = 144$$

$$-2r - r^2 = -24 \qquad \rightarrow \qquad r^2 + 2r - 24 = 0$$

Opa! Precisamos resolver uma **equação de segundo grau para encontrar r**. Para isso, usaremos Bhaskara.

- Cálculo do Discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac \qquad \rightarrow \qquad \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) \qquad \rightarrow \qquad \Delta = 4 + 96 \qquad \rightarrow \qquad \Delta = 100$$

- Cálculo das Raízes:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \rightarrow \quad r = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} \quad \rightarrow \quad r = \frac{-2 \pm 10}{2}$$

$$r' = \frac{-2 - 10}{2} \quad \rightarrow \quad r' = -\frac{12}{2} \quad \rightarrow \quad r' = -6$$

$$r'' = \frac{-2 + 10}{2} \quad \rightarrow \quad r'' = \frac{8}{2} \quad \rightarrow \quad r'' = 4$$

Você deve estar se perguntando qual dos dois é o valor de r que vamos considerar! Veja que **o enunciado disse que r é positivo ($r > 0$)**. Sendo assim, vamos trabalhar apenas com $r = 4$. Com r determinado, escrevemos novamente a PG.

$$(12 - 4, \qquad 12, \qquad 14 + 4)$$

$$(8, \qquad 12, \qquad 18)$$

Para encontrar a razão dessa PG, **dividimos um termo pelo seu anterior**:

$$q = \frac{12}{8} \quad \rightarrow \quad q = \frac{3}{2}$$

Analogamente, também poderíamos ter feito:

$$q = \frac{18}{12} \quad \rightarrow \quad q = \frac{3}{2}$$

Com r e q determinados, podemos encontrar **o valor da expressão** pedida no enunciado.

$$E = \sqrt{\frac{r}{q}} \quad \rightarrow \quad E = \sqrt{\frac{4}{\frac{3}{2}}} \quad \rightarrow \quad E = \sqrt{\frac{8}{3}} \quad \rightarrow \quad E = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Gabarito: LETRA A.

23. (VUNESP/IPSM SJC/2018) Na sequência numérica ..., $-8, 4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \ldots,$ o quinto termo é -8. O produto do primeiro com o décimo quinto termos dessa sequência é igual a

A) -2

B) -1

C) 1.

D) 2.

E) 4.

Comentários:

A sequência numérica do enunciado é uma **progressão geométrica de razão igual a -1/2**. Para perceber isso, devemos dividir um termo pelo seu anterior e notar que **essa razão é constante**.

$$q = \frac{4}{-8} \quad \rightarrow \quad q = -\frac{1}{2}$$

$$q = \frac{-2}{4} \quad \rightarrow \quad q = -\frac{1}{2}$$

$$q = \frac{1}{-2} \quad \rightarrow \quad q = -\frac{1}{2}$$

Ademais, **o enunciado disse que quinto termo é o -8**. Lembre-se da fórmula geral do termo da PG:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Com $n = 5$, ficamos com:

$$a_5 = a_1 q^4$$

Já sabemos quem é a_5 e q, podemos determinar a_1.

$$-8 = a_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \quad \rightarrow \quad 8 = a_1 \cdot \frac{1}{16} \quad \rightarrow \quad a_1 = 128 \quad \rightarrow \quad a_1 = 2^7$$

Também precisamos encontrar **o décimo quinto termo** dessa sequência. Para isso, só usarmos $n = 15$ na fórmula do termo geral.

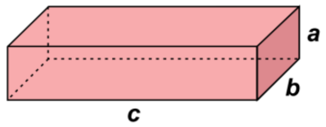
$$a_{15} = a_1 \cdot q^{14} \quad \rightarrow \quad a_{15} = 2^7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{14} \quad \rightarrow \quad a_{15} = \frac{2^7}{2^{14}} \quad \rightarrow \quad a_{15} = \frac{1}{2^7}$$

O enunciado pergunta qual é o **produto entre a_1 e a_{15}**.

$$a_1 \cdot a_{15} = 2^7 \cdot \left(\frac{1}{2^7}\right) \quad \rightarrow \quad a_1 \cdot a_{15} = 1$$

Gabarito: LETRA C.

24. (VUNESP/PM-SP/2015) A figura seguinte mostra um reservatório com formato de paralelepípedo reto-retângulo, cujas dimensões a, b e c estão, nessa ordem, em Progressão Geométrica crescente, sendo sua soma igual a 10,5 m.



Se o volume desse reservatório é 27 m³, então a área da sua base bc é, em m², igual a

A) 27

B) 26

C) 18

D) 15

E) 12

Comentários:

O enunciado disse que as dimensões do paralelepípedo **estão em progressão geométrica**. Sendo assim,

$$(a, \qquad b, \qquad c)$$

Considere que $\boldsymbol{q}$ **seja a razão dessa PG**. Com isso, podemos reescrever os termos dessa forma:

$$\left(\frac{b}{q}, \qquad b, \qquad bq\right)$$

O volume de um paralelepípedo é o **produto de suas três dimensões**.

$$\frac{b}{q} \cdot b \cdot bq = 27 \qquad \rightarrow \qquad b^3 = 27 \qquad \rightarrow \qquad b = 3$$

Pronto! Já descobrimos uma das dimensões. A sequência, em termos de q, fica assim:

$$\left(\frac{3}{q}, \qquad 3, \qquad 3q\right)$$

Agora, vamos usar a informação de que **a soma desses lados é igual a 10,5**.

$$\frac{3}{q} + 3 + 3q = 10{,}5 \qquad \rightarrow \qquad 3q + \frac{3}{q} - 7{,}5 = 0$$

Multiplicando tudo por q para **sumir com esse $\boldsymbol{q}$ do denominador**.

$$3q^2 - 7{,}5q + 3 = 0$$

Uma equação do segundo grau! Podemos **simplificá-la dividindo-a por 3**.

$$q^2 - 2{,}5q + 1 = 0$$

Esse -2,5 ainda está incomodando. Vamos **multiplicar tudo por 2**.

$$2q^2 - 5q + 2 = 0$$

Pronto! Agora, **vamos resolvê-la usando Bhaskara**.

- **Cálculo do Discriminante:**

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \rightarrow \quad \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad \Delta = 25 - 16 \quad \rightarrow \quad \Delta = 9$$

- **Cálculo das Raízes:**

$$q = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \rightarrow \quad q = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} \quad \rightarrow \quad q = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$q' = \frac{5-3}{4} \quad \rightarrow \quad q' = \frac{2}{4} \quad \rightarrow \quad q' = \frac{1}{2}$$

$$q'' = \frac{5+3}{4} \quad \rightarrow \quad q'' = \frac{8}{4} \quad \rightarrow \quad q'' = 2$$

O enunciado nos disse que **a PG é crescente**. Assim, só podemos ter $q = 2$. Dessa forma, temos que:

$$\left(\frac{3}{2}, \quad 3, \quad 3 \cdot 2\right) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{3}{2}, \quad 3, \quad 6\right)$$

Queremos encontrar a área bc.

$$bc = 3 \cdot 6 \quad \rightarrow \quad bc = 18$$

Gabarito: LETRA C.

LISTA DE QUESTÕES

Sequências Numéricas

Outras Bancas

1. (RBO/PREF. NAVEGANTES/2022) Na sequência: 2, 3, 4, 7, 8, 9, 12, 13, ... os próximos três números são:

A) 14, 17, 18

B) 14, 15, 16

C) 16, 17, 18

D) 16, 19, 20

E) 15, 16, 17

2. (IBADE/CRM AC/2022) Qual é o próximo termo da sequência (1, - 2, 7, - 20, ...)?

A) 61

B) 27

C) 52

D) 35

E) 31

3. (INST. MAIS/PREF. PRAIA GRANDE/2022) Dada a sequência -1, 0, 3, 8, 15, x, 35, y e 63, assinale a alternativa que apresenta o valor de $x + y$.

A) 48.

B) 55.

C) 72.

D) 96.

4. (IDIB/GOINFRA/2022) Seja a sequência $\{4, \frac{11}{3}, \frac{10}{3}, 3, x, \ldots\}$. Determine o valor de x para que a sequência continue seguindo o mesmo padrão.

A) $x = 0$

B) $x = 1/3$

C) $x = 4/3$

D) $x = 5/3$

E) $x = 8/3$

5. (IDECAN/PM-CE/2023) Os boletins de ocorrência curiosamente têm aumentado no decorrer dos anos de acordo com o seguinte conjunto de números ordenados {0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, ...}. Essa sequência é dita de recorrência, em que $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$. Qual a lei de formação que define o padrão desses números e quantos boletins de ocorrência foram expedidos no nono ano conforme esta sequência?

A) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ e $171.$
B) $a_n = a_{n-1} + 2.a_{n-2}$ e $341.$
C) $a_n = a_{n-1} + 2.a_{n-2}$ e $171.$
D) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ e $427.$
E) $a_n = 2.a_{n-2}$ e $170.$

6. (IBADE/CRC-RO/2022) Uma sequência numérica é uma lista formada por números que possui uma ordem, geralmente, bem definida. Dessa forma, determine o valor da metade do próximo termo da sequência

$$\mathbf{0, 2, 6, 38, \ldots}$$

A) 1446
B) 1200
C) 650
D) 76
E) 723

7. (FUNDATEC/CM BAGÉ/2022) Observe a seguinte sequência: $\{18, 37, 75, \ldots\}$. O próximo termo da sequência, mantendo o padrão lógico, será:
A) 147.
B) 148.
C) 149.
D) 150.
E) 151.

8. (Inst. AOCP/AGESAN-RS/2022) Considerando a lei de formação da sequência de números quadrados (1, 4, 9, 16, 25, 36, ...) e a lei de formação da sequência de números triangulares (1, 3, 6, 10, 15, ...), é possível determinar qualquer elemento, em especial, de cada sequência. Diante do exposto, assinale a alternativa que apresenta a soma do décimo número quadrado ao décimo número triangular.
A) 126
B) 136
C) 155
D) 176
E) 187

9. (IDIB/CRF-MS/2021) Os seguintes números estão dispostos em uma sequência: 1, 3, 2, 5, 4, 8, 7, X. Assinale o valor de X para que o próximo termo obedeça a sequência.
A) 12
B) 11
C) 10
D) 9

10. (IBADE/ISE-AC/2021) Considere a sequência abaixo.

$$\mathbf{10, 25, 70, 205, \ldots.}$$

A alternativa que corresponde ao termo que falta na sequência é:

A) 610.

B) 430.

C) 600.

D) 470.

E) 570.

FGV

11. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) Na sequência a seguir são utilizados apenas os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5, e seus elementos obedecem a um determinado padrão.

$$\mathbf{1\ 2\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 4\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 2\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 4\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 2\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 4\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 2\ 1\ 2\ 3\ 4\ldots}$$

O 500º termo dessa sequência é:

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

12. (FGV/SEFAZ-AM/2022) Uma sequência de números inteiros é tal que cada termo, a partir do terceiro, é a soma do seu termo antecessor com o dobro do antecessor do antecessor. Sabe-se que o sexto termo dessa sequência é 85 e, o oitavo, é 341. O quarto termo da referida sequência é

A) 15.

B) 17.

C) 19.

D) 21.

E) 23.

13. (FGV/CM ARACAJU/2021) Sejam:

$$\boldsymbol{X = 2 + 4 + 6 + \ldots + 96 + 98 \quad \text{e} \quad Y = 1 + 3 + 5 + \ldots + 95 + 97.}$$

O valor de $X - Y$ é:

A) 2;

B) 49;

C) 50;
D) 51;
E) 102.

14. (FGV/PREF. SALVADOR/2019) Considere a sequência infinita de algarismos:

$$\mathbf{2468024680246802 46\ldots}$$

A soma dos 2019 primeiros algarismos dessa sequência é
A) 8020.
B) 8040.
C) 8060.
D) 8080.
E) 8100.

15. (FGV/ALERO/2018) Uma sequência de números naturais é tal que dado um termo x qualquer dessa sequência, se ele é par, então o próximo termo será x/2; se ele é ímpar, então o próximo termo será x+5. Se o primeiro termo dessa sequência é 6, então o décimo termo será
A) 2.
B) 3.
C) 4.
D) 6.
E) 8.

FCC

16. (FCC/TRT-23/2022) Uma sequência numérica é uma lista ordenada de números. Em algumas sequências, a obtenção dos termos segue alguma regra bem definida. Considere as duas sequências descritas a seguir:

– Sequência 1: o primeiro termo é igual a 10 e qualquer outro termo, a partir do segundo, é igual ao anterior acrescido de duas unidades.
– Sequência 2: o primeiro termo é igual a 1, o segundo termo é igual a 3 e qualquer outro termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores.

O menor número que aparece nas duas sequências é:
A) 14
B) 12
C) 20
D) 18
E) 16

17. (FCC/TRT-4/2022) Os apartamentos de um moderno edifício são numerados com três algarismos da seguinte maneira: o primeiro algarismo indica o andar e os dois seguintes o número do apartamento. Por exemplo, o apartamento numerado com 201 é o apartamento 01 do segundo andar. O edifício tem 6 andares com 15 apartamentos por andar. Os andares são numerados de 1 a 6, e, em cada andar, os apartamentos são numerados de 01 a 15. A quantidade de algarismos 2 necessária para numerar todos os apartamentos da forma descrita acima é:

A) 15

B) 12

C) 27

D) 21

E) 20

18. (FCC/MANAUS PREV./2021) Ao longo de um mês, uma vinícola produz seis lotes de um vinho. Os lotes são numerados sequencialmente de 1 a 6, conforme vão sendo fabricados, o que quer dizer que o primeiro a ser fabricado é o lote 1, depois o lote 2 e assim sucessivamente até o lote 6. Para a venda dos lotes, o setor responsável deve sempre vender primeiro os lotes em estoque que foram fabricados mais recentemente. Se os seis lotes foram vendidos nesse mês, uma ordem das vendas que NÃO atende às orientações da empresa é

A) $\overrightarrow{2-3-1-4-5-6}$

B) $\overrightarrow{1-2-3-5-4-6}$

C) $\overrightarrow{1-3-5-6-2-4}$

D) $\overrightarrow{1-2-3-4-5-6}$

E) $\overrightarrow{6-5-4-3-2-1}$

19. (FCC/SABESP/2019) Em 1655, o matemático John Wallis desenvolveu uma série infinita para o cálculo de $\frac{\pi}{2}$, conforme mostra a fórmula abaixo:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\ldots$$

Com os termos desse produto infinito ordenados exatamente como na fórmula, a fração na 50ª posição é:

A) $\frac{51}{53}$

B) $\frac{50}{49}$

C) $\frac{26}{25}$

D) $\frac{26}{27}$

E) $\frac{50}{51}$

20. (FCC/TJ-MA/2019) Observando o padrão de formação da sequência infinita (2, 1, 3, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 6, ...), nota-se que os termos iguais a 1 aparecem nas posições 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, e assim por diante. A 300ª vez em que o termo igual a 1 aparece nessa sequência está na posição:

A) 342.

B) 330.

C) 336.

D) 324.

E) 348.

CEBRASPE

Texto para as próximas questões

Uma unidade da PRF interceptou, durante vários meses, lotes de mercadorias vendidas por uma empresa com a emissão de notas fiscais falsas. A sequência dos números das notas fiscais apreendidas, ordenados pela data de interceptação, é a seguinte: 25, 75, 50, 150, 100, 300, 200, 600, 400, 1.200, 800, ...

Tendo como referência essa situação hipotética, julgue o item seguinte, considerando que a sequência dos números das notas fiscais apreendidas segue o padrão apresentado.

21. (CESPE/PRF/2019) A partir do padrão da sequência, infere-se que o 12º termo é o número 1.600.

22. (CESPE/PRF/2019) Se a_n for o n-ésimo termo da sequência, em que $n = 1, 2, 3, \dots$, então, para $n \geq 3$, tem-se que $a_n = 2 \times a_{n-2}$.

23. (CESPE/PRE. SÃO CRISTOVÃO/2019) Julgue o item a seguir: Na sequência de Fibonacci - (F_m), em que $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, \dots$, os elementos podem ser obtidos a partir da fórmula:

$$F_m = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^m - \left(1-\sqrt{3}\right)^m}{2^m\sqrt{3}}$$

24. (CESPE/SEFAZ-RS/2018) Para construir a sequência a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, de números positivos, foram dados a_1 e a_2, e, a partir de a_3, cada termo foi construído como sendo o produto de todos os termos anteriores. Se $a_5 < 1$, então, nessa sequência,

A) todos os termos são, necessariamente, menores que 1.

B) apenas dois termos são menores que 1.

C) apenas três termos são menores que 1.

D) apenas um termo pode ser maior que 1.

E) dois termos podem ser maiores que 1.

Texto para as próximas questões

A sequência infinita $a_0, a_1, a_2, a_3, ...$ é definida por $a_0 = 1, a_1 = 3$, e, para número cada inteiro $n \geq 1$, $a_{2n} = a_{2n-1} + a_{2n-2}$ e $a_{2n+1} = a_{2n} - a_{2n-1}$. Com relação a essa sequência, julgue os itens:

25. (CESPE/ABIN/2018) Existem infinitos valores inteiros de p e q tais que $a_p = a_q$.

VUNESP

26. (VUNESP/CMSJC/2022) Considere a sequência de números 7123459, 8224360, 5223441, 6224332, 4223442, ..., em que cada termo, do segundo termo em diante, é formado a partir de um padrão que altera os algarismos do termo anterior. Utilizando- se esse mesmo padrão, o 100º termo da sequência que se inicia por 359982721 é:

A) 222222222

B) 342232422

C) 343434343

D) 422222222

E) 432242322

27. (VUNESP/TJ-SP/2019) Considere a sequência $\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{10}, \ ...\right)$. O produto entre o 7º, o 11º e o 20º termos é igual a

A) $10/11$

B) $3/4$

C) $5/6$

D) $21/13$

E) $15/19$

28. (VUNESP/TJ-SP/2019) Considere a sequência $\left(\frac{1}{5}, \frac{5}{10}; \frac{10}{15}, \frac{15}{20}; \frac{20}{25}, ...\right)$ O produto entre o 30º e o 31º termos é igual a

A) $27/29$

B) $25/27$

C) $31/33$

D) $23/25$

E) $29/31$

29. (VUNESP/PM-SP/2020) Na sequência de números: 4, 8, 6, 12, 10, 20, 18, 36, 34, ..., o primeiro termo que é maior do que 100 é o número

a) 122.

b) 126.

c) 132.

d) 136.

30. (VUNESP/FITO/2020) Considere a sequência de números naturais:

$$(\mathbf{30}, \mathbf{35}, \mathbf{45}, \mathbf{60}, \mathbf{80}, \mathbf{105}, \mathbf{135}, \dots)$$

A diferença entre o 14º e o 11º termos dessa sequência é

a) 165.

b) 170.

c) 175.

d) 180.

e) 185.

Gabarito

1. LETRA A
2. LETRA A
3. LETRA C
4. LETRA E
5. LETRA C
6. LETRA E
7. LETRA E
8. LETRA C
9. LETRA A
10. LETRA A
11. LETRA D
12. LETRA D
13. LETRA B
14. LETRA D
15. LETRA C
16. LETRA D
17. LETRA C
18. LETRA C
19. LETRA E
20. LETRA D
21. ERRADO
22. CERTO
23. ERRADO
24. LETRA D
25. CERTO
26. LETRA E
27. LETRA A
28. LETRA E
29. LETRA C
30. LETRA D

Lista de Questões

Progressão Aritmética

Outras Bancas

1. (NUCEPE/PM-PI/2022) No treinamento para o teste físico da PM, Marinho estabeleceu que sempre correria 500m a mais que no dia anterior. Sabe-se que, no terceiro dia de treinamento, ele percorreu 3200m. Quantos quilômetros Marinho percorrerá no décimo quinto dia de treinamento?

A) 9,2 km
B) 9,5 km
C) 9,8 km
D) 10,0 km
E) 10,2 km

2. (OBJETIVA/CM IPIRANGA DO NORTE/2022) Considerando-se que a razão de certa progressão aritmética é igual a 12, e que o seu primeiro termo é igual a 9, assinalar a alternativa que apresenta o valor da soma dos 8 primeiros termos dessa progressão:

A) 396
B) 400
C) 404
D) 408

3. (FAUEL/CM DOURADINA/2022) Mariana faz caminhada em seu bairro toda segunda-feira. A cada semana, ela aumenta 0,5 km no seu trajeto. Na primeira vez que caminhou, ela percorreu 800 m. Depois de 8 semanas, quantos km Mariana estará caminhando?

A) 2,3 km
B) 3,5 km
C) 4,3 km
D) 8,35 km

4. (INST. MAIS/IPREV SANTOS/2022) Em um estacionamento, o preço da primeira hora é de R$ 10,00, e o preço das horas seguintes, a partir da segunda, cai em progressão aritmética. Sabendo que o preço da segunda hora é de R$ 9,00 e o preço da oitava hora é de R$ 4,50, é correto afirmar que um motorista que deixar o veículo neste estacionamento por sete horas pagará

A) R$ 37,25.
B) R$ 42,75.
C) R$ 47,25.
D) R$ 52,75.

5. (AOCP/CM BAURU/2022) Assinale a alternativa que apresenta o valor de x para que $(x+2, 5x, 4x^2)$ forme uma progressão aritmética decrescente.

A) 1

B) 1/4

C) 4

D) 1/2

E) 2

6. (DIRENS/EEAR/2022) Três números estão em Progressão Aritmética (PA). A soma desses números é 18 e o produto é 192. Calcule a diferença entre o maior e o menor desses números. Marque a opção correta.

A) 14.

B) 7.

C) 4.

D) 2.

7. (Inst. Consulplan/PREF. VOLTA GRANDE/2022) O padrinho de Luciana deposita, semanalmente, uma certa quantia em reais na conta bancária de sua afilhada. A cada semana, o valor depositado é acrescido em R$ 5,00 em relação à semana anterior. Se na primeira semana o valor depositado é de R$ 30,00, qual a quantia total depositada ao fim da vigésima quarta semana?

A) R$ 1.950,00

B) R$ 1.975,00

C) R$ 2.000,00

D) R$ 2.100,00

8. (IDIB/CRM-PB/2022) Determine a soma dos primeiros 150 termos de uma sequência formada pelos números ímpares positivos.

A) $S_{150} = 21.500$

B) $S_{150} = 22.500$

C) $S_{150} = 23.500$

D) $S_{150} = 24.500$

E) $S_{150} = 20.500$

9. (AOCP/PREF. PINHAIS/2022) Os números das casas do lado esquerdo de determinada rua da cidade de Pinhais estão em progressão aritmética. Se a primeira casa tem o número 10 e a décima segunda tem o número 142, qual é o número da trigésima casa do lado esquerdo dessa rua?

A) 356.

B) 350.

C) 354.

D) 352.

E) 358.

10. (Inst. AOCP/PC-GO/2022) Para um exercício de tiros, certo Agente de Polícia estabeleceu que faria sequências de 21 disparos antes de verificar seus acertos. Entretanto, diante do quantitativo inicial Q de munições disponíveis, decidiu que, após a primeira sequência de 21 disparos, sempre dispararia 3 tiros a menos que a sequência anterior até que, na última sequência, de exatamente 3 disparos, esgote-se a quantidade Q de munições. Caso se cumpra o que foi planejado, a quantidade inicial Q é igual a

A) 60.

B) 84.

C) 120.

D) 160.

E) 210.

FGV

11. (FGV/SEMSA-MANAUS/2022) Escreva todos os números pares desde 10 até 100. Coloque sinais negativos em todos os números de ordem ímpar, ou seja, no 1º, 3º, 5º, e assim por diante, deixando todos os restantes com sinais positivos. A soma de todos esses números com seus respectivos sinais é

A) 44.

B) 45.

C) 46.

D) 47.

E) 48.

12. (FGV/CBM-AM/2022) A soma de 8 números inteiros consecutivos é 5764. O maior desses números é

A) 724.

B) 723.

C) 720.

D) 717.

E) 707.

13. (FGV/SEAD-AP/2022) Na tabela a seguir, os elementos de cada linha e de cada coluna formam progressões aritméticas.

	17		41	
		N		
39				23

O valor de N é:

a) 29.

b) 30.

c) 31.

d) 32.

e) 33.

14. (FGV/FUNSAUDE-CE/2021) Ulisses escreveu todos os números pares positivos de 2 até 2022. Depois, ele pintou de azul todos os números que também eram múltiplos de 3 e pintou de amarelo os demais. A quantidade de números que Ulisses pintou de amarelo é:

A) 1485.

B) 1011.

C) 886.

D) 752.

E) 674.

15. (FGV/PM-SP/2021) Um sargento organizou um grupo de soldados em 16 filas, com 2 soldados na primeira fila e 3 soldados a mais em cada fila subsequente: 2, 5, 8, 11, ... Se o sargento organizasse o mesmo grupo de soldados em filas de 14 soldados cada uma, o número total de filas seria

A) 14.

B) 16.

C) 24.

D) 28.

E) 32.

CEBRASPE

(CESPE/TELEBRAS/2022) Texto para as próximas questões

João acaba de assumir um cargo de assistente administrativo em uma empresa e foi designado para a tarefa de examinar as demandas de clientes e dar a elas o devido encaminhamento. Considerando que João ainda não tem experiência com essa tarefa, seu chefe decide que passará para ele, no primeiro dia, 10 demandas, no segundo, 15, no terceiro, 20, e assim sucessivamente, crescendo segundo uma Progressão Aritmética até o oitavo dia, quando então estabilizará o número de demandas diárias.

Para executar sua tarefa, João leva sempre 5 minutos para tomar conhecimento dos detalhes de cada demanda, enquanto a fase de encaminhamento (decidir o que fazer e executar os procedimentos necessários) leva 12 minutos nas demandas do primeiro dia, 6 minutos nas demandas do segundo, 3 minutos nas demandas do terceiro dia, e assim sucessivamente, decrescendo segundo uma Progressão Geométrica até o oitavo dia, quando então o tempo de encaminhamento se estabiliza. Com base nessa situação hipotética, julgue os itens seguinte.

16. (CESPE/TELEBRAS/2022) Quando estabilizar sua tarefa, João estará recebendo para exame mais de 50 demandas de clientes por dia.

17. (CESPE/TELEBRAS/2022) A sequência formada pelos tempos diários que João leva para examinar todas as demandas de cada dia forma uma Progressão Aritmética.

18. (CESPE/TELEBRAS/2022) Julgue o item a seguir, relacionados a problemas aritméticos.

Se, para uma progressão aritmética, a soma dos 2 primeiros termos é 100 e a soma dos 6 primeiros termos é 276, então existirá um $n \in N$ tal que a soma dos primeiros termos dessa progressão aritmética será negativa.

CESGRANRIO

19. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) O quarto, o quinto e o sexto termos de uma progressão aritmética são expressos por $x+1, x^2+4$ e $2x^2+3$, respectivamente. A soma dos dez primeiros termos dessa progressão aritmética é igual a

A) 260

B) 265

C) 270

D) 275

E) 280

20. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Em uma progressão aritmética, o décimo termo é o quádruplo do terceiro. Se o sétimo termo é igual a 19, então o segundo termo é igual a

A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 7

21. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Considere uma progressão aritmética, em que $a_8 = a_2 + a_6$, e a soma dos 10 primeiros termos dessa sequência é igual a 330. Assim, a razão dessa progressão é igual a

A) 6

B) 8

C) 10

D) 12

E) 13

Vunesp

22. (VUNESP/PREF. VALINHOS/2019) André e Daniel receberam uma mesma quantia em dinheiro. Eles gastaram, desse dinheiro, a mesma quantia por dia durante vários dias. Após 57 dias, André ficou com R$ 43,00, e após 58 dias, Daniel ficou com R$ 29,00. O valor que cada um desses rapazes recebeu foi

A) R$ 613,00.
B) R$ 783,00.
C) R$ 841,00.
D) R$ 910,00.
E) R$ 1.002,00.

23. (VUNESP/PM-SP/2020) O percurso de um treinamento de corrida é composto por 5 etapas com distâncias diferentes em cada uma delas. Uma nova etapa sempre tem 100 metros a mais que a etapa anterior. Sabendo que a quarta etapa do treinamento é percorrer 1200 metros, a distância total do percurso é igual a

A) 6 100 metros.
B) 5 900 metros.
C) 5 700 metros.
D) 5 500 metros.

24. (VUNESP/PREF. BARRETOS/2018) Dois colegas estão treinando para uma competição de ciclismo marcada para o mês que vem. A cada dia de treino, eles percorrem 5 km a mais do que percorreram no dia anterior. Sabendo-se que, em quatro dias de treino, eles percorreram um total de 150 km, é correto afirmar que no 4º dia, em km, eles percorreram

A) 30.
B) 35.
C) 45.
D) 50.
E) 55.

GABARITO

1. LETRA A
2. LETRA D
3. LETRA C
4. LETRA D
5. LETRA B
6. LETRA C
7. LETRA D
8. LETRA B
9. LETRA E
10. LETRA B
11. LETRA C
12. LETRA A
13. LETRA B
14. LETRA E
15. LETRA D
16. ERRADO
17. ERRADO
18. CERTO
19. LETRA D
20. LETRA B
21. LETRA A
22. LETRA C
23. LETRA D
24. LETRA C

LISTA DE QUESTÕES

Progressão Geométrica

Outras Bancas

1. (INST. MAIS/IPREV. SANTOS/2022) Seja a sequência:

$$(5; a; a + 60; \dots)$$

Sabendo que essa sequência consiste em uma progressão geométrica e que a é um número par, é correto afirmar que o seu 4º termo vale

A) 250

B) 320

C) 420

D) 480

2. (CETREDE/UFC/2022) Considere a soma $S = 1 + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{7}{10^5} + \dots.$

Marque a alternativa que corresponde ao valor de S.

A) 977/90

B) 97/90

C) 17/15

D) 177/90

3. (INST. MAIS/CM PRAIA GRANDE/2022) Carmem começou a juntar dinheiro em seu cofrinho. No 1º domingo do ano ela depositou certa quantidade e todo domingo posterior ela dobrou a quantidade depositada no domingo anterior. Sabendo que no 7º domingo ela depositou R$ 384,00 em seu cofrinho, assinale a alternativa que apresenta a quantia total que Carmem possuía em seu cofrinho um dia antes do 7º domingo.

A) R$ 192,00.

B) R$ 378,00.

C) R$ 540,00.

D) R$ 762,00.

4. (INST. AOCP/CM BAURU/2022) Assinale a alternativa que apresenta o valor de x na equação:

$$2x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \cdots = 12$$

A) 8/3
B) 3
C) 11/3
D) 2
E) 9/2

5. (DIRENS/EEAR/2022) Considere a sequência numérica $(5, a, b, 135)$. Sabendo que essa sequência está em uma progressão geométrica, calcule o valor de $(b - a)$ e marque a opção correta.
A) 10.
B) 30.
C) 45.
D) 60.

6. (INST. AOCP/CBM-PA/2022) Considere que a seguinte sequência numérica

$$(x;\ x - 2;\ x + 8;\ \ldots)$$

representa uma progressão geométrica. Dessa forma, pode-se afirmar que
A) sua razão será igual a 1/3.
B) a sequência contém números inteiros.
C) seu primeiro termo é negativo.
D) a progressão geométrica é crescente.
E) o quarto termo da sequência é −125/3.

7. (INST. CONSULPLAN/PM-RN/2022) No mês de julho, 100 medicamentos foram produzidos em uma indústria. Em novembro desse mesmo ano, foram produzidos 1.600 medicamentos. Considere que a quantidade de medicamentos produzidos a partir de julho forma uma progressão geométrica crescente. Dessa forma, o número de medicamentos produzidos em setembro é:
A) 200
B) 250
C) 400
D) 500
E) 800

8. (IBADE/SEA-SC/2022) Considere uma sequência onde os elementos são perímetros de triângulos equiláteros. O primeiro elemento é o perímetro do triângulo equilátero com lado igual a 3. Sabe-se que a razão entre os lados de dois triângulos consecutivos é um terço. Sendo assim, a soma dos perímetros dos triângulos em questão é:
A) 27.
B) 28.
C) 27/2.

D) 25/2.
E) 15/2.

9. (IBADE/PREF. VILHA VELHA/2021) Numa Progressão Geométrica, o primeiro termo da sequência é igual a 4096 e a razão dessa progressão é igual a 1/2. Com base nessas informações, o valor do 14º termo é:
A) 2.
B) 1.
C) 1/4.
D) 1/2.
E) 4.

10. (IDECAN/IF-RR/2020) Considere uma Progressão Geométrica crescente e limitada com razão 3. O último termo desta Progressão Geométrica é 8748 e o primeiro termo é 4. Pode-se concluir que o número de termos desta P.G. é
A) 7.
B) 8.
C) 9.
D) 10.
E) 11.

FGV

11. (FGV/EPE/2022) O número de bactérias em uma certa cultura aumenta a uma taxa de 10% ao dia. Assim, o número de bactérias diárias nessa cultura aumenta de acordo com uma progressão
A) aritmética de razão 10.
B) aritmética de razão 1,1.
C) aritmética de razão 110.
D) geométrica de razão 1,1.
E) geométrica de razão 10.

12. (FGV/EPE/2022) Os números x, y e z, com $xyz \neq 0$, formam uma PA. Se somarmos 10 ao primeiro termo ou se somarmos 20 ao terceiro termo, esses números passam a constituir uma PG. A razão dessa PG é
A) 1/3
B) 1/2
C) 3/2
D) 4/3
E) 5/4

13. (FGV/ALERO/2018) Se x - 1, x + 1, x + 7 são, nessa ordem, os três primeiros termos de uma progressão geométrica, o quarto termo é
A) 27.

B) 18.
C) 16.
D) 9.
E) 8.

14. (FGV/SSP-AM/2015) Um supersapo faz uma sequência de saltos dobrando sempre, a cada salto, a distância do salto anterior. No 1º, 2º e 3º saltos, o supersapo saltou, respectivamente, 5 cm, 10 cm e 20 cm. O salto em que o supersapo saltou pela primeira vez mais de 10 metros foi o:
A) 8º salto;
B) 9º salto;
C) 10º salto;
D) 11º salto;
E) 12º salto;

15. (FGV/PREF. OSASCO/2014) Observe a expressão abaixo.

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Considerando-se um número muito grande de termos sendo adicionados, o valor de S tende a:
A) 1
B) 2
C) 4
D) 8
E) ∞

CEBRASPE

16. (CESPE/PETROBRAS/2022) Uma empresa distribuidora de combustíveis atendia, ao término do ano de 2020, apenas 30 clientes. Após a implementação de medidas administrativas, a quantidade de novos clientes dessa empresa, no primeiro semestre de 2021 (contada sempre em relação ao mês anterior), aumentou em progressão geométrica. Na tabela a seguir, está registrada a quantidade total de clientes da empresa no final dos 4 primeiros meses de 2021.

Total de Clientes da Empresa				
Meses	Janeiro/2021	Fevereiro/2021	Março/2021	Abril/2021
Total de Clientes	32	36	44	60

Com base nessa situação hipotética e nos dados apresentados na tabela, julgue o item a seguir.

A quantidade de clientes da empresa no final de junho de 2021 era superior a 150.

17. (CESPE/PETROBRAS/2022) Considere que $P(t) = 160 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t$ expresse a quantidade aproximada de moradores de um determinado condomínio em t anos para $0 \leq t \leq 15$, em que $t = 0$ corresponda ao momento de constituição do condomínio. Com base nessa situação hipotética, julgue o item que se segue.

Os quinze primeiros termos da progressão geométrica de primeiro termo igual a 240 e terceiro termo igual a 540 são iguais ao valor da função no $P(t)$ nos números $1{,}2,\ \ldots{,}15$.

18. (CESPE/TELEBRAS/2022) João acaba de assumir um cargo de assistente administrativo em uma empresa e foi designado para a tarefa de examinar as demandas de clientes e dar a elas o devido encaminhamento. Considerando que João ainda não tem experiência com essa tarefa, seu chefe decide que passará para ele, no primeiro dia, 10 demandas, no segundo, 15, no terceiro, 20, e assim sucessivamente, crescendo segundo uma Progressão Aritmética até o oitavo dia, quando então estabilizará o número de demandas diárias.

Para executar sua tarefa, João leva sempre 5 minutos para tomar conhecimento dos detalhes de cada demanda, enquanto a fase de encaminhamento (decidir o que fazer e executar os procedimentos necessários) leva 12 minutos nas demandas do primeiro dia, 6 minutos nas demandas do segundo, 3 minutos nas demandas do terceiro dia, e assim sucessivamente, decrescendo segundo uma Progressão Geométrica até o oitavo dia, quando então o tempo de encaminhamento se estabiliza. Com base nessa situação hipotética, julgue o item seguinte.

No quinto dia de trabalho João já estará levando menos de 6 minutos no exame de cada demanda de cliente.

CESGRANRIO

19. (CESGRANRIO/BASA/2018) Considere a sequência numérica cujo termo geral é dado por $a_n = 2^{1-3n}$, para $n \geq 1$. Essa sequência numérica é uma progressão

A) geométrica, cuja razão é 1/8

B) geométrica, cuja razão é -6.

C) geométrica, cuja razão é -3.

D) aritmética, cuja razão é -3.

E) aritmética, cuja razão é 1/8

20. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Sabe-se que, em uma determinada progressão geométrica, a razão é 0,8. Se o quinto termo é 4.096; então, o Limite da Soma dos n primeiros dessa P.G., quando n tende a infinito, é igual a

A) 10.000

B) 20.000

C) 30.000

D) 40.000

E) 50.000

21. (CESGRANRIO/BB/2018) Para $x > 0$, seja S_x a soma

$$S_x = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-nx} = 2^{-x} + 4^{-x} + 8^{-x} + \cdots$$

O número real x para o qual se tem $S_x = \frac{1}{4}$.

A) 4

B) $\log_2 5$

C) $3/2$

D) $5/2$

E) $\log_2 3$

Vunesp

22. (VUNESP/EsFCEx/2021) Três números cuja soma é 36 formam uma progressão aritmética de razão r, sendo $r > 0$. Se somarmos 2 ao terceiro termo dessa progressão aritmética, sem alterar os outros dois termos, eles vão formar uma progressão geométrica de razão q. O resultado da operação $\sqrt{\frac{r}{q}}$ é:

A) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

23. (VUNESP/IPSM SJC/2018) Na sequência numérica ..., $-8, 4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \ldots,$ o quinto termo é -8. O produto do primeiro com o décimo quinto termos dessa sequência é igual a

A) -2

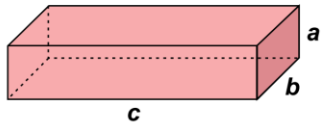
B) -1

C) 1.

D) 2.

E) 4.

24. (VUNESP/PM-SP/2015) A figura seguinte mostra um reservatório com formato de paralelepípedo reto-retângulo, cujas dimensões a, b e c estão, nessa ordem, em Progressão Geométrica crescente, sendo sua soma igual a 10,5 m.



Se o volume desse reservatório é 27 m³, então a área da sua base bc é, em m², igual a

A) 27

B) 26

C) 18

D) 15

E) 12

Gabarito

1. LETRA B
2. LETRA B
3. LETRA B
4. LETRA B
5. LETRA B
6. LETRA E
7. LETRA C
8. LETRA C
9. LETRA D
10. LETRA B
11. LETRA D
12. LETRA C/X
13. LETRA A
14. LETRA B
15. LETRA B
16. CERTO
17. CERTO
18. CERTO
19. LETRA A
20. LETRA E
21. LETRA B
22. LETRA A
23. LETRA C
24. LETRA C

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.