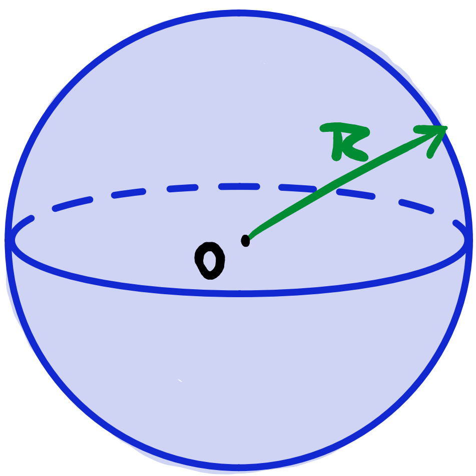
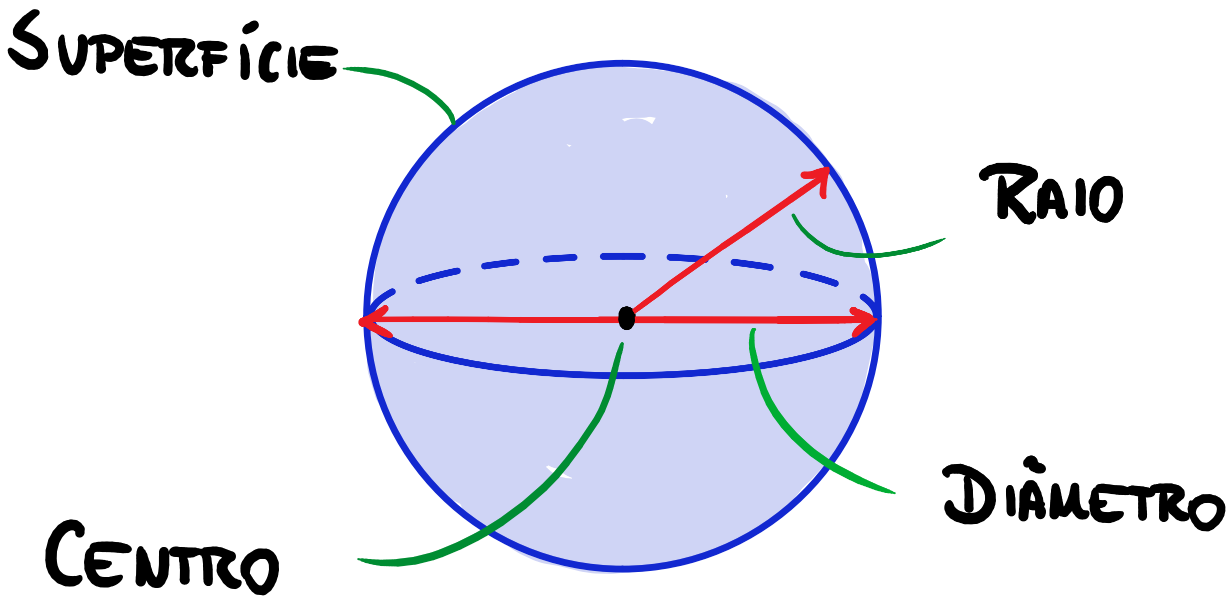
ESFERAS

DEFINIÇÃO

ESFERA É O CONJUNTO DE PONTOS NO ESPAÇO CUJA DISTÂNCIA ATÉ UM PONTO DADO (CENTRO) É IGUAL A UMA DISTÂNCIA DADA (RAIO).

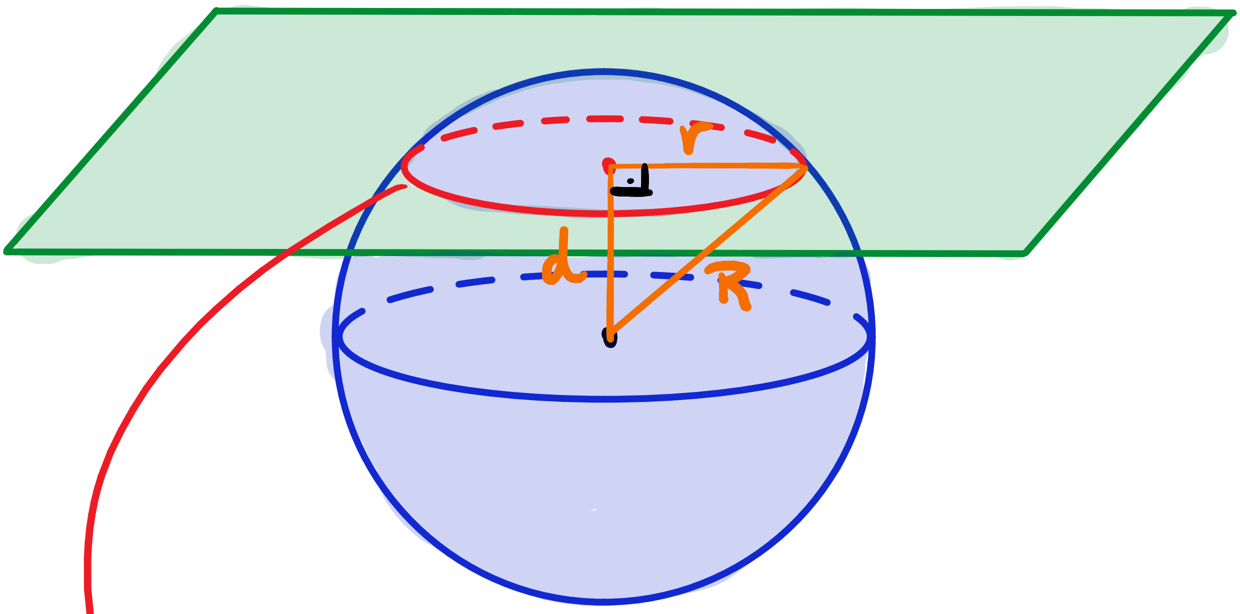


ELEMENTOS DA ESFERA



SEÇÃO DE UMA ESFERA

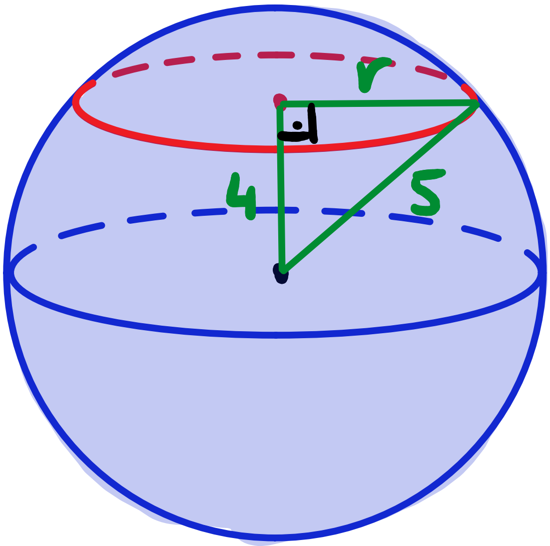
INTERSEÇÃO DA ESFERA COM UM PLANO PASSANDO A UMA DISTÂNCIA d DO CENTRO.



SEÇÃO TRANSVERSAL: CÍRCULO DE RAIO r.

$$\boxed{R^2 = r^2 + d^2}$$

UM PLANO INTERSECTA UMA ESFERA A 4 UNIDADES DE DISTÂNCIA DO CENTRO. SE O RAIO DA ESFERA É 5, CALCULE O RAIO DO CÍRCULO DA INTERSEÇÃO.

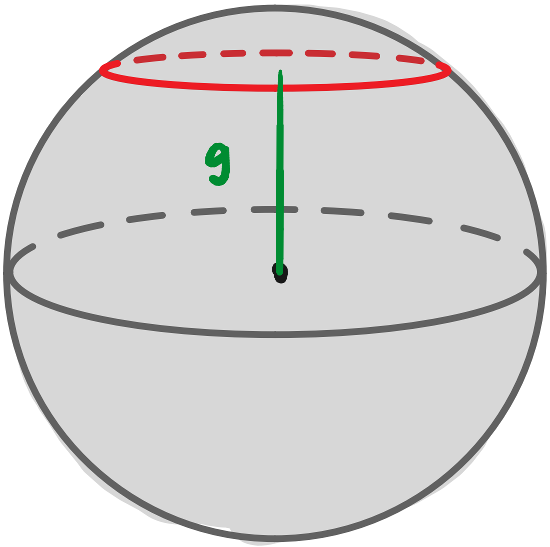


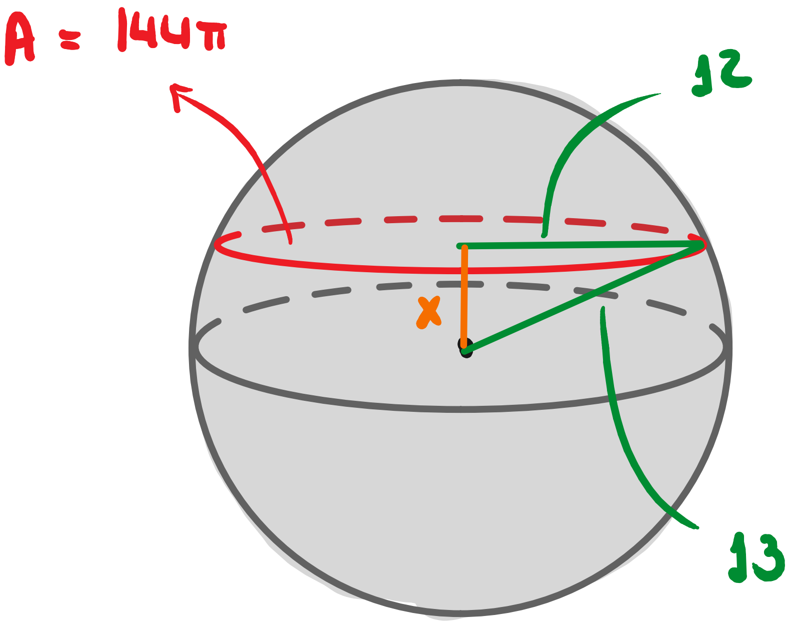
$$5^2 = r^2 + 4^2$$

$$r = 3$$

EXEMPLO

SEJA UMA ESFERA DE RAIO 13. UM PLANO A INTERSECTA PASSANDO A 9 UNIDADES DE DISTÂNCIA DO SEU CENTRO. DETERMINE O QUANTO SE DEVE APROXIMAR PARA QUE A INTERSEÇÃO TENHA UMA ÁREA DE 144π.





$$A = \pi r^2$$

$$144\cancel{\pi} = \cancel{\pi} r^2$$

$$\underline{r = 12}$$

$$13^2 = 12^2 + x^2$$

$$x^2 = 13^2 - 12^2$$

$$x^2 = (13+12)(13-12)$$

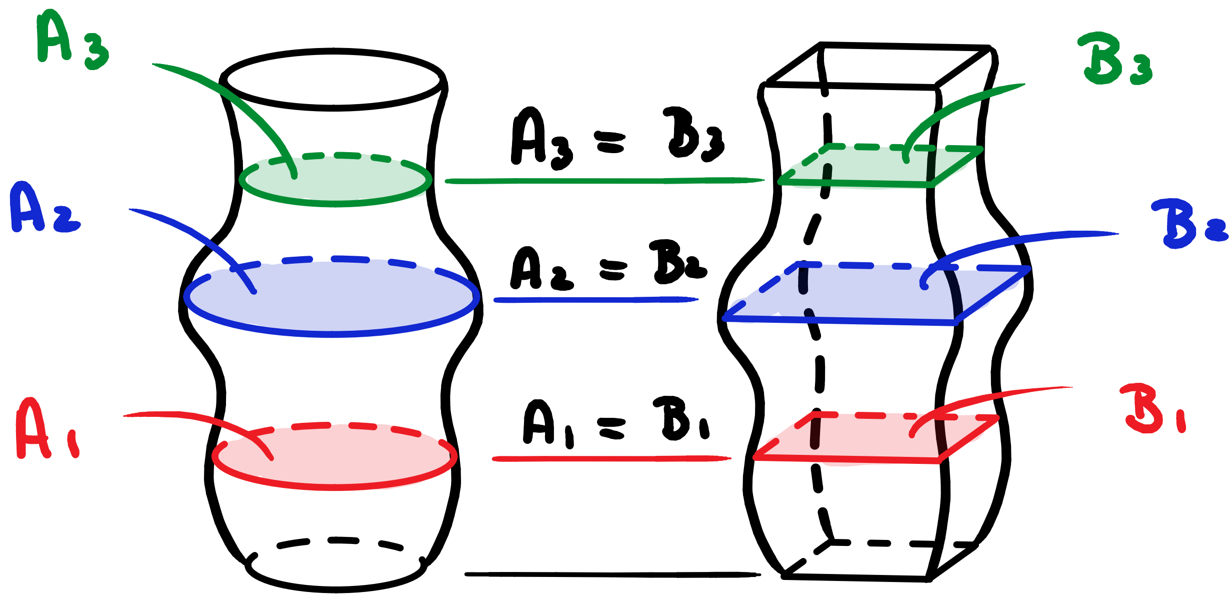
$$x^2 = 25$$

$$\underline{x = 5}$$

Aprox $\rightarrow$ $9 - 5 = 4$

PRINCÍPIO DE CAVALIERI

DOIS SÓLIDOS QUE POSSUEM
MESMA ÁREA
AO LONGO DE SUAS ALTURAS
POSSUEM MESMO VOLUME

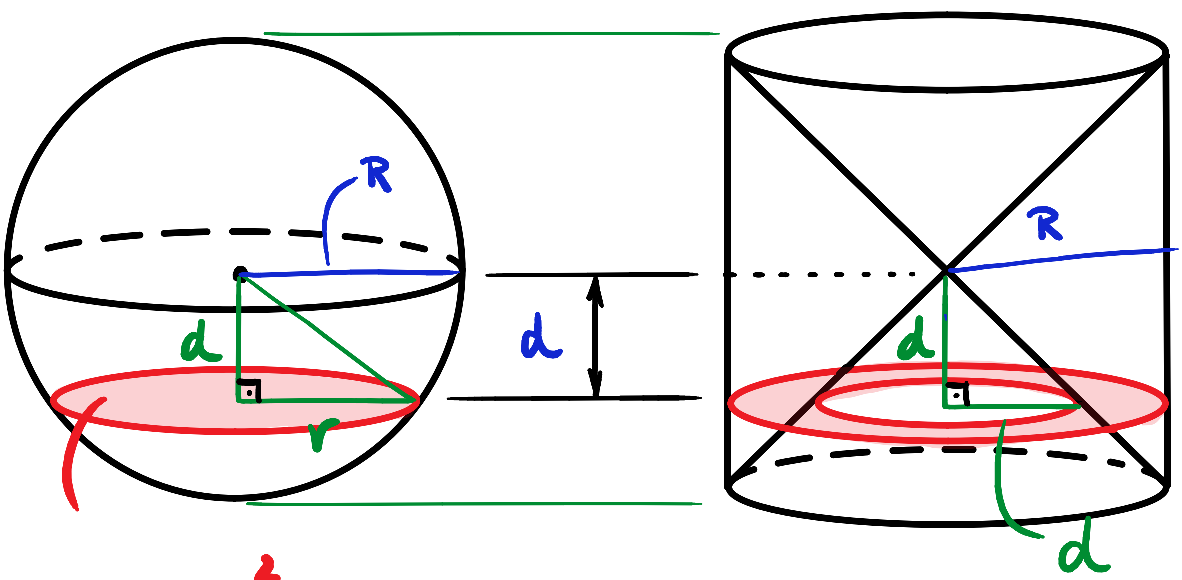


$$\boxed{V_A = V_B}$$

VOLUME DA ESFERA - DEMONSTRAÇÃO

ESFERA

ANTI-CLEPSIDRA



$$A = \pi r^2$$

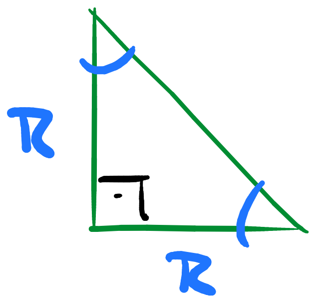
$$A = \pi R^2 - \pi d^2$$

$$A = \pi (R^2 - d^2)$$

$$\boxed{A = \pi r^2}$$

$$R^2 = d^2 + r^2$$

$$r^2 = R^2 - d^2$$



$$V_{ESF} = V_{ANTI}$$

$$= V_{CIL} - 2 \cdot V_{CONE}$$

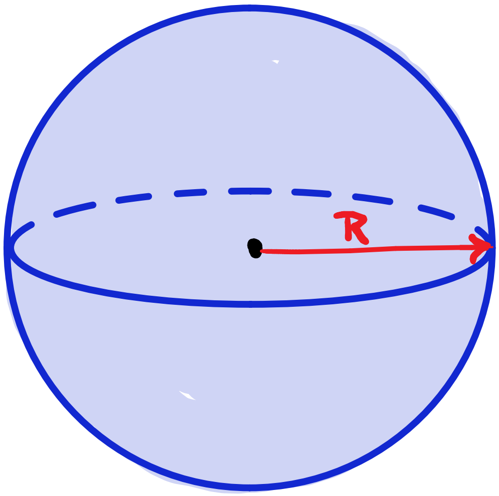
$$= \pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot R$$

$$= 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3$$

$$= \frac{6\pi R^3 - 2\pi R^3}{3}$$

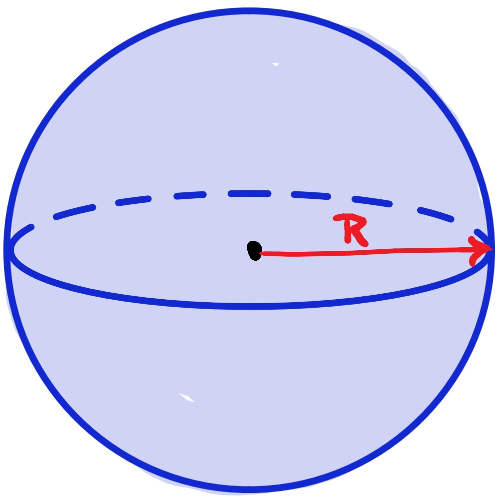
$$\boxed{V_{ESF} = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

VOLUME DA ESFERA

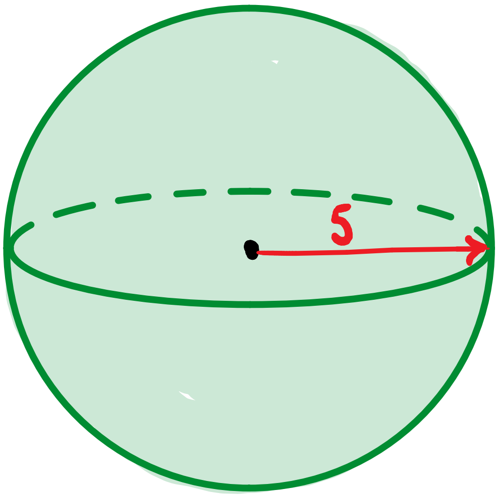


$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

ÁREA DA ESFERA



$$A = 4\pi R^2$$



$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi 5^3$$

$$\boxed{V = \frac{500\pi}{3}}$$

$$A = 4\pi R^2$$

$$A = 4\pi . 5^2$$

$$\boxed{A = 100\pi}$$

EXEMPLO

CALCULE O VOLUME DE UMA ESFERA CUJA METADE DA ÁREA SUPERFICIAL É IGUAL A 50π.

$$\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{2}{\cancel{4}}\cancel{\pi} R^2 = \overset{25}{\cancel{50}}\cancel{\pi} \rightarrow R^2 = 25$$

$$R = 5$$

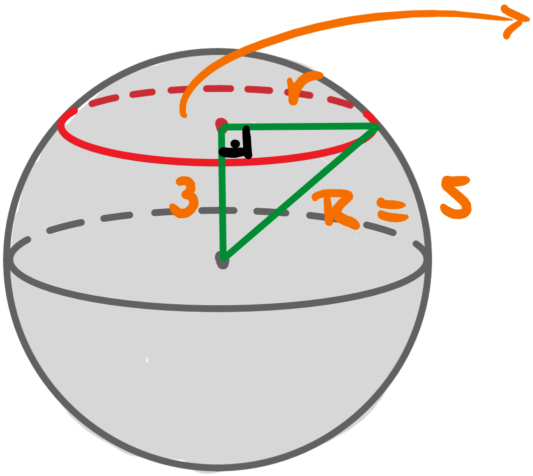
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3$$

$$\boxed{V = \frac{500\pi}{3}}$$

UNIVERSO NARRADO

EXEMPLO

A SEÇÃO DE UMA ESFERA DISTANTE 3 DO CENTRO POSSUI ÁREA IGUAL A 16π. CALCULE A ÁREA SUPERFICIAL E O VOLUME DESSA ESFERA.



$$\cancel{\pi} r^2 = 16\cancel{\pi}$$

$$r = 4$$

$$R = 5$$

$$A = 4\pi R^2 \rightarrow A = 4 . \pi 5^2$$

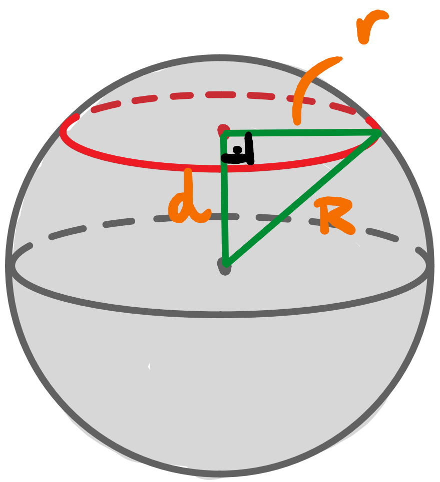
$$A = 100\pi$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rightarrow V = \frac{4}{3}\pi . 5^3$$

$$\boxed{V = \frac{500\pi}{3}}$$

EXEMPLO

NUMA ESFERA DE VOLUME 288π TOMA-SE UMA SEÇÃO DE ÁREA 20π. CALCULE A DISTÂNCIA DA SEÇÃO AO CENTRO DA ESFERA.



$$\frac{4}{3}\cancel{\pi}R^3 = 288\cancel{\pi}$$

$$R^3 = \frac{\overset{72}{\cancel{288}}\cdot 3}{\cancel{4}}$$

$$R^3 = 216$$

$$\boxed{R = 6}$$

$$\pi r^2 = 20\pi \rightarrow \underline{r^2 = 20}$$

$$d^2 = R^2 - r^2$$

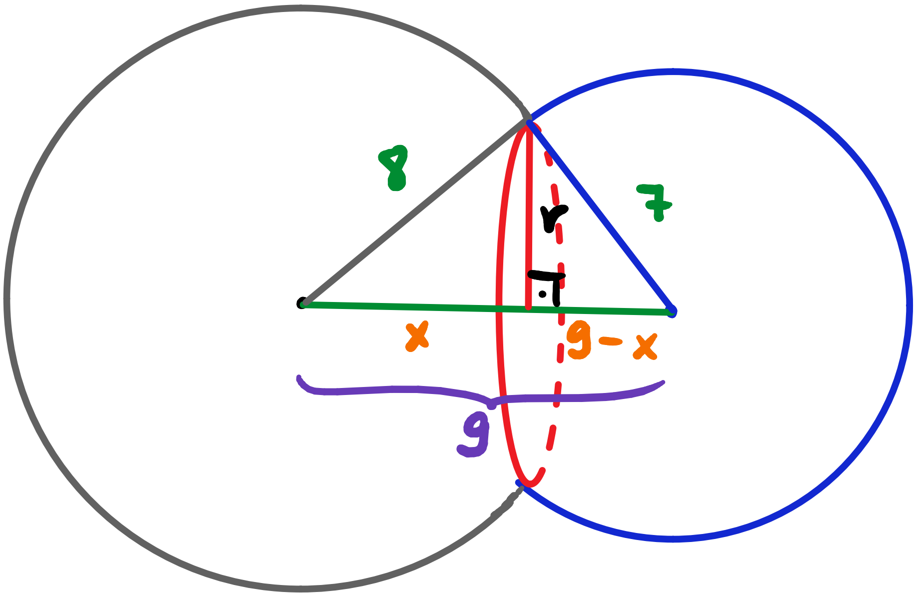
$$d^2 = 36 - 20$$

$$d^2 = 16$$

$$\boxed{d = 4}$$

EXEMPLO

DUAS ESFERAS DE RAIOS 7 E 8 POSSUEM CENTROS QUE DISTAM 9 UNIDADE. CALCULE A ÁREA DO CÍRCULO SEGUNDO O QUAL AS ESFERAS DE INTERSECTAM.



$$r^2 = \underline{8^2 - x^2} \quad ; \quad r^2 = \underline{7^2 - (9-x)^2}$$

$$64 - x^2 = 49 - (81 - 18x + x^2)$$

$$64 - \cancel{x^2} = 49 - 81 + 18x - \cancel{x^2}$$

$$96 = 18x$$

$$x = \frac{96}{18} = \frac{16}{3}$$

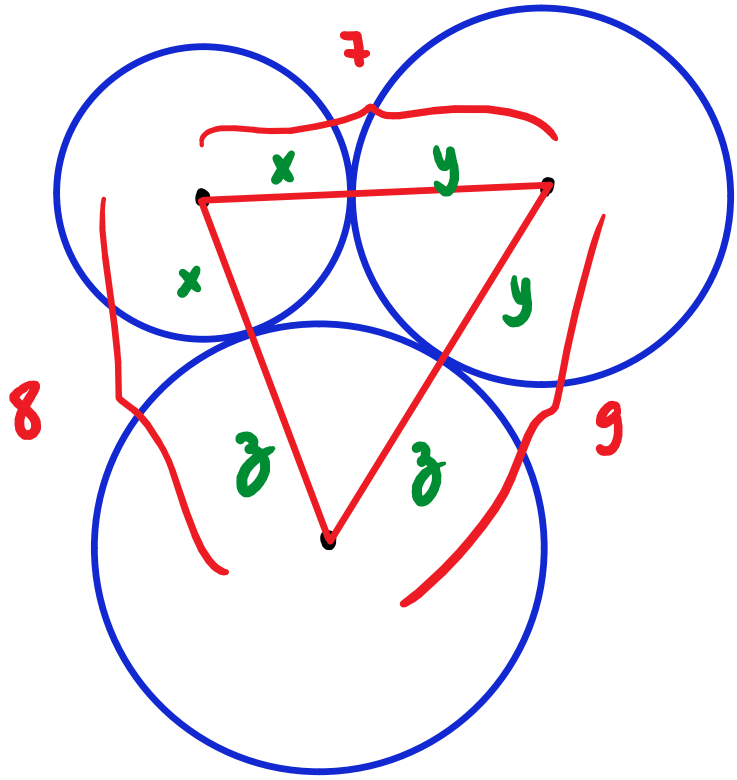
$$r^2 = 64 - \left(\frac{16}{3}\right)^2 = \frac{576 - 256}{9} = \frac{320}{9}$$

UNIVERSO NARRADO

$$\boxed{A = \frac{320\pi}{9}}$$

EXEMPLO

OS CENTROS DE 3 ESFERAS TANGENTES DUAS A DUAS FORMAM UM TRIÂNGULO DE LADOS 7, 8 E 9. CALCULE A SOMA DAS ÁREAS SUPERFICIAIS DESSAS ESFERAS.



$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x + z = 8 \\ y + z = 9 \end{cases}$$

$$2(x + y + z) = 24$$

$$x + y + z = 12$$

$z = 5$ $\quad$ $x = 3$

$y = 4$

$$A_T = A_1 + A_2 + A_3$$

$$= 4\pi x^2 + 4\pi y^2 + 4\pi z^2$$

$$= 4\pi(3^2 + 4^2 + 5^2) \longrightarrow \boxed{A_T = 200\pi}$$

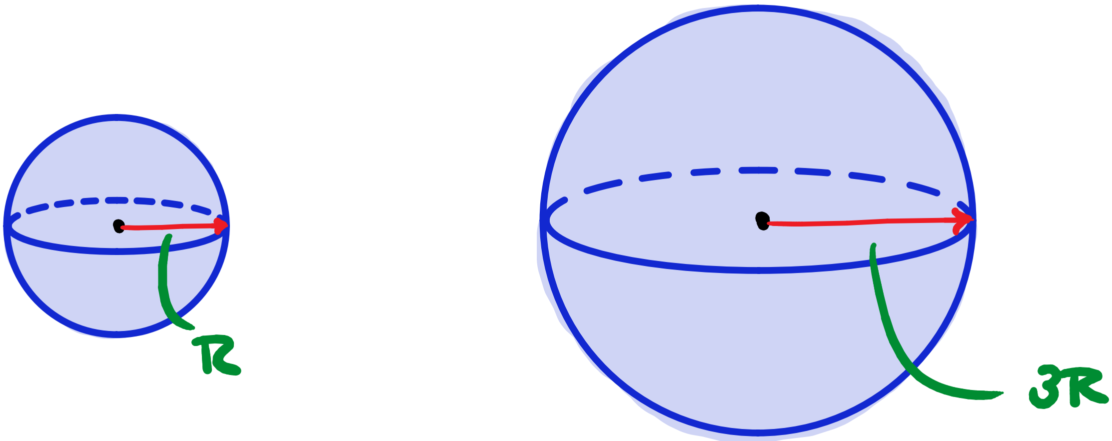
EXEMPLO

UMA JÓIA ESFÉRICA MACIÇA DE OURO É DERRETIDA PARA FORMAR OUTRAS JÓIAS TAMBÉM ESFÉRICAS DE MENOR TAMANHO.

SE O RAIO DE CADA NOVA JOIA É UM TERÇO DO RAIO DA JOIA ORIGINAL, QUANTAS JÓIAS MENORES PODERÃO SER CONFECCIONADAS?

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$3^3 = 27$$



$$V_P = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V_G = \frac{4}{3}\pi (3R)^3$$

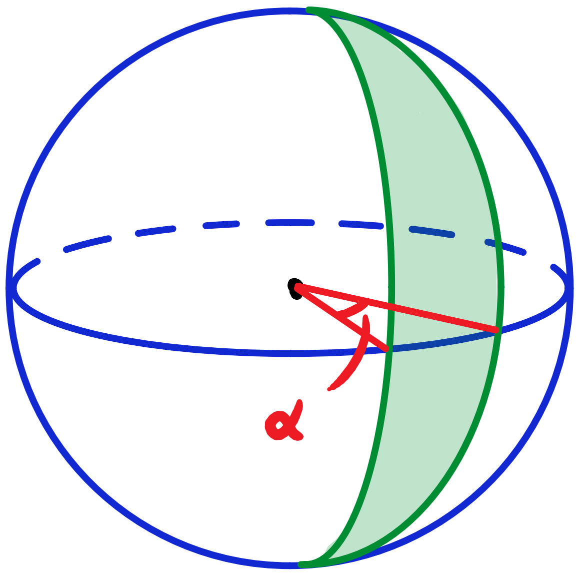
$$V_G = \frac{4}{3}\pi \cdot 27 R^3$$

$$\underline{V_G = 27 V_P}$$

PARTES DA ESFERA

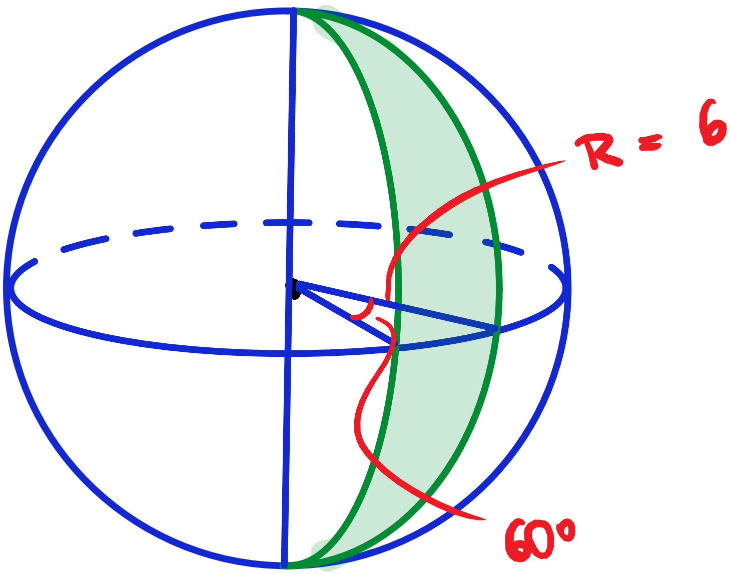
FUSO ESFÉRICO

FUSO É UMA SUPERFÍCIE!!!



Âng	Área
360°	$4\pi R^2$
α	A_F

$$A_F = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 4\pi R^2$$

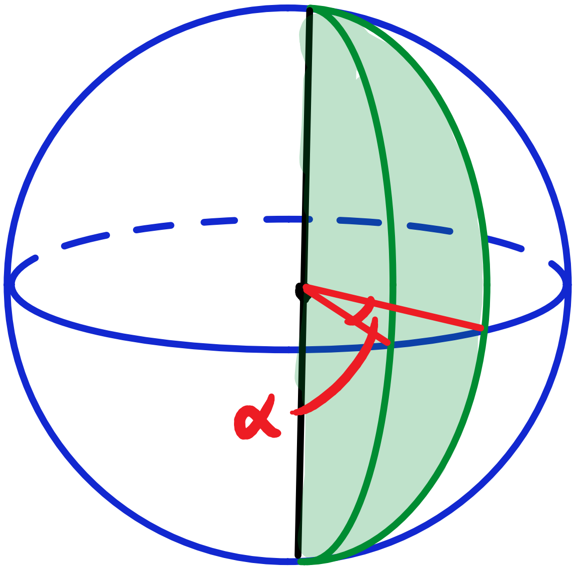


$$A_F = \frac{\cancel{60}^{\,1}}{\cancel{360}_{\,\cancel{6}}} \cdot 4\pi \cdot 6^{\cancel{2}}$$

$$\underline{A_F = 24\pi}$$

CUNHA ESFÉRICA

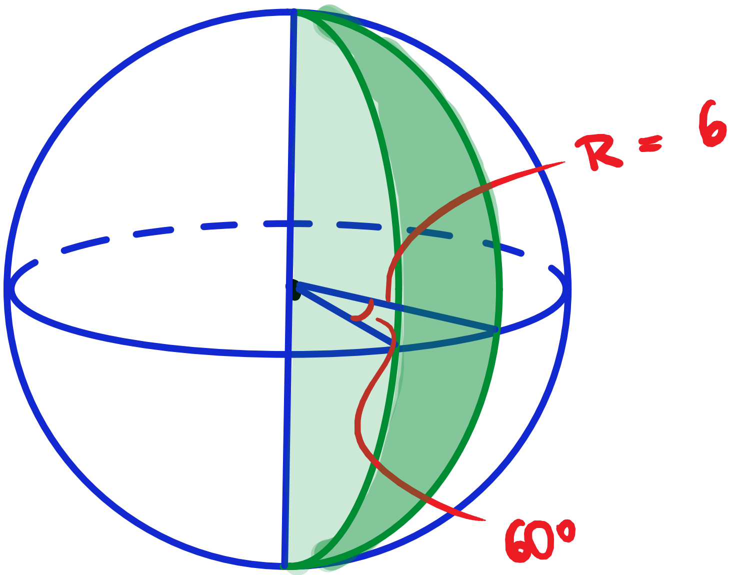
CUNHA É UM SÓLIDO!!!



Âng.	Volume
$360°$	$\frac{4}{3}\pi R^3$
α	V_c

$$\boxed{V_c = \frac{\alpha}{360°} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\boxed{A_c = A_F + \pi R^2}$$



$$V = \frac{\cancel{60}}{\underset{\cancel{6}}{\cancel{360}}} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 6^{\cancel{3}\,2} = \frac{4}{\cancel{3}} \cdot \pi \cdot 6 \cdot \cancel{6}^{2}$$

$$\boxed{V_c = 48\pi}$$

$$A_c = A_F + \pi R^2$$

$$= 24\pi + \pi 6^2$$

$$\boxed{A_c = 60\pi}$$

EXEMPLO

CALCULE O RAIO DA ESFERA NA QUAL UM FUSO DE 15° TEM ÁREA 6π.

$$A_F = \frac{\alpha}{360} \cdot 4\pi R^2$$

$$6\pi = \frac{\cancel{15}}{\cancel{360}_{\cancel{90}\ 6}} \cdot \cancel{4}\pi R^2$$

$$6\cancel{\pi} = \frac{\cancel{\pi} R^2}{6}$$

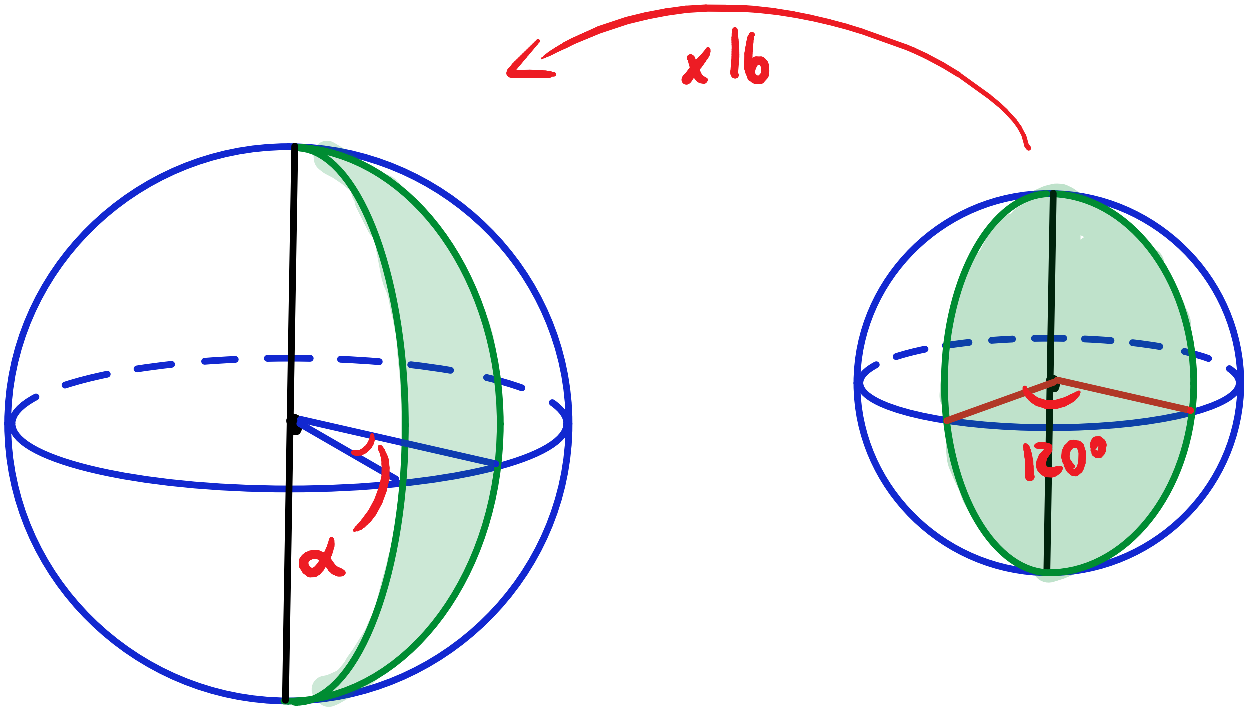
$$R^2 = 6^2$$

$$\boxed{R = 6}$$

EXEMPLO

SEJAM UMA ESFERA DE RAIO 3 E OUTRA DE RAIO 12.

QUAL O ÂNGULO DE ABERTURA DE UM FUSO DA ESFERA MAIOR QUE POSSUI A MESMA ÁREA DE UM FUSO DE 120° DA ESFERA MENOR?



$$A_F = \frac{\alpha}{360} \cdot 4\pi R^2$$

$$\alpha = \frac{120°}{16} = \frac{15}{2} = 7{,}5°$$

$$A_{F1} = A_{F2}$$

$$\frac{\alpha}{\cancel{360}} \cdot \cancel{4\pi} \cdot 12^2 = \frac{120}{\cancel{360}} \cdot \cancel{\pi} \cdot 3^2$$

$$\alpha \cdot \underset{4}{\cancel{12}} \cdot \cancel{12} = \overset{10}{\cancel{120}} \cdot \cancel{3} \cdot 3$$

$$\alpha = \frac{30}{4}$$

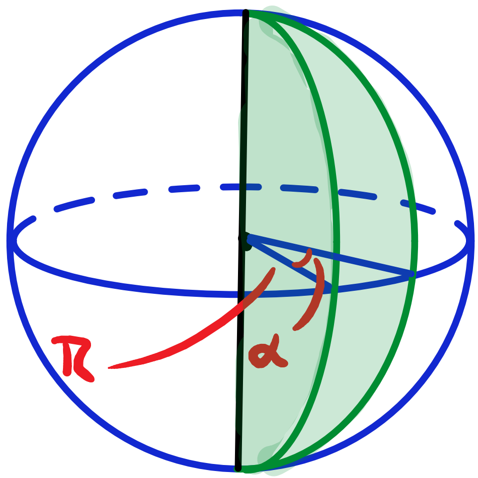
$$\boxed{\alpha = 7{,}5^\circ}$$

UNIVERSO NARRADO

EXEMPLO

UMA MEXERICA POSSUI 12 GOMOS IDÊNTICOS DE VOLUME 3π CADA. CALCULE A ÁREA SUPERFICIAL DE CADA GOMO.

$$A_c = A_F + \pi R^2 = \frac{\alpha}{360} \cdot 4\pi R^2 + \pi R^2$$



$$\alpha = \frac{360}{12} = 30^\circ$$

$$V_{TOTAL} = 12 \cdot 3\pi$$

$$\frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi} R^3 = \cancel{12}^{3} \cdot 3\cancel{\pi}$$

$$R^3 = 27$$

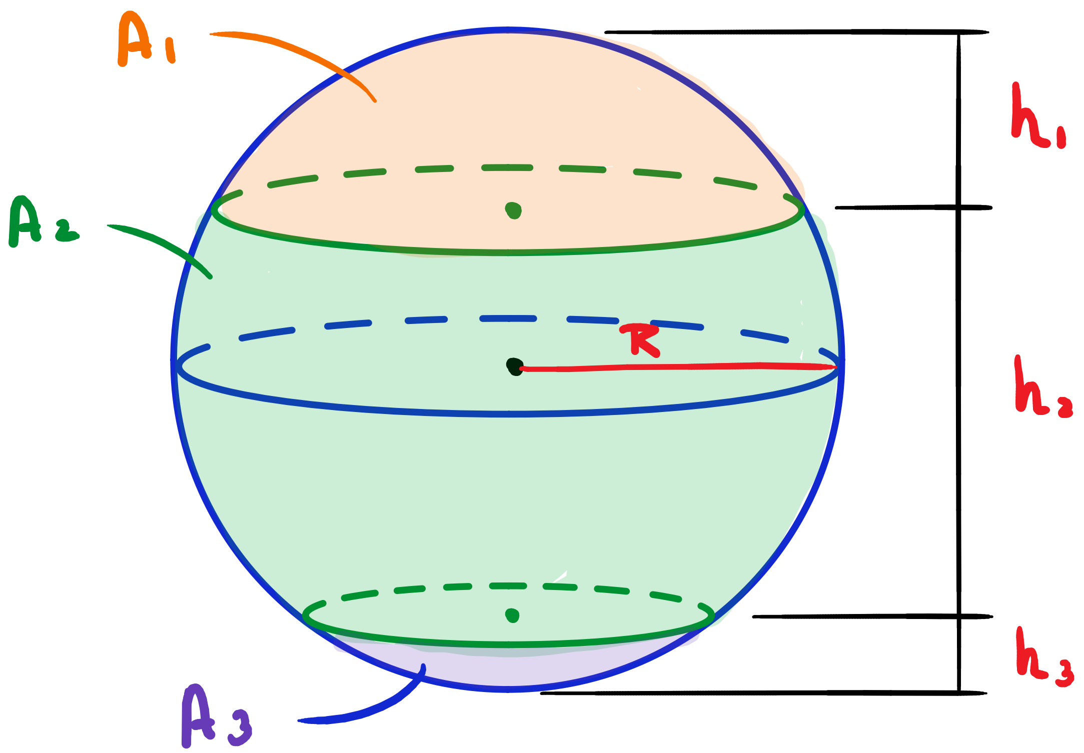
$$\boxed{R = 3}$$

$$A_c = \frac{\cancel{30}}{\cancel{360}_{12}} \cdot \cancel{4}\pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 3^2$$

$$= 3\pi + 9\pi \longrightarrow \underline{A_c = 12\pi}$$

CALOTA E ZONA ESFÉRICAS

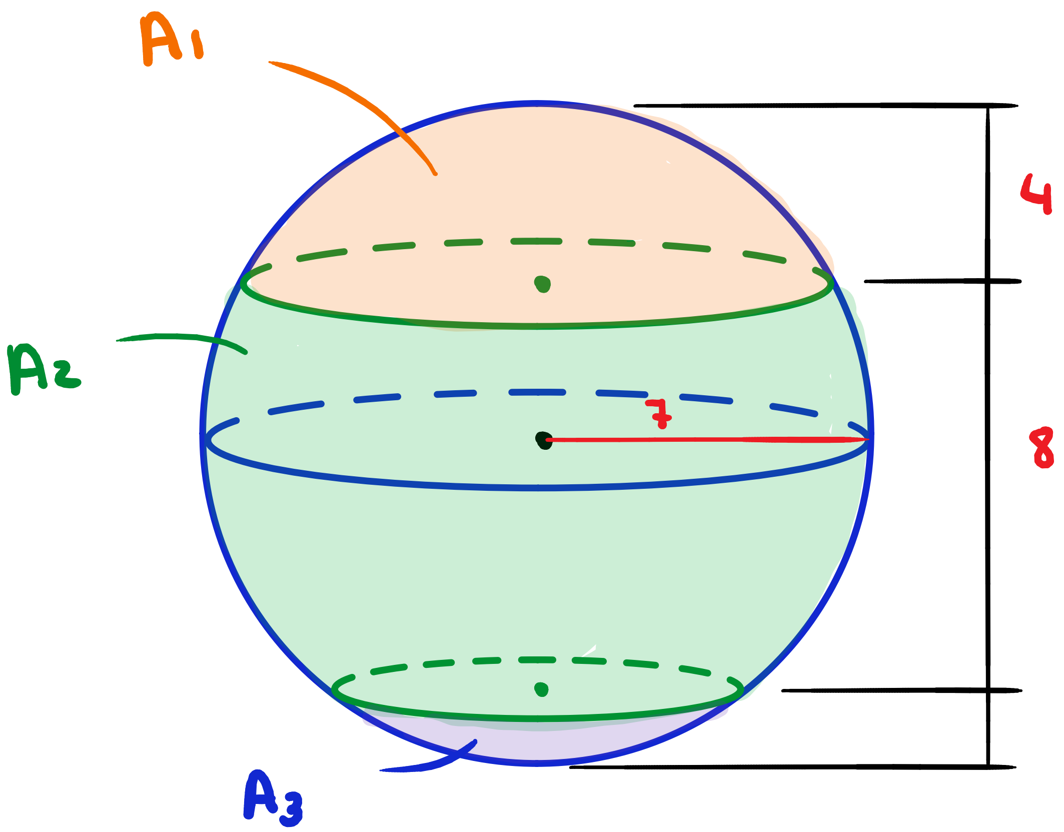
SÃO SUPERFÍCIES!!!



$$A_1 = 2\pi R h_1$$

$$A_2 = 2\pi R h_2$$

$$A_3 = 2\pi R h_3$$

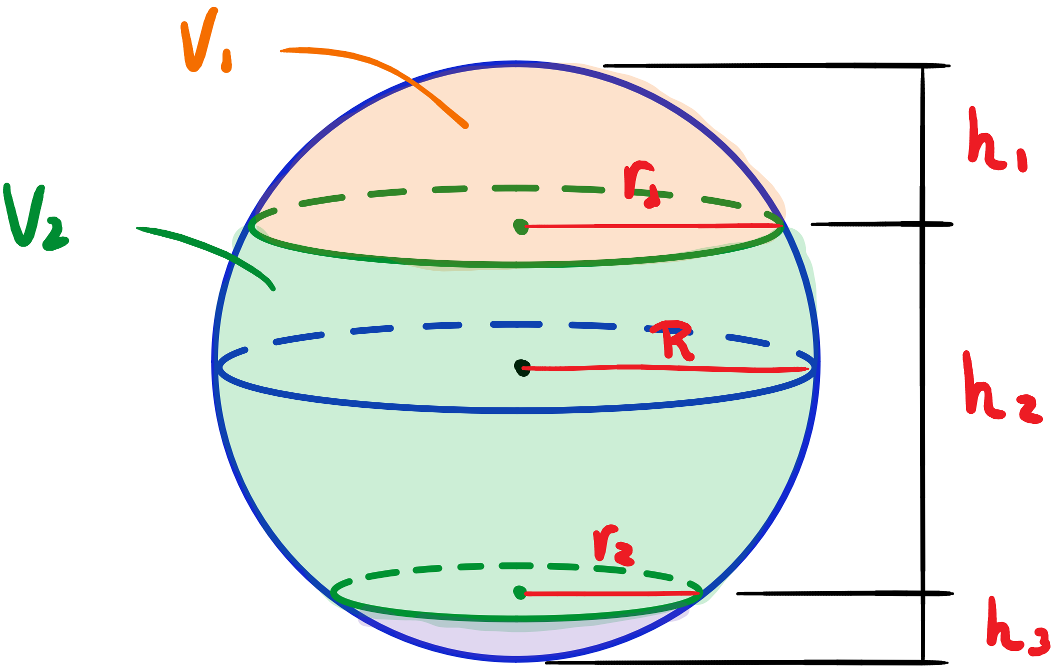


$$A_1 = 2.\pi.7.4 = 56\pi$$

$$A_2 = 2\pi.7.8 = 112\pi$$

SEGMENTOS ESFÉRICOS

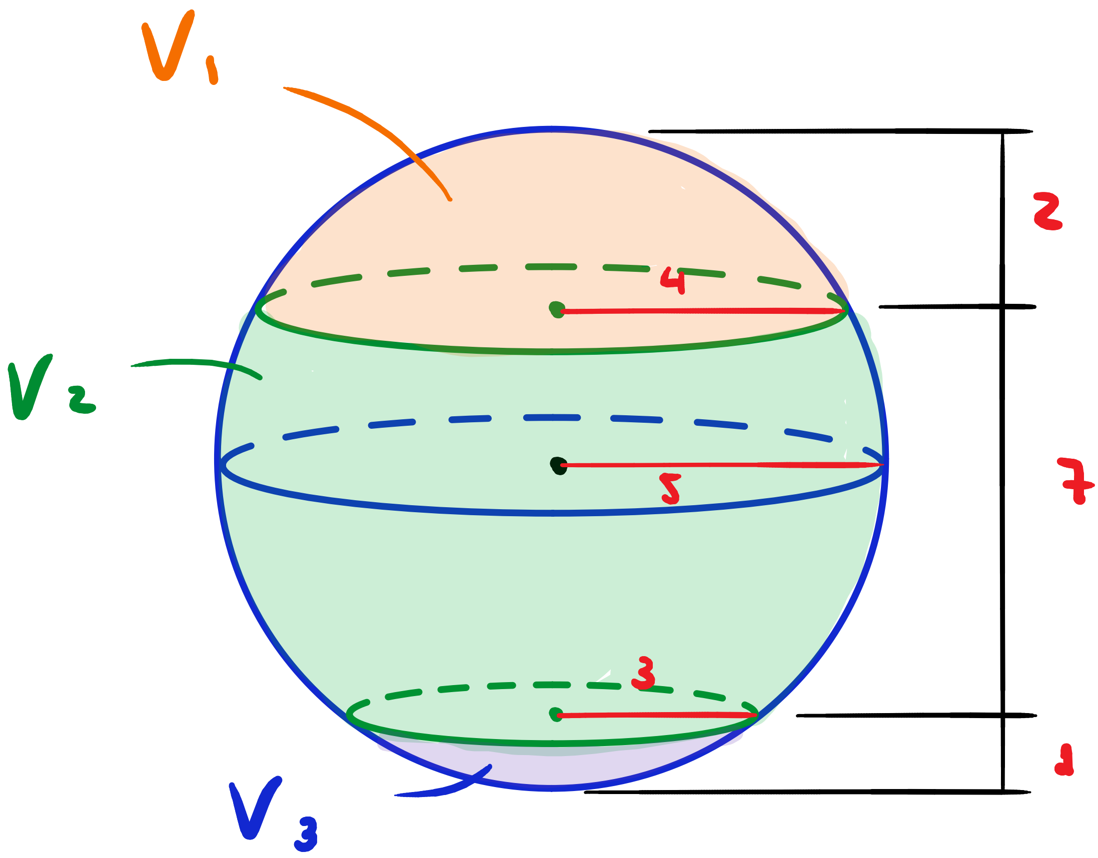
SÃO SÓLIDOS!!!



$$\boxed{V_1 = \frac{\pi h_1^2}{3}(3R - h_1)}$$

$$\boxed{V_1 = \frac{\pi h_1}{6}(3r_1^2 + h_1^2)}$$

$$\boxed{V_2 = \frac{\pi h_1}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h_1^2)}$$



$$V_1 = \frac{\pi \cdot 2^2}{3}(3 \cdot 5 - 2) = \frac{52\pi}{3}$$

$$V_1 = \frac{\pi \cdot \cancel{2}}{\cancel{6}_{3}} \cdot (3 \cdot 4^2 + 2^2) = \frac{52\pi}{3}$$

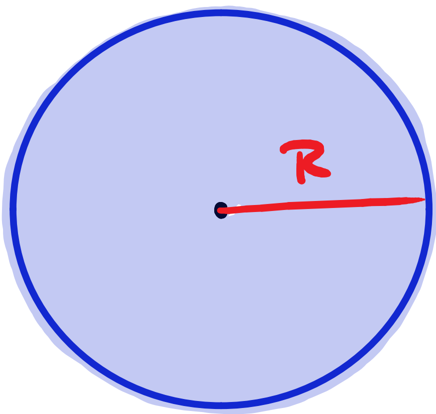
$$V_2 = \frac{\pi \cdot 7}{6}(3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 3^2 + 7^2) = \frac{7\pi \cdot \cancel{124}^{62}}{\cancel{6}_{3}}$$

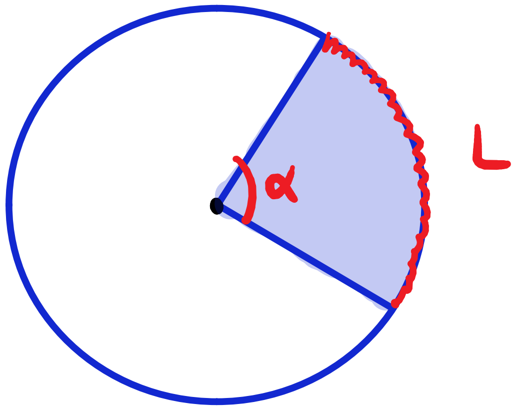
$$= \frac{434\pi}{3}$$

SEGMENTO ESFÉRICO

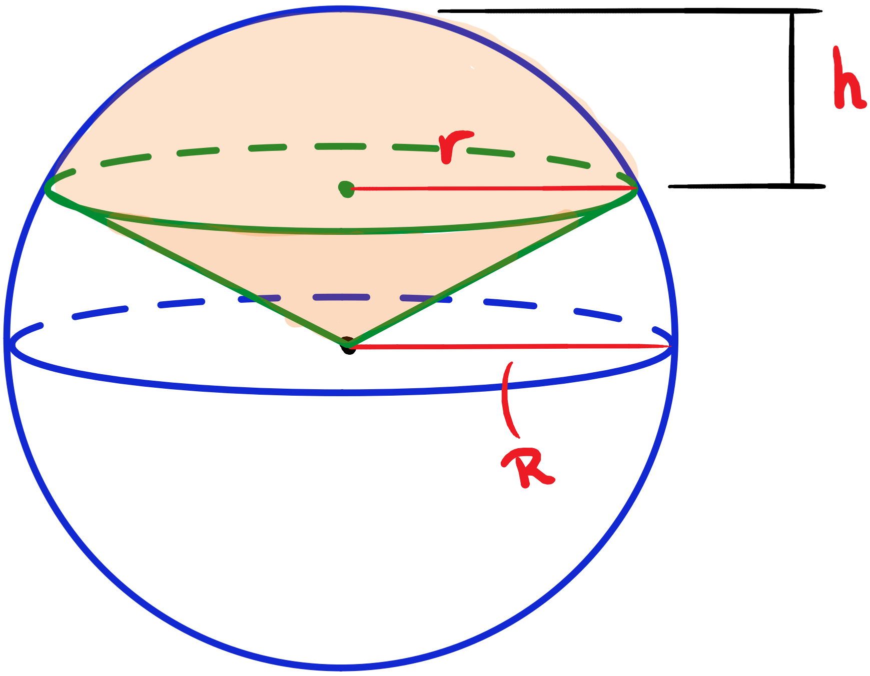
DEMONSTRAÇÃO

LEMBRANDO E PENSANDO...





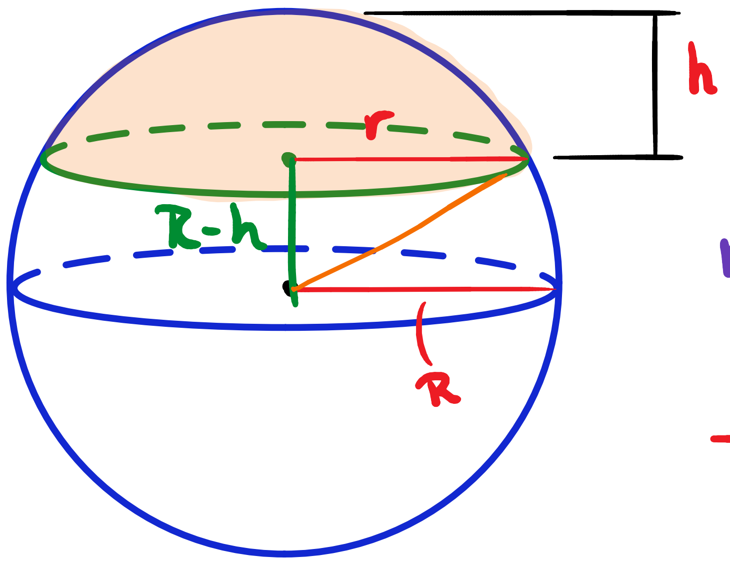
$$A = \frac{l}{2\pi R} \cdot \pi R^2$$



$$V_{SORVETE} = \frac{A_{CALOTA}}{A_{TOTAL}} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$= \frac{2\pi R h}{\cancel{4\pi R^2}} \cdot \frac{\cancel{4\pi}}{3} R^{\cancel{3}}$$

$$V_{SORVETE} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$



$$R^2 = r^2 + (R-h)^2$$

$$r^2 = \cancel{R^2} - (\cancel{R^2} - 2Rh + h^2)$$

$$\underline{r^2 = 2Rh - h^2}$$

$$V_{SEG} = V_{SORVETE} - V_{CONE}$$

$$= \frac{2}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi . r^2 (R - h)$$

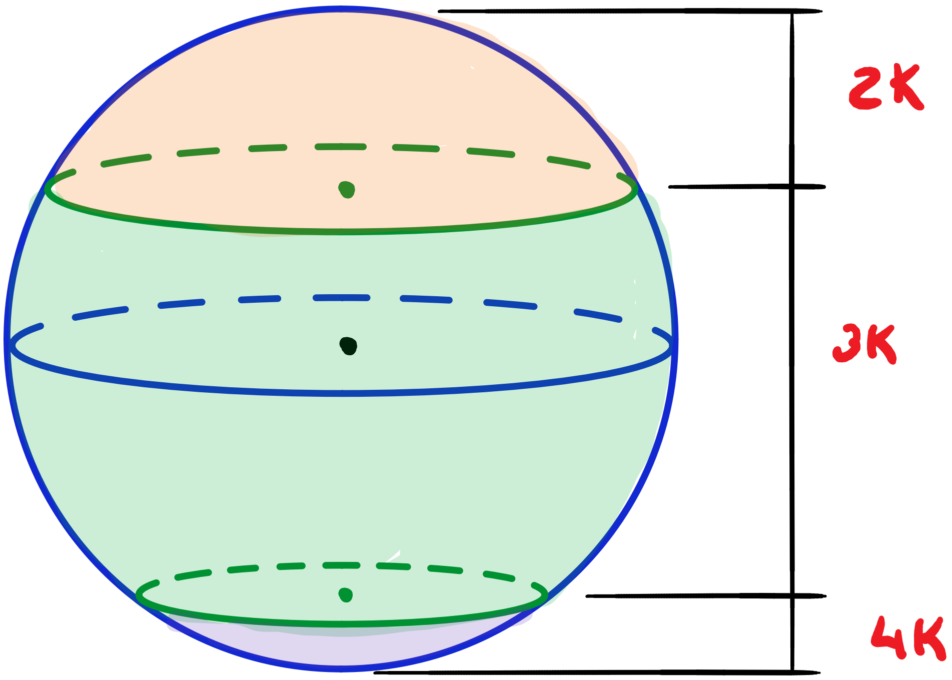
$$= \frac{\pi}{3}\left[2R^2h - (2Rh - h^2)(R - h)\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(\cancel{2R^2h} - \cancel{2R^2h} + 2Rh^2 + Rh^2 - h^3\right)$$

$$\boxed{V_{SEG} = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)}$$

EXEMPLO

DOIS PLANOS PARALELOS SECCIONAM UMA ESFERA E DIVIDEM O DIÂMETRO DELA NA RAZÃO 2 : 3 : 4. EM QUE RAZÃO FICA DIVIDIDA A ÁREA DA ESFERA?



$$A = 2\pi R h$$

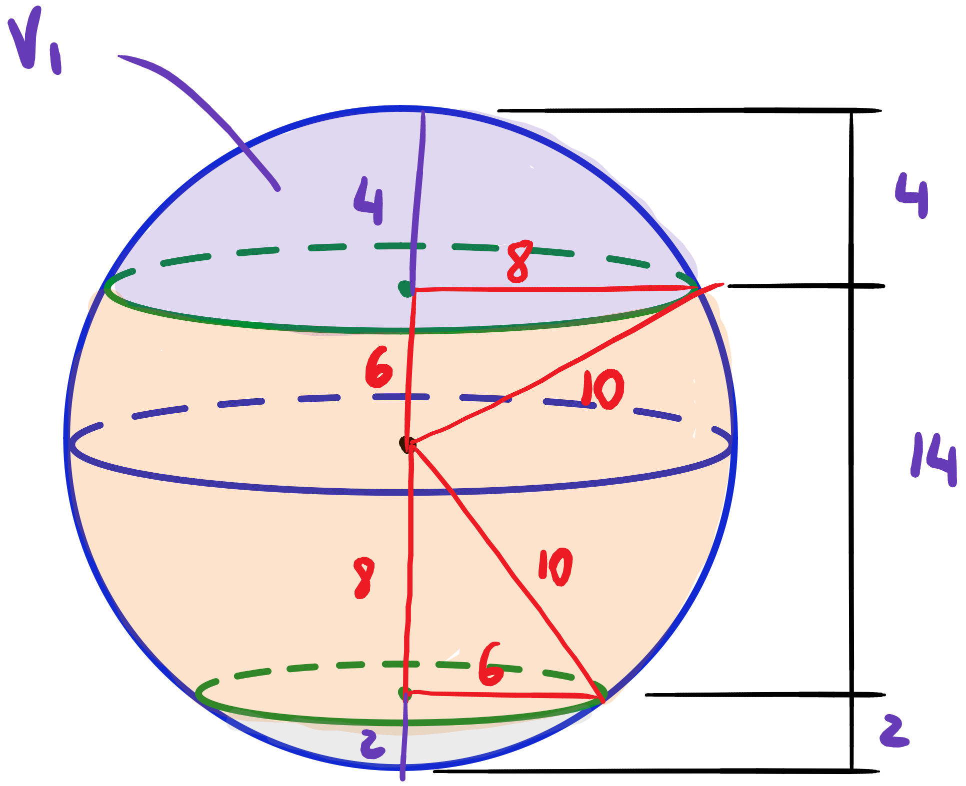
$$A_1 : A_2 : A_3 = 2 : 3 : 4$$

EXEMPLO

SEJA UMA ESFERA DE RAIO 10.

DUAS SEÇÕES PARALELAS COM ÁREAS RESPECTIVAMENTE IGUAIS A 36π E 64π DIVIDEM A ESFERA EM TRÊS SÓLIDOS.

SE O CENTRO DA ESFERA SE ENCONTRA ENTRE AS SEÇÕES, CALCULE O VOLUME DE CADA SÓLIDO.



$$V_1 = \frac{\pi h_1^2}{3}(3R - h_1)$$

$$= \frac{\pi \cdot 4^2}{3}(30 - 4) = \frac{\pi \cdot 16 \cdot 26}{3} = \frac{416\pi}{3}$$

$$V_2 = \frac{\pi h}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h_2^2)$$

$$= \frac{\pi \cdot \cancel{14}^{\,7}}{\cancel{6}_{\,3}}(3 \cdot 8^2 + 3 \cdot 6^2 + 14^2)$$

$$= \frac{3472\pi}{3}$$