Aula 16

TSE - Concurso Unificado (Analista Judiciário - Área Administrativa) Raciocínio Lógico e Matemática - 2023 (Pré-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

06 de Abril de 2023

Índice

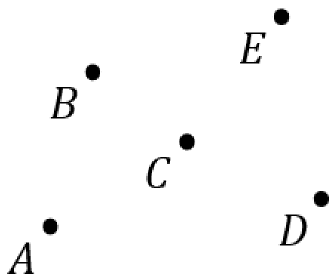
GEOMETRIA PLANA

Noções Elementares

Ponto e Reta

Ponto

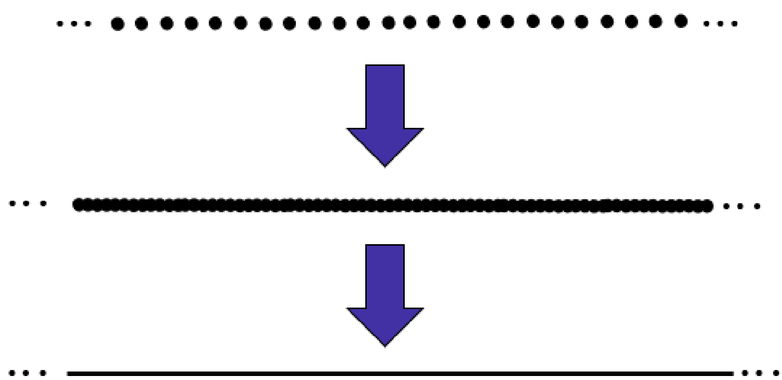
O ponto, a reta e o plano são noções bem **primitivas** de geometria. Tente definir um ponto. Você vai perceber que existe uma certa dificuldade nisso (rsrs). Apesar de não ter uma definição "pra valer", sabemos algumas de suas propriedades, de forma que conseguimos identificá-lo e caracterizá-lo.



A figura acima mostra vários exemplos de pontos. Você pode notar que chamamos cada um deles de uma **letra maiúscula**. É a notação mais comum. Uma outra característica do ponto é que ele **não possui dimensão**. Dizemos que é um elemento adimensional. Esse fato permite usarmos o ponto para identificar uma localização com bastante acuracidade. Por fim, vale a pena você anotar aí que não podemos dividir um ponto. Isso mesmo, você não pode "quebrar" um ponto em dois pontos.

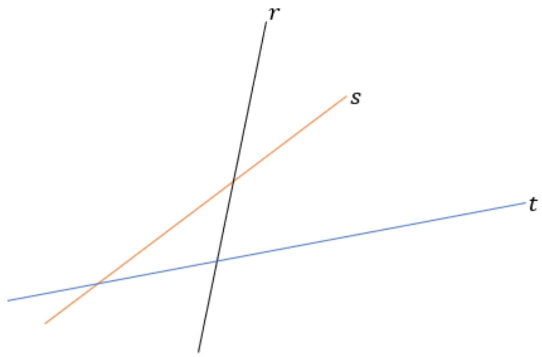
Reta

Por sua vez, **a reta vai ser formada pela união de infinitos pontos**.



Na imagem acima, tentei representar vários pontos se aglomerando até formarem uma reta (rsrs). Vamos lá! *Quais são as características de uma reta?* Primeiro: **ela é unidimensional**. Enquanto um ponto não possui dimensão (é adimensional), a reta agora é unidimensional.

Segundo: **ela é infinita para ambos os lados**! Ou seja, ela segue indefinidamente para qualquer um dos lados (apesar de não ser obrigatório, podemos usar reticencias nas duas "extremidades" da reta para expressar esse fato).



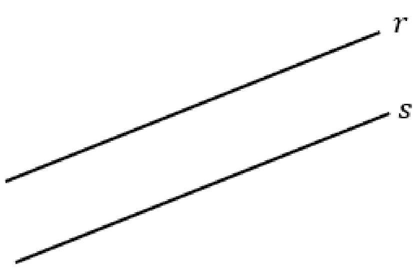
A imagem acima mostra a notação que usamos para as retas: **letras minúsculas**. Enquanto nos pontos usamos letras maiúsculas, nas retas são letras minúsculas! Vale ressaltar que o alfabeto que estamos utilizando de referência aqui é o latino (Aa, Bb, Cc, ..., Zz).

Agora, vou contar para vocês uma novidade. Em algumas situações, a reta terá extremidade(s). Logo, ela não se prolongará até ao infinito nos dois lados. Quando ela tiver **uma extremidade**, a chamaremos de **semirreta**. Por sua vez, quando ela tiver as **duas extremidades**, será apenas um **segmento de reta**.

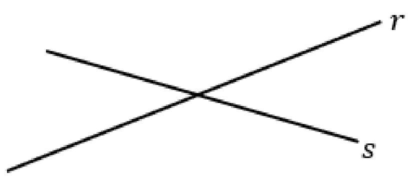
SEMIRRETA

SEGMENTO DE RETA

Normalmente, representamos o segmento de reta com extremidades A e B por $\overline{AB}$. Além desse detalhe, existe mais uma classificação que leva em conta se duas ou mais retas estão se encontrando. *Como assim?!*



RETAS PARALELAS



RETAS CONCORRENTES

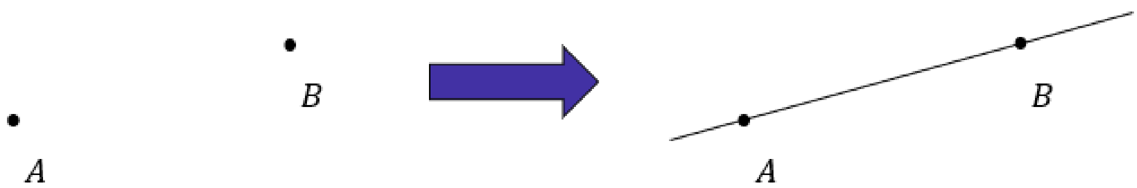
As **retas paralelas não se encontram**, enquanto as **retas concorrentes sim**. Essas últimas possuem **um único ponto em comum**. Duas retas que se encontram em mais de um ponto necessariamente vão se encontrar em todos os demais e serão chamadas retas coincidentes!

RETAS COINCIDENTES

É como se uma reta estivesse em cima da outra!!

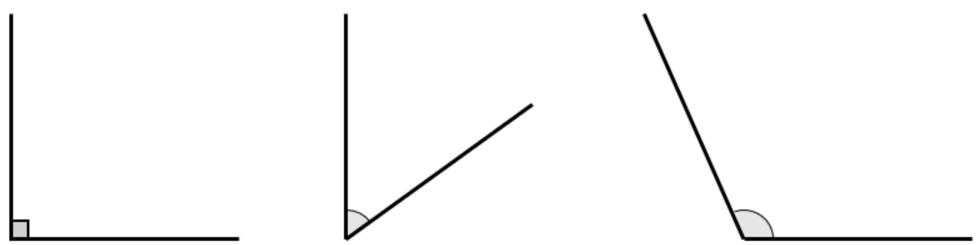
Para finalizar essa parte introdutória de retas, anote aí a seguinte propriedade:

- Sempre conseguiremos traçar uma reta por quaisquer dois pontos. Essa reta será única.

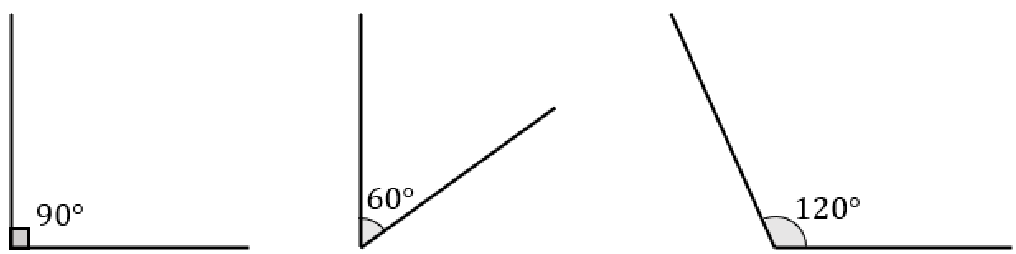


Ângulos

Um ângulo é formado pelo **encontro de duas semirretas**. Esse encontro pode se dar de várias formas. Veja.

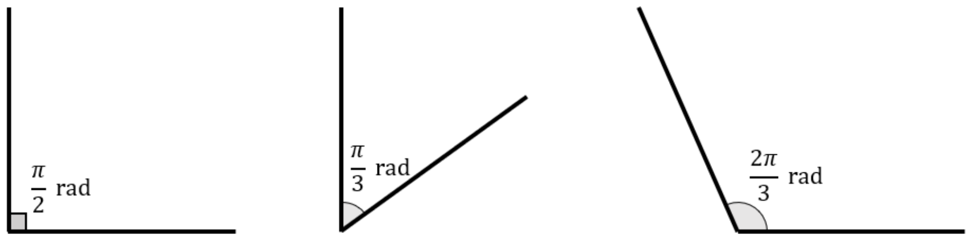


Perceba que dependendo de como arranjamos as semirretas, vamos ter aberturas diferentes. Nós podemos **quantificar essa abertura e expressar o resultado em graus (°) ou radianos (rad)**.



ÂNGULOS REPRESENTADOS EM GRAUS (°)

Agora olhe os mesmos ângulos, mas expressados em radianos.



ÂNGULOS REPRESENTADOS EM RADIANOS (rad)

São duas maneiras bem diferentes de expressarmos os ângulos, concorda? Muitos alunos possuem facilidade quando estão trabalhando com graus (°), mas quando aparece um ângulo em radianos (rad), já ficam assustados. Moçada, apenas uma regra de três simples separa um ângulo em radiano de um ângulo em grau (ou vice-versa). Para isso, lembre-se sempre do seguinte:

"$180°$ equivalem a $\boldsymbol{\pi}$ rad."

Sabendo disso, é só usar uma regra de três para converter um em outro. Vamos fazer alguns exemplos.

1) Converter 60° em radianos.

Você pensa assim: se 180° equivalem a π rad, então 60° equivalem a x. Com isso, podemos esquematizar:

$$180° \longleftrightarrow \pi \text{ rad}$$
$$60° \longleftrightarrow x$$

Multiplicando cruzado.

$$180x = 60\pi \quad \rightarrow \quad x = \frac{60\pi}{180} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{3} \text{ rad}}$$

Logo, podemos dizer que 60° equivalem a $\pi/3$ rad.

2) Converter $\frac{5\pi}{6}$ rad em graus.

Pensamento muito semelhante, moçada! Se 180° equivalem a π rad, então x equivalem a $\frac{5\pi}{6}$ rad.

$$180° \longleftrightarrow \pi \text{ rad}$$
$$x \longleftrightarrow \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

Multiplicando cruzado.

$$x \cdot \pi = 180 \cdot \frac{5\pi}{6} \quad \rightarrow \quad x = 30 \cdot 5 \quad \rightarrow \quad x = 150°$$

Logo, $\frac{5\pi}{6}$ rad equivalem a 150°.

A tabela abaixo mostra os ângulos (em graus) mais frequentes em provas, bem como seu valor em radianos.

ESQUEMATIZANDO

Principais Ângulos			
Em Graus	Em Radianos	Em Graus	Em Radianos
$0°$	0 rad	$120°$	$\frac{2\pi}{3}$ rad
$30°$	$\frac{\pi}{6}$ rad	$150°$	$\frac{5\pi}{6}$ rad
$45°$	$\frac{\pi}{4}$ rad	$180°$	π rad
$60°$	$\frac{\pi}{3}$ rad	$270°$	$\frac{3\pi}{2}$ rad
$90°$	$\frac{\pi}{2}$ rad	$360°$	2π rad

HORA DE PRATICAR!

(EEAR/2019) Gabriel verificou que a medida de um ângulo é $\frac{3\pi}{10}$ rad. Essa medida é igual:

A) 48°
B) 54°
C) 66°
D) 72°

Comentários:

Para treinar, moçada! Ora, se 180° equivalem a π rad, então x graus equivalem a $\frac{3\pi}{10}$ rad. Vamos esquematizar.

$$180° \longleftrightarrow \pi \text{ rad}$$

$$x \longleftrightarrow \frac{3\pi}{10} \text{ rad}$$

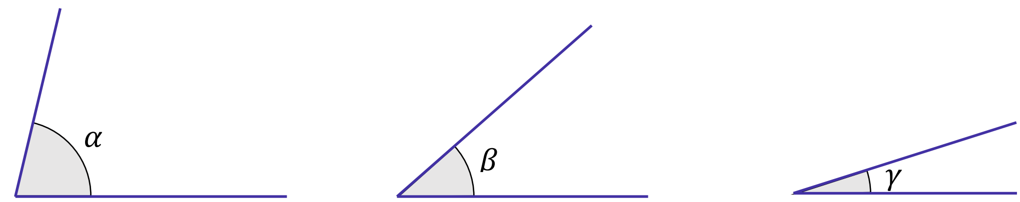
Multiplicando cruzado.

$$x \cdot \pi = 180 \cdot \frac{3\pi}{10} \quad \rightarrow \quad x = 18 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad x = 54°$$

Gabarito: LETRA B.

Agora que sabemos o que é um ângulo e suas unidades, vamos entrar nas nomenclaturas e classificações.

- **Ângulo Raso:** É o ângulo de 180° (π rad).
- **Ângulo Reto:** É o ângulo de 90° ($\pi/2$ rad)
- **Ângulo Agudo:** Todo ângulo maior que 0° e menor que 90°.

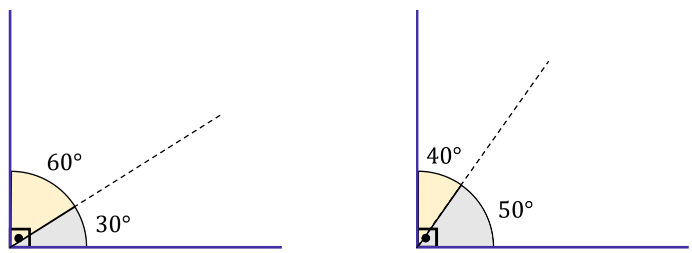


α, β e γ são ângulos agudos.

- **Ângulo Obtuso:** Todo ângulo maior que 90° e menor que 180°.

δ e θ são ângulos obtusos.

- **Ângulos Complementares**: Dois ângulos são chamados de complementares quando sua soma é igual a 90°.

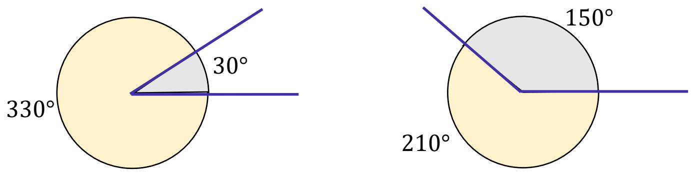


Por exemplo, 60° e 30° são ângulos complementares, já que $30° + 60° = 90°$. Da mesma forma, 40° e 50° também são. Beleza?!!

- **Ângulos Suplementares**: Dois ângulos são chamados de complementares quando sua soma é igual a 180°.

Observe que 150° e 30° são ângulos suplementares, uma vez que sua soma é igual a 180°. Da mesma forma, 75° e 105° também são.

- **Ângulos Replementares:** Dois ângulos são chamados de replementares quando sua soma é 360°.



- 330° e 30° são ângulos replementares pois $330° + 30° = 360°$.
- 210° e 150° também são ângulos replementares, já que $210° + 150° = 360°$.

HORA DE PRATICAR!

(PREF. ÁGUIA BRANCA/2018) O replemento do ângulo de 275° é:
A) 85°.
B) 95°.
C) 35°.
D) 25°.
E) 185°.

Comentários:
O replemento do ângulo de 275° é o ângulo que quando eu somar com 275 vai resultar em 360°. Assim,

$$275° + x = 360° \quad \rightarrow \quad x = 360° - 275° \quad \rightarrow \quad x = 85°$$

Gabarito: LETRA A.

(PREF. SM CAMPOS/2017) Dadas as afirmativas a respeito de ângulos,

I. Um ângulo de 80° é um ângulo reto.
II. Um ângulo de 105° é um ângulo obtuso.
III. Um ângulo de 5° é um ângulo agudo.

verifica-se que está(ão) correta(s)
A) I, apenas.
B) II, apenas.
C) I e III, apenas.
D) II e III, apenas.
E) I, II e III.

Comentários:
Vamos avaliar cada uma das afirmativas.

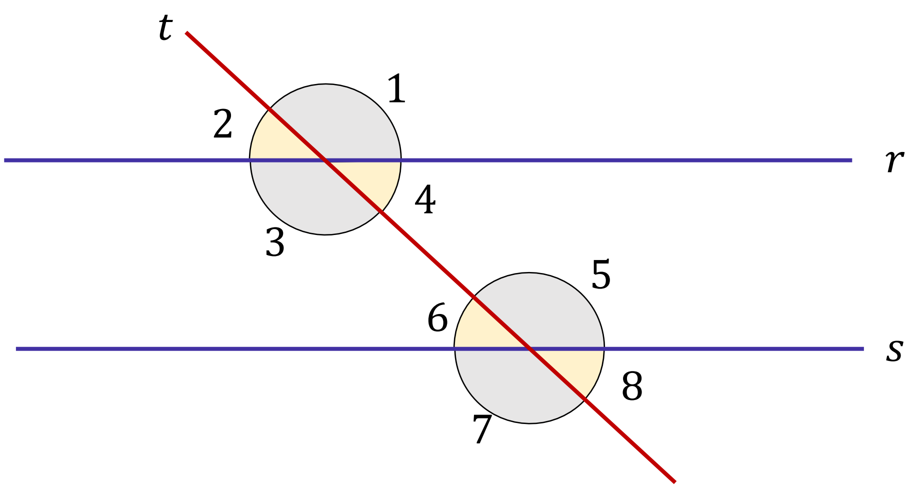
I. Um ângulo de 80° é um ângulo reto.
ERRADO. O ângulo reto é o ângulo de 90°.

II. Um ângulo de 105° é um ângulo obtuso.
CERTO. Qualquer ângulo maior que 90° e menor que 180° é um ângulo obtuso.

III. Um ângulo de 5° é um ângulo agudo.
CERTO. Qualquer ângulo maior que 0° e menor que 90° é um ângulo agudo.

Gabarito: LETRA D.

Para finalizar essa parte de ângulos, vamos conhecer mais alguns nomes que podem aparecer na sua prova. Considere a seguinte situação:

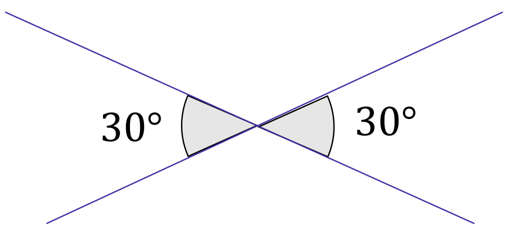


r e s são retas paralelas, enquanto t é uma transversal. Observe que quando a transversal corta as duas retas paralelas, vários ângulos são formados. Esses 8 novos ângulos ganham nomes. Vamos lá!

- Ângulos opostos pelo vértice: $(1{,}3), (2{,}4), (5{,}7)\ e\ (6{,}8)$;
- Ângulos alternos internos: $(4{,}6)$ e $(3{,}5)$;
- Ângulos alternos externos: $(2{,}8)$ e $(1{,}7)$;
- Ângulos colaterais internos: $(3{,}6)$ e $(4{,}5)$;
- Ângulos colaterais externos: $(1{,}8)\ e\ (2{,}7)$.

Professor, é muito nome! É muita coisa! Vou endoidar!

Calma, aluno! Se eu tivesse que escolher o mais importante para te falar, escolheria o oposto pelo vértice. Saiba que se dois ângulos são opostos pelo vértice. A consequência de dois ângulos serem opostos pelo vértice é que eles possuirão a mesma medida!

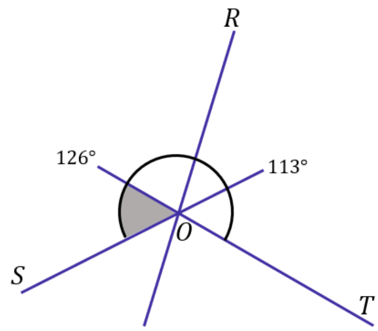


Vale a pena ter em mente que ângulos alternos internos/externos são congruentes (iguais). Por exemplo, voltando para a figura da página anterior,

- Como 4 e 6 são ângulos alternos internos, então eles possuem a mesma medida (são congruentes).
- Como 1 e 7 são ângulos alternos externos, então eles também possuem a mesma medida (são congruentes).

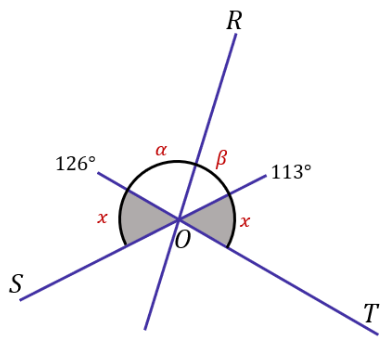
Dito tudo isso, agora vamos exercitar um pouco!

(PREF. SUZANO/2019) Três retas interceptam-se em um ponto O, formando a figura a seguir.



Considerando que RÔS mede 126° e RÔT mede 113°, a medida do ângulo destacado em cinza é:
A) 36°
B) 59°
C) 67°
D) 121°

Comentários:
A primeira coisa que deveríamos perceber é que **o ângulo destacado em cinza é igual ao que está atrás dele**. Veja que são ângulos opostos pelo vértice.



Observe que aproveitamos para dar "nome aos bois". **Chamamos cada ângulo de uma letra**. Do enunciado, sabemos que **RÔS mede 126°**. Assim,

$$x + \alpha = 126° \qquad (1)$$

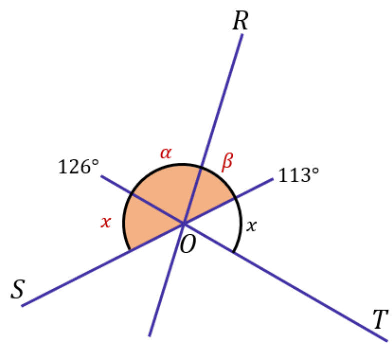
Temos também a informação que **RÔT mede 113°.** Assim,

$$x + \beta = 113° \qquad (2)$$

Vamos somar a equação (1) com a equação (2), membro a membro.

$$(x+\alpha)+(x+\beta)=126°+113° \quad \rightarrow \quad x+\boldsymbol{(x+\alpha+\beta)}=239°$$

Pessoal, vocês estão vendo que eu destaquei uma parte da soma na nossa equação. Quero que você volte para nossa figura acima e veja que **a soma destacada é exatamente um ângulo raso, isto é, 180°**.



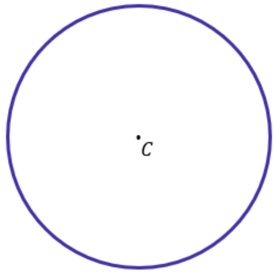
Portanto,

$$x+180°=239° \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x=59°}$$

Gabarito: LETRA B.

Circunferência

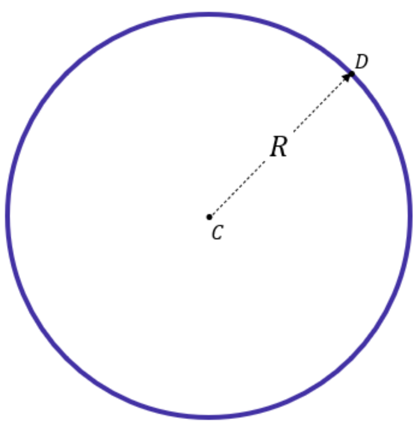
A primeira figura geométrica que estudaremos na aula de hoje será a circunferência. Particularmente, acho ela bem interessante, já que é uma **forma bem corriqueira**. Lembre-se de uma pizza, de um pneu, de uma moeda... todos eles possuem um formato circular (circunferencial). Com um pouco mais de rigor, nós definimos uma circunferência como sendo **o conjunto dos pontos equidistantes de um centro (C)**.

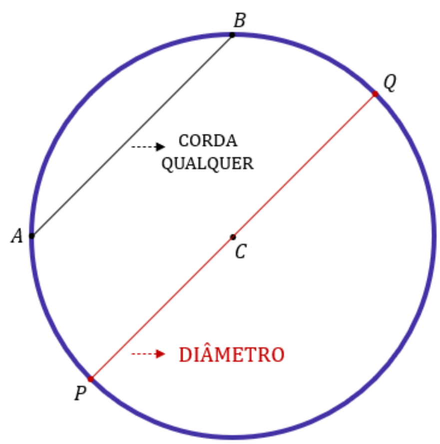


Raio, Diâmetro e Cordas

Quando estamos falando do raio (R) de uma circunferência, estamos falando da **distância entre seus pontos e o centro**. Por sua vez, corda é o segmento de reta que une dois pontos quaisquer de uma circunferência.

Acontece que **quando essa corda passa pelo centro da circunferência**, **nós a chamamos de diâmetro**. Para um melhor entendimento, vamos dar uma olhada nas figuras abaixo!

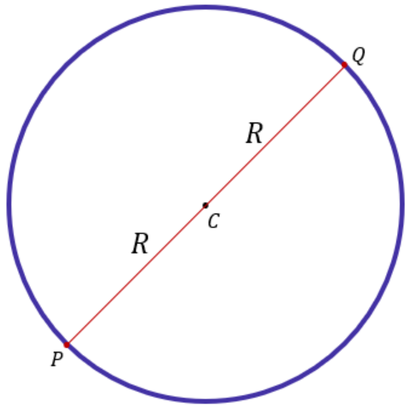




A figura de esquerda ilustra **o raio**. É exatamente a distância entre o centro e um ponto da circunferência. Na situação retratada, chamamos esse ponto de D. Já na circunferência da direita, quero mostrar pra você a diferença entre o diâmetro e uma corda qualquer.

Pessoal, para ser diâmetro, **o segmento de reta precisa passar pelo centro da circunferência**. Caso não passe (como o segmento AB), teremos uma corda. É verdade que o diâmetro não deixa de ser uma corda, mas é uma "corda especial", pois ela **é a corda de maior comprimento**!

Se olharmos com atenção para a figura, vemos que o comprimento do diâmetro (ou simplesmente diâmetro a partir de agora) vale exatamente **duas vezes o raio**. Por esse motivo, escrevemos que:



$$\boxed{D = 2R}$$

RESUMINDO

Raio: distância do centro até um ponto da circunferência.

Corda: segmento de reta que liga dois pontos quaisquer da circunferência.

Diâmetro: corda que passa pelo centro da circunferência. Mede o dobro do raio (2R).

(PREF. CHÃ PRETA/2015) O segmento de reta que une dois pontos de uma circunferência é chamado
A) arco.
B) raio.
C) setor.
D) corda.
E) diâmetro.

Comentários:
Questão rápida para testarmos o que acabamos de ver. Na teoria, dissemos que:

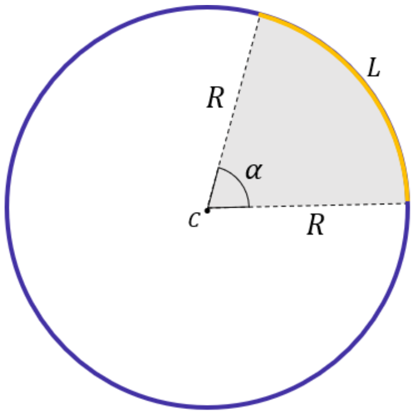
Corda: segmento de reta que liga dois pontos quaisquer da circunferência.

Alguém poderia ter dúvidas sobre a possibilidade desse segmento ser um diâmetro. Note que **o enunciado não fala se o segmento passa pelo centro**. Dessa forma, não podemos garantir que ele seja o diâmetro.

Gabarito: LETRA D

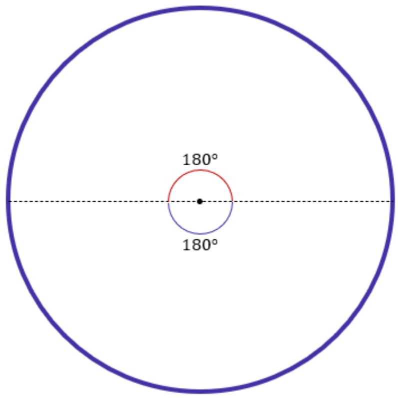
Setores

Um setor de circunferência corresponde à famosa **fatia de pizza**! Observe a figura abaixo.



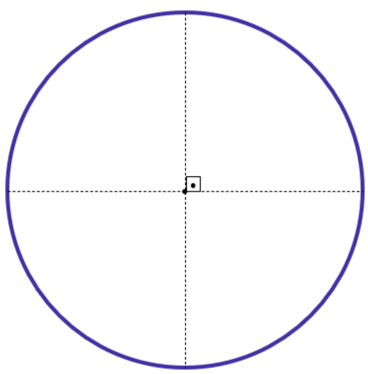
Todo setor possui um ângulo central (α). Além disso, a borda da pizza (destacada de amarelo) possui um comprimento L. É o que chamamos de comprimento do arco. **Esse comprimento L depende tanto do ângulo central $(\boldsymbol{\alpha})$ como do raio $(\boldsymbol{R})$**.

Aprenderemos a calculá-lo em breve. Antes disso, vamos aprender a calcular α. Para isso, imagine que você recebeu uma pizza enorme e vai dividi-la com um colega. Você corta ao meio:



Veja que cada setor ficou com um ângulo central de 180°.

Situação análoga ocorreria se dividíssemos a pizza em 4 fatias idênticas.



Quando temos quatro setores idênticos, o ângulo central de cada um deles é igual a **um quarto do ângulo total da circunferência**, isto é,

$$\alpha = \frac{360°}{4} \quad \rightarrow \quad \alpha = 90°$$

HORA DE PRATICAR!

(CM VINHEDO/2020) Uma pizza de 8 pedaços faz cada fatia ter 45° de ângulo. Se quiser dividir em 9 pedaços, qual deve ser o ângulo da fatia?

A) 40°

B) 42°

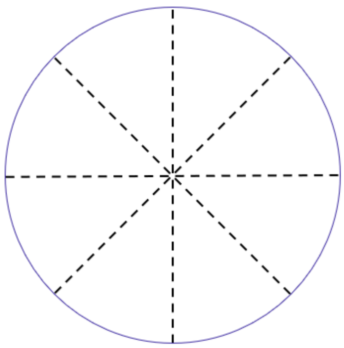
C) 50°

D) 60°

E) 45°

Comentários:

Pessoal, **a pizza tem o formato de uma circunferência (normalmente, rsrs)**. Quando dividimos ela em 8 pedaços, ficamos com uma situação parecida com a mostrada a seguir:



Cada fatia corresponde a um setor de circunferência cujo ângulo é a oitava parte de 360°. Afinal, aprendemos que **uma circunferência tem 360°** (ou 2π rad).

$$\alpha = \frac{360°}{8} = 45°$$

Se dividirmos a pizza em 9 pedaços, podemos encontrar o ângulo central de cada setor dividindo **360° por 9**.

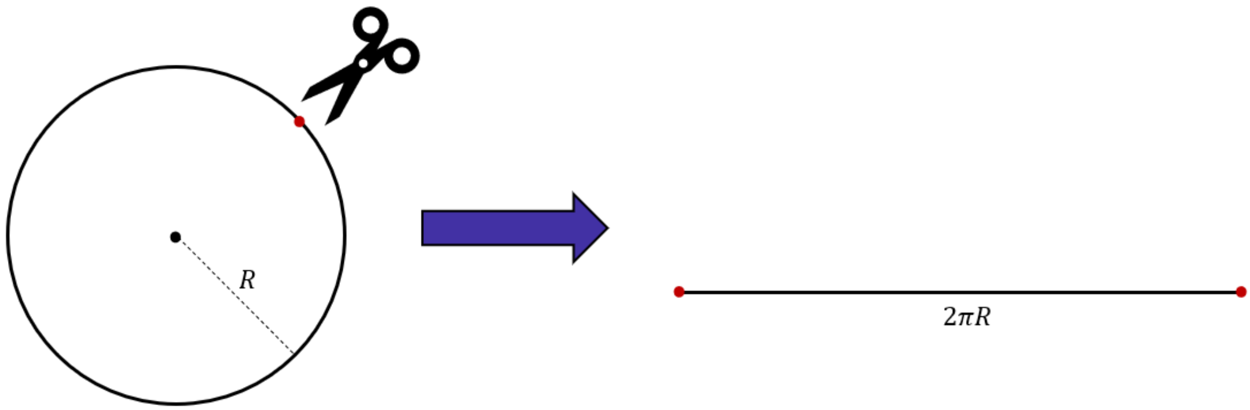
$$\alpha = \frac{360°}{9} = 40°$$

Gabarito: LETRA A.

Beleza, tudo bem até aqui né, pessoal? Vimos um pouco da definição de circunferência, de raio, de corda, de diâmetro e de setores. Espero que tudo esteja fazendo sentido, sempre voltaremos a falar deles! A medida que formos introduzindo novos conceitos, vamos ganhando mais maturidade e voltaremos a comentar aspectos adicionais desses elementos! Agora, continuando!

Comprimento de uma Circunferência

Lembra que no tópico passado eu falei sobre comprimento do arco? Que era tipo a medida da borda da fatia da pizza. Aqui, no comprimento da circunferência, estamos nos referindo **a medida da borda de toda a pizza** e não apenas da fatia! *Eita, tanta pizza que já tá dando fome! (rsrs).* Existe uma figura que eu gosto bastante para explicar o comprimento da circunferência, veja:

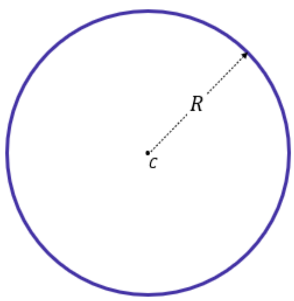


Ficou um pouco melhor de visualizar? Para tentar explicar de uma outra forma, imagine uma formiga no ponto vermelho, onde a tesoura vai cortar! **A distância que ela andaria para completar a volta** (andando apenas sobre a linha preta) é exatamente igual ao comprimento da circunferência (C). Esse valor é dado por uma fórmula bem conhecida que já adiantei um pouco na imagem acima, anota aí!

$$C = 2\pi R$$

HORA DE PRATICAR!

(CM Orizânia/2020) A figura a seguir ilustra a arena de um campeonato de artes marciais, que possui o formato circular e diâmetro de 8 m.



A medida “R” é denominada “raio” e tem sua medida equivalente à metade do diâmetro. Para calcular o comprimento “C” da circunferência, utiliza-se a fórmula: $C = 2\pi R$, em que πvale, aproximadamente, 3,14. O valor aproximado do comprimento da arena citada acima é de:

A) 12,56 m.

B) 25,12 m.

C) 50,24 m.

D) 100,48 m.

E) 200,96 m.

Comentários:

Questão para aplicarmos a fórmula que acabamos de ver! Devemos ter o cuidado de perceber que o enunciado deu o valor do diâmetro (D) e não do raio (R). Lembre-se:

$$D = 2R \quad \rightarrow \quad R = \frac{D}{2} \quad \rightarrow \quad R = \frac{8}{2} \quad \rightarrow \quad R = 4\,m$$

Se a arena tem diâmetro de 8 metros, então seu raio será metade disso, isto é, 4 metros. Com o raio, já conseguimos calcular o comprimento da circunferência.

$$C = 2\pi R \quad \rightarrow \quad C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 \quad \rightarrow \quad C = 25{,}12\,m$$

Gabarito: LETRA B.

(PREF. C DOS COQUEIROS/2019) O carro de seu Antônio tem uma roda com 80 centímetros de diâmetro. Em certa viagem, seu Antônio totalizou 7.300 voltas em cada roda. Quantos quilômetros foram percorridos nesta viagem?

A) 18,3 km

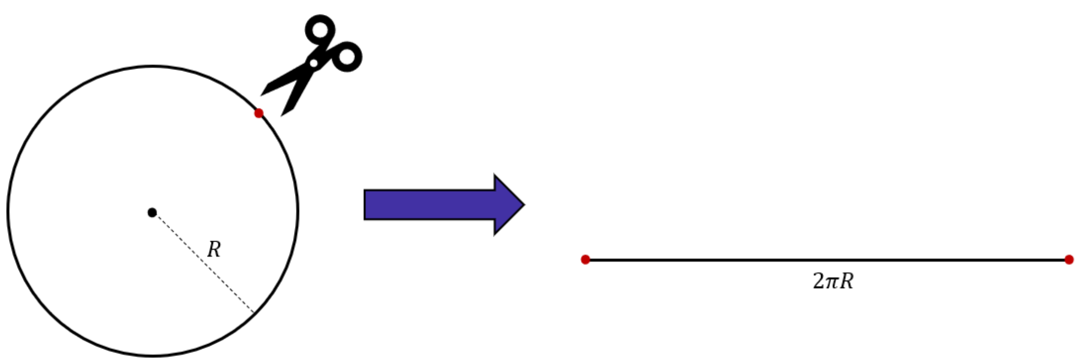
B) 36,7 km

C) 13,7 km

D) 18,8 km

Comentários:

Esse é um tipo de questão bem clássica sobre comprimento de circunferência.



Quando o pneu dá uma volta, ele anda exatamente u**ma distância equivalente ao comprimento da circunferência**, isto é, $2\pi R$. Se o pneu tem um diâmetro de 80 cm, então sabemos que o raio é 40 cm (**lembre-se que o raio é sempre <u>metade</u> do diâmetro**). A distância que o carro percorrerá quando o pneu der uma volta será dada por:

$$C = 2\pi R \quad \rightarrow \quad C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 40 \quad \rightarrow \quad C = 251{,}2\ cm$$

Logo, já sabemos que **em uma volta o carro anda $251,2\ cm = 2,512\ metros$**. Para achar quanto o carro anda após 7.300 voltas, devemos fazer uma *regra de três simples*.

$$1\ volta \longleftrightarrow 2{,}512\ metros$$
$$7.300\ voltas \longleftrightarrow x\ metros$$

Podemos multiplicar cruzado.

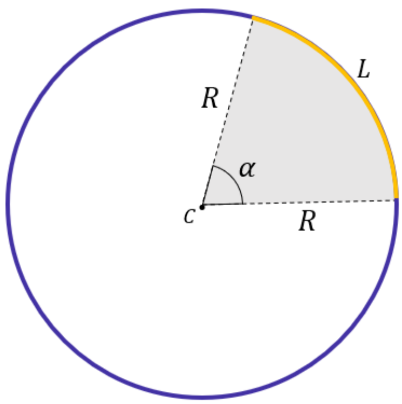
$$1 \cdot x = 7300 \cdot 2{,}512 \quad \rightarrow \quad x = 18.337{,}6\ metros$$

Lembre-se que **1 km é equivalente a 1.000 metros**, assim:

$$x = 18.337{,}6\ metros \cong 18{,}3\ km$$

Gabarito: LETRA A.

Agora que sabemos calcular o comprimento de uma circunferência, podemos fazer uma regra de três simples para achar o comprimento do arco. Voltemos para a figura do setor.



Ora, se quando temos uma circunferência inteira (que possui 360°), o comprimento dela é $2\pi R$, então um arco de ângulo central α tem comprimento L.

$$360° \longleftrightarrow 2\pi R$$
$$\alpha \longleftrightarrow L$$

Multiplicando cruzado.

$$L = 2\pi R \cdot \left(\frac{\alpha}{360°}\right)$$

Essa é a expressão para quando **estamos usando o ângulo central em graus**!! Caso você esteja usando α em radianos, devemos usar 2π na regra de três ao invés de 360°.

$$2\pi \longleftrightarrow 2\pi R$$

$$\alpha \longleftrightarrow L$$

Multiplicando cruzado.

$$L = \alpha \cdot \mathrm{R}$$

Na minha opinião, a fórmula desse jeito é bem mais interessante. Veja que o comprimento do arco L é o **produto do ângulo central (em radianos) pelo raio**. Quando o ângulo central é igual 2π, note que a expressão vira a fórmula do comprimento da circunferência. *Agora, vamos praticá-la?!*

HORA DE PRATICAR!

(PREF. BATAGUASU/2021) Se um arco de 120° de um dado círculo tem comprimento de 8π cm, o seu raio tem comprimento:

A) 2π

B) 12 cm

C) 2 cm

D) 32 cm

Comentários:

Pessoal, veja que ele deu o ângulo em graus (120°) e o comprimento do arco (8π). A pergunta que ele faz é: qual é o raio? Ora, se ele deu o ângulo em graus, podemos usar a fórmula:

$$L = 2\pi R \cdot \left(\frac{\alpha}{360°}\right)$$

Do enunciado: $\alpha = 120°$ e $L = 8\pi$ cm. Vamos encontrar R.

$$8\cancel{\pi} = 2\cancel{\pi} R \cdot \left(\frac{120°}{360°}\right) \quad \to \quad 4 = R \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \quad \to \quad R = 12 \text{ cm}$$

Gabarito: LETRA B.

Área de uma Circunferência

Quando calculamos a área de uma figura plana, estamos tentando **quantificar o tamanho da região delimitada por ela**. Pode ser um conceito meio abstrato, mas sempre usamos no dia-a-dia. Se conhecemos o raio da circunferência, podemos calcular sua área.

$$A = \pi R^2$$

Sugiro muito que guardem essa fórmula no coração. Além disso, a dica suprema é: **faça muitos exercícios** que envolvam cálculos de áreas de circunferência. Dessa forma, tenho certeza que ela entrará na "massa do sangue".

(PREF. MOSTARDAS/2020) Quanto mede a circunferência em cm e a área em cm², nessa ordem, de um círculo cujo diâmetro é 10 cm? (utilize $\pi = 3{,}14$)
A) 62,40 e 314.
B) 31,40 e 78,5.
C) 15,70 e 34,25.
D) 7,85 e 17,12.

Comentários:
Note que ele deu o diâmetro da circunferência (10 cm). Lembre-se que **o raio é metade do diâmetro**. Logo,

$$R = 5 \text{ cm}$$

Primeiro vamos calcular o comprimento da circunferência e, depois, a área.

- Comprimento da Circunferência (C)

$$C = 2\pi R \quad \rightarrow \quad C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \quad \rightarrow \quad C = 31{,}4 \text{ cm}$$

- Área (A)

$$A = \pi R^2 \quad \rightarrow \quad A = 3{,}14 \cdot 5^2 \quad \rightarrow \quad A = 3{,}14 \cdot 25 \quad \rightarrow \quad A = 78{,}5 \text{ cm}$$

Gabarito: LETRA B.

(PM-SP/2018) Utilizando-se para π o valor aproximado de 3,14, o perímetro de uma região plana em forma de círculo é de aproximadamente 63 m. Dessa forma, das alternativas a seguir, a que apresenta o valor mais aproximado para a área dessa região, em metros quadrados, é
A) 305.
B) 315.

C) 325.
D) 335.
E) 345.

Comentários:
Pessoal, perímetro de um círculo é uma maneira diferente de falar comprimento de circunferência (rsrs). Logo, quando ele diz que o perímetro é de aproximadamente 63 metros, **ele está dando o comprimento da circunferência**. Tendo essa informação, podemos encontrar o raio.

$$C = 2\pi R \quad \rightarrow \quad R = \frac{C}{2\pi} \quad \rightarrow \quad R = \frac{63}{2 \cdot 3{,}14} \quad \rightarrow \quad R = \frac{63}{6{,}28} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{R \cong 10\ metros}$$

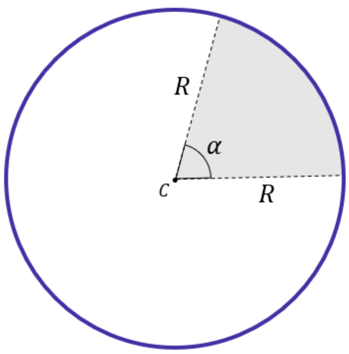
Com **o raio encontrado**, podemos usar a fórmula da área:

$$A = \pi R^2 \quad \rightarrow \quad A = 3{,}14 \cdot 10^2 \quad \rightarrow \quad A = 3{,}14 \cdot 100 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A = 314\ m^2}$$

Veja que a área que mais se aproxima do resultado é 315 m², na letra B.

Gabarito: LETRA B.

Agora que sabemos calcular a área de uma circunferência, podemos voltar e calcular a área de um setor (a famosa fatia da pizza)!



Imagine que queremos **calcular a área do setor** destacado acima. *Como faríamos?* Tem duas maneiras, galera. Ou decoramos a fórmula, ou usamos uma **regra de três simples** para deduzi-la. Para uma circunferência completa (que possui **360° ou 2π rad**), a área é πR^2. Assim,

$$2\pi \longleftrightarrow \pi R^2$$

$$\alpha \longleftrightarrow A_{setor}$$

Multiplicando cruzado, chegamos a:

$$A_{setor} = \frac{\alpha R^2}{2}$$

Uma observação muito importante: para usar a fórmula acima, **α deve estar em radianos**! Caso prefira, podemos fazer a regra de três utilizando 360°.

$$360° \longleftrightarrow \pi R^2$$

$$\alpha \longleftrightarrow A_{setor}$$

Assim,

$$A_{setor} = \left(\frac{\alpha}{360°}\right)\pi R^2$$

Já a fórmula acima é para quando **α estiver em graus**. Note que se você lembra da fórmula da área da circunferência, para obter a fórmula da área do setor, basta utilizarmos uma regra de três. Você não precisa "ocupar o HD" com mais uma coisa! Fique frio!

(PREF. JÁU/2019) Supondo-se que certa pizza no formato circular com perímetro de 94,2 cm foi cortada em três pedaços de mesmo tamanho cada. Sendo assim, assinalar a alternativa que apresenta a área de cada pedaço dessa pizza: (usar: $\pi = 3{,}14$)

A) 31,4 cm²

B) 188,4 cm²

C) 235,5 cm²

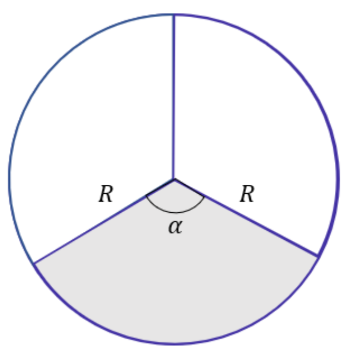
D) 376,8 cm²

Comentários:

Sempre tenham em mente que perímetro da circunferência é o mesmo que o seu comprimento! Assim, se o enunciado falou o perímetro, podemos encontrar o raio dessa pizza!

$$C = 2\pi R \quad \rightarrow \quad R = \frac{C}{2\pi} \quad \rightarrow \quad R = \frac{94{,}2}{2 \cdot 3{,}14} \quad \rightarrow \quad R = \frac{94{,}2}{6{,}28} \quad \rightarrow \quad R = 15 \text{ cm}$$

Agora que temos o raio, observe que a pizza foi dividida em três pedaços iguais.



Para descobrir o ângulo central, devemos dividir 360° por 3.

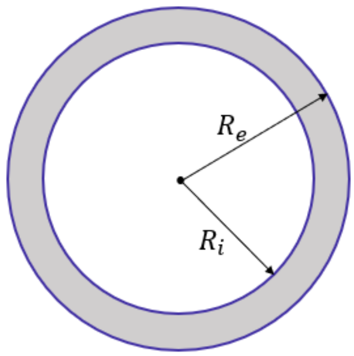
$$\alpha = \frac{360°}{3} \quad \rightarrow \quad \alpha = 120°$$

Com o ângulo central e o raio, podemos usar a fórmula que deduzimos para achar a área do setor.

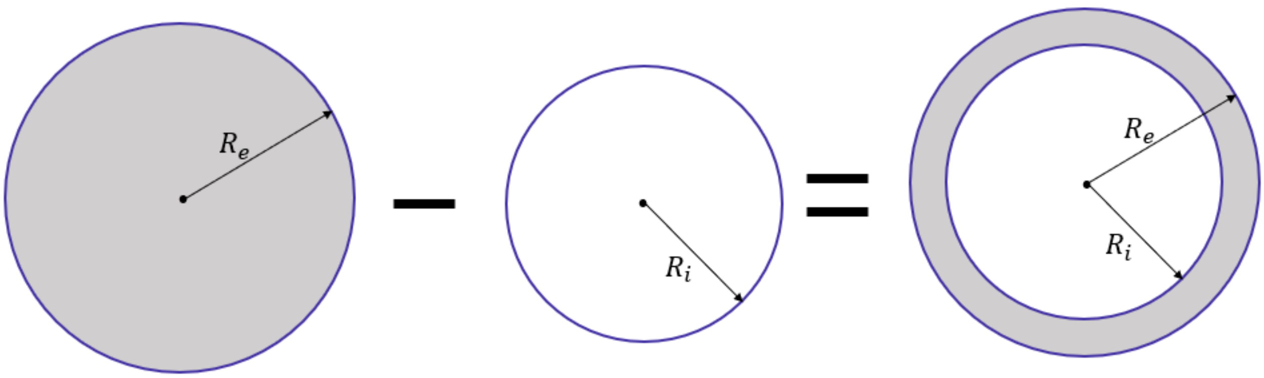
$$A_{setor} = \left(\frac{\alpha}{360°}\right)\pi R^2 \quad \rightarrow \quad A_{setor} = \left(\frac{120°}{360°}\right) \cdot 3{,}14 \cdot 15^2 \quad \rightarrow \quad A_{setor} = 235{,}5 \text{ cm}^2$$

Gabarito: LETRA C.

Para finalizar essa parte de circunferência, gostaria de comentar com vocês sobre **a área de uma coroa**! É um tipo de problema envolvendo áreas de circunferências bem comum! Por isso, é bom estarmos atentos. Imagine a seguinte situação:



A região destacada acima é o que chamamos de **coroa circular**. *Como fazemos para calcular sua área?* Note que temos uma **circunferência externa de raio R_e** e uma **circunferência interna de raio R_i**. Podemos esquematizar a situação da seguinte forma:

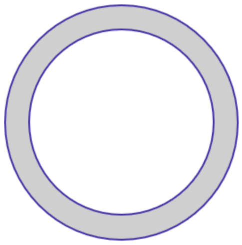


Assim, para calcular a área da coroa, devemos subtrair a área do círculo maior (externo) da área do círculo menor (interno), tudo bem?! Assim,

$$A_{coroa} = A_{externo} - A_{interno} \quad \rightarrow \quad A_{coroa} = \pi R_e^2 - \pi R_i^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{coroa} = \pi\left(R_e^2 - R_i^2\right)}$$

HORA DE PRATICAR!

(PREF. JUIZ DE FORA/2016) Na figura a seguir, temos dois círculos concêntricos, tais que seus raios medem 4 cm e 3 cm. Considerando $\pi = 3$ a área da região sombreada nessa figura é igual a



A) 48 cm²
B) 15 cm²
C) 27 cm²
D) 6 cm²
E) 21 cm²

Comentários:
Questão para calcular a área da coroa! Vamos lá! Primeiro, identificando as informações do enunciado:

$$\pi = 3 \qquad ; \qquad R_e = 4 \text{ cm} \qquad ; \qquad R_i = 3 \text{ cm}$$

Assim,

$$A_{coroa} = A_{externo} - A_{interno} \quad \rightarrow \quad A_{coroa} = \pi R_e^2 - \pi R_i^2 \quad \rightarrow \quad A_{coroa} = 3 \cdot 4^2 - 3 \cdot 3^2$$

$$A_{coroa} = 48 - 27 \quad \rightarrow \quad A_{coroa} = 21 \text{ cm}^2$$

Gabarito: LETRA E.

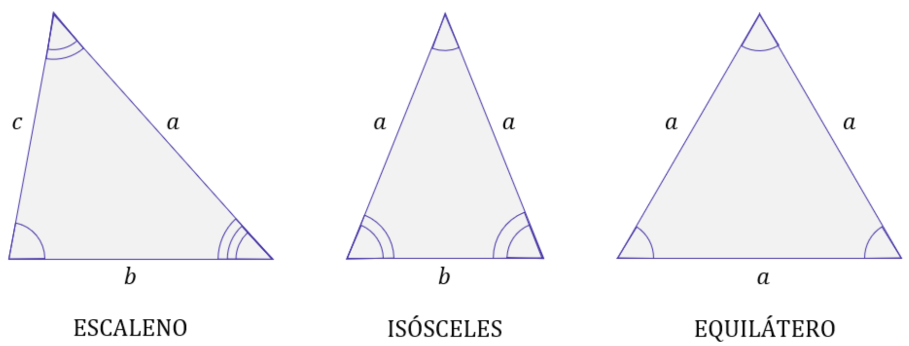
Triângulos

Agora falaremos um pouco sobre os triângulos. De modo simplificado, podemos definir um triângulo como uma **figura plana formada por três segmentos de reta**. Acontece que esses segmentos de reta não são dispostos de qualquer maneira. Eles devem formar três lados e três ângulos bem definidos, tudo bem?

Assim como na circunferência, nesse tópico falaremos sobre o perímetro e áreas, mas tudo no seu devido tempo! Primeiro, devemos aprender **quais os tipos de triângulo existem** e suas características. Vamos?!

Classificações

Quando estamos olhando apenas para o lado, podemos classificar os triângulos de três maneiras.

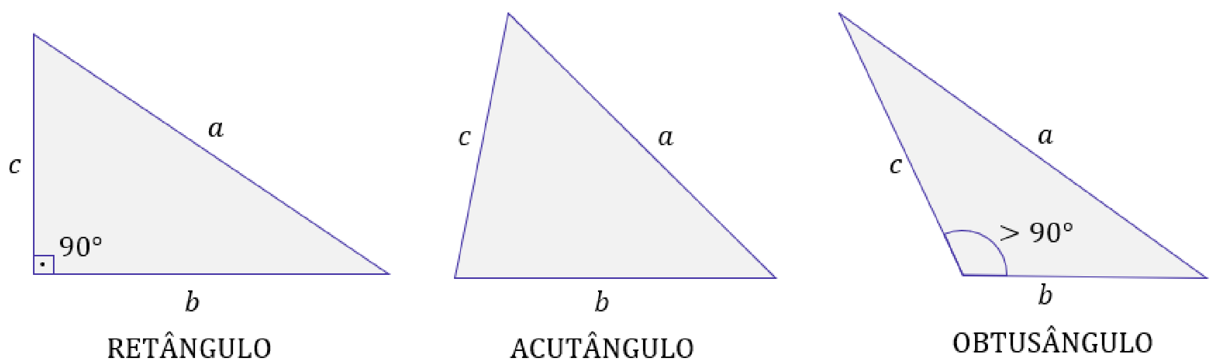


- **Escaleno:** todo triângulo que possui os **três lados distintos**! $a \neq b \neq c$. Como consequência, os ângulos opostos a cada um desses lados também serão diferentes.

- **Isósceles:** triângulo que possui **dois lados iguais**. Os ângulos opostos a esses lados também serão idênticos.

- **Equilátero:** triângulo com **todos os lados iguais**. Assim, todos os ângulos internos desse tipo de triângulo também são congruentes, medindo exatamente 60°.

Já quando estamos olhando para os ângulos internos, podemos classificar os triângulos da seguinte forma:



- **Retângulo: um dos ângulos do triângulo é um <u>ângulo reto</u>, isto é, de 90°**. Talvez, esse é o triângulo mais comum em provas. Afinal, é nele que utilizamos o famoso "Teorema de Pitágoras". Estudaremos esse triângulo com mais detalhes em breve.

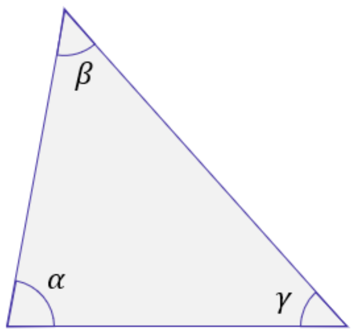
- **Acutângulo: todos os ângulos do triângulo são <u>agudos</u>**, isto é, maiores que 0° e menores que 90°.

- **Obtusângulo: um dos ângulos do triângulo é um <u>ângulo obtuso</u>**, isto é, maior que 90° e menor que 180°.

Ângulos Internos e Externos

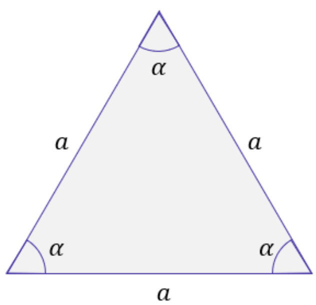
Feito esse parêntese para o estudo dos triângulos retângulos, vamos voltar a analisar os triângulos em geral. Pessoal, guardem aí com vocês o seguinte: **a soma dos ângulos <u>internos</u> de um triângulo é sempre 180°.**

A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°!



$$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$$

Lembre-se que no triângulo equilátero, todos os lados são iguais e que, com isso, temos que **todos os ângulos internos também são**! Em uma imagem, podemos representar assim:

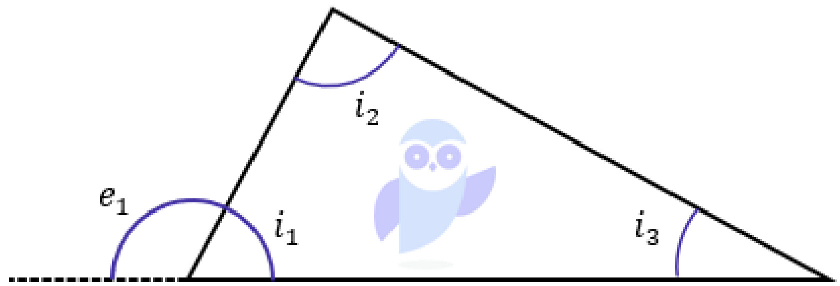


Como **a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°**, temos que:

$$\alpha + \alpha + \alpha = 180° \quad \rightarrow \quad 3\alpha = 180° \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{180°}{3} \quad \rightarrow \quad \alpha = 60°$$

É por esse motivo que, sempre que estamos trabalhando com triângulos equiláteros, qualquer um de seus **ângulos internos <u>valerá 60°</u>**. *Tudo certo até aqui?!*

Por vezes, também falamos de **ângulos externos**. Existe um resultado bastante interessante que podemos obter tendo em mente o que discutimos até aqui. Veja a figura abaixo.



i_1, i_2 e i_3 representam os três ângulos internos do triângulo e e_1 é um ângulo externo. Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Assim,

$$i_1 + \boldsymbol{i_2} + \boldsymbol{i_3} = 180° \quad (1)$$

Além disso, se você olhar bem para o ângulo interno 1 (i_1) e para o ângulo externo 1 (e_1), é possível ver que eles formam um **ângulo raso**. Dessa forma,

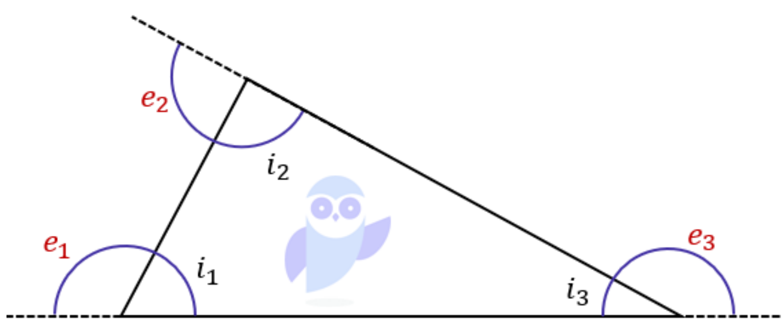
$$i_1 + \boldsymbol{e_1} = 180° \quad (2)$$

Quando comparamos as duas expressões, percebemos que a parte vermelha em (1) deve ser igual a parte vermelha em (2).

$$e_1 = i_2 + i_3$$

Conclusão: em todo triângulo, **a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele**.

Já que estamos falando de ângulos externos, qual seria a soma dos ângulos externos de um triângulo?



Lembre-se que um ângulo externo em um triângulo sempre será igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele. Assim, podemos escrever:

$$e_1 = i_2 + i_3$$

$$e_2 = i_1 + i_3$$

$$e_3 = i_1 + i_2$$

Somando as três equações acima membro a membro (e chamando essa soma de S_e), ficamos com:

$$S_e = e_1 + e_2 + e_3 = (i_2 + i_3) + (i_1 + i_3) + (i_1 + i_2)$$

Reorganizando:

$$S_e = e_1 + e_2 + e_3 = (i_1 + i_2 + i_3) + (i_1 + i_2 + i_3)$$

Pessoal, $i_1 + i_2 + i_3$ é a soma dos ângulos internos. Quanto vale essa soma?! Oras, vale 180°!!

$$S_e = e_1 + e_2 + e_3 = 180° + 180°$$

$$S_e = e_1 + e_2 + e_3 = 360°$$

Note, portanto, que **a soma dos ângulos <u>externos</u> de um triângulo vale 360°.** No final da nossa aula, veremos que podemos generalizar esse resultado para qualquer polígono convexo. No entanto, nesse momento, quero que você guarde apenas que:

A soma dos ângulos <u>externos</u> de um triângulo vale 360°.

HORA DE PRATICAR!

(EEAR/2020) Em relação aos triângulos, marque V para verdadeiro e F para falso. Em seguida, assinale a alternativa com a sequência correta.

( ) Triângulo acutângulo é todo triângulo que possui dois lados agudos.
( ) Em todo triângulo, a soma das medidas dos ângulos externos é igual a 360°.
( ) Triângulo obtusângulo é todo triângulo que possui um dos ângulos internos obtuso.
( ) Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

A) F - V - V - V
B) V - F - F - F
C) F - F - F - V
D) V - V - V - F

Comentários:

(**FALSO**) Triângulo acutângulo é todo triângulo que possui dois lados agudos.

Um triângulo acutângulo possui todos os seus três ângulos agudos. Caso apenas dois ângulos sejam agudos, não conseguimos garantir que é um triângulo acutângulo. Poderá ser um triângulo retângulo ou mesmo um obtusângulo.

(**VERDADEIRO**) Em todo triângulo, a soma das medidas dos ângulos externos é igual a 360°.

Pessoal, essa afirmação está corretíssima. Quando formos estudar polígonos mais a fundo, veremos que a soma dos ângulos externos de qualquer polígono convexo será 360°.

(**VERDADEIRO**) Triângulo obtusângulo é todo triângulo que possui um dos ângulos internos obtuso.

Também verdade, galera. É exatamente a definição de triângulo obtusângulo. Lembre-se sempre que um triângulo somente poderá ter um único ângulo obtusângulo. Esse fato ocorre de a soma dos ângulos internos de um triângulo ser sempre 180°.

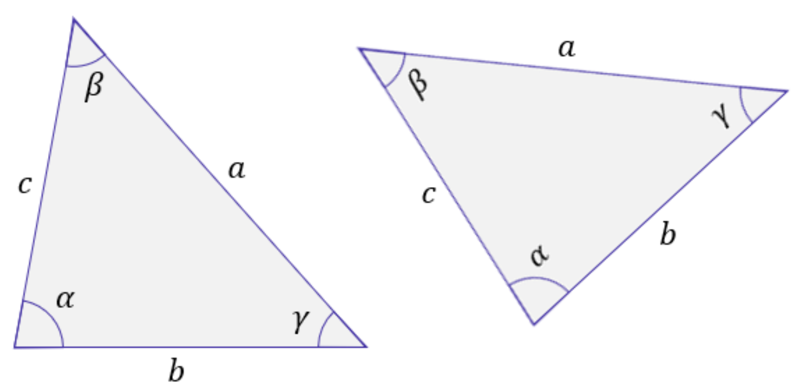
(**VERDADEIRO**) Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Correto demais! Fizemos a demonstração na teoria!

Gabarito: LETRA A.

Congruência e Semelhança de Triângulos

Dois triângulos são congruentes quando eles são iguais. Veja o par de triângulos abaixo.



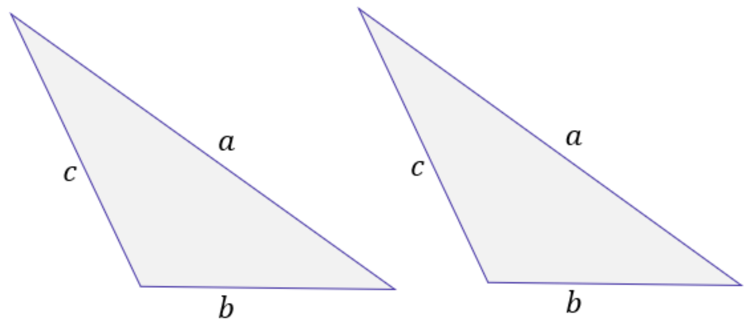
Note que **os dois triângulos são exatamente iguais**, um apenas está rotacionado com relação ao outro, podendo parecer que são diferentes. No entanto, se algum texto está falando de triângulos congruentes, ele está falando de triângulos idênticos! **Mesmo lados, mesmo ângulos! Não muda nadinha**!

A pergunta agora é: precisamos saber *todos os lados e todos os ângulos, dos dois triângulos, para determinar que são congruentes?!* A resposta é: não! Nós podemos concluir sobre a congruência de dois triângulos apenas com alguns valores de lados e/ou ângulos.

Critérios de Congruência

1. Lado-Lado-Lado (LLL)

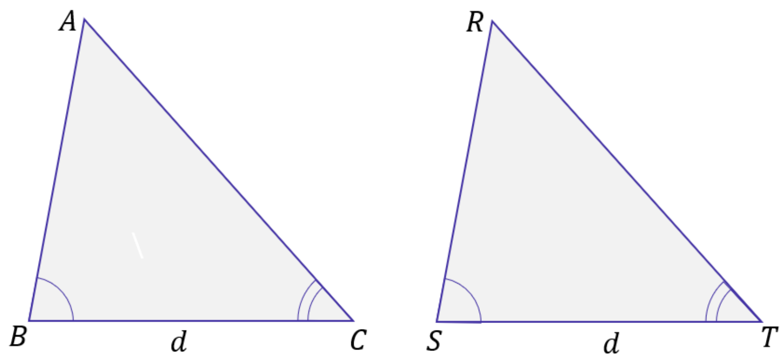
Se os dois triângulos possuírem os mesmos lados, então eles serão congruentes.



Esse critério nos diz que se os lados dos dois triângulos forem iguais, não precisamos nem olhar os ângulos. Só esse fato já nos garante que os dois são congruentes. Ok?!

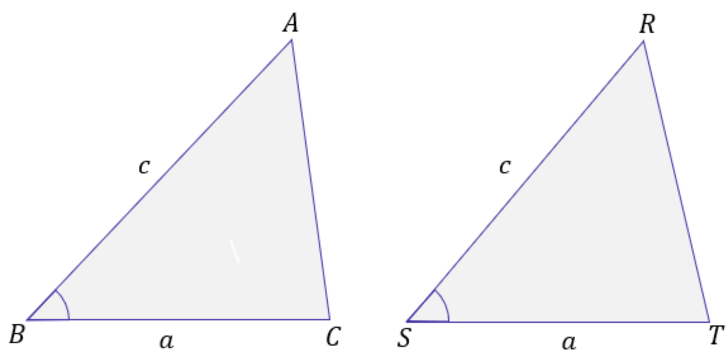
2. Ângulo-Lado-Ângulo (ALA)

Se dois triângulos possuem dois ângulos e o lado entre eles iguais, então os triângulos são congruentes.



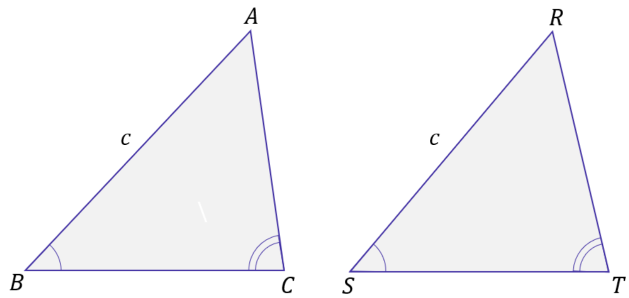
3. Lado-Ângulo-Lado (LAL)

Se dois triângulos possuem dois lados e o ângulo entre eles iguais, então os triângulos são congruentes.



4. Ângulo-Ângulo-Lado (AAL)

Se dois triângulos possuem dois ângulos e um lado oposto a um desses ângulos iguais, então os triângulos são congruentes.



Esses são os critérios mais importantes! Resumindo para vocês: **dois triângulos são congruentes quando eles são idênticos entre si (lados e ângulos iguais)**. Acontece que, não é preciso sabermos todos os lados nem todos os ângulos para concluir que dois triângulos são iguais.

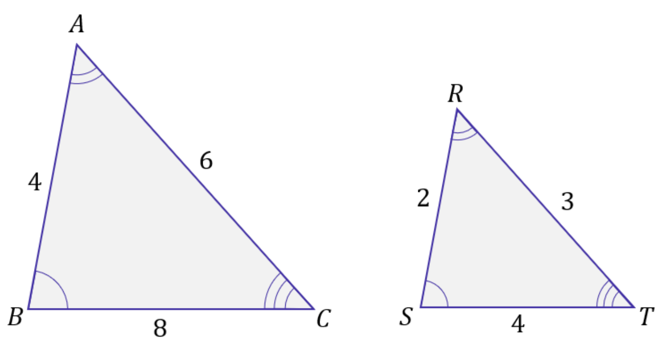
Quando utilizamos os critérios acima, podemos concluir pela congruência dos triângulos sabendo apenas algumas poucas informações. Tudo bem?! Na prática, **esse não é um conteúdo muito explorado em prova**. Em contrapartida, o tema de semelhança de triângulos despenca!! Vamos entrar de vez nesse assunto!

Semelhança de Triângulos

Pessoal, na semelhança de triângulos, vamos continuar com os três ângulos iguais. No entanto, os três lados devem ser proporcionais e não necessariamente iguais (como ocorre na congruência).

Triângulos Congruentes: ÂNGULOS E LADOS IGUAIS. **Triângulos Semelhantes:** ÂNGULOS IGUAIS E LADOS PROPORCIONAIS.

Veja um par de triângulos semelhantes.



Os triângulos acima são semelhantes. Eles possuem ângulos internos iguais e os lados são proporcionais. Note que o triângulo ABC possui lado sempre o dobro do lado correspondente no triângulo RST.

$$\frac{AB}{RS} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{BC}{ST} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\frac{AC}{RT} = \frac{6}{3} = 2$$

Chamamos esse "2" de razão de semelhança. Ele reflete a proporcionalidade entre os lados.

(PREF. PERUÍBE/2019) A respeito de polígonos semelhantes, analise as sentenças a seguir.
I. Se dois triângulos são semelhantes, então eles são congruentes.
II. Se dois triângulos possuem as medidas dos ângulos, respectivamente, proporcionais, então eles são semelhantes.
III. Se dois triângulos possuem as medidas dos ângulos, respectivamente, congruentes, então eles são semelhantes.
IV. Se dois triângulos possuem os lados, respectivamente, proporcionais, então eles são semelhantes.

As duas únicas afirmações verdadeiras são
A) I e II.
B) I e III.
C) I e IV.
D) II e IV.
E) III e IV.

Comentários:
I. Se dois triângulos são semelhantes, então eles são congruentes.
FALSO. Pessoal, **semelhança não implica congruência**. Dizer que dois triângulos são congruentes, significa dizer que esses dois triângulos são iguais (lados e ângulos). Por sua vez, na semelhança de triângulo, **apenas os ângulos são necessariamente iguais para os dois**.

II. Se dois triângulos possuem as medidas dos ângulos, respectivamente, proporcionais, então eles são semelhantes.
FALSO. Para ser semelhante, os ângulos dos dois triângulos devem ser iguais, enquanto os lados é que são proporcionais.

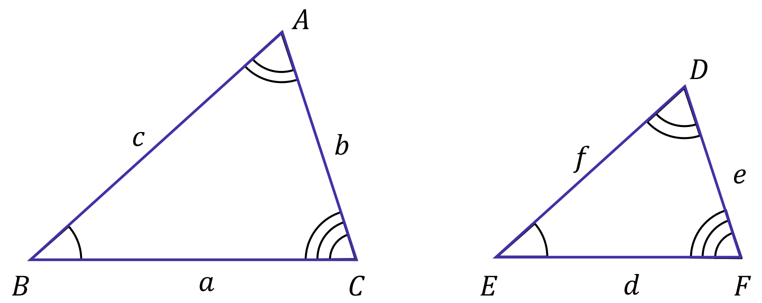
III. Se dois triângulos possuem as medidas dos ângulos, respectivamente, congruentes, então eles são semelhantes.
VERDADEIRO. Se as medidas dos ângulos são congruentes (iguais), então **os lados serão proporcionais e o triângulo será semelhante**.

IV. Se dois triângulos possuem os lados, respectivamente, proporcionais, então eles são semelhantes.
VERDADEIRO. Quando dois triângulos possuem os **três lados proporcionais**, eles são semelhantes. É o caso LLL que estudamos na teoria!

Gabarito: LETRA E.

Professor, estou entendendo que quando temos triângulos com ângulos iguais e lados proporcionais, eles serão semelhantes. Mas, para que serve isso?

Se você identificar que dois triângulos são semelhantes, então poderá estabelecer **uma relação entre os lados desse triângulo**. Observe a figura abaixo.



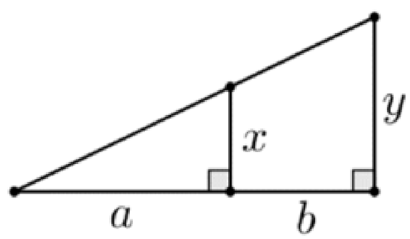
Galera, **ABC e DEF são triângulos semelhantes**. Com isso, sabemos que seus lados proporcionais. Por sabemos esse fato, podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k$$

Observe que sempre fazemos **a razão entre dois lados <u>correspondentes</u>**. Cuidado para não misturar tudo! Note que **"a" e "d" são opostos ao <u>mesmo ângulo</u>**, por isso, fazemos a razão a/d. Sugiro adotar essa forma de escrever as razões, para evitar confusão. Vamos ver na prática para entendermos melhor.

HORA DE
PRATICAR!

(IMBEL/2021) Considere a figura:



Sabe-se que a razão a/b é igual a 3⁄2. A razão x/y é igual a
A) 3/2
B) 2/3
C) 2/5
D) 3/5
E) 5/3

Comentários:
Questão que envolve semelhança de triângulos e um pouco de algebrismo!

O enunciado nos deu a razão a/b. Vamos escrever **"a" em função de "b"**:

$$\frac{a}{b}=\frac{3}{2} \qquad \rightarrow \qquad a=\frac{3b}{2} \qquad (1)$$

Iremos usar esse resultado daqui a pouco! Agora, vamos fazer **a semelhança** propriamente dita.

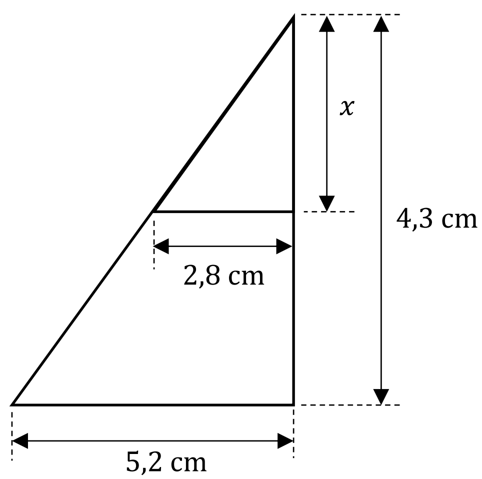
$$\frac{x}{y}=\frac{a}{a+b}$$

Vamos usar (1) na equação acima.

$$\frac{x}{y}=\frac{\frac{3b}{2}}{\frac{3b}{2}+b} \qquad \rightarrow \qquad \frac{x}{y}=\frac{\frac{3\cancel{b}}{\cancel{2}}}{\frac{5\cancel{b}}{\cancel{2}}} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\frac{x}{y}=\frac{3}{5}}$$

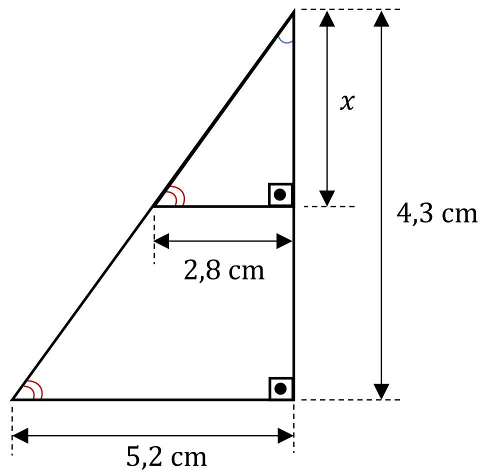
Gabarito: LETRA D.

(SAAE São Carlos/2019) Considere a figura a seguir.



O valor de x é, aproximadamente:
A) 0,8 cm
B) 1,5 cm.
C) 2,3 cm.
D) 2,9 cm.
E) 3,8 cm.

Comentários:
Pessoal, observe que **temos um triângulo retângulo menor e outro maior**. Eles são semelhantes. Como sabemos disso?! **Todos seus ângulos internos são ordenadamente iguais**! Confira na imagem a seguir:



Professor, então sempre que isso acontecer os triângulos serão semelhantes? Sim! A grande maioria das questões envolvem algum tipo de semelhança com triângulos retângulos. Então já fica esperto se cair algo parecido na sua prova! *Beleza! Entendi que são semelhantes, mas, e agora?!*

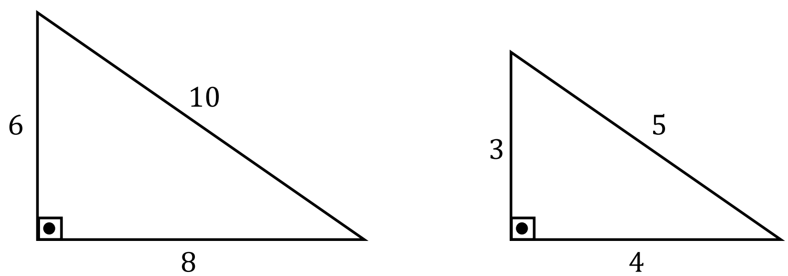
Ora, se são semelhantes, **seus lados são proporcionais** de forma que podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{x}{4{,}3}=\frac{2{,}8}{5{,}2} \quad \rightarrow \quad x\cong 2{,}31\text{ cm}$$

Pessoal, uma vez que você conseguisse identificar a semelhança entre os triângulos retângulos, a parte mais chata da questão vira fazer a "continha" acima. Ressalto a importância de não misturar os lados. Sempre faça a razão entre dois lados correspondentes, isto é, **dois lados que estão opostos ao mesmo ângulo**.

Gabarito: LETRA C.

Galera, os lados são proporcionais. Mas, e as áreas dos triângulos, também serão?! A resposta é sim. No entanto, **as áreas serão proporcionais ao quadrado da razão de semelhança**. Explico melhor.



Como identificar que esses triângulos são semelhantes? Percebendo que os lados são proporcionais.

$$\frac{10}{5}=\frac{8}{4}=\frac{6}{3}=2$$

Portanto, os triângulos são semelhantes e **a razão de semelhança é 2**.

Agora, sei que não estudamos como calcular a área de triângulo, portanto, não vou focar nesse cálculo, mas apenas no resultado. O triângulo retângulo maior tem área 24 e o menor, 6. Note que:

$$\frac{A_M}{A_m} = \frac{24}{6} \quad \rightarrow \quad \frac{A_M}{A_m} = 4 \quad \rightarrow \quad \frac{A_M}{A_m} = 2^2$$

A razão entre as duas áreas será igual a razão de semelhança que encontramos acima, **só que ao quadrado**. Esse resultado pode ser bastante útil, confira a questão abaixo.

ESTA CAI NA PROVA!

(PREF. SJC/2019) Um professor afirmou aos seus alunos que dois triângulo eram semelhantes, e propôs a eles que determinassem a razão de semelhança do maior para o menor triângulo, sabendo que a área do menor triângulo era de 13,5 unidades de área e a área do maior era de 121,5 unidades de área. A resposta correta esperada por esse professor era:

A) $\sqrt{3}$
B) 3
C) $3\sqrt{3}$
D) 9
E) $6\sqrt{3}$

Comentários:

Quando dois triângulos são semelhantes, **a razão de suas áreas é igual ao <u>quadrado</u> da razão de semelhança**. Conforme vimos na teoria:

$$\frac{A_M}{A_m} = k^2$$

O enunciado nos informou que $\boldsymbol{A_M = 121,5\ \mathrm{u.a.}}$ e $\boldsymbol{A_m = 13,5\ \mathrm{u.a.}}$. Vamos substituir na expressão para determinar o k.

$$\frac{121{,}5}{13{,}5} = k^2 \quad \rightarrow \quad k^2 = 9 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{k = 3}$$

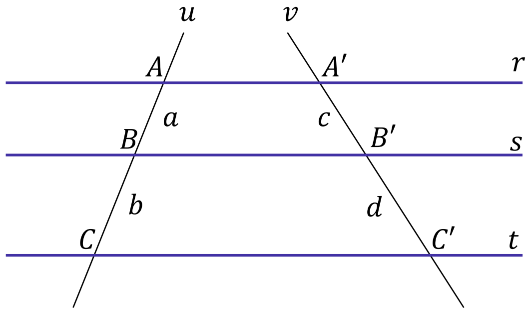
Gabarito: LETRA B.

Teorema de Tales

Vou tentar ser bem objetivo nesse ponto da matéria. O enunciado clássico do Teorema é o seguinte:

"Um feixe de retas paralelas determina, em duas retas transversais quaisquer, segmentos proporcionais."

Professor, é o quê? Vamos ver uma imagem!



u, v: são as retas **transversais** (que é toda reta que intercepta um feixe de retas paralelas);
r, s, t: são as retas **paralelas**.

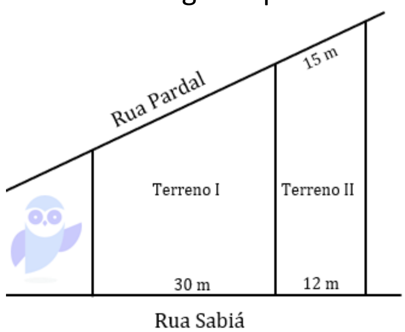
Sempre que conseguir identificar uma situação como acima, você poderá escrever que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

A demonstração desse fato **não tem um custo-benefício razoável**, portanto, nos limitaremos a aplicar o resultado comentado anteriormente, tudo bem? Para ilustrar, vamos ver uma questão.

HORA DE PRATICAR!

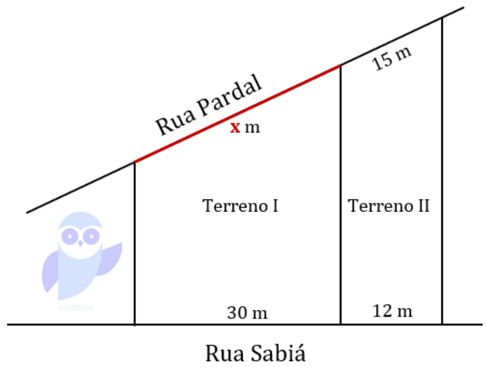
(PREF. OLÍMPIA/2019) Dois terrenos têm frente para a Rua Sabiá e para a Rua Pardal, como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à Rua Sabiá. A figura apresenta algumas medidas desses dois terrenos.



A medida de frente do terreno 1, à Rua Pardal, é
A) 32,5 m.
B) 33,0 m.
C) 37,5 m.
D) 40,0 m.
E) 42,0 m.

Comentários:

Essa é uma questão bem clássica de Teorema de Tales. Observe que temos um feixe de retas paralelas intersectando duas retas transversais (que representam as ruas). Assim, considerando que o enunciado pede a medida de frente do terreno 1, à Rua Pardal, então:



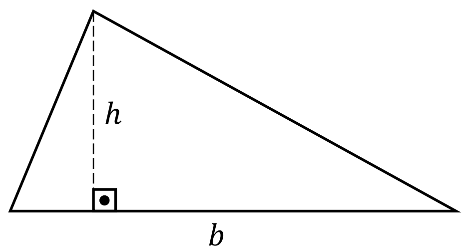
$$\frac{x}{15} = \frac{30}{12} \quad \rightarrow \quad x = \frac{450}{12} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 37,5\ m}$$

Gabarito: LETRA C.

Área de um Triângulo

Pessoal, esse é **um dos tópicos mais importantes dessa aula**. Há diversas maneiras de calcularmos a área de um triângulo. De acordo com as informações que tivermos, usaremos uma fórmula ou outra.

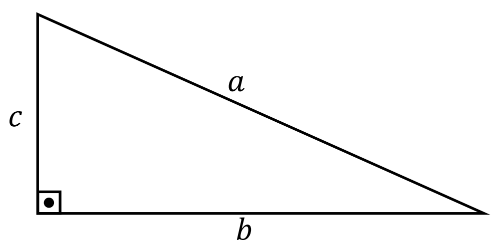
- Quando temos a base e a altura do triângulo.



"h" representa a medida da altura, enquanto **"b" representa a medida da base**. Quando tivermos essas informações, podemos calcular a área de um triângulo por meio da seguinte fórmula:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

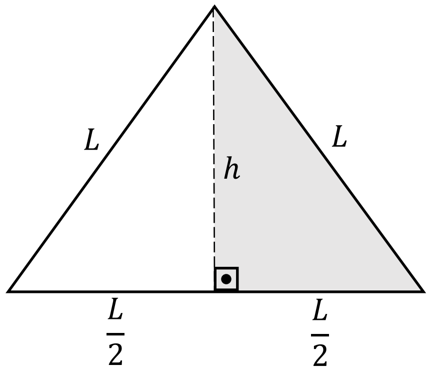
- **Quando o triângulo é retângulo**



Galera, perceba que quando o triângulo é retângulo, a altura relativa à base "b" é o próprio cateto "c". Assim,

$$A = \frac{b \cdot c}{2}$$

- Quando o triângulo é equilátero



Quando o triângulo é equilátero, **a altura relativa a qualquer um dos lados, vai sempre dividir esse lado <u>ao meio</u>**. Agora, observe o triângulo retângulo em destaque. Com o teorema de Pitágoras, podemos determinar a altura "h" em função do lado "L".

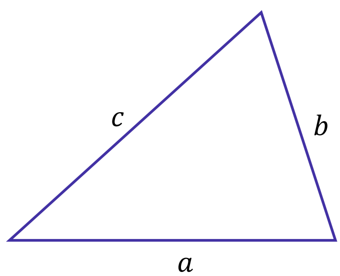
$$L^2 = h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad h^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} \quad \rightarrow \quad h^2 = \frac{3L^2}{4} \quad \rightarrow \quad h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

Com isso, podemos usar a fórmula que vimos anteriormente, substituindo o valor da altura "h" por esse que acabamos de encontrar.

$$A = \frac{bh}{2} \quad \rightarrow \quad A = \frac{L \cdot \left(\frac{L\sqrt{3}}{2}\right)}{2} \quad \rightarrow \quad A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

Portanto, observe que existe uma fórmula "pronta" para calcularmos a área de um triângulo equilátero. **Se você sabe apenas o lado, já pode calcular a área**. No entanto, na prática, você não precisa memorizá-la. Se conhece a fórmula $A = bh/2$ e o Teorema de Pitágoras, **poderá deduzi-la a qualquer tempo**.

- Quanto temos apenas os lados do triângulo.



Nessas situações, usaremos a famosa **<u>fórmula de Heron</u>**. Não é tão comum à sua cobrança em provas, mas é bom estarmos espertos. Quando você tiver todos os lados mas não sabe os ângulos nem as alturas, a fórmula abaixo resolve sua vida:

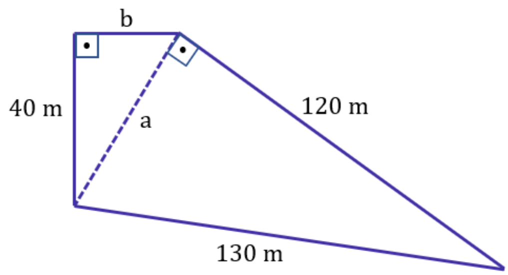
$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Não é uma fórmula muito amigável, eu sei. Sorte nossa que **ela cai muito pouco**. Aqui, o **"p" representa o semiperímetro**, que pode ser determinado por meio da fórmula abaixo!

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

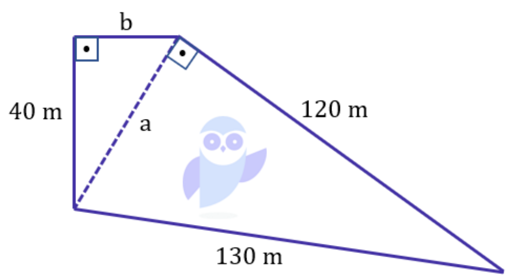
Peço que não se preocupe com a demonstração, pois **o custo benefício de fazê-la aqui é quase nulo**. Nessas horas, vamos tentar ser o mais prático e objetivo possível.

(PREF. CAMPINAS/2019) A praça de uma cidade foi construída a partir de dois terrenos, cada um deles com a forma de um triângulo retângulo, conforme a figura a seguir, com as respectivas medidas.



A área total dessa praça é igual a
A) 3800 m²
B) 4100 m²
C) 3950 m²
D) 4200 m²
E) 3600 m²

Comentários:
Sempre que observamos triângulos retângulos, uma coisa tem que vir a nossa mente: teorema de Pitágoras. Principalmente quando houver lados desse triângulo que não estão determinados.

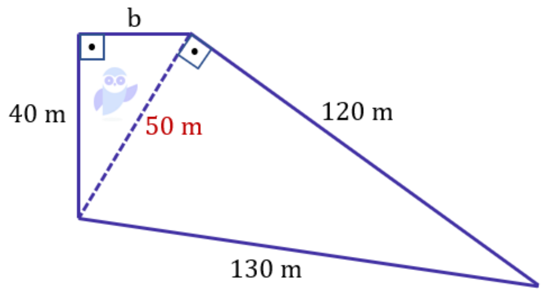


Concentre-se no triângulo que está envolvendo a coruja. Desconhecemos o cateto "a". Para determiná-lo, vamos usar o teorema de Pitágoras. Acompanhe.

$$a^2 + 120^2 = 130^2$$

$$a^2 + 14400 = 16900 \quad \rightarrow \quad a^2 = 16900 - 14400 \quad \rightarrow \quad a^2 = 2500 \quad \rightarrow \quad a = 50\ m$$

Com todos os lados determinados, vamos olhar para o outro triângulo.



No triângulo menor, também falta determinar um dos catetos. Aplicaremos mais uma vez o teorema de Pitágoras.

$$b^2 + 40^2 = 50^2 \quad \rightarrow \quad b^2 = 2500 - 1600 \quad \rightarrow \quad b^2 = 900 \quad \rightarrow \quad b = 30\ m$$

Pronto! Sabemos todos os lados de todos os triângulos! Agora, podemos calcular a área de cada um deles. Na teoria, aprendemos que a área de um triângulo retângulo é dada pelo produto dos catetos dividido por dois. Assim, para o triângulo maior, teremos:

$$A_M = \frac{120 \cdot 50}{2} \quad \rightarrow \quad A_M = 3.000\ m^2$$

Devemos fazer o mesmo cálculo para o triângulo menor,

$$A_m = \frac{30 \cdot 40}{2} \quad \rightarrow \quad A_m = 600\ m^2$$

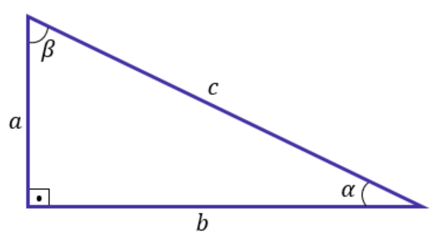
A área total da praça é exatamente a soma das áreas dos dois triângulos.

$$A = A_m + A_M \quad \rightarrow \quad A = 3.000 + 600 \quad \rightarrow \quad A = 3.600\ m^2$$

Gabarito: LETRA E.

Triângulo Retângulo

O triângulo retângulo é tão importante que estudaremos ele em separado! Lembrem-se que chamamos de triângulo retângulo qualquer triângulo que possua **um de seus ângulos igual a 90 graus** ou $\frac{\pi}{2}$ radianos.



- O lado c é chamado de **hipotenusa**. **Ele é o maior dos lados** e está oposto ao ângulo de 90°.
- Os lados **a e b são os catetos**.
    - Com relação ao ângulo α, a é o cateto oposto e b é o cateto adjacente.
    - Com relação ao ângulo β, b é o cateto oposto e a é o cateto adjacente.

Relações Trigonométricas - Seno, Cosseno e Tangente

Moçada, eu sei que essa é uma parte da trigonometria e por isso não vou me aprofundar muito, mas vale a pena você saber as seguintes relações trigonométricas para a sua prova de geometria plana!

- **Seno**

$$\text{sen }\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

- **Cosseno**

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

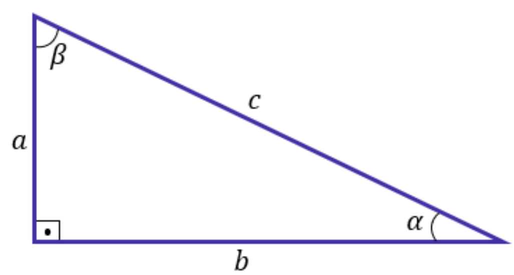
- **Tangente**

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

- **Relação Fundamental**

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Teorema de Pitágoras



O Teorema de Pitágoras é um grande clássico dos nossos estudos, não é verdade? Desde muito cedo, quando crianças, escutamos falar desse teorema. Vamos rever o que ele diz!

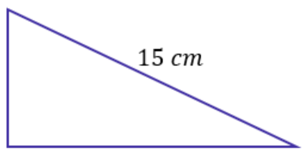
A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Matematicamente, podemos escrever:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

HORA DE PRATICAR!

(PREF. SANTIAGO DO SUL/2020) A figura abaixo demonstra um triângulo retângulo cujo seno vale 0,6. Determine, em metros, a medida do perímetro.



a) 36.
b) 3,6.
c) 0,36.
d) 0,036.
e) 0,0036.

Comentários:

O **perímetro é a soma de todos os lados**. A imagem do enunciado diz que a hipotenusa vale 15 cm e fornece o valor de um seno. Sabemos que:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$0{,}6 = \frac{\text{cateto oposto}}{15}$$

$$\text{cateto oposto} = 9\ cm$$

Sei que você deve estar curioso para saber qual dos ângulos do triângulo é o α. Para nosso exercício, isso não importará, pois **queremos saber apenas as medidas dos lados**. Ok! **Temos um cateto e uma hipotenusa**. Falta encontrar mais um cateto. Podemos usar a Teorema de Pitágoras.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$15^2 = 9^2 + b^2 \quad \rightarrow \quad 225 = 81 + b^2 \quad \rightarrow \quad b^2 = 144 \quad \rightarrow \quad b = 12\ cm$$

Temos todos os lados, o perímetro é dado pela soma deles.

$$Perímetro = a + b + c$$

$$Perímetro = 9 + 12 + 15$$

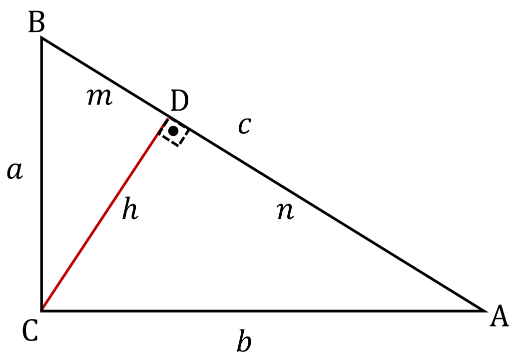
$$Perímetro = 36\ cm$$

Como queremos o resultado em metros, devemos dividir o resultado por 100. $\mathbf{Perímetro\ =\ 0,36\ m}$.

Gabarito: LETRA C.

Relações Métricas no Triângulo Retângulo

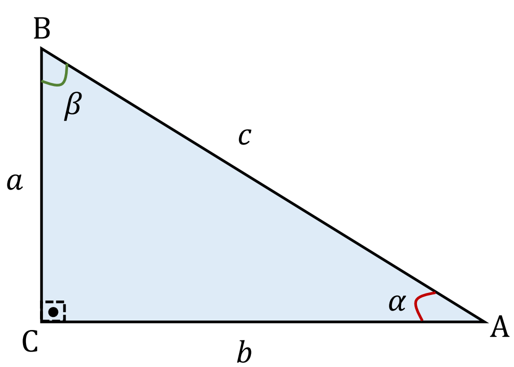
Saber as fórmulas que veremos agora pode poupar preciosos minutos na hora da sua prova. No entanto, caso não as lembre, saiba que sempre poderá deduzi-las (conforme faremos a seguir), pois são apenas consequências da **semelhança de triângulos**! Inicialmente, observe o desenho:

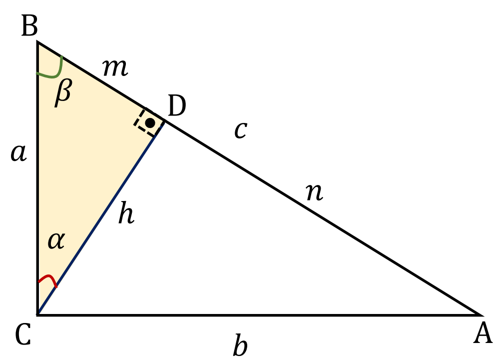


Na figura acima, temos: os catetos (a e b), a hipotenusa (c), a altura relativa à hipotenusa (h) e as partes da hipotenusa (m e n). *Caso você queira encontrar a altura relativa à hipotenusa, como procederia?* Observe que **os triângulos ABC e BCD são semelhantes**. Sendo assim, podemos escrever:

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{h} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{h = \frac{ab}{c}}$$

Se você não enxergou essa semelhança, vem comigo aqui!





Observe que separei os dois triângulos semelhantes em questão: o azul (ABC) e o amarelo (BCD). Eles são semelhantes pois, apesar de terem lados diferentes, **seus ângulos internos são todos iguais**!

Beleza, professor. Mas, sabendo disso, como faço a semelhança?

Vamos lá! Qual lado está em frente ao **ângulo reto** no triângulo ABC?

É o lado "c".

Qual lado está em frente ao **ângulo reto** no triângulo BCD?

É o lado "a".

Com isso, já temos o lado esquerdo da nossa semelhança:

$$\frac{c}{a} =$$

Agora, vamos olhar outro ângulo.

Qual lado está em frente ao **ângulo β** no triângulo ABC?

É o lado "b'.

Qual lado está em frente ao **ângulo β** no triângulo BCD?

É a altura "h".

Com isso, nossa semelhança fica:

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{h}$$

Isolando o "h":

$$\boxed{h = \frac{ab}{c}}$$

Pronto! Esse é o passo a passo para chegarmos na nossa primeira relação métrica! **Esse será o procedimento que usaremos para encontrar todas as outras**. Obviamente, usando outras semelhanças e lados/segmentos.

Na prática, a expressão que acabamos de encontrar nos diz que a altura relativa à hipotenusa é igual ao produto dos catetos dividido pela hipotenusa.

Professor, temos uma outra forma de encontrar essa altura? Temos sim! Observe.

Da semelhança entre os triângulos **BCD e CDA**:

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \qquad \rightarrow \qquad h^2 = mn \qquad \rightarrow \qquad \boxed{h = \sqrt{mn}}$$

Ah, entendi! Mas como fazemos para determinar o "m" e o "n"?

Para você entender melhor, perceba que quando descemos a altura relativa à hipotenusa, **essa altura toca a hipotenusa no <u>ponto D</u>**. Chamamos esse ponto de D de "pé da altura". Ele divide a hipotenusa em duas partes, **uma de comprimento "m" e outra de comprimento "n"** tal que $m + n = c$. Para encontrar a medida desses segmentos, usamos mais semelhanças.

Da semelhança entre os triângulos **ABC e BCD**, podemos tirar o seguinte:

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{m} \qquad \rightarrow \qquad a^2 = cm \qquad \rightarrow \qquad \boxed{m = \frac{a^2}{c}}$$

Analogamente, da semelhança entre os triângulos **ABC e ACD**, temos:

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{n} \qquad \rightarrow \qquad b^2 = cn \qquad \rightarrow \qquad \boxed{n = \frac{b^2}{c}}$$

Vamos ver como isso tudo já caiu em prova?

HORA DE PRATICAR!

(CRECI 11/2022) Os catetos de um triângulo retângulo medem 32 cm e 60 cm. Com base nesse caso hipotético, julgue o item.

A altura relativa à hipotenusa desse triângulo mede 28 cm.

Comentários:

Queremos verificar se a altura relativa à hipotenusa é essa mesmo que o item forneceu. Para isso, note que o enunciado forneceu os catetos. No entanto, **precisamos também do valor da hipotenusa**. Para encontrá-la, vamos usar o teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad \rightarrow \qquad c^2 = 32^2 + 60^2 \qquad \rightarrow \qquad a^2 = 4624 \qquad \rightarrow \qquad a = 68$$

Pronto! Com o valor da hipotenusa, podemos usar a relação métrica que acabamos de ver.

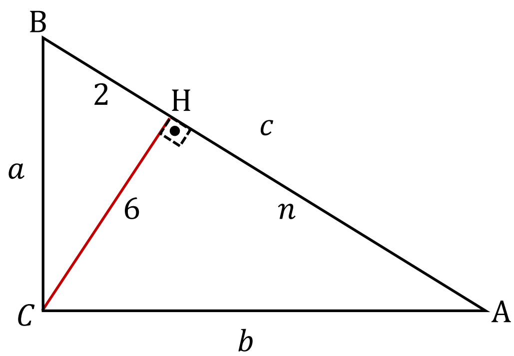
$$h = \frac{ab}{c} \qquad \rightarrow \qquad h = \frac{32 \cdot 60}{68} \qquad \rightarrow \qquad h = \frac{1920}{68} \qquad \rightarrow \qquad h = 28{,}23 \text{ cm}$$

Note que a altura é **um pouquinho maior que 28**, contrariando o afirmado no item.

Gabarito: ERRADO.

(ESA/2021) Considere um triângulo retângulo ABC, retângulo em C. Sendo H o pé da altura relativa à hipotenusa e sabendo que CH = 6 cm e BH = 2 cm, o produto dos comprimentos dos catetos é igual a:
A) 150 cm²
B) 144 cm²
C) 120 cm²
D) 180 cm²
E) 108 cm²

Comentários:
Inicialmente, vamos desenhar o triângulo proposto.



Observe que a altura relativa (h) foi dada e **vale 6**.

Por sua vez, o segmento BH também foi informado e **vale 2**.

Agora, *vocês lembram qual a relação métrica que apareceu o produto dos catetos?* Foi a primeira!

$$h = \frac{ab}{c}$$

ou seja:

$$ab = hc \qquad (1)$$

Para encontrarmos o produto dos catetos, é suficiente multiplicarmos a altura (h) pela hipotenusa (c). A altura (h) nós já temos, ela é justamente o segmento CH que vale 6. Nesse momento, **precisamos determinar apenas o valor da hipotenusa "c"**. Para isso, podemos lembrar da relação métrica que relaciona o "m" com o "h":

$$h^2 = mn \qquad (2)$$

Substituindo $h = 6$ e $m = 2$ em (2):

$$n = \frac{36}{2} \qquad \rightarrow \qquad n = 18$$

Com o valor de "m" e "n", conseguimos encontrar "c":

$$c = m + n \quad \rightarrow \quad c = 2 + 18 \quad \rightarrow \quad c = 20$$

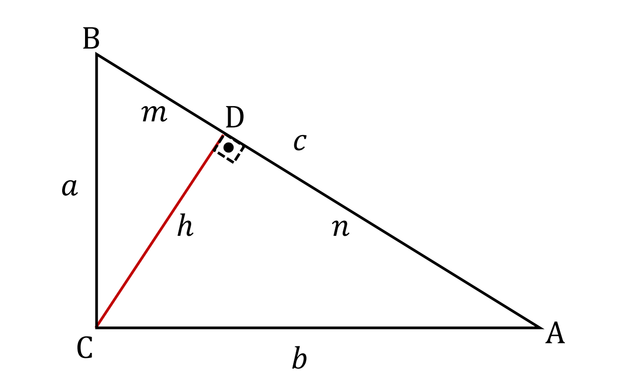
Agora, é só usarmos (1):

$$ab = 6 \cdot 20 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{ab = 120}}$$

Gabarito: LETRA C.

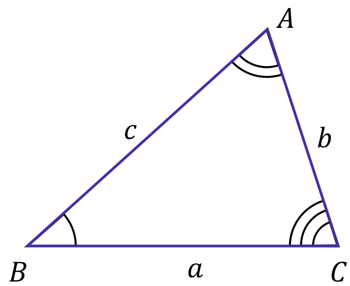
Galera, eu sei que essa parte pode pegar um pouco no pé! São expressões que podem ser chatinhas, mas lembre-se sempre que você poderá deduzi-las usando **semelhança de triângulos**. Gaste a maior parte de sua energia não tentando decorá-las, mas sim aprendendo a como chegar nelas. De qualquer forma, vou resumir tudo que vimos em uma tabela, para facilitar sua revisão!

RESUMINDO

Relações Métricas no Triângulo Retângulo	
	$ab = hc$
	$h^2 = mn$
	$a^2 = mc$
	$b^2 = nc$
	$c = m + n$

Lei do Senos e a Lei dos Cossenos

Para aproveitar que falamos um pouco de seno e cosseno nessa aula, quero conversar com vocês sobre duas leis que relacionam as medidas dos lados de um triângulo com os senos e cossenos dos ângulos internos. Considere o triângulo genérico abaixo.



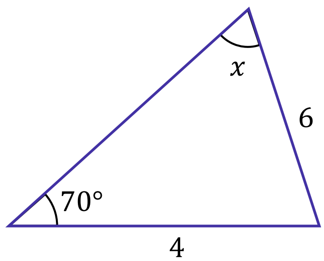
De acordo com a lei dos senos, a razão entre o lado e o seno do ângulo oposto é uma constante no triângulo. Dessa forma, podemos escrever que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

Para entender melhor como pode ser a cobrança desse tema, vamos fazer uma questão.

HORA DE PRATICAR!

(EEAR/2013) Considere as medidas indicadas na figura e que $\operatorname{sen}(70°) = 0{,}9$. Pela "Lei dos Senos", obtém-se que sen x é igual a



A) 0,4
B) 0,5
C) 0,6
D) 0,7

Comentários:
Pessoal, é super importante perceber que a razão é entre a medida do lado e o seno do seu **ângulo <u>oposto</u>**! Assim, para a questão em tela, temos que:

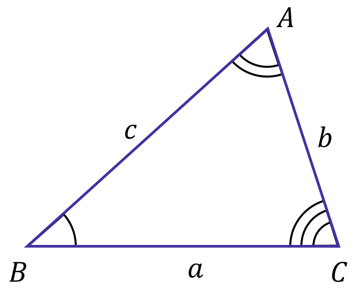
$$\frac{6}{\operatorname{sen} 70°} = \frac{4}{\operatorname{sen} x}$$

Usando a informação do enunciado que $\mathbf{sen(70°) = 0,9}$ e isolando $\operatorname{sen} x$:

$$\operatorname{sen} x = \frac{4 \cdot 0{,}9}{6} \quad \rightarrow \quad \mathbf{sen}\, \boldsymbol{x} = \mathbf{0,6}$$

Gabarito: LETRA C.

Por sua vez, **a lei dos cossenos** vai relacionar os lados de um triângulo qualquer com o cosseno de um dos ângulos. Guarde com você o seguinte:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

Observe o esquema abaixo para entender melhor as expressões.

"a" é o lado oposto ao ângulo Â

$$a^2 = \underbrace{b^2 + c^2 - 2bc}_{\text{b e c são os demais lados}} \cdot cos\,\hat{A}$$

Eu sei que pode estar pairando a dúvida sobre de onde vem essa expressão. A demonstração tanto da lei dos senos quanto da dos cossenos tem custo benefício mínimo. Para sua prova de concurso, precisará apenas aplicá-la. Por esse motivo, vamos ver uma questão para sentir na prática como funciona essa tal de lei dos cossenos.

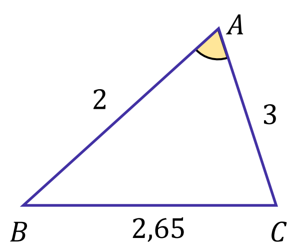
HORA DE PRATICAR!

(PC-DF/2012) Investigações de um crime com arma de fogo indicam que um atirador atingiu diretamente dois pontos, B e C, a partir de um único ponto A. São conhecidas as distâncias: AC = 3 m, AB = 2 m e BC = 2,65 m. A medida do ângulo formado pelas duas direções nas quais o atirador disparou os tiros é mais próxima de

A) 30°
B) 45°
C) 60°
D) 75°
E) 90°

Comentários:

Vamos esquematizar a situação proposta no enunciado.



O enunciado pede o ângulo entre as direções nas quais o atirador disparou. Destaquei esse ângulo de amarelo na nossa imagem acima. Uma boa maneira de determinarmos esse ângulo, é encontrando o seu cosseno. Para isso, vamos utilizar a lei dos cossenos.

$$2{,}65^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos \hat{A}$$

$$7{,}0225 = 4 + 9 - 12 \cdot \cos \hat{A}$$

$$7{,}0225 - 13 = -12 \cdot \cos \hat{A}$$

$$-6{,}0225 = -12 \cdot \cos \hat{A}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{6{,}0225}{12} \cong -\frac{6}{12}$$

$$\cos \hat{A} \cong \frac{1}{2}$$

Você lembra qual ângulo menor que 180° possui cosseno igual a 1/2? Como **trata-se do cosseno de um ângulo notável**, temos meio que a "obrigação" de lembrá-lo.

O ângulo menor que 180° que tem cosseno igual a 1/2 é 60°.

$$\hat{A} \cong 60°$$

Gabarito: LETRA A.

ATENÇÃO
DECORE!

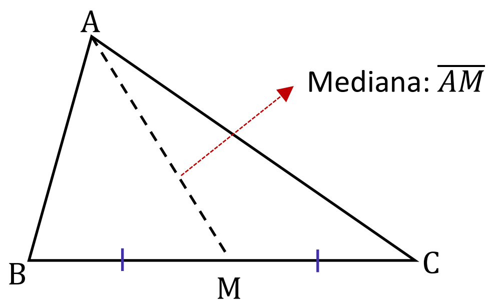
Ângulo Notável	Seno	Cosseno
0°, 360°	0	1
30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
60°	$\sqrt{3}/2$	1/2
90°	1	0
180°	0	-1
270°	-1	0

Pontos notáveis no triângulo

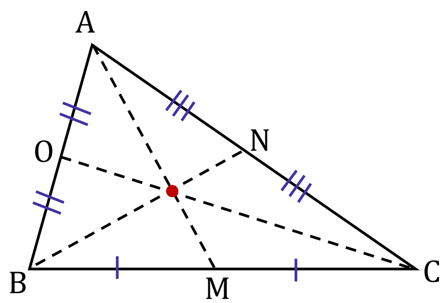
No estudo do triângulo, existem quatro pontos que precisam ser estudados com atenção: o baricentro, o incentro, o ortocentro e o circuncentro. Veremos todos eles com detalhes a seguir!

Baricentro

Galera, para entender o baricentro, precisamos primeiro entender o que é uma mediana. A mediana nada mais é do que um **segmento de reta que vai ligar um vértice ao <u>ponto médio</u> do lado oposto a esse vértice**. Vamos visualizar essa situação para entender melhor!



Beleza! Agora note que um triângulo não possui apenas uma mediana! Podemos traçar uma mediana para cada vértice. Observe!

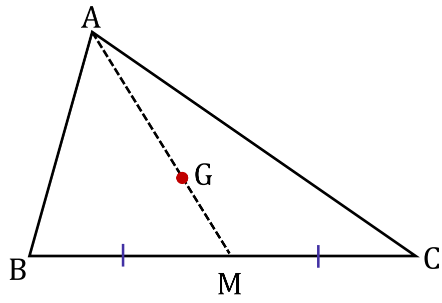


Observe que essas medianas se encontram em um ponto (que destaquei em vermelho). Esse é o nosso baricentro! Anote aí, então!

<u>Baricentro</u> é o ponto de encontro das três **<u>medianas</u>** de um triângulo.

Professor, e esse baricentro tem alguma propriedade especial?

Tem sim! Ele divide a mediana em duas partes de tal forma que uma mede o dobro da outra! Vou explicar melhor no desenho! Vem cá!



Para a imagem não ficar muito poluída, desenhei apenas uma mediana e coloquei o baricentro (G). Observe que o ponto G divide a mediana em dois segmentos: **o AG e o GM**. A propriedade que devemos guardar é:

$$\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM}$$

Guarde sempre que o segmento que contém o vértice (AG) **mede o dobro** do segmento que contém o ponto médio (GM).

Professor, isso cai em prova?!

Vamos conferir!

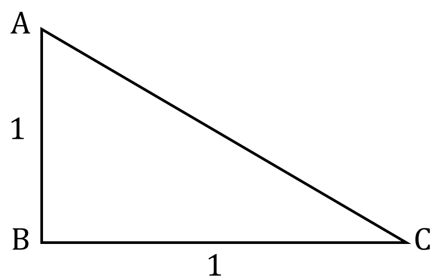
HORA DE PRATICAR!

(CBM-AL/2021) Acerca de triângulos, julgue o próximo item.

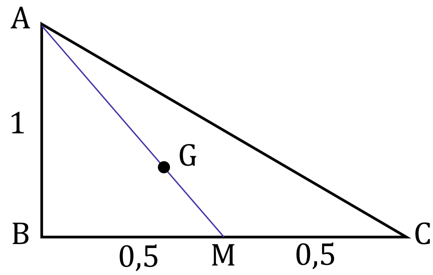
Considere o triângulo retângulo e isósceles ABC, com lados AB = BC = 1. Nesse caso, sendo G o baricentro desse triângulo, é correto afirmar que o segmento AG é igual a $\sqrt{\frac{2}{6}}$.

Comentários:

O primeiro passo é desenhar esse triângulo retângulo e isósceles de lado **igual a 1**.



Como a questão falou em baricentro, é importante desenhar a mediana também. Note que ele fala de segmento AG, logo vamos traçar a **mediana relativa ao vértice A**.



Lembre-se que a mediana toca no **ponto médio do lado oposto**. Por esse motivo, ficou "0,5" de um lado e "0,5" do outro.

Agora, note que estamos procurando a medida do segmento AG. Para isso, primeiramente devemos encontrar a medida do segmento AM. Esse segmento é a **hipotenusa do triângulo retângulo ABM**. Logo, vamos usar o Teorema de Pitágoras para encontrá-lo.

$$AM^2 = AB^2 + BM^2$$

$$AM^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad AM^2 = 1 + \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad AM^2 = \frac{5}{4} \quad \rightarrow \quad AM = \sqrt{\frac{5}{4}} \qquad (1)$$

Nesse momento, devemos observar que:

$$AM = AG + GM \qquad (2)$$

Como G é o baricentro, podemos usar a propriedade que vimos na teoria:

$$\boldsymbol{AG = 2GM} \quad \rightarrow \quad GM = \frac{AG}{2} \qquad (3)$$

Usando esse (3) em (2):

$$AM = AG + \frac{AG}{2} \quad \rightarrow \quad AM = \frac{3AG}{2}$$

Vamos **isolar AG** pois é quem estamos procurando:

$$AG = \frac{2AM}{3} \qquad (4)$$

Pronto! Agora vamos usar o resultado (1) em (4).

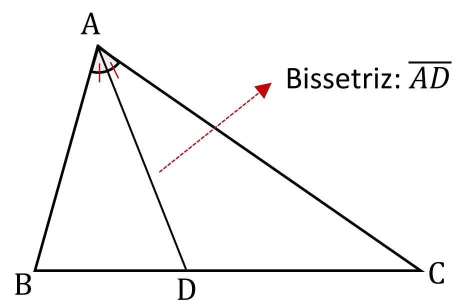
$$AG = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{4}} \quad \rightarrow \quad \boxed{AG = \frac{\sqrt{5}}{3}}$$

Gabarito: ERRADO.

Para encerrarmos essa parte de **baricentro**, saiba também que ele é **o centro de gravidade do triângulo**. Por esse motivo, costumamos representá-lo pela letra "G".

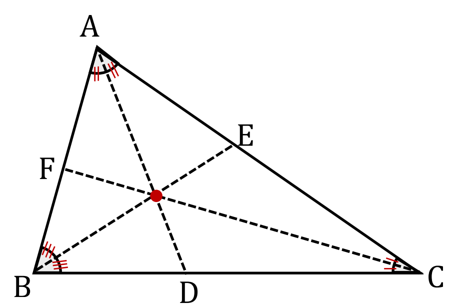
Incentro

Para entender o que é o incentro, é necessário entender o que é a **bissetriz interna de um triângulo**. A bissetriz interna nada mais é do que um segmento de reta que divide um ângulo interno em dois ângulos iguais. Vamos visualizá-la no desenho para melhor compreensão.



Moçada, não confunda! Enquanto a mediana está preocupada em dividir o lado oposto em dois segmentos iguais, **a bissetriz interna se preocupa em dividir o ângulo interno em dois iguais**. Ela pode tocar em qualquer ponto do lado oposto.

Mais um vez, perceba que o triângulo não possui apenas uma bissetriz interna, mas três!



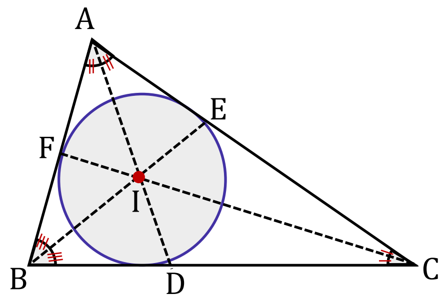
Logo, quando desenhamos as três bissetrizes de um triângulo, notamos que elas se encontram em um ponto. É exatamente esse ponto que chamamos de incentro.

TOME NOTA!

Incentro é o ponto de encontro das três **bissetrizes internas** de um triângulo.

Professor, esse ponto tem alguma propriedade especial?

Tem sim! Ele é o centro da circunferência inscrita nesse triângulo!



HORA DE PRATICAR!

(PREF. PAÇO DO LIMIAR/2019) O centro de uma circunferência inscrita em um triângulo é facilmente obtido quando se determina o:

A) Autocentro.

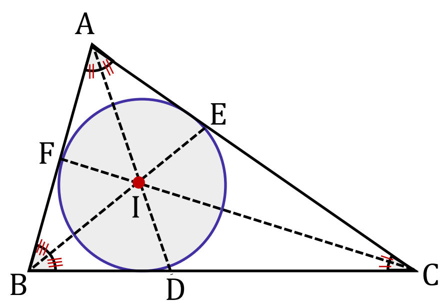
B) Baricentro.

C) Circuncentro.

D) Incentro.

Comentários:

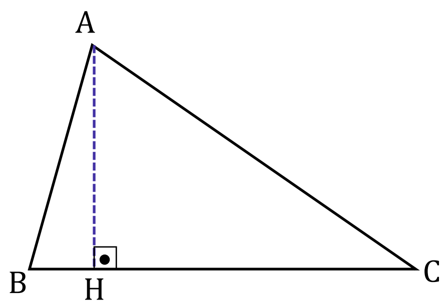
Conforme vimos, é o **incentro (I)** que coincide com o centro da circunferência **inscrita** no triângulo.



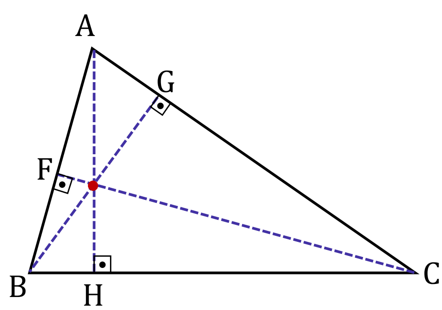
Gabarito: LETRA D.

Ortocentro

Para entender o ortocentro, precisamos entender o que é a altura. A altura de um triângulo nada mais é do que o segmento de reta que parte de um dos vértices e toca no lado oposto fazendo um ângulo de 90°. Vamos desenhar.



Sendo assim, como temos três vértices e três lados, podemos concluir que teremos **três alturas**. Vamos desenhar todas elas.



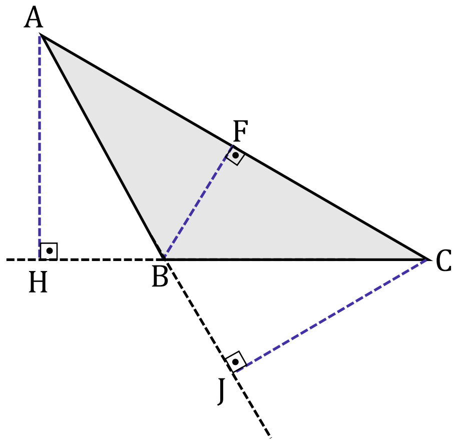
Perceba, portanto, que as alturas de um triângulo também se encontram em um ponto. É esse ponto que nós chamamos de **ortocentro**.

TOME NOTA!

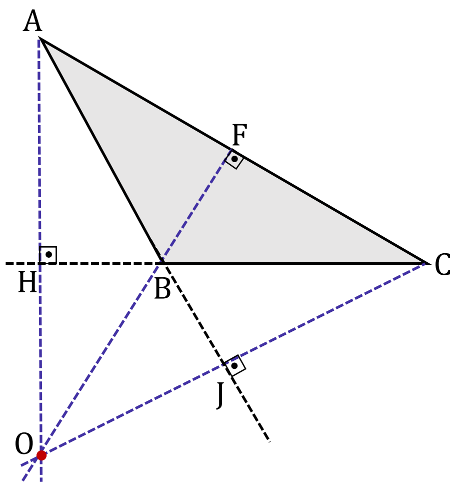
Ortocentro é o ponto de encontro das **três retas suportes da altura** de um triângulo.

Opa!! Professor, o senhor vinha falando de altura, mas na definição falou de reta suporte da altura. O que aconteceu?

Galera, acontece que nem sempre a altura será interna ao triângulo. Algumas vezes ela será externa e precisaremos traçar uma reta suporte para encontrar o ortocentro. Vamos desenhar essa situação.



Perceba que o triângulo ABC possui alturas que são externas ao triângulo (CJ e AH). Se desenharmos dessa forma, não conseguiremos encontrar o incentro, pois **as alturas não estão se encontram**. Isso significa que o ortocentro não existe? Não!! Pois o ortocentro é o **ponto de encontro das <u>retas suportes da altura</u>**. Na prática, nós vamos simplesmente prolongar as alturas até elas se encontrarem!



Note que, **<u>nessas situações</u>**, o ortocentro é externo ao triângulo. Não há problema algum.

HORA DE PRATICAR!

(PREF. HORIZONTINA/2021) Marcar C para as afirmativas Certas, E para as Erradas e, após, assinalar a alternativa que apresenta a sequência CORRETA:

( ) O ortocentro de um triângulo qualquer é sempre interno ao triângulo.
( ) O incentro de um triângulo qualquer é o ponto de interseção das medianas desse triângulo.
( ) Todo triângulo isósceles é triângulo acutângulo.
( ) O ponto de interseção das bissetrizes de um triângulo qualquer equivale ao centro de um círculo inscrito nesse triângulo.

A) E - E - E - C.

B) E - E - C - C.

C) C - E - E - C.

D) C - C - C - E.

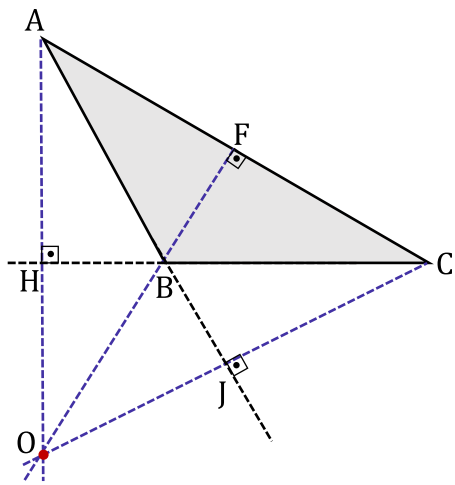
E) C - C - E - C.

Comentários:

Vamos analisar cada uma das afirmativas.

(E) O ortocentro de um triângulo qualquer é sempre interno ao triângulo.

Errado! Acabamos de ver uma situação em que o ortocentro estava **externo** ao triângulo.

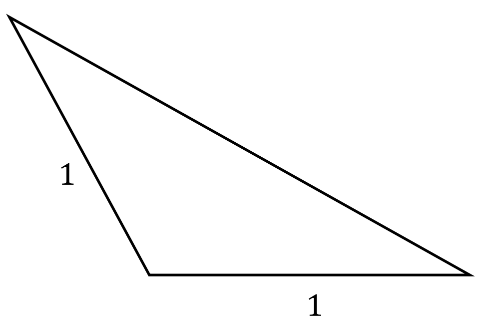


( ) O incentro de um triângulo qualquer é o ponto de interseção das medianas desse triângulo.

Errado! O incentro é o ponto de intersecção das **bissetrizes internas** de um triângulo. Lembre-se que o encontro das medianas é o baricentro.

( ) Todo triângulo isósceles é triângulo acutângulo.

Errado! Podemos ter um triângulo isósceles que é um **triângulo obtusângulo**. Podemos desenhar como exemplo um triângulo da forma:



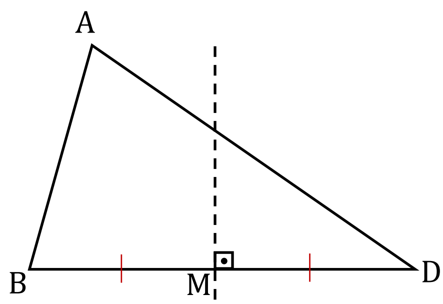
( ) O ponto de interseção das bissetrizes de um triângulo qualquer equivale ao centro de um círculo inscrito nesse triângulo.

Correto! Lembre-se que o ponto de intersecção das bissetrizes internas de um triângulo é o **incentro**. Vimos que o incentro coincide com o centro da circunferência inscrita no triângulo.

Gabarito: LETRA A.

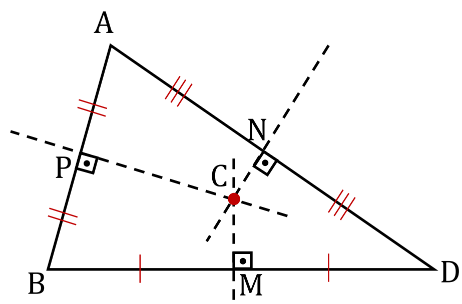
Circuncentro

Esse é o nosso último ponto notável. Para entendê-lo, é preciso conhecer a mediatriz. No contexto do estudo de triângulos, a mediatriz é um segmento de reta que passa perpendicularmente pelo ponto médio do lado. *Como assim, professor?!* Vamos para o desenho!



Galera, o importante de perceber aqui é o seguinte: a mediatriz não precisa partir do vértice! Ela pode vir de qualquer lugar. **Nossa preocupação aqui é dividir o lado no meio e perpendicularmente!!** Para satisfazer essas duas condições, ela não precisa partir do vértice, ok?!

Mais uma vez, você deve ter percebido que teremos três mediatrizes em um triângulo. Vamos desenhá-la.



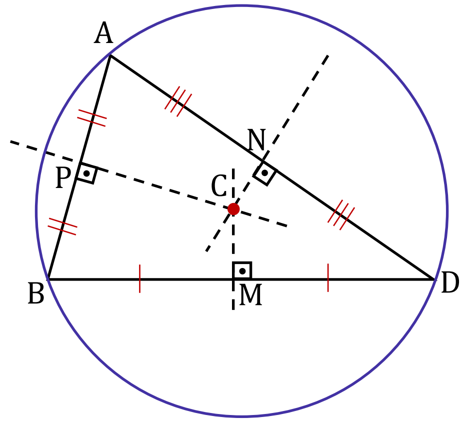
Observe que as mediatrizes se encontram em um ponto! Chamamos esse ponto de circuncentro.

TOME NOTA!

Circuncentro é o ponto de encontro das **três mediatrizes** dos lados do triângulo.

Professor, percebi que todo ponto notável que vimos até agora tem uma propriedade especial. O circuncentro também possui uma?

Sim! Saiba que **o circuncentro coincide com o centro da circunferência <u>circunscrita</u> ao triângulo**!



Bem legal, né?!

(PREF. ALTA FLORESTA/2019) Em um triangulo qualquer ABC, encontramos circuncentro quando:

A) Traçamos o triângulo dentro de uma circunferência.

B) Traçamos as três medianas deste triângulo.

C) Traçamos as três bissetrizes deste triângulo.

D) Traçamos as três alturas deste triângulo.

E) Traçamos as três mediatrizes deste triângulo.

Comentários:

Questão bem direta, mas vamos analisar todas as alternativas!

A) Traçamos o triângulo dentro de uma circunferência.

Errado, pessoal! Por mais que o circuncentro coincida com o centro da circunferência circunscrita, apenas desenhar o triângulo dentro da circunferência **<u>não é suficiente</u>** para encontrarmos esse ponto notável.

B) Traçamos as três medianas deste triângulo.

Errado! Quando traçamos as três medianas obtemos **<u>o baricentro</u>**.

C) Traçamos as três bissetrizes deste triângulo.

Errado! Quando traçamos as três bissetrizes internas do triângulo obtemos **<u>o incentro</u>**.

D) Traçamos as três alturas deste triângulo.

Errado! Quando traçamos as três alturas de um triângulo obtemos **<u>o ortocentro</u>**.

E) Traçamos as três mediatrizes deste triângulo.

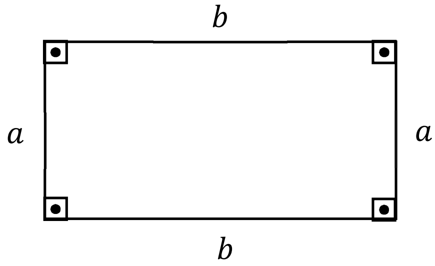
Correto! É isso mesmo! Quando traçamos **as três mediatrizes** do triângulo conseguimos encontrar o seu circuncentro!

Gabarito: LETRA E.

Quadriláteros

Nessa seção, mostrarei para vocês os quadriláteros mais conhecidos. Serei bem objetivo e quero que vocês deem especial atenção para as fórmulas de área. Combinado?!

Retângulo



$$\text{ÁREA} = a \cdot b$$

Características Principais:

- Comprimento: "b"; Largura: "a";
- Ângulos internos são iguais a 90°;
- Lados opostos são iguais

(CM SERTÃOZINHO/2019) O quadro de avisos de uma firma tem a forma de um retângulo com 80 cm de altura e 1,2 m² de área. A medida do comprimento desse quadro é

A) 1,2 m

B) 1,3 m

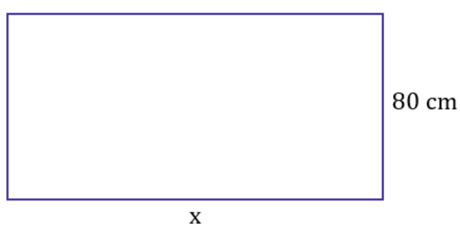
C) 1,4 m

D) 1,5 m

E) 1,6 m

Comentários:

Temos uma largura e a área. Sabendo disso, podemos determinar o comprimento. Primeiro, veja o retângulo.



Uma coisa importante que devemos perceber é que a área dada está em metros quadrados e a medida da largura está em centímetros. Cuidado para não misturar! Precisamos escrever 80 centímetros em metros.

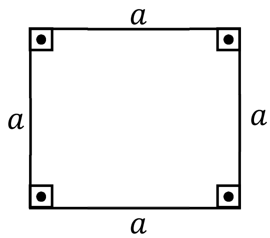
$$80\ centímetros = 0{,}8\ metros \qquad \text{(dividimos por 100)}$$

Em um retângulo, a área é dada pelo produto do comprimento pela largura. Assim,

$$x \cdot 0{,}8 = 1{,}2 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1{,}2}{0{,}8} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 1{,}5\ m}$$

Gabarito: LETRA D.

Quadrado



$$\boxed{ÁREA = a^2}$$

Características Principais:

- Todos os lados são iguais;
- Todos os ângulos internos são iguais a 90°;
- É um polígono regular.

(FITO/2020) Um galpão tem a superfície em formato quadrado com perímetro igual a 96 m. Esse galpão será divido em três salas de modo que suas áreas sejam diretamente proporcionais aos números: 2, 4 e 9. A diferença entre as áreas das duas maiores salas será igual a

A) 32,0 m².

B) 68,4 m².

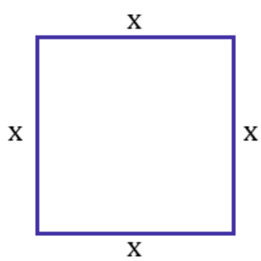
C) 153,6 m².

D) 180,8 m².

E) 192,0 m².

Comentários:

Beleza! Lembre-se que o perímetro é a soma dos lados. Em um quadrado, todos os lados são iguais. Assim,



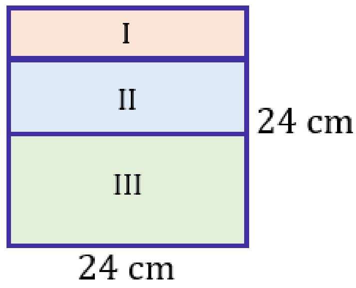
O enunciado disse que o perímetro desse quadrado é 96 cm.

$$x + x + x + x = 96 \quad \rightarrow \quad 4x = 96 \quad \rightarrow \quad x = 24\ cm$$

Logo, o lado do quadrado é 24 cm. A área de um quadrado é igual ao lado ao quadrado.

$$A = 24^2 \quad \rightarrow \quad A = 576\ cm^2$$

Esse quadrado é dividido em três salas com áreas proporcionais a 2, 4 e 9. Imagine algo do tipo (não sabemos as formas da sala, quero apenas ilustrar uma possibilidade para melhor entendimento).



Podemos escrever as seguintes proporcionalidades:

$$A_I = 2k$$
$$A_{II} = 4k$$
$$A_{III} = 9k$$

Ora, a soma das áreas de todas as salas deve ser igual a área do quadrado. Assim,

$$2k + 4k + 9k = 576 \quad \rightarrow \quad 15k = 576 \quad \rightarrow \quad k = \frac{576}{15} \quad \rightarrow \quad k = 38{,}4$$

A diferença das áreas das duas maiores sala é:

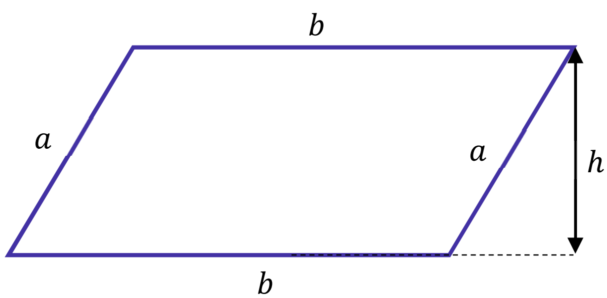
$$Diferença = A_{III} - A_{II} \quad \rightarrow \quad Dif = 9k - 4k \quad \rightarrow \quad Dif = 5k$$

Basta substituirmos o valor de "k".

$$Dif = 5 \cdot 38{,}4 \quad \rightarrow \quad Dif = 192\ m^2$$

Gabarito: LETRA E.

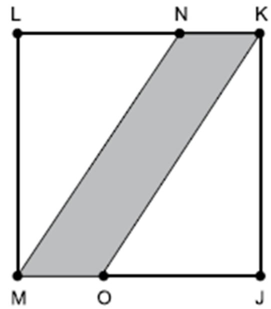
Paralelogramo



$$\boxed{ÁREA = b \cdot h}$$

Características Principais:
- Lados opostos são iguais (congruentes) e paralelos;
- Ângulos opostos são iguais (congruentes)
- A área é dada em função da altura "h" e esse "h" nem sempre vai estar disponível para nós. Na maioria das vezes, teremos que usar um pouco dos conhecimentos sobre triângulos retângulos, tudo bem?

(UNICAMP/2019) Os pontos N e O pertencem aos lados de um quadrado JKLM, determinando o paralelogramo KNMO cuja área é igual a 1/3 da área do quadrado, conforme a figura.



Se a medida do lado do quadrado é 6 cm, o perímetro do paralelogramo, em cm, é igual a

A) $2 + 2\sqrt{13}$

B) $2 + 4\sqrt{13}$

C) $4 + \sqrt{13}$

D) $4 + 4\sqrt{13}$

Comentários:

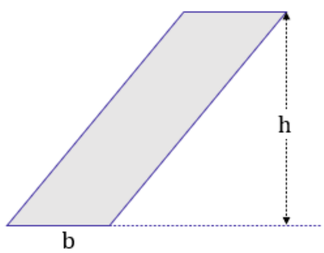
Queremos saber o perímetro do paralelogramo. O enunciado apenas disse que a área do paralelogramo é igual a um terço da área do quadrado. Como a medida do lado do quadrado vale 6 cm, então podemos calcular a sua área.

$$A_{quadrado} = L^2 \quad \rightarrow \quad A_{quadrado} = 6^2 \quad \rightarrow \quad A_{quadrado} = 36 \text{ cm}^2$$

Se a área do paralelogramo é um terço da do quadrado, fazemos:

$$A_{paralelogramo} = \frac{1}{3} \cdot A_{quadrado} \quad \rightarrow \quad A_{paralelogramo} = \frac{1}{3} \cdot 36 \quad \rightarrow \quad A_{paralelogramo} = 12 \text{ cm}^2$$

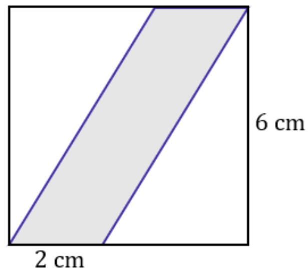
Ok! Temos a área, mas o enunciado pede o perímetro (que é a soma de todos os lados). Agora, veja o seguinte paralelogramo:



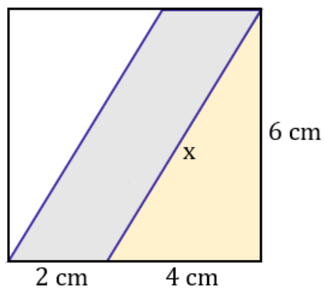
Na situação representada na figura, sabemos que a área dele é dada por $A = bh$. Compare o paralelogramo acima com o da questão. Percebeu que a altura do paralelogramo da questão é igual ao lado do quadrado? Ou seja, $h = 6\ cm$! Podemos, portanto descobrir a base.

$$A_{paralelogramo} = bh \quad \rightarrow \quad 12 = b \cdot 6 \quad \rightarrow \quad b = \frac{12}{6} \quad \rightarrow \quad b = 2 \text{ cm}$$

Ficamos com a seguinte situação:



No entanto, falta ainda descobrir o lado "diagonal". Para isso, veja o triângulo retângulo.



Ora, "x" é a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos 4 cm e 6 cm. Vamos usar o Teorema de Pitágoras!

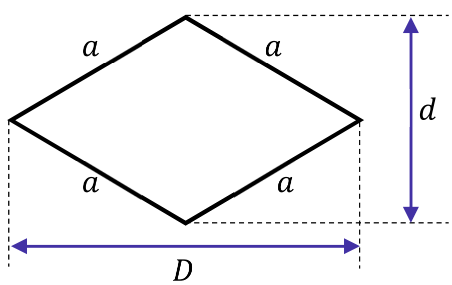
$$x^2 = 4^2 + 6^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 16 + 36 \quad \rightarrow \quad x^2 = 52 \quad \rightarrow \quad x = 2\sqrt{13} \text{ cm}$$

Pronto! Temos todos os lados do paralelogramo, basta somá-los para obter o perímetro!

$$Perímetro = 2 + 2 + 2\sqrt{13} + 2\sqrt{13} \quad \rightarrow \quad Perímetro = 4 + 4\sqrt{13} \text{ cm}$$

Gabarito: LETRA D.

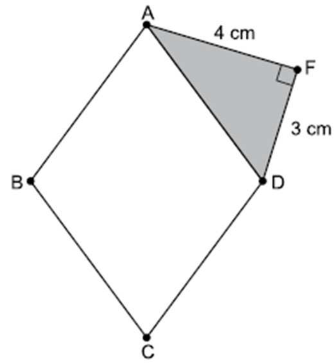
Losango



$$ÁREA = \frac{D \cdot d}{2}$$

Características Principais:
- O losango é um paralelogramo com todos os lados iguais;
- É também chamado de paralelogramo equilátero;
- Ângulos opostos iguais;
- "D" é a medida da diagonal maior, enquanto "d" é a medida da diagonal menor.

(PREF. ITAPEVI/2019) Um losango ABCD e um triângulo retângulo AFD têm o lado AD em comum conforme a figura.

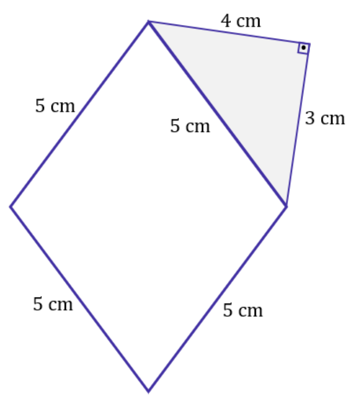


O perímetro do losango, em cm, é igual a
A) 16
B) 18
C) 20
D) 22

Comentários:
Notem que o triângulo retângulo destacado é o aquele pitagórico! Logo, se os catetos são 3 e 4, a hipotenusa só pode ser 5 cm! Tudo bem? Caso não lembrasse disso, você poderia usar o Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 4^2 + 3^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 16 + 9 \quad \rightarrow \quad x^2 = 25 \quad \rightarrow \quad x = 5 \text{ cm}$$

O motivo de encontrar a hipotenusa do triângulo retângulo é que ela coincide com o lado do losango. Como no losango todos os lados são iguais, já podemos determinar o perímetro.

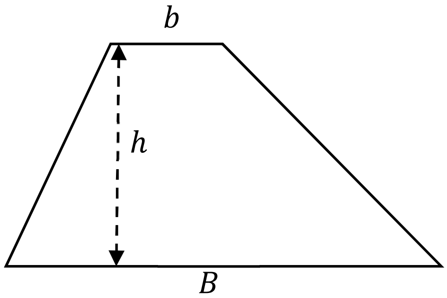


Assim, lembrando que o perímetro é a soma dos lados:

$$Perímetro = 5 + 5 + 5 + 5 \quad \rightarrow \quad Perímetro = 20 \text{ cm}$$

Gabarito: LETRA C.

Trapézio

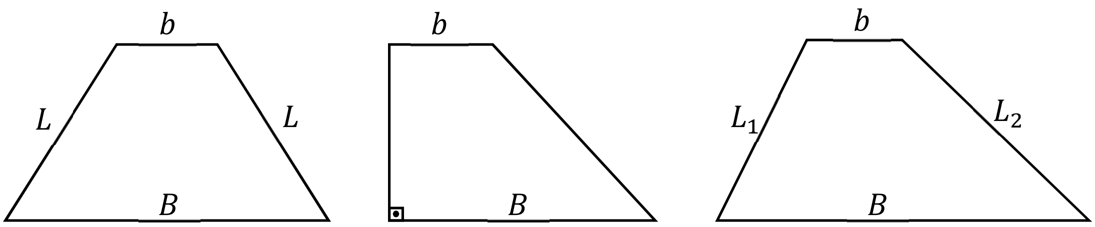


$$ÁREA = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

Características Principais:

- "B" representa a medida da base maior, "b" é a medida da base menor;
- As bases são paralelas;
- "h" é a altura do trapézio.

Tipos de Trapézios:

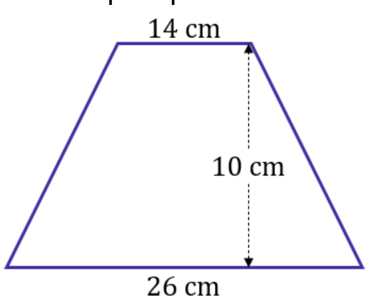


Trapézio Isósceles | Trapézio Retângulo | Trapézio Escaleno

- **Trapézio Isósceles:** Os lados não paralelos possuem a mesma medida. Além disso, são simétricos.
- **Trapézio Retângulo:** Um dos lados não paralelos faz um ângulo de 90° com as bases.
- **Trapézio Escaleno:** É o trapézio que apresenta todos os seus lados distintos.

HORA DE PRATICAR!

(PREF. ITANHAÉM/2020) Assinale a alternativa que apresenta a área do trapézio abaixo.



A) 260 cm^2
B) 200 cm^2
C) 1.820 cm^2

D) $3.640\ \text{cm}^2$
E) $400\ \text{cm}^2$

Comentários:
Galera, questãozinha apenas para treinarmos a fórmula da área do trapézio. O enunciado deu de cara todas as informações que precisamos.

- $Base\ Maior\ (B) = 26\ cm;$
- $Base\ Menor\ (b) = 14\ cm;$
- $Altura\ (h) = 10\ cm$

Lembre-se da fórmula:

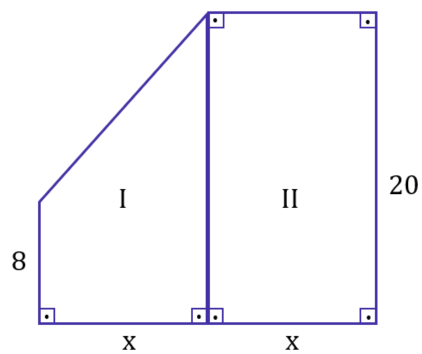
$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Agora, substituindo as informações:

$$A = \frac{(26 + 14) \cdot 10}{2} \quad \rightarrow \quad A = \frac{40 \cdot 10}{2} \quad \rightarrow \quad A = 40 \cdot 5 \quad \rightarrow \quad A = 200\ \ cm^2$$

Gabarito: LETRA B.

(PREF. CERQUILHO/2019) Na figura, com medidas em metros, estão representados dois terrenos adquiridos por Xavier, sendo que o terreno I tem a forma de um trapézio, e o terreno II tem formato retangular.

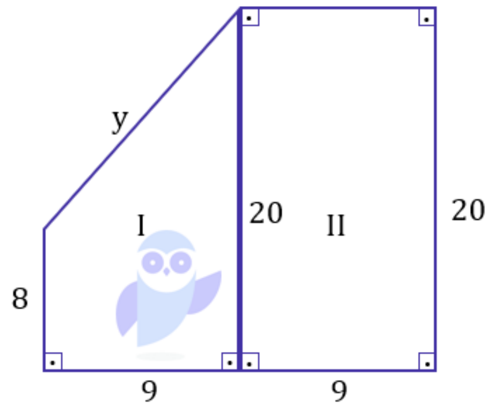


Se a área do terreno II é $180\ m^2$, então, o perímetro do terreno I é igual a
A) 52 m.
B) 50 m.
C) 49 m.
D) 46 m.
E) 42 m.

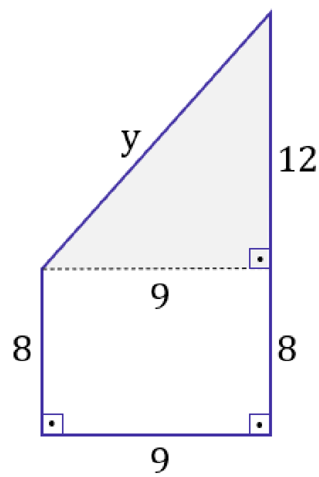
Comentários:
Pessoal, o enunciado deu a área do terreno retangular e sabemos uma de suas dimensões. Logo, podemos determinar x.

$$20 \cdot x = 180 \quad \rightarrow \quad x = \frac{180}{20} \quad \rightarrow \quad x = 9\ \text{metros}$$

Dessa forma, ficamos com quase todas as dimensões do terreno I determinadas.



Veja que temos quase todas as dimensões do trapézio determinadas. Precisamos ainda descobrir "y". Para isso, precisaremos olhar o trapézio com mais cuidado.



O lado "y" do trapézio é justamente a hipotenusa do triângulo retângulo destacado. O lado maior foi dividido em duas partes, uma de 8 e outra de 12, que é exatamente um dos catetos. Podemos usar o Teorema de Pitágoras.

$$y^2 = 9^2 + 12^2 \quad \rightarrow \quad y^2 = 81 + 144 \quad \rightarrow \quad y^2 = 225 \quad \rightarrow \quad y = 15\ m$$

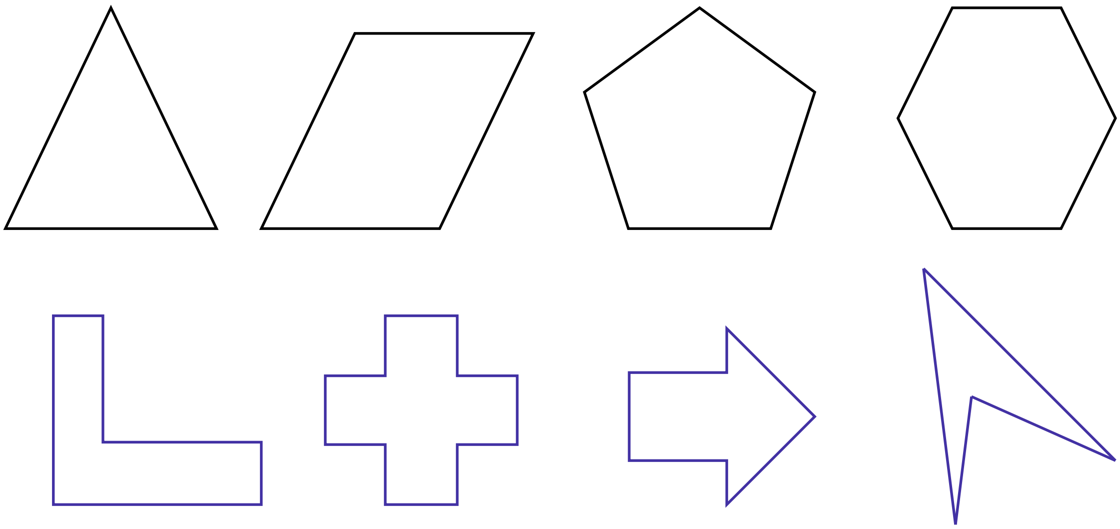
Pronto! Todos os lados do trapézio do terreno I estão determinados. Para encontrar o perímetro, basta somarmos tudo.

$$Perímetro = 8 + 9 + 20 + 15 \quad \rightarrow \quad Perímetro = 52\ m$$

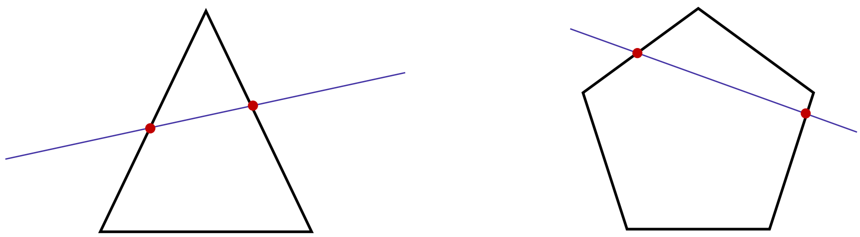
Gabarito: LETRA A.

Polígonos

Os triângulos e os quadriláteros que vimos nessa aula são polígonos. Simplificadamente, podemos chamar de polígono, **a figura geométrica plana e fechada formada pela união de segmentos de reta**. Confira abaixo.

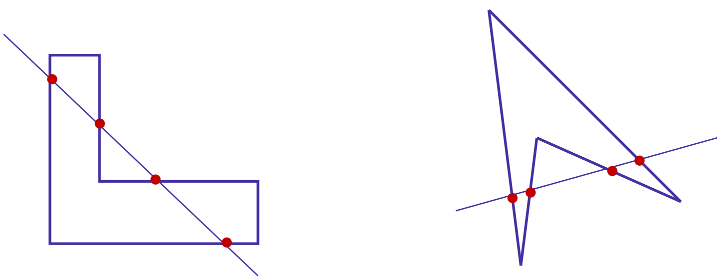


Na primeira linha da imagem acima estão **alguns polígonos que chamamos de convexos**. Eles vão ser chamados assim quando uma qualquer reta **cortar o polígono em apenas <u>dois pontos</u>**.



Polígonos Convexos

Observe que qualquer reta que usamos para cortar o polígono, vai tocá-lo em apenas dois pontos! Essa é a característica que vai definir os polígonos convexos! Observe agora os não convexos:



Polígonos Não Convexos

Por sua vez, **nos polígonos não convexos, existem retas que vão cortá-los em <u>mais de dois pontos</u>**. Veja que eles podem assumir as mais diferentes formas, sendo bem imprevisíveis e dificilmente estarão na sua prova. Quando caem, 99% das vezes é apenas para fazermos a identificação em convexo ou não.

Por fim, quero trazer para vocês um resultado que vimos para triângulos e quadriláteros mas que na verdade **serve para qualquer polígono**.

A soma dos ângulos externos de qualquer polígono convexo será sempre 360°.

Ademais, **a soma dos ângulos internos de um polígono de "n" lados** é dada por:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180°$$

Por exemplo, no triângulo temos três lados e, portanto, $n = 3$. Usando isso na fórmula acima,

$$S_i = (3 - 2) \cdot 180° \quad \rightarrow \quad S_i = 180°$$

Portanto, a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, conforme vimos.

Analogamente, para os quadriláteros convexos, temos $n = 4$.

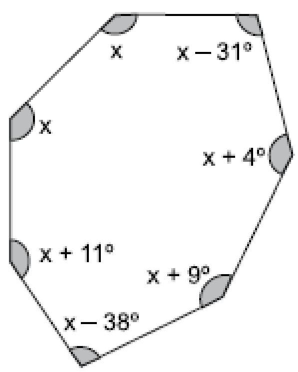
$$S = (4 - 2) \cdot 180° \quad \rightarrow \quad S_i = 2 \cdot 180° \quad \rightarrow \quad S_i = 360°$$

Assim, a soma dos ângulos internos nos quadriláteros convexos é 360°.

Viu só, moçada? Caso queira saber a soma dos ângulos internos em um hexágono, por exemplo, basta substituirmos $n = 6$. **Às vezes, as bancas gostam de cobrar essa fórmula.**

HORA DE PRATICAR!

(PREF. ARAÇATUBA/2019) Em um polígono convexo, a soma dos ângulos internos, em graus, é dada pela fórmula $S = 180(n - 2)$, sendo n o número de lados do polígono. No polígono da figura, a incógnita x representa um valor em graus



O menor ângulo interno desse polígono mede:

A) 99°

B) 97°

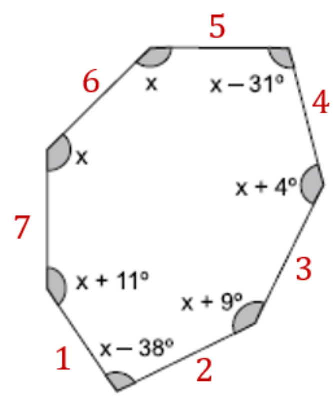
C) 95°

D) 93°

E) 91°

Comentários:

O primeiro passo do exercício é contarmos os lados do polígono. Isso mesmo, vamos lá!



O polígono tem 7 lados! Podemos achar quanto vale a soma dos ângulos internos! Caso não lembrasse da fórmula, a questão foi boazinha e trouxe! Vamos aplicá-la.

$$S = (n - 2) \cdot 180° \quad \rightarrow \quad S = (7 - 2) \cdot 180° \quad \rightarrow \quad S = 5 \cdot 180° \quad \rightarrow \quad S = 900°$$

Beleza! Quando somarmos todos esses ângulos destacados na imagem, devemos obter 900°.

$$(x + 11°) + (x - 38°) + (x + 9°) + (x + 4°) + (x - 31°) + x + x = 900°$$

$$7x - 45 = 900$$

$$7x = 945$$

$$x = \frac{945}{7}$$

$$x = 135°$$

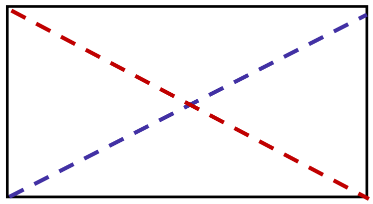
O menor ângulo desse polígono será dado por "$x - 38°$", pois é o que estamos tirando mais de x.

$$Menor\ \hat{A}ngulo = x - 38° = 135° - 38° = 97°$$

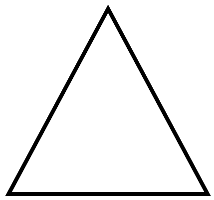
Gabarito: LETRA B.

Diagonais de um Polígono Convexo

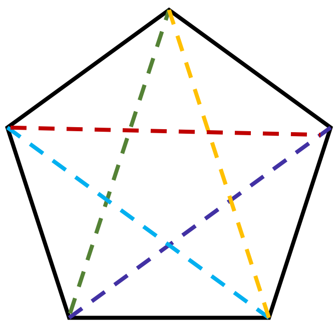
As diagonais de um polígono são segmentos de retas que **unem vértices não adjacentes**. Calma, vou mostrar melhor o que isso significa!



Observe o retângulo acima! Ele tem **duas diagonais**. Uma está marcada de roxo e outra de vermelho. Agora, veja o triângulo:



Por sua vez, o triângulo, apesar de ser um polígono convexo, **não possui diagonais**. O motivo disso é **que todos os seus vértices são adjacentes um do outro**. Dessa forma, não conseguimos traçar nenhuma diagonal. Agora, vamos ver o pentágono!



O pentágono já possui 5 diagonais! A pergunta que vem agora é: *Existe uma maneira de calcularmos a quantidade de diagonais sabendo o número de lados do polígono convexo?* A resposta é sim! Existe uma fórmula que nos fornece essa quantidade e as bancas estão começando a cobrá-la.

TOME NOTA!

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

"d" representa a quantidade de diagonais e "n" é o número de lados do polígono.

ESTA CAI NA PROVA!

(ISS-BH/2022) A partir do conceito: "Dado um polígono convexo qualquer, diagonal é o segmento que une dois vértices não consecutivos". Assim, um triângulo não possui diagonais, pois, como só possui três vértices, não é possível unir dois vértices não consecutivos, o quadrado possui duas diagonais e partir de um dos vértices, encontramos, apenas um outro vértice não consecutivo, enquanto, que no pentágono convexo temos 5 diagonais, e nesse polígono encontramos a partir de um vértice, dois outros vértices não consecutivos. A partir dessas informações, monta-se a tabela a seguir.

Nome do Polígono	Número de lados	Número de diagonais	A partir de um dos vértices, o número de vértices não consecutivos
Triângulo	3	0	0
Quadrado	4	2	1
Pentágono	5	5	2
Hexágono	6	9	3
Heptágono	7	14	4

Verifica-se que existe uma certa regularidade entre o número de lados, número de diagonais e o número de vértices não consecutivos contados a partir de um dos vértices. Então, o número de diagonais de um polígono convexo que possui 102 lados é igual a

A) 4.852.
B) 4.947.
C) 4.998.
D) 5.049.
E) 5.100.

Comentários:

Pessoal, **o número de diagonais** de um polígono convexo de "n" lados é dado pela seguinte relação:

$$d=\frac{n\cdot(n-3)}{2}$$

O enunciado quer o número de diagonais de um polígono com **102 lados**. Assim,

$$d=\frac{102\cdot(102-3)}{2}\quad\rightarrow\quad d=\frac{102\cdot 99}{2}\quad\rightarrow\quad d=51\cdot 99\quad\rightarrow\quad \boxed{d=5.049}$$

Gabarito: LETRA D.

QUESTÕES COMENTADAS

Noções Elementares

CEBRASPE

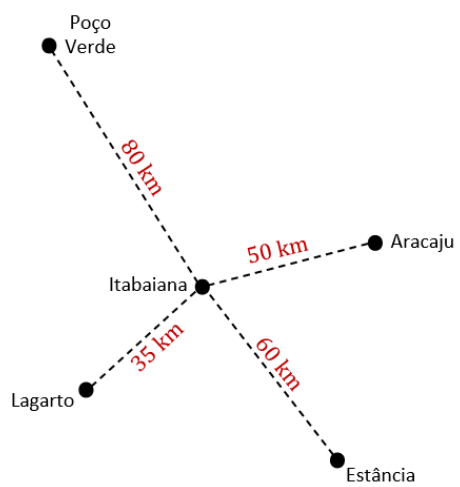
1. (CESPE/PREF. BARRA DOS COQUEIROS/2020) A seguinte tabela apresenta a distância aproximada, em linha reta, entre a cidade de Itabaiana e quatro outras cidades de Sergipe.

	Lagarto	Aracaju	Estância	Poço Verde
Itabaiana	35 km	50 km	60 km	80 km

Com base nessas informações, é correto afirmar que um círculo com área de 3.200 km² centrado em Itabaiana

A) não inclui nenhuma das outras quatro cidades listadas.
B) inclui, além de Itabaiana, apenas a cidade de Lagarto.
C) inclui, além de Itabaiana, apenas as cidades de Lagarto e Aracaju.
D) inclui, além de Itabaiana, apenas as cidades de Lagarto, Aracaju e Estância.
E) inclui todas as cidades listadas.

Comentários:
Vamos primeiro esquematizar a situação do enunciado.

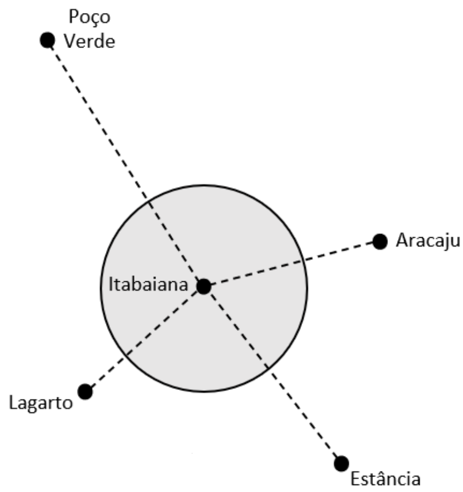


Pessoal, esse é **apenas um esquema destacando as distâncias** das cidades à Itabaiana. Não foi levado em consideração as direções reais (norte, sul, leste, oeste), pois são desnecessárias para a solução do problema. O enunciado quer um **círculo de área 3200 km² e centro em Itabaiana**. Qual raio teria esse círculo?

$$A = \pi R^2$$

Considerando $\boldsymbol{A = 3200\ km^2}$ e $\boldsymbol{\pi = 3,14}$. Ficamos com:

$$3{,}14 \cdot R^2 = 3200 \quad \rightarrow \quad R^2 = 1019{,}10 \quad \rightarrow \quad R = 31{,}92\ km$$



Note que o raio do círculo é inferior a menor distância entre cidades (31,92 km < 35 km distância até Lagarto). Sendo assim, **tal círculo não inclui nenhuma das cidades listadas**.

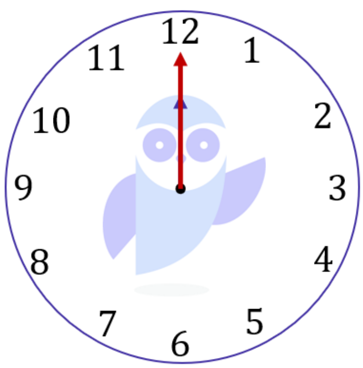
Gabarito: LETRA A.

2. (CESPE/SEFAZ-RS/2019) O relógio analógico de Audir danificou-se exatamente à zero hora (meia-noite) de certo dia, e o ponteiro dos minutos passou a girar no sentido anti-horário, mas com a mesma velocidade que tinha antes do defeito. O ponteiro das horas permaneceu funcionando normalmente, girando no sentido horário. Considerando as informações do texto, assinale a opção que apresenta a relação entre os arcos x e y percorridos, respectivamente, pelos ponteiros dos minutos e das horas do relógio de Audir entre duas sobreposições consecutivas.

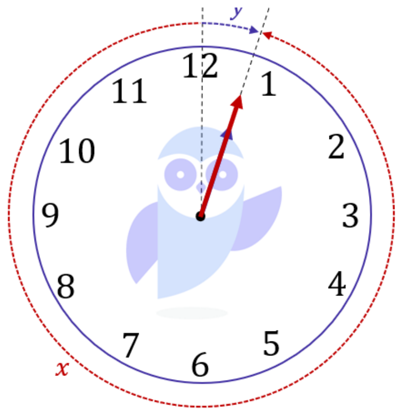
A) x - y = 90°
B) x - y = 180°
C) x + y = 180°
D) x + y = 360°
E) x = y

Comentários:

Quando deu meia-noite e o relógio começou a apresentar problemas, tínhamos a seguinte configuração.



A partir daí, **o ponteiro dos minutos (vermelho)** começa a andar pra trás (sentido anti-horário) e **o ponteiro das horas (roxo)** segue sua vida normalmente. Veja que os ponteiros irão se sobrepor **antes mesmo de completar a primeira hora**, pois, ao voltar para o "12" (e assim completar os 60 minutos), o ponteiro vermelho vai ter que passar pelo ponteiro das horas. Observe:



Os arcos formados pelos dois ponteiros fecham um círculo. Logo, **a soma dos dois deve ser igual a 360 graus**.

$$x + y = 360°$$

Gabarito: LETRA D.

Outras Bancas

3. (OMNI/PREF. LENÇOIS PTA/2021) Consideremos três pontos A, B e C em um plano π, análise as opções abaixo e marque aquela que tem uma afirmação verdadeira.

A) Entre os pontos A, B e C, sempre é possível desenhar um triângulo.

B) O segmento AB, ou seja, o segmento de reta que começa no ponto A e termina no ponto B, tem uma quantidade finita de pontos.

C) A reta que passa pelos pontos A e B, pode passar também pelo ponto C.

D) A, B e C não podem estar todos no plano π.

Comentários:

Vamos analisar as alternativas.

A) Entre os pontos A, B e C, sempre é possível desenhar um triângulo.

Errado. Pense em três pontos que são **colineares**! Nessa situação, não conseguiremos desenhar um triângulo.

B) O segmento AB, ou seja, o segmento de reta que começa no ponto A e termina no ponto B, tem uma quantidade finita de pontos.

Errado. O segmento de reta, por mais que tenha extremidades, é formado por **infinitos pontos** que "ligam" essas extremidades.

C) A reta que passa pelos pontos A e B, pode passar também pelo ponto C.

Certo! Esse é o nosso gabarito. Conforme comentamos na alternativa A, esses três pontos podem ser colineares. Dessa forma, uma reta que passa pelos pontos A e B, **também passaria por C**.

D) A, B e C não podem estar todos no plano π.

Errado. O próprio enunciado fala que os pontos estão em um plano π. Não há problema nisso. Todos os pontos **podem pertencer sim** a um mesmo plano.

Gabarito: LETRA C.

4. (AOCP/PREF. TERESÓPOLIS/2021) Sabe-se que a diferença entre o dobro do suplemento de um ângulo x e os dois quintos da medida desse mesmo ângulo x é zero. Dessa forma, é correto afirmar que a medida do ângulo x é igual a

A) 180°
B) 150°
C) 120°
D) 90°
E) 30°

Comentários:

Dois ângulos são suplementares quando **sua soma é igual a 180°**. Se temos um ângulo "x", então seu suplementar "S" é tal que:

$$x + S = 180° \qquad \rightarrow \qquad S = 180° - x \qquad (1)$$

O enunciado fala que **a diferença entre o dobro de "S" e dois quintos de "x" é zero**. Com isso:

$$2S - \frac{2x}{5} = 0 \qquad (2)$$

Podemos usar (1) em (2):

$$2 \cdot (180° - x) - \frac{2x}{5} = 0 \qquad \rightarrow \qquad 360 - 2x - \frac{2x}{5} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{12x}{5} = 360$$

$$\rightarrow \qquad x = 5 \cdot 30 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{x = 150°}$$

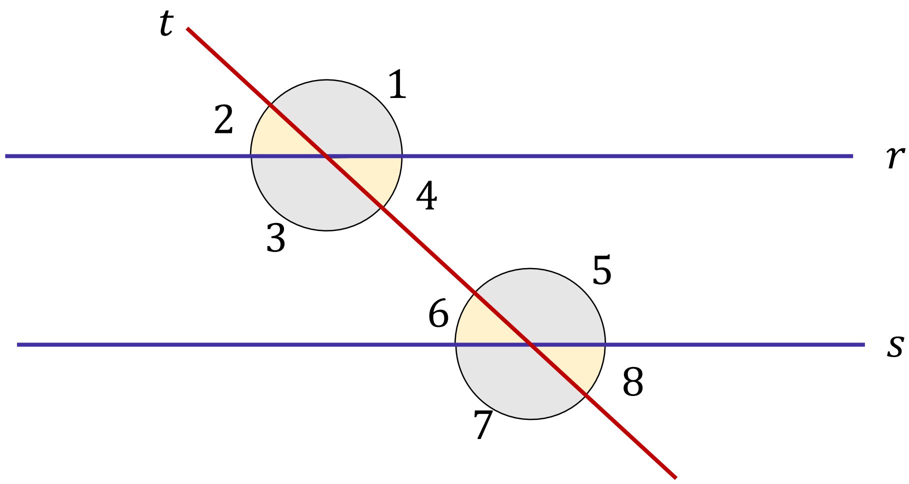
Gabarito: LETRA B.

5. (AOCP/PREF. TERESÓPOLIS/2021) Em um plano, considere duas retas r e s, distintas e paralelas entre si, e uma reta t transversal à reta r e à reta s, determinando ângulos em suas intersecções. Em relação aos ângulos determinados por essas três retas, é correto afirmar que

A) no total, são determinados 10 ângulos nas intersecções dessas três retas.
B) os pares de ângulos que estão entre as retas r e s e estão em posições alternadas em relação à reta t são denominados ângulos alternos externos.
C) os pares de ângulos que não estão entres as retas r e s e estão em posições alternadas em relação à reta t são denominados ângulos alternos internos.
D) os pares de ângulos que estão entre as retas r e s e estão do mesmo lado em relação à reta t são denominados ângulos colaterais internos.
E) os pares de ângulos que não estão entre as retas r e s e estão do mesmo lado em relação à reta t são denominados ângulos alternos.

Comentários:

Pessoal, a questão está pedindo para considerarmos aquela nossa figura que destrinchamos na teoria!



- Ângulos opostos pelo vértice: $(1,3), (2,4), (5,7)$ e $(6,8)$;
- Ângulos alternos internos: $(4,6)$ e $(3,5)$;
- Ângulos alternos externos: $(2,8)$ e $(1,7)$;
- Ângulos colaterais internos: $(3,6)$ e $(4,5)$;
- Ângulos colaterais externos: $(1,8)$ e $(2,7)$.

Com essas informações, vamos analisar as alternativas.

A) no total, são determinados 10 ângulos nas intersecções dessas três retas.
Errado. São **8 ângulos** determinados nas intersecções das três retas.

B) os pares de ângulos que estão entre as retas r e s e estão em posições alternadas em relação à reta t são denominados ângulos alternos externos.
Errado. O enunciado está se referindo aos pares de ângulos (4,6) e (3,5). Note que como esses ângulos estão entre as retas r e s, **eles são os alternos internos.**

C) os pares de ângulos que não estão entres as retas r e s e estão em posições alternadas em relação à reta t são denominados ângulos alternos internos.
Errado. O enunciado está se referindo aos pares de ângulos (2,8) e (1,7). Note que como esses ângulos não estão entre as retas r e s, **eles são os alternos externos.**

D) os pares de ângulos que estão entre as retas r e s e estão do mesmo lado em relação à reta t são denominados ângulos colaterais internos.
Certo. É isso mesmo, pessoal! Ora, se estão entre as retas r e s, eles **são internos**. Como estão do mesmo lado em relação à reta t, então **são colaterais.**

E) os pares de ângulos que não estão entre as retas r e s e estão do mesmo lado em relação à reta t são denominados ângulos alternos.
Errado. Galera, como os ângulos estão do mesmo lado em relação à reta t, eles **não podem ser alternos**, mas sim colaterais.

Gabarito: LETRA D.

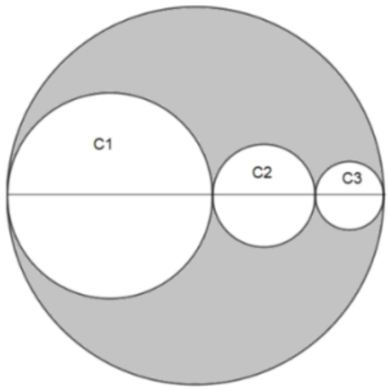
QUESTÕES COMENTADAS

Circunferências

CEBRASPE

1. (CESPE/SEDUC-AL/2021) Julgue o item subsequente, relativos a geometria.

Considere que, na figura a seguir, os raios dos círculos internos C1, C2 e C3 sejam, respectivamente, iguais a r, $r/2$ e $r/3$, em que r é um número real positivo. Nesse caso, a área da parte em cinza é igual a $2\pi r^2$.



Comentários:

O primeiro passo é perceber que o diâmetro do círculo maior **é a soma do diâmetro de todos os círculos** menores (C1, C2 e C3). Com isso,

$$D = 2r + r + \frac{2r}{3} \quad \rightarrow \quad D = \frac{11r}{3}$$

Com o valor do diâmetro, podemos encontrar **o raio**.

$$R = \frac{D}{2} \quad \rightarrow \quad R = \frac{11r}{6}$$

E agora, com o valor do raio, podemos encontrar **a área do círculo maior (exterior).**

$$A = \pi \cdot \left(\frac{11r}{6}\right)^2 \quad \rightarrow \quad A = \frac{121\pi r^2}{36}$$

Essa é a área do círculo "grandão". Agora, para determinar a área da parte em cinza, precisamos **"tirar" as áreas dos círculos C1, C2 e C3** dessa área do círculo maior. Sendo assim,

- Área do Círculo C1:

$$A_1 = \pi R_1^2 \quad \rightarrow \quad A_1 = \pi r^2$$

- Área do Círculo C2:

$$A_2 = \pi R_2^2 \quad \rightarrow \quad A_2 = \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad A_2 = \frac{\pi r^2}{4}$$

- Área do Círculo C3:

$$A_3 = \pi R_3^2 \quad \rightarrow \quad A_3 = \pi \left(\frac{r}{3}\right)^2 \quad \rightarrow \quad A_3 = \frac{\pi r^2}{9}$$

Agora, podemos encontrar a área da parte cinza:

$$A_{cinza} = A - A_1 - A_2 - A_3$$

$$A_{cinza} = \frac{121\pi r^2}{36} - \pi r^2 - \frac{\pi r^2}{4} - \frac{\pi r^2}{9} \quad \rightarrow \quad A_{cinza} = \frac{85\pi r^2}{36} - \frac{13\pi r^2}{36} \quad \rightarrow \quad A_{cinza} = \frac{72\pi r^2}{36}$$

$$\boxed{A_{cinza} = 2\pi r^2}$$

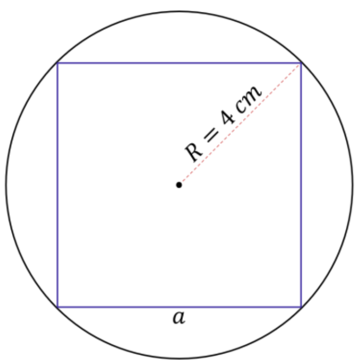
Gabarito: CERTO.

2. (CESPE/IFF/2018) Um quadrado tem todos os seus vértices sobre uma circunferência de 4 cm de raio. Nesse caso, a área desse quadrado é igual a

A) 4 cm²
B) 8 cm²
C) 16 cm²
D) 32 cm²
E) 64 cm²

Comentários:

Temos um quadrado que está dentro de uma circunferência. Essa circunferência raio igual a 4 cm. Queremos determinar a área do quadrado. Lembre-se que a área de um quadrado nada mais é do que **comprimento do lado elevado ao quadrado**. Tudo bem? Acompanhe como fica a esquematização do problema:



Note que **o raio da circunferência é igual a metade da diagonal do quadrado (d)**. Lembre-se:

$$d = a\sqrt{2}$$

Em outras palavras, temos que **a diagonal do quadrado coincide com diâmetro da circunferência**. Portanto, podemos determinar quanto vale "a".

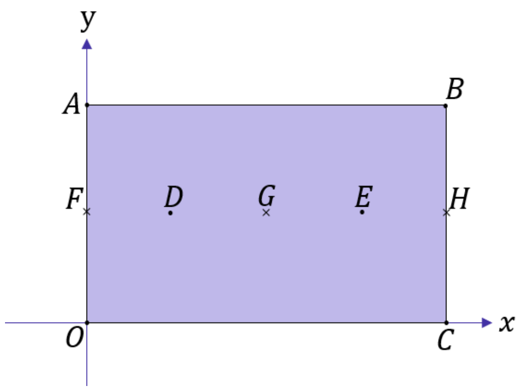
$$8 = a\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad a = \frac{8}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a = 4\sqrt{2}\ cm}$$

Com o lado encontrado, podemos calcular a sua área.

$$A_Q = a^2 \quad \rightarrow \quad A_Q = \left(4\sqrt{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad A_Q = 16 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_Q = 32\ cm^2}$$

Gabarito: LETRA D.

3. (CESPE/SEDUC-AL/2017) A figura seguinte mostra, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, em que a unidade de medida é o metro, uma região retangular OABC. O lado OA mede 600 m e o lado OC mede 800 m.

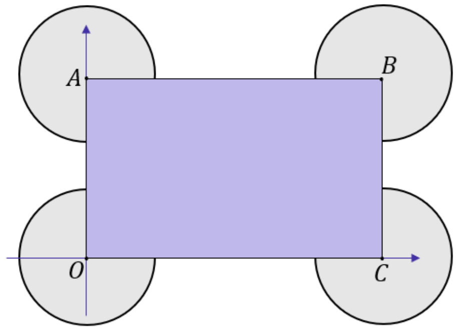


A figura mostra também os pontos F = ponto médio de OA, H = ponto médio de CB, G = centro do retângulo OABC, D = ponto médio de FG, e E = ponto médio de GH. Nos pontos O, A, B, C, D e E foram instalados pontos de acesso à Internet — wi-fi. Nessa configuração, o usuário consegue se conectar à Internet desde que o seu smartphone esteja a 200 m ou menos de qualquer desses pontos de acesso. Com base nessas informações e na figura apresentada, julgue o próximo item.

Na parte externa ao retângulo OABC, o acesso à Internet a partir dos referidos pontos de acesso se restringe a uma região em que a área é inferior a 384.000 m².

Comentários:

Galera, os pontos de acesso **localizados nos vértices** do retângulo são os que possibilitarão wi-fi na região externa. Note que esses pontos de acessos alcançam uma região de **200 metros ao redor**, formando uma espécie de "área circular". Observe o esquema abaixo.



Observe que cada ponto alcança uma área externa equivalente a **3/4 de uma circunferência** de raio igual a 200 metros. Sabendo que **a área de uma circunferência é πR^2**, então a área externa fica:

$$A_{externa} = \frac{3}{4} \cdot \pi R^2$$

Vamos considerar $\boldsymbol{\pi = 3,14}$.

$$A_{externa} = \frac{3}{4} \cdot (3{,}14) \cdot 200^2 \quad \rightarrow \quad A_{externa} = \frac{3}{4} \cdot 125600 \quad \rightarrow \quad A_{externa} = 94200\ m^2$$

Como devemos **considerar os <u>4 pontos</u>**, então basta multiplicar esse resultado por 4 para obter a área total.

$$A_{externa\ total} = 4 \cdot 94200 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{externa\ total} = 376.800\ m^2}$$

Note que a área é realmente **<u>inferior</u> a 382.000 m²**. Logo, item correto.

Gabarito: CERTO.

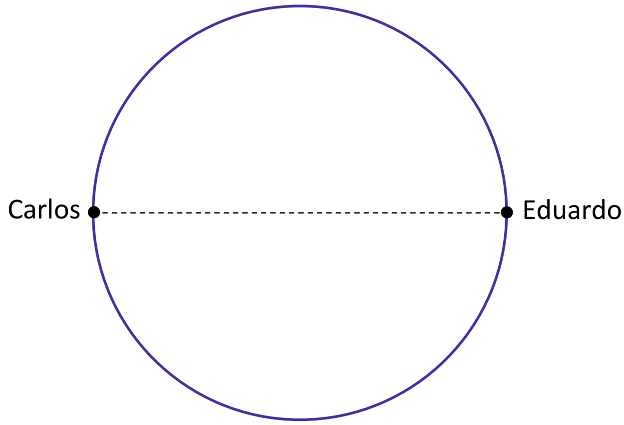
CESGRANRIO

4. (CESGRANRIO/LIQUIGAS/2018) Carlos e Eduardo estão em um pátio circular e notaram que, se ambos estivessem sobre a circunferência que limita o pátio, então a maior distância que um deles poderia ficar do outro mediria 24 metros. Ao notarem isso, eles se dispuseram em posições que realizam tal distância máxima. Se Eduardo ficar parado em sua posição, e Carlos caminhar até ele, pela circunferência do pátio, então, a medida mínima do comprimento percorrido por Carlos, em metros, será mais próxima de

A) 30
B) 15
C) 45
D) 38
E) 70

Comentários:

Questão bem legal envolvendo circunferências! Vamos desenhar!



Note que a distância máxima entre Carlos e Eduardo é exatamente **o diâmetro da circunferência**. Como ele vale **24 metros** (de acordo com o enunciado), podemos encontrar o raio.

$$\mathrm{R} = \frac{24}{2} \quad \rightarrow \quad \mathrm{R} = 12\ \mathrm{m}$$

A questão pergunta **qual a distância entre Carlos e Eduardo**, quando eles percorrem a circunferência. A distância entre os dois é exatamente **metade do comprimento da circunferência**.

$$Distância = \frac{C}{2} \quad \rightarrow \quad Distância = \frac{2\pi R}{2} \quad \rightarrow \quad Distância = \pi R$$

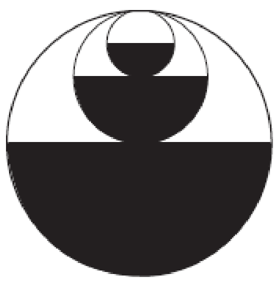
Substituindo $R = 12$ e $\pi = 3{,}14$, ficamos com:

$$\text{Distância} = 12 \cdot 3{,}14 \quad \rightarrow \quad \mathbf{Distância = 37,68\ m}$$

Comparando com as alternativas, vemos que **a mais próxima é a letra D**.

Gabarito: LETRA D.

5. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2014) A figura a seguir foi construída de modo que cada círculo menor tangencia um diâmetro do círculo imediatamente maior no seu centro. A área pintada mede 63 cm².



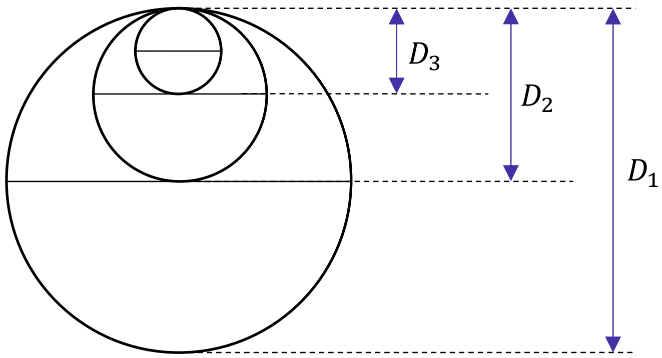
A área do círculo maior, em cm², vale

A) 76

B) 84
C) 90
D) 93
E) 96

Comentários:

Questão bem interessante!! A primeira coisa que quero que vocês percebam **é a relação entre os diâmetros das circunferências**. Para isso, observe a figura abaixo.



Ora, veja que **o diâmetro de uma sempre será igual ao dobro do <u>imediatamente</u> menor**. Sendo assim,

$$\mathrm{D}_2 = 2\mathrm{D}_3 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{D}_1 = 2\mathrm{D}_2 = 4R_3$$

Vamos escrever em função dos raios.

$$\mathrm{R}_2 = 2\mathrm{R}_3 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{R}_1 = 2\mathrm{R}_2 = 4R_3$$

Agora, vamos analisar as áreas. Perceba que **as áreas escuras são sempre metade da área da circunferência**. Vamos fazer isso, **tentando escrever tudo em função de R_3.**

$$A_1 = \frac{\pi R_1^2}{2} \quad \rightarrow \quad A_1 = \frac{\pi(4R_3)^2}{2} \quad \rightarrow \quad A_1 = \frac{16\pi R_3^2}{2} \quad \rightarrow \quad A_1 = 8\pi R_3^2$$

$$A_2 = \frac{\pi R_2^2}{2} \quad \rightarrow \quad A_2 = \frac{\pi(2R_3)^2}{2} \quad \rightarrow \quad A_2 = \frac{4\pi R_3^2}{2} \quad \rightarrow \quad A_2 = 2\pi R_3^2$$

$$A_3 = \frac{\pi R_3^2}{2}$$

De acordo com o enunciado, **a área pintada mede 63 cm².** Logo,

$$A_1 + A_2 + A_3 = 63$$

$$8\pi R_3^2 + 2\pi R_3^2 + \frac{\pi R_3^2}{2} = 63 \quad \rightarrow \quad \frac{20\pi R_3^2 + \pi R_3^2}{2} = 63 \quad \rightarrow \quad \frac{21\pi R_3^2}{2} = 63 \quad \rightarrow \quad \pi R_3^2 = 6$$

Pessoal, **com o valor de "πR_3^2"** já conseguimos responder a questão. Afinal, metade da área do círculo maior é:

$$A_1 = 8\pi R_3^2$$

Substituindo $\pi R_3^2 = 6$:

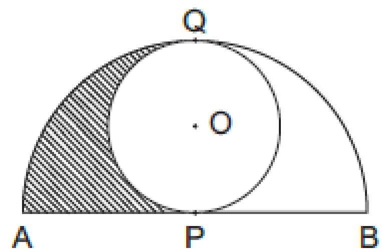
$$\mathrm{A}_1 = 8 \cdot 6 \quad \rightarrow \quad \mathrm{A}_1 = 48 \text{ cm}^2$$

A área do círculo maior **é o dobro**.

$$\mathrm{A} = 2\mathrm{A}_1 = 2 \cdot 48 = 96 \text{ cm}^2$$

Gabarito: LETRA E.

6. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2009)



A figura acima ilustra um círculo de centro em O e raio igual a 1 cm, inscrito em um semicírculo. P é o ponto médio do segmento AB. O círculo tangencia o semicírculo em P e Q. Os pontos O, P e Q são colineares. A área hachurada vale, em cm²,

A) 3π

B) 2π

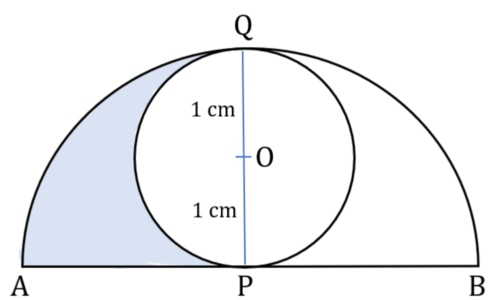
C) $3\pi/2$

D) π

E) $\pi/2$

Comentários:

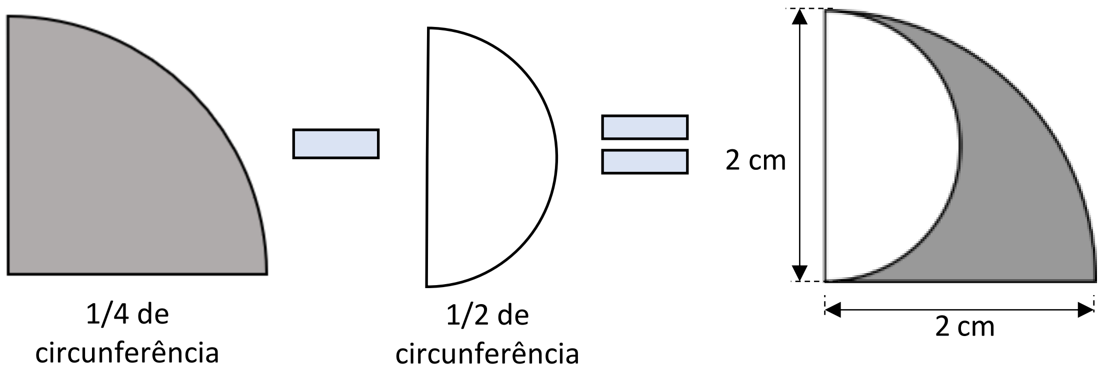
Vamos analisar a figura do enunciado com calma para tirarmos algumas conclusões.



Pessoal, perceba que **o diâmetro do círculo menor é igual ao raio do semicírculo**! Logo,

$$\mathrm{AP} = \mathrm{QP} = \mathrm{PB} = 2 \text{ cm}$$

A área hachurada equivale a um quarto da circunferência maior, **descontada** de metade da área da circunferência inscrita! Vou desenhar para ficar mais fácil de visualizar o que vamos fazer:



Sendo assim,

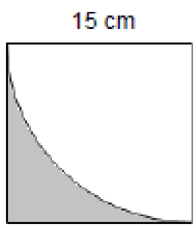
$$A_{hachurada} = \frac{A_{maior}}{4} - \frac{A_{menor}}{2}$$

$$A_{hachurada} = \frac{\pi \cdot 2^2}{4} - \frac{\pi \cdot 1^2}{2} \quad \rightarrow \quad A_{hachurada} = \pi - \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{hachurada} = \frac{\pi}{2}}$$

Gabarito: LETRA E.

FCC

7. (FCC/SABESP/2019) Verifica-se na figura abaixo, um quadrado e um arco de circunferência.



O perímetro da região cinza é:

A) $30 + \left(\frac{15}{2}\right)\pi$

B) $30 + \left(\frac{2}{15}\right)\pi$

C) $15 + \left(\frac{15}{2}\right)\pi$

D) $15 + \left(\frac{2}{15}\right)\pi$

E) 30

Comentários:

Lembre-se que o perímetro nada mais é do que a soma dos lados. A região cinza possui três lados**: dois deles coincidem com o lado do quadrado** e **o terceiro é o comprimento de um quarto de circunferência**. Ademais, tenha em mente que o perímetro (comprimento) de uma circunferência pode ser encontrado por meio da seguinte relação:

$$C = 2\pi R$$

De acordo com a figura, **o raio da circunferência é o próprio lado do quadrado**, ou seja, **15 cm.** Sendo assim,

$$C = 2\pi \cdot 15 \quad \rightarrow \quad C = 30\pi$$

Como **apenas um quarto da circunferência está dentro do quadrado**, então o comprimento que estamos procurando é um quarto do que achamos acima:

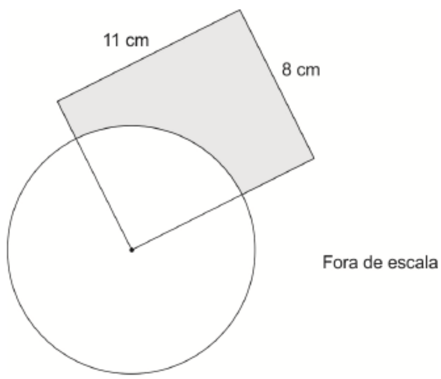
$$\frac{C}{4} = \frac{30\pi}{4} = \frac{15\pi}{2}$$

Com isso, podemos encontrar o perímetro da figura da seguinte forma:

$$\text{Perímetro} = 15 + 15 + \frac{15\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \textbf{Perímetro} = \mathbf{30} + \frac{\mathbf{15\pi}}{\mathbf{2}}$$

Gabarito: LETRA A.

8. (FCC/PREF. SJRP/2019) Um dos vértices de um retângulo de lados 11 cm e 8 cm é o centro de uma circunferência, conforme mostra a figura abaixo.



Sabendo que a área da parte sombreada da figura é $\frac{352-\pi}{4}$ cm², o raio da circunferência, em cm, mede:

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

Comentários:

Pessoal, o que devíamos perceber nessa questão é que um quarto da circunferência está "entrando" no retângulo e diminuindo sua área. Sabemos disso pois **o vértice do retângulo coincide com o centro da circunferênci**a, fazendo com que **o ângulo do setor formado seja de 90°**. Ora, um setor com 90° corresponde 1/4 de um círculo, uma vez que o mesmo perfaz um total de 360°.

Dito isso, podemos concluir que a área sombreada é igual a **área do retângulo subtraída da área de um quarto da circunferência**.

$$A_{sombreada} = A_{retângulo} - \frac{A_{circulo}}{4}$$

O enunciado disse que a área sombreada é $\frac{352-\pi}{4}$ $\mathbf{cm^2}$. Além disso, podemos calcular a área do retângulo, pois conhecemos os seus lados.

$$\mathrm{A_{retângulo}} = 11 \cdot 8 \quad \rightarrow \quad \mathrm{A_{retângulo}} = 88\ \mathrm{cm^2}$$

Sendo assim,

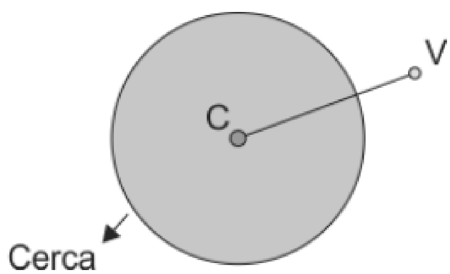
$$\frac{352-\pi}{4} = 88 - \frac{A_{círculo}}{4} \quad \rightarrow \quad 88 - \frac{\pi}{4} = 88 - \frac{A_{círculo}}{4} \quad \rightarrow \quad A_{círculo} = \pi\ \ cm^2$$

Sabemos que **a área da circunferência é dada por πR^2**. Logo,

$$\pi \mathrm{R}^2 = \pi \quad \rightarrow \quad \mathrm{R} = 1\ \mathrm{cm}$$

Gabarito: LETRA A.

9. (FCC/SEDU-ES/2018) Um celeiro circular de raio 9 metros e centro C está cercado para que os animais não possam entrar. Uma vaca, indicada por V, está fora do celeiro e amarrada por uma corda de comprimento $CV = 12$ metros. Essa vaca pode pastar em qualquer local que esteja fora do celeiro e ao alcance da extensão da corda que a amarra, conforme mostra a figura abaixo.

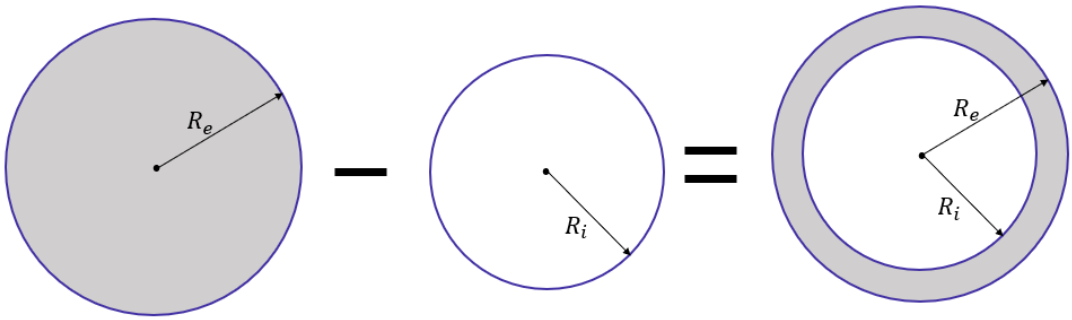


Adotando $\pi = 3$, a área total que está ao alcance da vaca para que ela possa pastar, em m², é igual a

A) 120.
B) 27.
C) 169.
D) 189.
E) 18.

Comentários:

Pessoal, temos uma situação de coroa circular!! Relembre-se:



Fazendo um paralelo com a questão, a circunferência maior é formada pela corda amarrada no centro do celereiro. Dessa forma, temos que $\boldsymbol{R_e = 12\ m}$. Por sua vez, a circunferência menor é a delimitada pela cerca. Como essa **cerca delimita o celereiro**, que tem raio igual a 9 m, então $\boldsymbol{R_i = 9}$ **m**.

A área total que a vaca terá para pastar **será exatamente a área da coroa circular** sombreada na figura acima. Podemos encontrá-la da seguinte forma:

$$A_{coroa} = A_{externo} - A_{interno} \quad \rightarrow \quad A_{coroa} = \pi R_e^2 - \pi R_i^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{coroa} = \pi(R_e^2 - R_i^2)}$$

Substituindo $R_e = 12$ e $R_i = 9$, ficamos com:

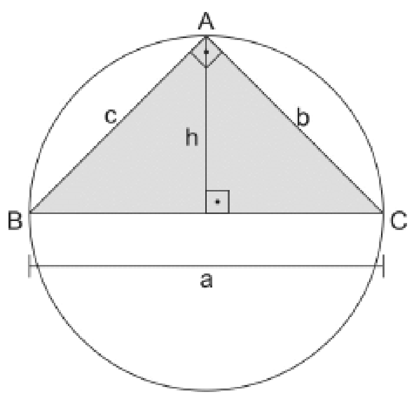
$$A_{coroa} = \pi(12^2 - 9^2) \quad \rightarrow \quad A_{coroa} = \pi(144 - 81) \quad \rightarrow \quad A_{coroa} = 63\pi\ m^2$$

A questão pede para considerarmos $\pi = 3$. Assim,

$$A_{coroa} = 63 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{coroa} = 189\ m^2}$$

Gabarito: LETRA D.

10. (FCC/EMAE/2018) Considere o triângulo retângulo isósceles abaixo com $\boldsymbol{a = 10\sqrt{2}}$ m.



Então, c e b medem, respectivamente:

A) $6\sqrt{2}$ e $8\sqrt{2}$ m.

B) 6 e 8 m.
C) $5\sqrt{2}$ e $5\sqrt{2}$ m.
D) $7\sqrt{2}$ e $7\sqrt{2}$ m.
E) 10 e 10 m.

Comentários:
Galera, para resolver essa questão, é interessante percebermos algumas coisas ao olhar para o desenho.

1) A base do triângulo coincide com **o diâmetro da circunferência**.

2) Como **o triângulo é isósceles, $c = b$**. Dessa forma, já conseguiríamos eliminar as alternativas A e B.

3) Por fim, vale notar que **a altura do triângulo é igual ao raio da circunferência**. Logo, $h = R$.

Ok, com essas considerações, podemos analisar melhor. Note que ABC é um triângulo retângulo. **A hipotenusa desse triângulo retângulo é o próprio "a"**. Com isso, podemos usar o teorema de Pitágoras e escrever que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Já comentamos que $b = c$. Dessa forma,

$$a^2 = b^2 + b^2 \quad \rightarrow \quad 2b^2 = a^2 \quad \rightarrow \quad b^2 = \frac{a^2}{2} \quad \rightarrow \quad b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Substituindo o valor de $\boldsymbol{a = 10\sqrt{2}}$:

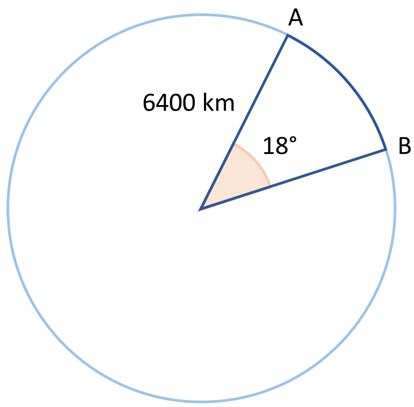
$$b = \frac{10\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad b = 10\ m$$

Assim, temos que: $\boldsymbol{b = c = 10\ m}$

Gabarito: LETRA E.

11. (FCC/SEDU-ES/2018) A Terra é aproximadamente uma esfera de raio igual a 6400 km. Adotando-se essa medida do raio terrestre e π = 3, a distância entre duas localidades que estejam sobre a linha do Equador terrestre e em meridianos afastados em 18° um do outro é igual a
A) 2560 km.
B) 1280 km.
C) 3840 km.
D) 1920 km.
E) 640 km.

Comentários:
Vamos desenhar e usar as informações que nos são passadas pelo enunciado.



Primeiramente, podemos calcular **quanto vale a circunferência da Terra**, isto é,

$$C = 2\pi R$$

O enunciado disse que $R = 6400\ km$ e para considerar $\pi = 3$. Assim,

$$\mathrm{C} = 2 \cdot 3 \cdot 6400 \quad \rightarrow \quad \mathrm{C} = 38.400\ \mathrm{km}$$

Note que como **uma circunferência perfaz 360° e setor tem 18°**, então

$$\frac{360°}{18°} = 20$$

Logo, **o setor destacado é 1/20 de uma circunferência**. Logo, seu comprimento também será 1/20 do comprimento total.

$$d_{AB} = \frac{38.400}{20} \quad \rightarrow \quad d_{AB} = 1920\ km$$

Gabarito: LETRA D.

12. (FCC/METRO SP/2016) Em um gráfico de setores (gráfico de "pizza") utilizado para representar a distribuição de todos os funcionários de uma empresa por diferentes faixas salariais, a faixa salarial com maior porcentagem de funcionários ocupa 3/8 do gráfico. O setor circular correspondente a essa faixa salarial tem ângulo central de medida igual a

A) 120°
B) 90°
C) 75°
D) 135°
E) 225°

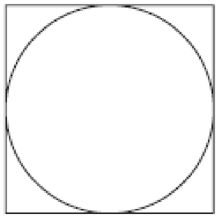
Comentários:

Pessoal, **uma circunferência inteira perfaz um ângulo de 360°**. Se a faixa salarial em questão ocupa 3/8 do *gráfico de "pizza"*, então o ângulo central desse setor será dado por:

$$\alpha_{setor} = 360° \cdot \left(\frac{3}{8}\right) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha_{setor} = 135°}$$

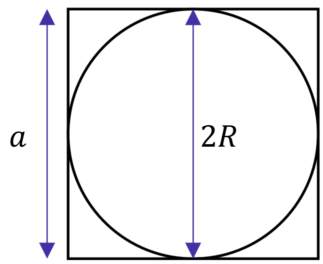
Gabarito: LETRA D.

13. (FCC/CM SÃO PAULO/2014) Para se obter a área de um círculo, multiplica-se o quadrado da medida do raio pelo número π, que vale aproximadamente 3,14. Para se obter a área de um quadrado, basta elevar a medida do lado ao quadrado. Na figura, temos um círculo inscrito em um quadrado de área igual a 100 cm².



A área aproximada da região do quadrado não coberta pelo círculo, em centímetros quadrados, é
A) 78,5.
B) 84,3.
C) 21,5.
D) 157.
E) 62,7.

Comentários:
Galera, vamos **incorporar algumas informações** nessa figura da questão.



Se **a área do quadrado é 100 cm²**, podemos encontrar seu lado.

$$a^2 = 100 \quad \rightarrow \quad a = 10\ cm$$

Note que **o lado do quadrado também é a medida do diâmetro** da circunferência. Assim,

$$2R = 10 \quad \rightarrow \quad R = 5\ cm$$

Com o raio determinado, podemos calcular a área da circunferência.

$$A = \pi R^2 \quad \rightarrow \quad A = 3{,}14 \cdot 5^2 \quad \rightarrow \quad A = 3{,}14 \cdot 25 \quad \rightarrow \quad A = 78{,}5\ cm^2$$

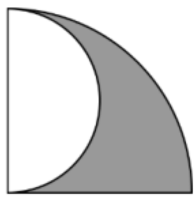
A questão pede **a área da região não coberta pelo círculo**. Para isso, devemos pegar a área do quadrado e subtrair a área do círculo.

$$S = 100 - 78{,}5 \quad \rightarrow \quad S = 21{,}5\ cm^2$$

Gabarito: LETRA C.

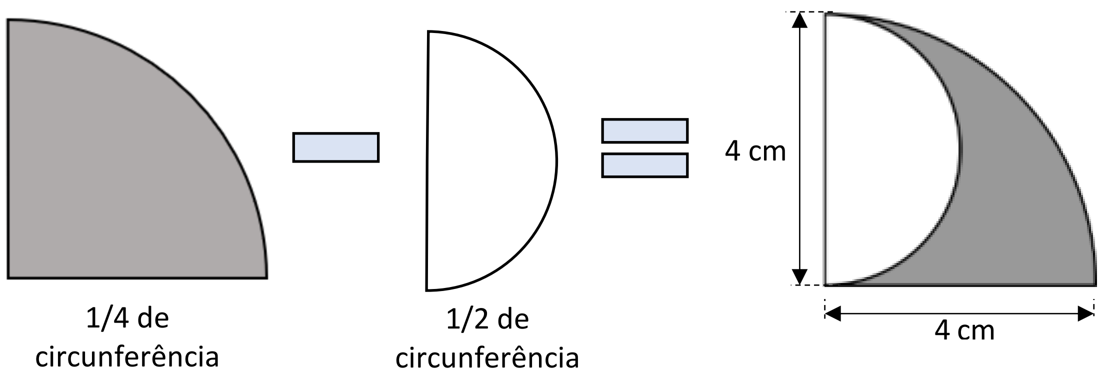
FGV

14. (FGV/CODEMIG/2015) A região sombreada na figura é conhecida como “barbatana de tubarão” e foi construída a partir de um quadrante de círculo de raio 4 e de um semicírculo.



A área dessa “barbatana de tubarão” é:
A) 2π
B) $5\pi/2$
C) 3π
D) $7\pi/2$
E) 4π

Comentários:
Vamos esquematizar a situação.



Vamos primeiro calcular a área do quadrante circular (A_1), como o raio dele é "4", ficamos com:

$$A_1 = \frac{\pi R^2}{4} \quad \rightarrow \quad A_1 = \frac{\pi \cdot 4^2}{4} \quad \rightarrow \quad A_1 = 4\pi$$

Além disso, devemos calcular a área de um semicírculo (A_2). Note que "4" é o diâmetro desse semicírculo. Consequentemente, como **o raio é metade do diâmetro**, temos que o raio desse semicírculo é "2".

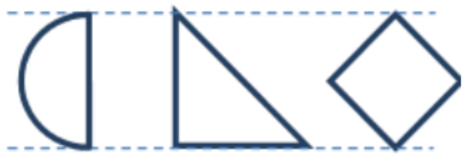
$$A_2 = \frac{\pi r^2}{2} \quad \rightarrow \quad A_2 = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} \quad \rightarrow \quad A_2 = 2\pi$$

A área da barbatana vai ser dada pela **subtração da área do quadrante circular pela área do semicírculo**.

$$A_{barbatana} = A_1 - A_2 \quad \rightarrow \quad A_{barbatana} = 4\pi - 2\pi \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{barbatana} = 2\pi}$$

Gabarito: LETRA A.

15. (FGV/PREF. OSASCO/2014) Considere o semicírculo, o triângulo retângulo e o quadrado mostrados abaixo.



Sabendo-se que o diâmetro no semicírculo, os catetos do triângulo retângulo e a diagonal do quadrado têm o mesmo tamanho, é correto concluir que:

A) apenas o semicírculo e o quadrado têm a mesma área;

B) apenas o quadrado e o triângulo têm a mesma área;

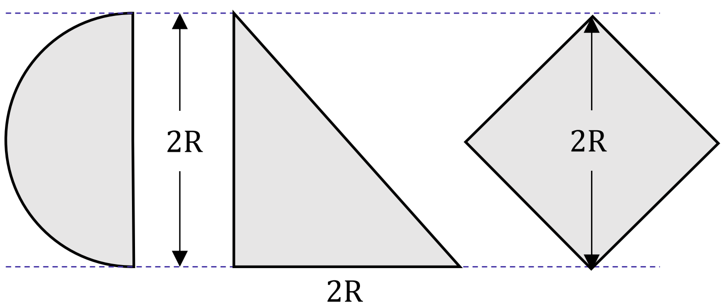
C) apenas o semicírculo e o triângulo têm a mesma área;

D) todas as três figuras têm áreas diferentes;

E) as três figuras têm a mesma área.

Comentários:

Vamos esquematizar melhor a situação, chamando de R o raio do semicírculo.



Agora, devemos calcular todas as áreas em função de R.

- A área do semicírculo é **metade da área da circunferência**.

$$A_{semicírculo} = \frac{\pi R^2}{2}$$

- A área do triângulo retângulo é o **produto dos catetos dividido por 2**.

$$A_{triângulo} = \frac{(2R) \cdot (2R)}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{triângulo} = 2R^2}$$

- A área do quadrado é o lado elevado ao quadrado.

$$A_{quadrado} = L^2$$

Note que **não temos o lado do quadrado, <u>mas sim sua diagonal</u>, que vale 2R**. Lembre-se que a diagonal do quadrado é dada por:

$$d = L\sqrt{2}$$

Assim,

$$2R = L\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad L = \frac{2R}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad L = R\sqrt{2}$$

Com isso, podemos calcular a área do quadrado em função de R.

$$A_{quadrado} = \left(R\sqrt{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{quadrado} = 2R^2}$$

Portanto, observe que apenas as áreas do quadrado e do triângulo são iguais, conforme alternativa B.

Gabarito: LETRA B.

Outras Bancas

16. (FUNDATEC/BM RS/2022) Um círculo de raio r tem área πr^2. Se dobrarmos o seu raio, teremos que a sua área aumenta:

A) 2 vezes.
B) 4 vezes.
C) 6 vezes.
D) 8 vezes.
E) 10 vezes.

Comentários:

Se um círculo tem raio "r", então sua área é dada por:

$$A = \pi r^2$$

Agora, se **o círculo passa a ter raio igual a "2r"**, sua nova área é dada por:

$$S = \pi \cdot (2r)^2 \quad \rightarrow \quad S = \pi \cdot 4r^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S = 4\pi r^2}$$

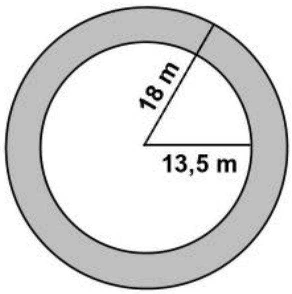
Ora, como $A = \pi r^2$, podemos usar esse fato na expressão acima:

$$S = 4A$$

Ou seja, **a área aumenta 4 vezes**!

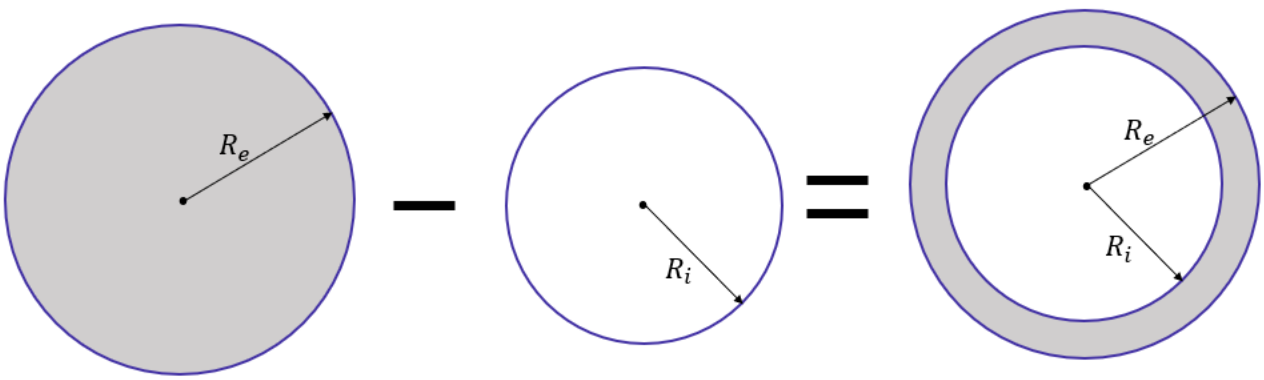
Gabarito: LETRA B.

17. (FUNPAR/PM-PR/2021) Um irrigador distribui água numa região circular, de raio 13,5 m. Devido a um defeito, esse irrigador precisou ser trocado por outro, que passou a irrigar uma região circular de raio 18 m. Assinale a alternativa que apresenta a área da parte cinza, indicada na figura abaixo, que corresponde à região que passou a ser coberta pelo segundo irrigador, além daquela coberta pelo primeiro. Use $\pi = \frac{22}{7}$



A) 346,50 m².
B) 396,00 m².
C) 409,50 m².
D) 445,50 m².
E) 495,00 m².

Comentários:
Ótima questão para treinarmos um pouco o que vimos na teoria sobre coroa circular!



Dessa forma, a área da coroa é dada por:

$$\boldsymbol{A_{coroa} = \pi\left(R_e^2 - R_i^2\right)}$$

Com as informações do enunciado, podemos fazer:

$$A_{coroa} = \frac{22}{7} \cdot (18^2 - 13{,}5^2) \quad \rightarrow \quad A_{coroa} = \frac{22}{7} \cdot (324 - 182{,}25) \quad \rightarrow \quad A_{coroa} = \frac{22 \cdot 141{,}75}{7}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A_{coroa} = 445{,}5\ \mathrm{m}^2}}$$

Gabarito: LETRA D.

18. (FUNDATEC/PREF. AMETISTA DO SUL/2021) Quantos metros mede a circunferência de um círculo cujo diâmetro é igual a 18 m? (utilizar $\pi = 3{,}14$).

A) 56,52.

B) 70,65.

C) 84,78.

D) 98,91

E) 113,04.

Comentários:

Lembre-se que **o comprimento de uma circunferência** é dado por:

$$C = 2\pi R$$

Se a circunferência em questão tem 18 metros de diâmetro, então **seu raio é metade desse valor**, ou seja, **9** metros. Com isso:

$$C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 9 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{C = 56{,}52\ \mathrm{m}}}$$

Gabarito: LETRA A.

QUESTÕES COMENTADAS

Triângulos

CEBRASPE

1. (CESPE/FUB/2022) Julgue o item que se segue, relacionados a geometria plana e espacial.

Considere que um triângulo ABC tenha lados com as seguintes medidas: 3 cm, 5 cm e 7 cm. Se o triângulo DEF é semelhante ao triângulo ABC e tem perímetro 25 cm, então o menor lado do triângulo DEF é 5 cm.

Comentários:
Temos todos os lados do triângulo ABC, conseguimos calcular o perímetro (2p).

$$2p_{ABC} = 3 + 5 + 7 \quad \rightarrow \quad 2p_{ABC} = 15 \text{ cm}$$

Como também temos **o perímetro do triângulo DEF**, podemos calcular **a razão de semelhança (k)**.

$$k = \frac{2p_{ABC}}{2p_{DEF}} \quad \rightarrow \quad k = \frac{15}{25} \quad \rightarrow \quad k = \frac{3}{5} \quad \rightarrow \quad k = 0{,}6$$

Agora, com a razão de semelhança, conseguimos calcular **o menor lado do triângulo DEF** $(\boldsymbol{l_{DEF}})$. Para isso, devemos utilizar também **o menor lado do triângulo ABC** $(\boldsymbol{l_{ABC}})$, ou seja, 3 cm.

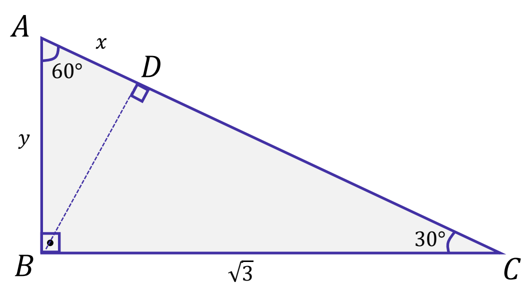
$$k = \frac{l_{ABC}}{l_{DEF}} \quad \rightarrow \quad l_{DEF} = \frac{l_{ABC}}{k} \quad \rightarrow \quad l_{DEF} = \frac{3}{0{,}6} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{l_{DEF} = 5 \text{ cm}}}$$

Gabarito: CERTO.

2. (CESPE/FUB/2022) Julgue o item que se segue, relacionados a geometria plana e espacial.

Seja ABC um triângulo com $A\hat{B}C = 90°$ e $A\hat{C}B = 30°$. Se $\overline{BC} = \sqrt{3}$ cm e se a altura com relação ao vértice B encontra o segmento $\overline{AC}$ no ponto D, então o comprimento do segmento $\overline{AD}$ é 1 cm.

Comentários:
Vamos esquematizar o triângulo ABC com as informações do item!



Queremos determinar "x"! Para isso, precisaremos primeiro encontrar "y".

$$\tan 30° = \frac{y}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{3}\tan 30°$$

A tangente de 30° é uma daquelas que **você precisa <u>decorar</u>**! Trata-se de um ângulo notável! Vamos revisitar aquela tabela!

	Seno	Cosseno	Tangente
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Com isso,

$$y = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad \mathrm{y} = 1 \text{ cm}$$

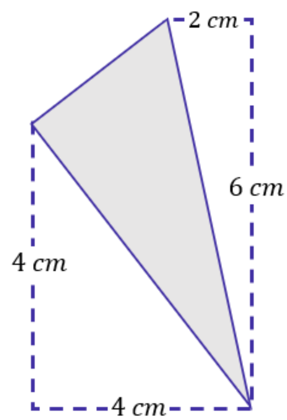
Agora, com o valor de "y", podemos encontrar "x", observando **o triângulo ADB**.

$$\cos 60° = \frac{x}{y} \quad \rightarrow \quad x = y \cdot \cos 60° \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \frac{1}{2} \text{ cm}}$$

Note que **"x" é igual a 0,5 cm**. O item afirma que é igual a 1 cm. Logo, está **errado**.

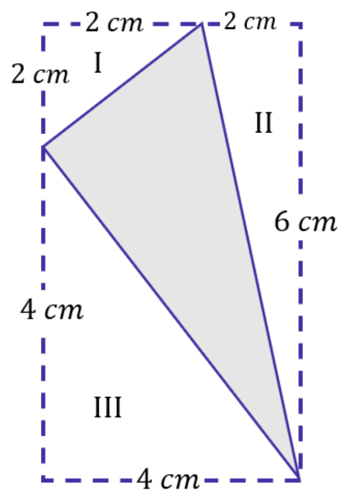
Gabarito: ERRADO.

3. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) O triângulo ABC mostrado a seguir está inscrito no retângulo incompleto, de lados pontilhados. As medidas dos lados do retângulo podem ser observadas na figura seguinte.



O valor da área do triangulo ABC apresentado anteriormente é igual a
A) 6 cm²
B) 7 cm²
C) 8 cm²
D) 12 cm²
E) 16 cm²

Comentários:
Vamos desenhar o retângulo **completo.**



Note que temos três regiões que são triângulos retângulos. Se pegarmos **a área do retângulo e subtrair a área dessas regiões, vamos obter a área cinza**. Assim,

- Área do Retângulo: **produto dos lados**.

$$A_R = 4 \cdot 6 \qquad \rightarrow \qquad A_R = 24\ cm^2$$

- Área do Triângulo Retângulo: **produto dos catetos dividido por 2**.

$$A_I = \frac{2 \cdot 2}{2} \qquad \rightarrow \qquad A_I = 2\ cm^2$$

$$A_{II} = \frac{2 \cdot 6}{2} \qquad \rightarrow \qquad A_{II} = 6\ cm^2$$

$$A_{III} = \frac{4 \cdot 4}{2} \qquad \rightarrow \qquad A_{III} = 8\ cm^2$$

Com cada uma das áreas das regiões, podemos determinar **a área do triângulo cinza**.

$$A_{cinza} = A_R - A_I - A_{II} - A_{III} \qquad \rightarrow \qquad A_{cinza} = 24 - 2 - 6 - 8$$

$$\boldsymbol{A_{cinza} = 8\ cm^2}$$

Gabarito: LETRA C.

4. (CESPE/SEFAZ-RS/2018) Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 13 centímetros e um dos catetos mede 5 centímetros. Nesse triângulo, considere o retângulo inscrito, em que o comprimento do lado maior é igual ao dobro do comprimento do lado menor, e um dos lados maiores está sobre o cateto maior do triângulo. Com base nessas informações, é correto afirmar que a área desse retângulo é igual a

A) $\frac{11.250}{529}\ cm^2$

B) $\frac{3.600}{289}\ cm^2$

C) $\frac{3.600}{49}\ cm^2$

D) $\frac{1800}{121} cm^2$

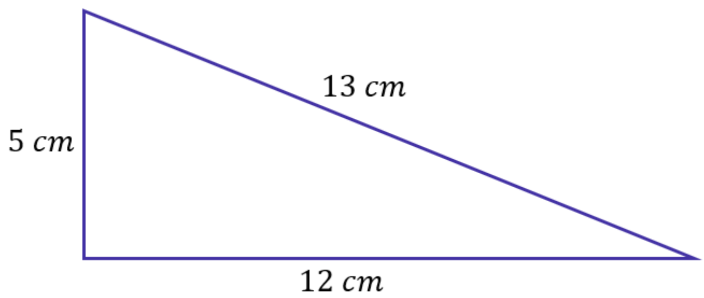
E) $1.800\ cm^2$

Comentários:

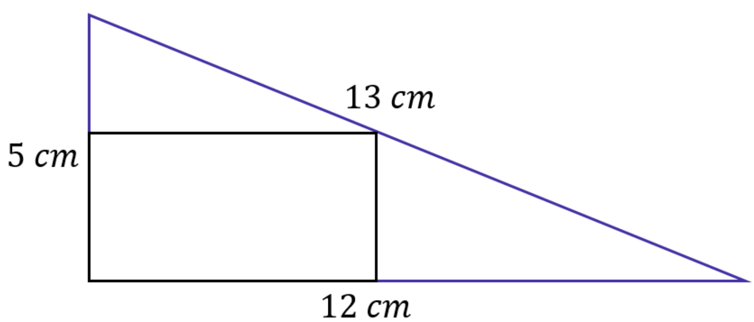
Observe que o enunciado falou em triângulo retângulo. Além disso, ele deu o valor da hipotenusa e um dos catetos. Nessa situação, **podemos encontrar o valor do outro cateto aplicando o teorema de Pitágoras**.

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad 13^2 = 5^5 + c^2 \quad \rightarrow \quad 169 = 25 + c^2 \quad \rightarrow \quad c^2 = 144 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{c = 12}$$

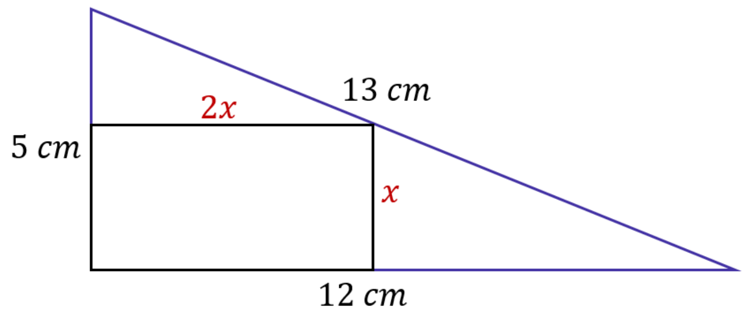
Pronto, agora temos os dois catetos e a hipotenusa. Podemos desenhar o triângulo retângulo.



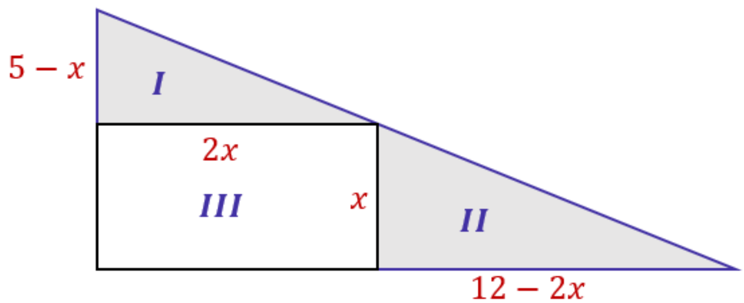
Depois, o enunciado fala em um **retângulo <u>inscrito</u>**. Lembre-se que quando temos alguma figura "inscrita" em outra, significa que **ela está dentro** dessa outra. Além disso, o maior lado desse retângulo está sobre o maior lado do triângulo. Essa informação é super importante para conseguirmos desenhar a figura.



O comprimento do lado maior do retângulo **é igual ao dobro** do lado menor. Assim,



Queremos determinar a área do retângulo, isto é, **o produto dos seus lados**. Para isso, note o seguinte:



Veja que quando somamos as áreas das regiões I, II e III, **vamos obter a área total do triângulo maior**.

- Área do triângulo retângulo maior:

$$A_T = \frac{12 \cdot 5}{2} \quad \rightarrow \quad A_T = 30\ cm^2$$

- Área do triângulo retângulo I:

$$A_I = \frac{(5 - x) \cdot (2x)}{2} \quad \rightarrow \quad A_I = x \cdot (5 - x)$$

- Área do triângulo retângulo II:

$$A_{II} = \frac{(12 - 2x) \cdot x}{2} \quad \rightarrow \quad A_{II} = x \cdot (6 - x)$$

- Área do retângulo III:

$$A_{III} = 2x \cdot x \quad \rightarrow \quad A_{III} = 2x^2$$

Assim, sabendo que $\boldsymbol{A_T = A_I + A_{II} + A_{III}}$, podemos escrever que:

$$x \cdot (5 - x) + x \cdot (6 - x) + 2x^2 = 30$$

$$5x - x^2 + 6x - x^2 + 2x^2 = 30$$

$$11x = 30$$

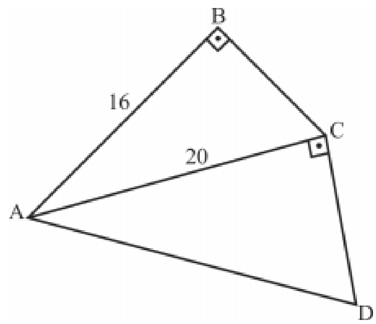
$$x = \frac{30}{11}\ cm$$

Assim, com **o valor de x descoberto**, podemos achar a área do retângulo.

$$A_{III} = 2x^2 \quad \rightarrow \quad A_{III} = 2 \cdot \left(\frac{30}{11}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{III} = \frac{1800}{121}\ cm^2}$$

Gabarito: LETRA D.

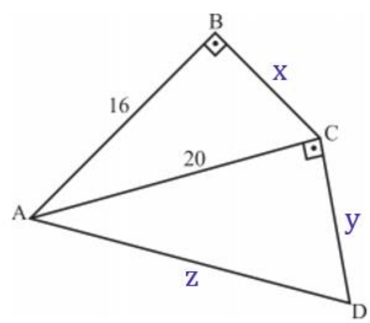
5. (CESPE/IFF/2018)



No polígono ABCD da figura precedente, os triângulos ABC e ACD são semelhantes e retângulos — nos vértices B e C, respectivamente. Além disso, AB = 16 cm, AC = 20 cm e CD é o lado menor do triângulo ACD. Nessa situação, AD mede

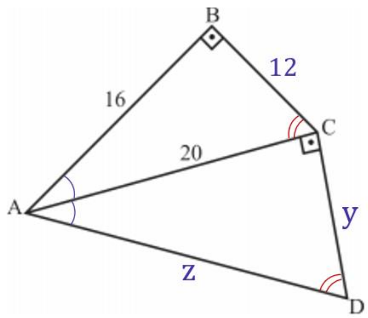
A) 24 cm.
B) 25 cm.
C) 28 cm.
D) 32 cm.
E) 36 cm.

Comentários:
Primeiro, observe o esquema.



Temos três medidas que desconhecemos. Sabemos que o **triângulo ABC é retângulo**. Por esse motivo, podemos utilizar o teorema de Pitágoras e determinar o lado $BC = x$.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad \rightarrow \quad 20^2 = 16^2 + x^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 400 - 256 \quad \rightarrow \quad x^2 = 144 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 12}$$

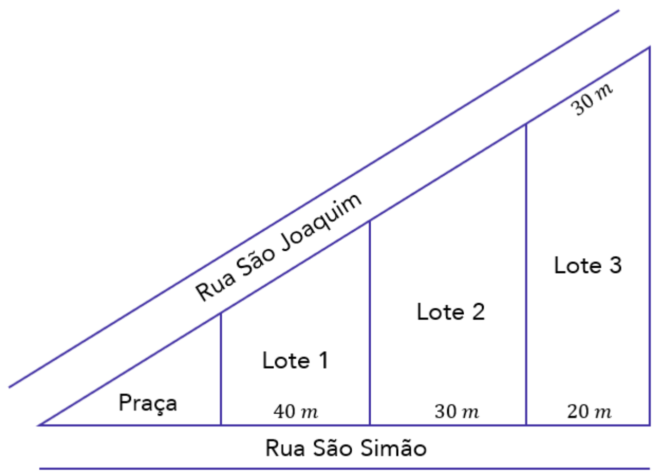


Veja que o triângulo ABC está determinado e que **ABC e ACD são semelhantes**. Assim, podemos usar semelhança de triângulo para encontrar o lado $AD = z$.

$$\frac{20}{z} = \frac{16}{20} \quad \rightarrow \quad z = \frac{400}{16} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{z = 25\ cm}$$

Com a semelhança, conseguimos determinar z imediatamente. Observe que descobrir o valor de x é fundamental para **sabermos um pouco mais sobre os ângulos internos** e, desse modo, conseguir realizar a semelhança.

Gabarito: LETRA B.

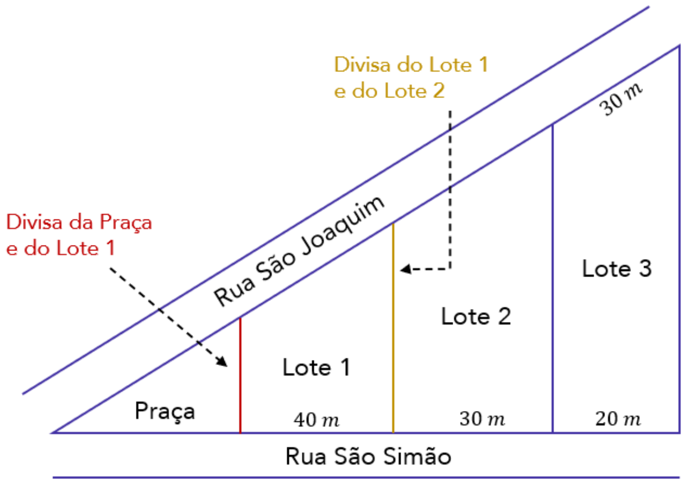


(CBM-DF/2016) A figura acima ilustra parte da planta de um bairro, entre as ruas São Joaquim e São Simão. As divisas dos lotes são segmentos de retas paralelas e perpendiculares à reta que determina a rua São Simão. São destacados os lotes 1, 2, 3 e uma praça, bem como os comprimentos, em metros, das frentes dos lotes 1, 2 e 3 para a rua São Simão e o comprimento, em metros, da frente do lote 3 para a rua São Joaquim. A respeito desses lotes, julgue os itens a seguir.

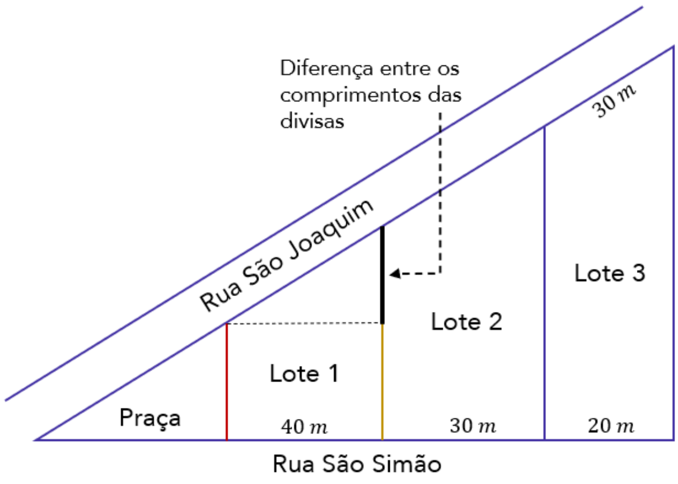
6. (CESPE/CBM-DF/2016) A diferença entre o comprimento da divisa dos lotes 1 e 2 e o comprimento da divisa da praça e do lote 1 é superior a 45 metros.

Comentários:

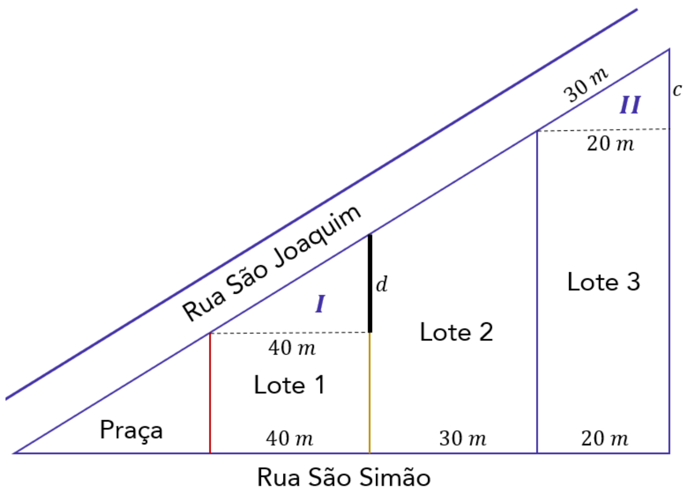
Vamos primeiro identificar no desenho que divisas são essas que o item está falando.



Beleza! Agora, veja que a diferença entre os comprimentos é exatamente a região destacada abaixo.



Pronto, sabemos exatamente o que estamos atrás. Observe que **temos vários triângulos retângulos** na figura e, portanto, podemos tentar usar da semelhança. Um ponto bom que devemos notar é aquele "30 m" isolado lá no **canto superior direito**. Ele certamente está lá por um motivo. Acompanhe mais um esquema.



Os triângulos I e II são semelhantes e, portanto, podemos estabelecer a seguinte relação de semelhança:

$$\frac{d}{40} = \frac{c}{20} \quad \rightarrow \quad d = 2c$$

Note que **a diferença entre as divisas é o dobro do comprimento c**. Podemos determinar c usando o teorema de Pitágoras.

$$30^2 = 20^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad 900 = 400 + c^2 \quad \rightarrow \quad c^2 = 500 \quad \rightarrow \quad c = 10\sqrt{5}$$

Assim, a diferença entre as divisas é:

$$d = 2 \cdot 10\sqrt{5} \quad \rightarrow \quad d = 20\sqrt{5}\, m$$

A dificuldade nesse ponto é saber quanto vale $\sqrt{5}$. Afinal, precisamos de "d" com uma certa precisão, de modo a conseguir julgar se o valor é maior ou menor que 45 metros. Minha sugestão é: pergunte-se qual o número devo multiplicar 20 para dar 45. Ora, basta dividirmos 45 por 20 e **vamos obter 2,25**. Assim,

$$20 \cdot 2{,}25 = 45$$

A próxima pergunta é: **$\sqrt{5}$ é maior ou menor do que 2,25?** Se for menor, então d será menor do que 45. Se for maior, então d é maior do que 45. Tudo bem até aqui?! Para saber isso, basta fazermos $2{,}25^2$.

$$2{,}25^2 = 2{,}25 \times 2{,}25 = 5{,}0625$$

Veja que **o quadrado de 2,25 ultrapassa 5**. Logo, podemos dizer que $\sqrt{5} < 2{,}25$. Sendo assim,

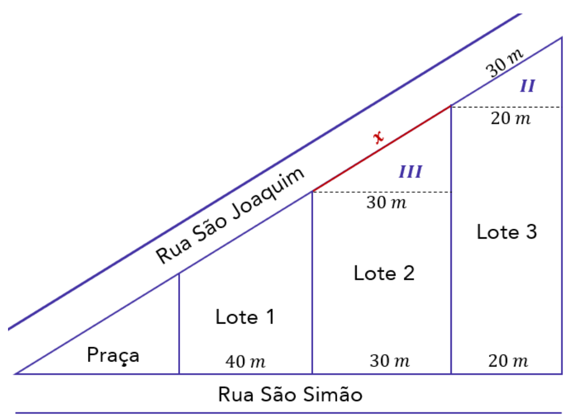
$$\boldsymbol{d < 45\, m}$$

Gabarito: ERRADO.

7. (CESPE/CBM-DF/2016) A frente do lote 2 para a rua São Joaquim mede 45 metros.

Comentários:

Temos que encontrar mais uma semelhança de triângulos.



Os triângulos **II e III são semelhantes** e, portanto, podemos escrever a seguinte relação de semelhança:

$$\frac{x}{30}=\frac{30}{20} \quad \rightarrow \quad x=\frac{900}{20} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x=45\ m}$$

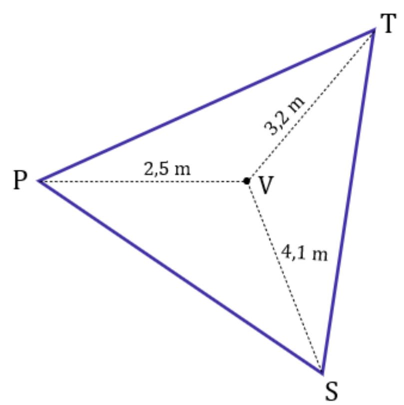
Gabarito: CERTO.

8. (CESPE/SEGP-AL/2013) Ao descrever a cena de um crime, um agente mencionou que o corpo foi localizado em um terreno plano e que o ponto do terreno correspondente à posição da cabeça da vítima estava a 2,5 m de um poste de iluminação, a 3,2 m de uma placa de trânsito e a 4,1 m de um semáforo vertical, no interior da região triangular determinada pelo poste, pela placa de trânsito e pelo semáforo. Com base nessa situação, julgue o item seguinte.

A distância entre o poste de iluminação e a placa de trânsito é superior a 6 m.

Comentários:

Considere que o poste de iluminação esteja representado pela letra P, a placa de trânsito por T, o semáforo por S e a vítima por V. Um desenho que **representa adequadamente** a situação descrita no enunciado é o seguinte:



Da desigualdade triangular, sabemos que **o lado de um triângulo deve ser sempre menor do que a soma dos outros dois**. Preste atenção no **triângulo PVT**. Queremos saber informações do lado PT. Como temos os dois outros lados do triângulo, podemos escrever que:

$$PT<2{,}5+3{,}2 \quad \rightarrow \quad PT<5{,}7\ m$$

Note que **a distância entre os dois é inferior a 5,7 metros**. Como o enunciado afirma que é superior a 6 m, o item encontra-se errado.

Gabarito: ERRADO.

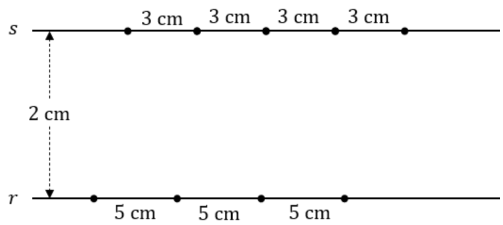
Texto para as próximas questões

(EBC/2011) Considere que as retas r e s sejam paralelas e que a distância entre elas é de 2 cm; que, na reta r, sejam marcados 4 pontos, de forma que a distância de qualquer um deles ao mais próximo seja de 5 cm; que, na reta s, sejam marcados 5 pontos, de forma que a distância de qualquer um deles ao mais próximo seja de 3 cm. Com base nessas informações e considerando, ainda, as áreas dos triângulos de vértices nos pontos marcados nas retas r e s, é correto afirmar que

9. (CESPE/EBC/2011) A maior área é igual a 15 cm².

Comentários:

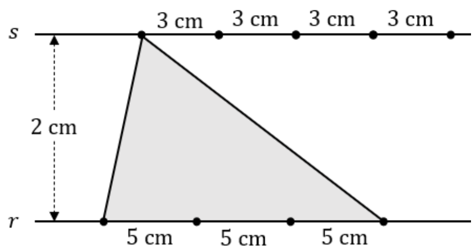
O desenho que representa a situação do enunciado é o seguinte:



Queremos desenhar um triângulo **com a maior área possível**. Lembre-se da fórmula:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Ora, para o triângulo possuir a maior área, **ele deve ter a maior base e a maior altura possível**. Concorda?! A altura do triângulo será dada pela distância entre as retas. Essa distância é fixa e vale 2 cm. Logo, **com relação à altura, não temos muito o que fazer**. Devemos **tentar maximizar a base**. Note que a base é máxima quando pegamos **os pontos mais externos na reta r**.



Em qualquer um dos pontos da reta s que colocássemos o vértice do triângulo, a área seria a mesma. Isso, pois, **a altura é fixa** e **a base continuaria a mesma** (15 cm). Assim, a área máxima é:

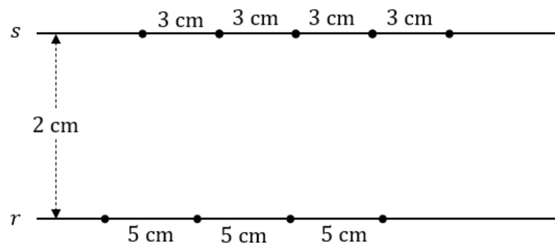
$$A_{máx} = \frac{15 \cdot 2}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{máx} = 15\ cm^2}$$

Gabarito: CERTO.

10. (CESPE/EBC/2011) A menor área é igual a 5 cm².

Comentários:

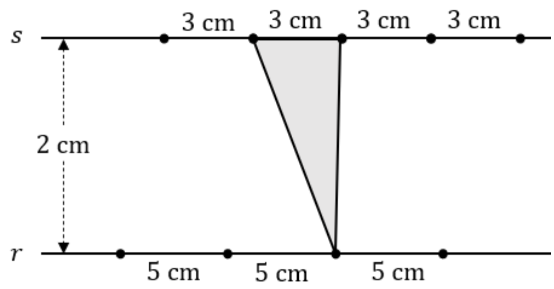
O desenho que representa a situação do enunciado é o seguinte:



Queremos desenhar um triângulo **com a menor área possível**. Lembre-se da fórmula:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Ora, para o triângulo possuir a menor área, **ele deve ter a menor base e a menor altura possível**. Concorda?! A altura do triângulo será dada pela distância entre as retas. Essa distância é fixa e vale 2 cm. Logo, **com relação à altura, não temos muito o que fazer**. Devemos **tentar minimizar a base**. Essa base vai ser mínima quando pegarmos dois pontos consecutivos na reta s. Observe:



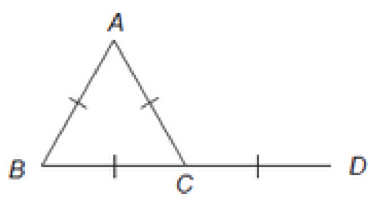
Em qualquer um dos pontos da reta r que colocássemos o vértice do triângulo, a área seria a mesma. Isso, pois, **a altura é fixa** e **a base continuaria a mesma** (3 cm). Assim, a área mínima é:

$$A_{mín} = \frac{3 \cdot 2}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{mín} = 3\ cm^2}$$

Gabarito: ERRADO.

CESGRANRIO

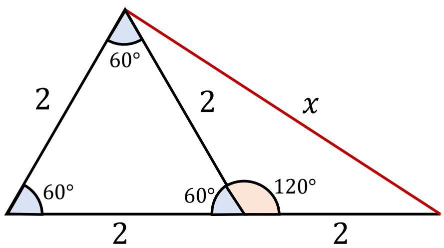
11. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2017) Um arame de extremidades C e D e 8 cm de comprimento é dobrado de modo a formar um triângulo equilátero ABC mantendo os pontos B, C e D alinhados, conforme a Figura a seguir.



Qual a distância, em centímetros, entre os pontos A e D?

A) $\sqrt{3}$
B) $2\sqrt{3}$
C) $4\sqrt{3}$
D) 2
E) 4

Comentários:
O arame tem **8 centímetros**. Para formar **o triângulo equilátero**, devemos dobrá-lo em **segmentos iguais**.



Com isso, note que **o lado do triângulo fica igual a 2**. Afinal, ainda "sobra" o segmento CD, de medida igual ao lado do triângulo. Para determinar o "x", podemos aplicar a lei dos cossenos, já que sabemos que o ângulo oposto é 120°.

$$x^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 120°$$

$$x^2 = 4 + 4 - 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \quad \rightarrow \quad x^2 = 8 + 4 \quad \rightarrow \quad x^2 = 12 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 2\sqrt{3}\ cm}$$

Gabarito: LETRA B.

12. (CESGRANRIO/IBGE/2016) Considere as seguintes definições:
1 - Um triângulo é chamado de escaleno quando os seus lados possuem comprimentos diferentes.
2 - Um triângulo é chamado de isósceles quando há dois de seus lados com o mesmo comprimento.
3 - Um triângulo é chamado de equilátero quando todos os seus lados possuem o mesmo comprimento.

De acordo com as definições apresentadas, um triângulo não é escaleno quando, e apenas quando, ele
A) é isósceles.
B) é isósceles, mas não é equilátero.
C) não é isósceles.
D) não é equilátero, nem é isósceles.
E) não é equilátero.

Comentários:
Note que para o triângulo ser escaleno, ele deve ter **todos os lados com medidas diferentes**. Agora, vamos analisar as alternativas.

A) é isósceles.

Correto. É isso mesmo, pessoal. Note que basta que o triângulo seja isósceles, que ele não será escaleno. Afinal, em um triângulo isósceles, teremos obrigatoriamente **dois lados iguais**. No entanto, deveríamos entender *o examinador também considerou os triângulos equiláteros como isósceles*.

B) é isósceles, mas não é equilátero.
Errado. Se o triângulo é equilátero, ele também não será escaleno. Observe que pela definição do enunciado, um triângulo equilátero também é isósceles, afinal, há três (e, consequentemente, há dois) lados iguais.

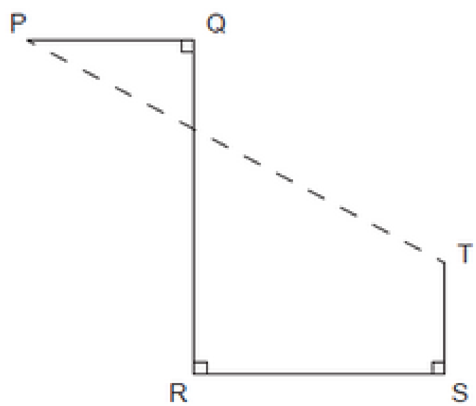
C) não é isósceles.
Errado. Se não é isósceles, **pode ser escaleno**.

D) não é equilátero, nem é isósceles.
Errado. Se não é equilátero, nem isósceles, **então será escaleno**.

E) não é equilátero.
Errado. Se o triângulo não é equilátero, **ele ainda pode ser escaleno ou isósceles**.

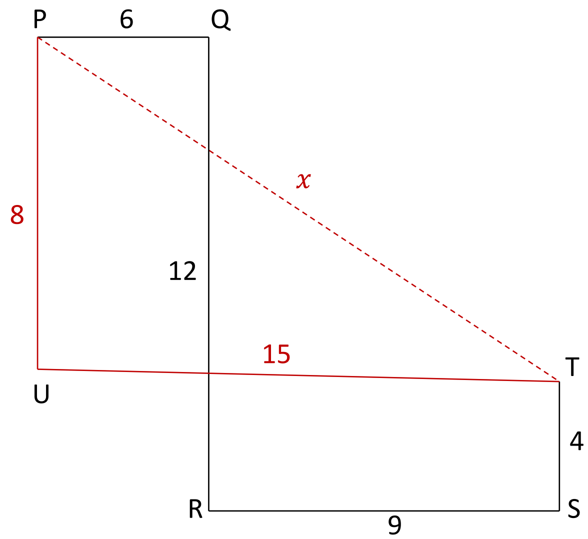
Gabarito: LETRA A.

13. (CESGRANRIO/IBGE/2016) Na Figura a seguir, PQ mede 6 cm, QR mede 12 cm, RS mede 9 cm, e ST mede 4 cm.



A distância entre os pontos P e T, em cm, mede
A) 17
B) 21
C) 18
D) 20
E) 19

Comentários:
Vamos desenhar melhor essa figura, de forma a expormos os comprimentos dos lados.



A intenção foi montarmos **o triângulo retângulo PTU**, pois aí a distância entre os pontos **P e T é exatamente a medida da sua hipotenusa**. Para encontrarmos a medida dos catetos UP e UT, fazemos o seguinte:

I) Para UP, basta percebermos que **QR mede 12 cm e ST mede 4**. Pela própria geometria esquematizada, o cateto UP *é a diferença* $12 - 4 = 8\ cm$.

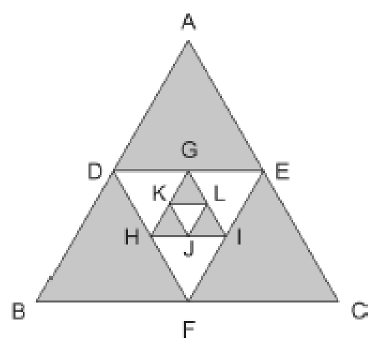
II) De forma análoga, o cateto UT é obtido considerando que **PQ mede 6 e RS mede 9**. Com isso, pela própria forma que esquematizamos, conseguimos depreender que *UT é a soma das medidas de PQ e RS.*
Beleza, com os catetos do triângulo encontrado, agora é só usar o teorema de Pitágoras para encontramos a medida "x".

$$x^2 = 8^2 + 15^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 64 + 224 \quad \rightarrow \quad x^2 = 289 \quad \rightarrow \quad x = 17\text{ cm}$$

Gabarito: LETRA A.

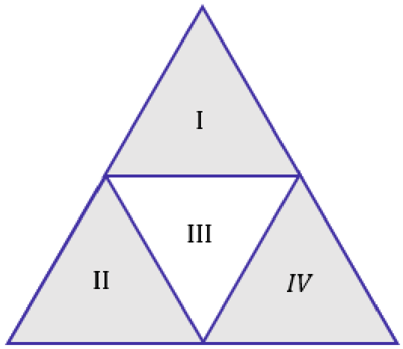
FCC

14. (FCC/SABESP/2019) O triângulo ABC, de área 64 cm², foi dividido pelos segmentos DE, DF, EF, em quatro triângulos congruentes. O triângulo DEF, por sua vez, foi dividido pelos segmentos GH, HI e GI, em quatro triângulos congruentes, o mesmo acontecendo com o triângulo GHI através dos segmentos JK, KL, LJ.



Assim sendo, a área da região sombreada na figura é, em cm²,
A) 60
B) 63
C) 64
D) 51
E) 48

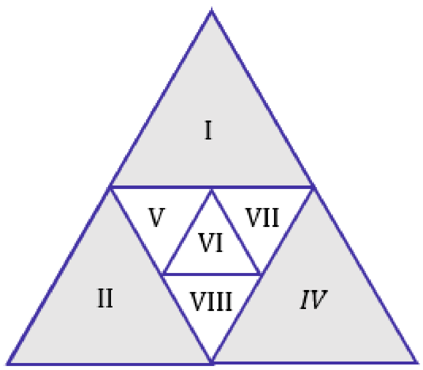
Comentários:
O triângulo ABC, **de área 64 cm²**, foi dividido em quatro triângulos iguais. Portanto, para encontrar a área d e cada um deles, basta dividirmos 64 por 4.



Assim,

$$A_I = A_{II} = A_{III} = A_{IV} = \frac{64}{4} = 16 \text{ cm}^2$$

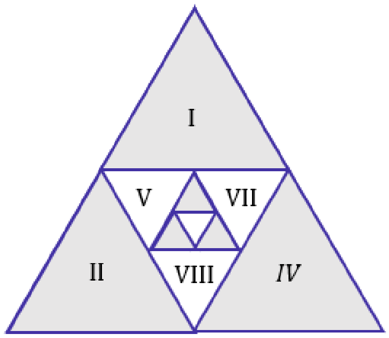
Depois dessa divisão, é a vez do triângulo III ser dividido em quatro triângulos iguais.



Logo, **as áreas dos triângulos V, VI, VII e VIII são iguais** a área do antigo triângulo III dividido por 4.

$$A_V = A_{VI} = A_{VII} = A_{VIII} = \frac{16}{4} = 4\ cm^2$$

Por fim, **o triângulo VI também é dividido em mais 4 "mini triângulos" congruentes**. Assim, a área de cada mini triângulo será calculada pela divisão da área do triângulo VI por 4.



$$A_{mini} = \frac{4}{4} = 1\ cm^2$$

Note que a área sombreada é formada pela área dos triângulos I, II e III **mais a área de três mini triângulos**. Assim,

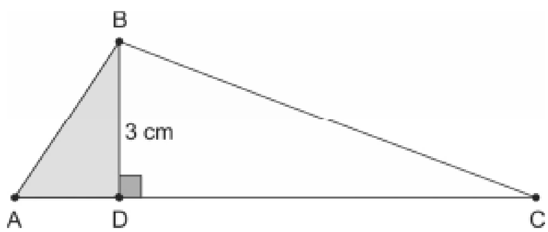
$$A_{sombreada} = A_I + A_{II} + A_{III} + 3 \cdot A_{mini}$$

$$A_{sombreada} = 16 + 16 + 16 + 3 \cdot 1$$

$$A_{sombreada} = 48 + 3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{sombreada} = 51\ cm^2}$$

Gabarito: LETRA D.

15. (FCC/PREF. SJRP/2019) Em um triângulo ABC a altura BD relativa ao lado AC mede 3 cm, conforme mostra a figura.

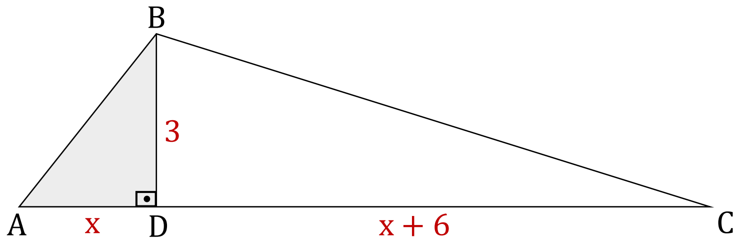


Sabendo que o segmento CD é 6 cm maior que o segmento AD e que a área do triângulo BCD é o quádruplo da área do triângulo ABD, a área do triângulo ABC, em cm², é:

A) 12
B) 15
C) 18
D) 21
E) 24

Comentários:

Vamos desenhar melhor a figura do enunciado, com as informações que foram passadas.



Note que **os triângulos ABD e BCD são retângulos**. Logo, suas áreas podem ser calculadas pelo produto dos catetos dividido por dois.

$$S_{ABD} = \frac{3x}{2}$$

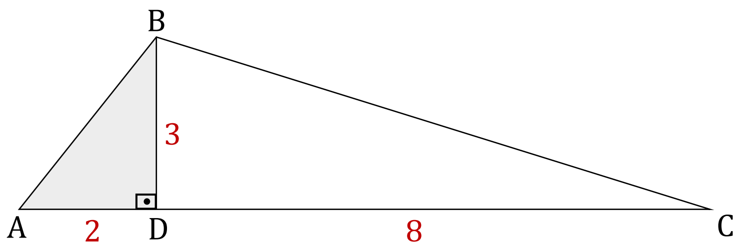
$$S_{BDC} = \frac{3 \cdot (x+6)}{2}$$

O enunciado disse que **a área do triângulo BCD é o quádruplo da área do triângulo ABD**.

$$S_{BDC} = 4S_{ABD} \quad \rightarrow \quad \frac{3 \cdot (x+6)}{2} = 4 \cdot \frac{3x}{2}$$

$$3 \cdot (\mathrm{x} + 6) = 12\mathrm{x} \quad \rightarrow \quad 3\mathrm{x} + 18 = 12\mathrm{x} \quad \rightarrow \quad 9\mathrm{x} = 18 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 2\ cm}$$

A área do triângulo ABC pode ser encontrada pelo produto da base AC pela altura BD, depois dividimos por 2. Como determinarmos o valor de "x", sabemos agora quanto vale a base.



$$\mathrm{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot 10}{2} \quad \rightarrow \quad \mathbf{S_{ABC} = 15\ cm^2}$$

Gabarito: LETRA B.

16. (FCC/SEDU-ES/2018) A altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo ABC mede 12 cm. Se um dos catetos do triângulo ABC mede 15 cm, a medida do outro cateto, em centímetros, é igual a

A) 24.

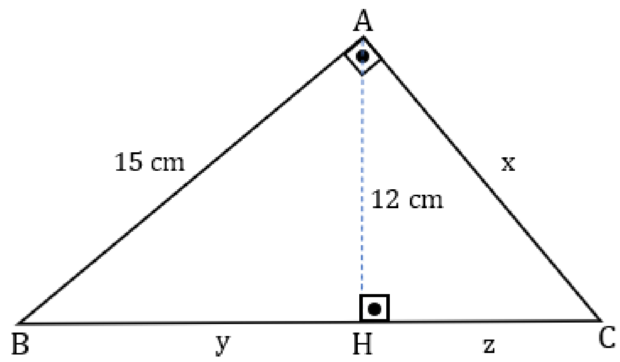
B) 18.

C) 22.

D) 16.

E) 20.

Comentários:
A melhor coisa é desenhar o triângulo com todas as informações do enunciado.



A questão pede o outro cateto, que no nosso desenho é o lado AC: "x". Para começar, note que **o triângulo ABH é retângulo**, de forma que podemos aplicar o teorema de Pitágoras para determinar "y".

$$15^2 = 12^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad y^2 = 225 - 144 \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{81} \quad \rightarrow \quad y = 9\ cm$$

Além disso, perceba que **os triângulos ABH e AHC são semelhantes**. Sendo assim, podemos escrever:

$$\frac{12}{y} = \frac{z}{12} \quad \rightarrow \quad yz = 144 \quad \rightarrow \quad z = \frac{144}{9} \quad \rightarrow \quad z = 16\ cm$$

Por fim, como **AHC é um triângulo retângulo**, também podemos usar **o teorema de Pitágoras** e escrever:

$$\mathrm{x}^2 = 12^2 + \mathrm{z}^2 \quad \rightarrow \quad \mathrm{x}^2 = 144 + 256 \quad \rightarrow \quad \mathrm{x}^2 = 400 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 20\ cm}$$

Gabarito: LETRA E.

17. (FCC/METRO SP/2016) Em um gráfico de setores (gráfico de "pizza") utilizado para representar a distribuição de todos os funcionários de uma empresa por diferentes faixas salariais, a faixa salarial com maior porcentagem de funcionários ocupa 3/8 do gráfico. O setor circular correspondente a essa faixa salarial tem ângulo central de medida igual a
A) 120°
B) 90°
C) 75°
D) 135°
E) 225°

Comentários:
Pessoal, **uma circunferência inteira perfaz um ângulo de 360°**. Se a faixa salarial em questão ocupa 3/8 do *gráfico de "pizza"*, então o ângulo central desse setor será dado por:

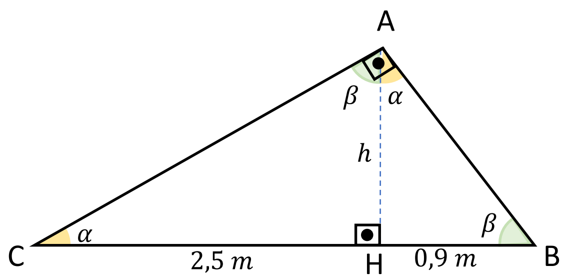
$$\alpha_{setor} = 360° \cdot \left(\frac{3}{8}\right) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha_{setor} = 135°}$$

Gabarito: LETRA D.

18. (FCC/SEDU-ES/2016) Para que o triângulo ABC, indicado na figura, seja triângulo retângulo, com ângulo reto no vértice A, a medida da altura h, relativa ao lado BC, deverá ser igual a

A) 1,5 m
B) 1,1 m
C) 1,4 m
D) 1,2 m
E) 1,3 m

Comentários:
Galera, se o triângulo ABC da figura acima for **retângulo em A**, teremos a seguinte situação:

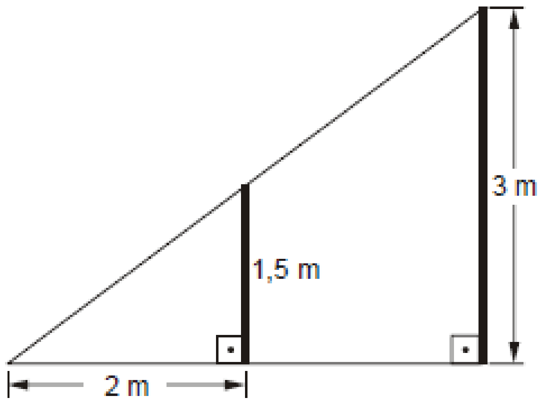


Observe que **os triângulos ABH ACH são semelhantes**. Dessa forma, podemos escrever que:

$$\frac{h}{0{,}9} = \frac{2{,}5}{h} \quad \rightarrow \quad h^2 = 2{,}5 \cdot 0{,}9 \quad \rightarrow \quad h^2 = 2{,}25 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{h = 1{,}5\ m}$$

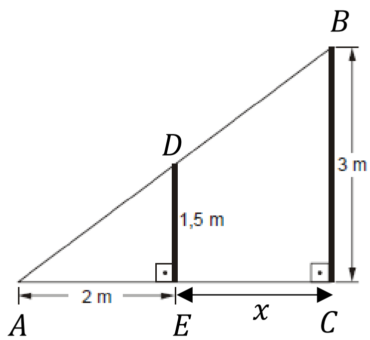
Gabarito: LETRA A.

19. (FCC/SEE-MG/2012) Após uma ventania, um guarda florestal percebeu que uma das árvores do parque havia se inclinado para a direita, estando na iminência de cair. Para escorá-la, foram utilizadas duas hastes de madeira: uma de altura 1,5 m, colocada no solo, a 2 m do pé da árvore, apoiada no tronco, e outra, medindo 3,0 m, colocada de forma a apoiar a extremidade do ramo mais alto. As duas hastes foram colocadas perpendiculares ao solo.



Com base nos dados, conclui-se que a altura da árvore é
A) 3,5 m
B) 4,0 m
C) 4,5 m
D) 5,0 m

Comentários:
Questão de semelhança de triângulos! Vamos colocar algumas informações nessa figura do enunciado para nos ajudar a entender melhor.



Observe que **o triângulo ABC é semelhante ao triângulo ADE**. Logo, podemos escrever:

$$\frac{3}{1{,}5} = \frac{2+x}{2} \quad \rightarrow \quad 2 + x = 2 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad x = 4 - 2 \quad \rightarrow \quad x = 2\ m$$

Pronto. Como ABC é um triângulo retângulo, podemos usar o **Teorema de Pitágoras** para determinar a altura da árvore AB.

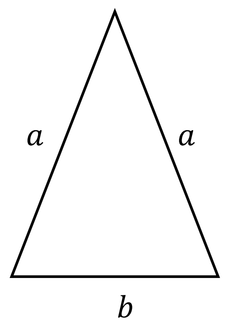
$$AB^2 = 3^2 + 4^2 \quad \rightarrow \quad AB = 5\ m$$

Gabarito: LETRA D.

20. (FCC/SEE-MG/2012) Em um triângulo isósceles, o perímetro mede 105 cm. Sabe-se que a base tem a metade da medida de cada um dos outros dois lados. Nessas condições, as medidas dos lados desse triângulo correspondem a

A) Base: 21 cm e outros lados medem 42 cm cada.
B) Base: 26,25 cm e outros lados medem 52,5 cm cada.
C) Base: 17,5 cm e outros lados medem 35 cm cada.
D) Base: 35 cm e outros lados medem 70 cm cada.

Comentários:
Vamos desenhar esse triângulo!



A questão disse que **o perímetro desse triângulo isósceles é 105 cm**. Logo,

$$2a + b = 105 \qquad (1)$$

Além disso, **a base tem a metade da medida de cada um dos outros dois lados**. Com isso,

$$b = \frac{a}{2} \qquad (2)$$

Substituindo (1) em (2):

$$2a + \frac{a}{2} = 105 \quad \rightarrow \quad \frac{5a}{2} = 105 \quad \rightarrow \quad a = 42\ cm$$

Com isso, **o valor da medida da base** fica:

$$b = \frac{42}{2} \quad \rightarrow \quad b = 21\ cm$$

Gabarito: LETRA A.

FGV

21. (FGV/CGU/2022) Em um plano horizontal há um poste vertical com uma lâmpada (L) em cima, um objeto vertical (X) com 2 m de altura e uma parede vertical (P). O plano que contém o poste e o objeto é perpendicular ao plano da parede.

Quando o objeto (X) é equidistante do poste e da parede, a parte de sua sombra projetada na parede mede 50 cm (Fig 1).

Quando a distância do objeto (X) à parede é o triplo de sua distância ao poste, a sua sombra no chão mede 3,2 m (Fig 2).

Fig 1

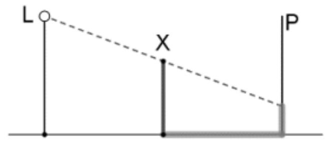
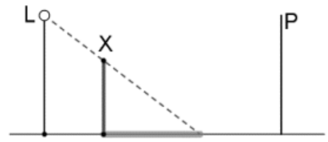


Fig 2



A distância, em metros, entre o poste e a parede é:

A) 8,4

B) 8,2

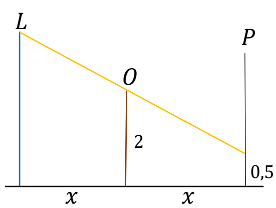
C) 9,2

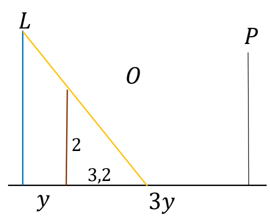
D) 9,6

E) 10,0

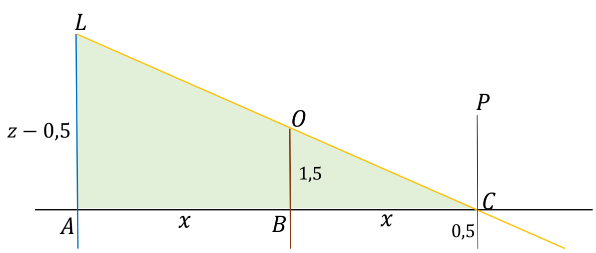
Comentários:

Opa, questão superinteressante! Vamos usar aqui nossos conhecimentos em semelhança de triângulos.





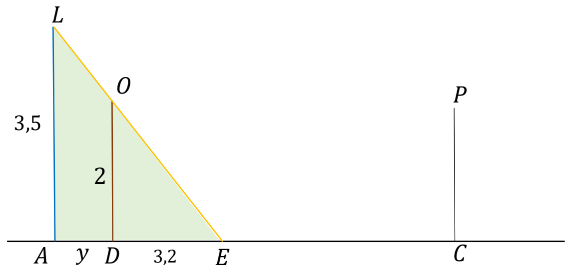
A questão quer que encontremos a distância do poste até a parede. Nos nossos desenhos, **essa distância é representada por "2x" ou por "4y".** Agora, vamos olhar com cuidado a Figura 1.



O que fizemos aqui? **Subimos o "chão" em 50 cm (altura da sombra na parede)**. O motivo disso é simplesmente conseguir fazer o triângulo em verde e assim visualizar melhor a semelhança entre os triângulos **LAC e OBC**.

$$\frac{z-0{,}5}{1{,}5}=\frac{2x}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{z-0{,}5}{1{,}5}=2 \quad \rightarrow \quad z-0{,}5=3 \quad \rightarrow \quad \boxed{z=3{,}5\ \mathrm{m}}$$

"z" é a altura do poste! Agora, vamos dar uma olhada na figura 2.



Dessa vez, não precisaremos subir o "chão". Vamos fazer a semelhança entre **os triângulos LAD e ODE**.

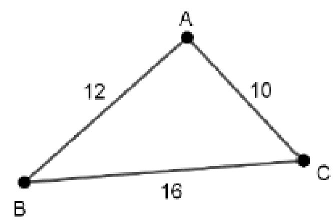
$$\frac{3{,}5}{2}=\frac{y+3{,}2}{3{,}2} \quad \rightarrow \quad 2y+6{,}4=11{,}2 \quad \rightarrow \quad 2y=4{,}8 \quad \rightarrow \quad y=2{,}4$$

Pronto! A distância entre o poste e a parede é "4y". Assim,

$$d=4y \quad \rightarrow \quad d=4\cdot 2{,}4 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{d=9{,}6\ m}}$$

Gabarito: LETRA D.

22. (FGV/CBM-AM/2022) As cidades A, B e C são ligadas por três estradas. De A até B são 12 km, de B até C são 16 km e de C até A são 10 km. Não há outros caminhos.

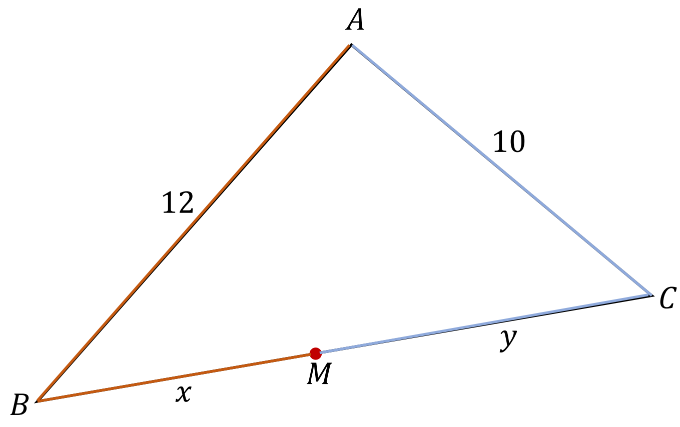


Mário está na estrada BC em um ponto tal que, para ir à cidade A é indiferente passar por B ou por C, pois percorrerá a mesma distância.
Jorge está na estrada AB em um ponto tal que, para ir à cidade C é indiferente passar por B ou por A, pois percorrerá a mesma distância.

Para que Mário encontre Jorge deverá percorrer, no mínimo,
A) 9 km
B) 10 km
C) 11 km
D) 12 km
E) 13 km

Comentários:

Vamos esquematizar a situação de Mario.



Mario está sendo representado pelo ponto M. Note que ele está sobre o lado BC. O enunciado diz que, **tanto faz ir por B ou por C, a distância será a mesma**. Logo,

$$12 + x = 10 + y \quad \rightarrow \quad y - x = 2$$

Além disso, a questão informa que **o lado BC vale 16**.

$$x + y = 16$$

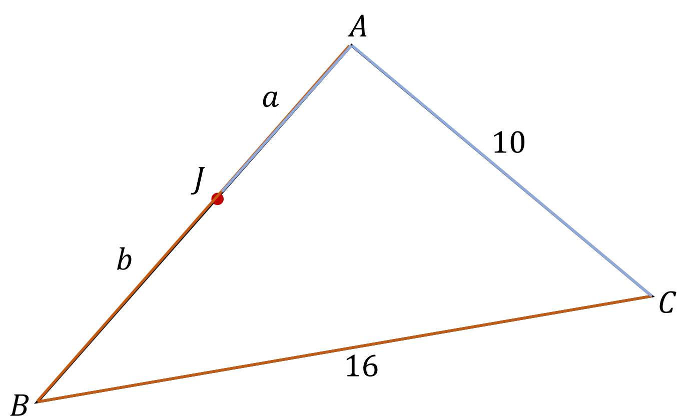
Com as duas equações acima, conseguimos determinar "x" e "y". Vamos **somar as duas membro a membro**.

$$2y = 18 \quad \rightarrow \quad y = 9$$

Com "y", agora é só encontrar o "x".

$$9 + x = 16 \quad \rightarrow \quad x = 7$$

Pronto, sabemos onde Mario está! Agora vamos analisar Jorge.



Temos aqui uma situação análoga. A distância de Jorge até C **é a mesma indo por B ou por A**. Assim:

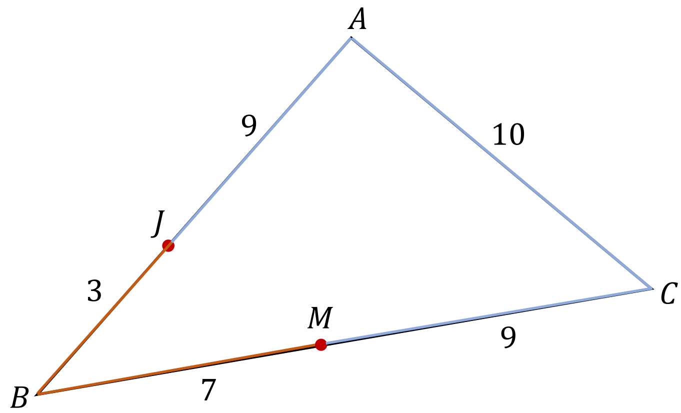
$$b + 16 = a + 10 \quad \rightarrow \quad a - b = 6$$

Como **o lado AB mede 12**: $a + b = 12$

Somando as duas equações membro a membro: $2a = 18 \quad \rightarrow \quad a = 9$

Com o valor de "a", determinamos "b": $b = 12 - 9 \quad \rightarrow \quad b = 3$

Pronto, **encontramos tanto Mario quanto Jorge**! Vamos colocar no desenho para ver a distância dos dois.



Note que a **menor distância** entre Jorge e Mario é $7 + 3 =$ **10 km**.

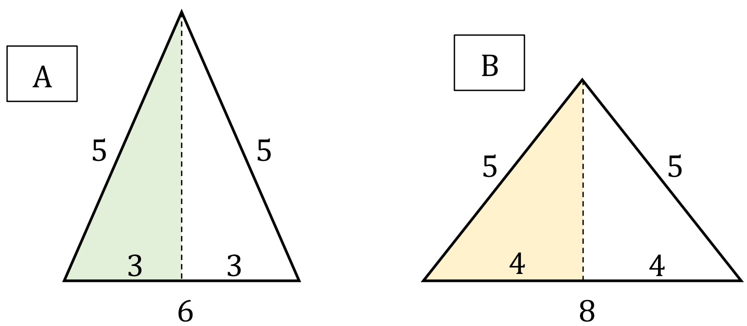
Gabarito: LETRA B.

23. (FGV/PREF. ANGRA/2019) Seja A a área do triângulo de lados 5, 5, 6 e seja B a área do triângulo de lados 5, 5, 8. A relação entre A e B é

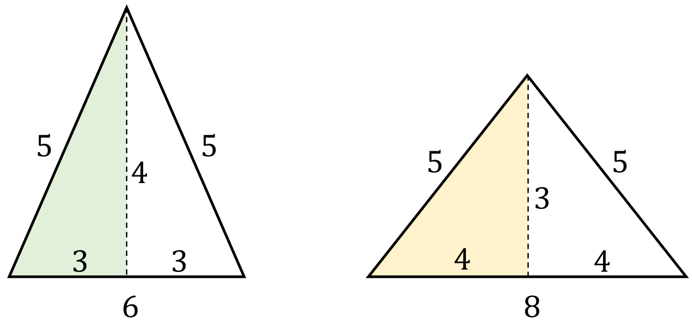
A) $A = B$
B) $A = 4B/3$
C) $A = 3B/4$
D) $A = 8B/9$
E) $A = 9B/8$

Comentários:

Podemos identificar que esses dois triângulos são isósceles. Vou mostrar para vocês.



Observe que o triângulo A é composto por **dois triângulos retângulos menores**. Destaquei um deles em verde para que você visualize melhor. A hipotenusa desses triângulos é 5 e um dos catetos é 3. *Qual é o valor do outro cateto?* **4!!** *É o famoso triângulo retângulo 3, 4 e 5.* A mesma coisa acontece para o triângulo B. A hipotenusa dele é 5 e um dos catetos é 4. *Qual o outro cateto?* 3!!

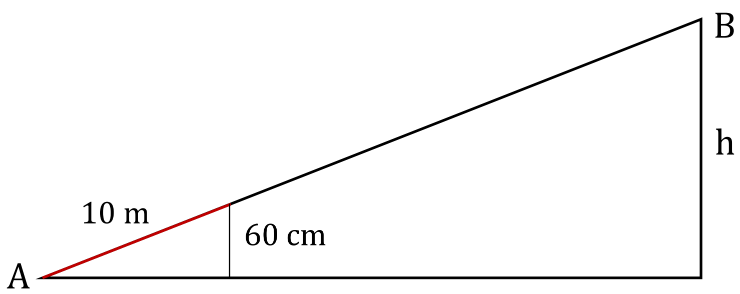


Note que os dois triângulos são formados por dois "mini" triângulos retângulos iguais. A diferença é que **o triângulo A é formado "colando" os catetos de dimensão igual a 4** e **o triângulo B é formado "colando" os catetos de dimensão igual a 3**. *Tudo bem??* Ora, se os dois triângulos são formados pelos mesmos "mini" triângulos, então eles só podem ter a mesma área.

$$A = B$$

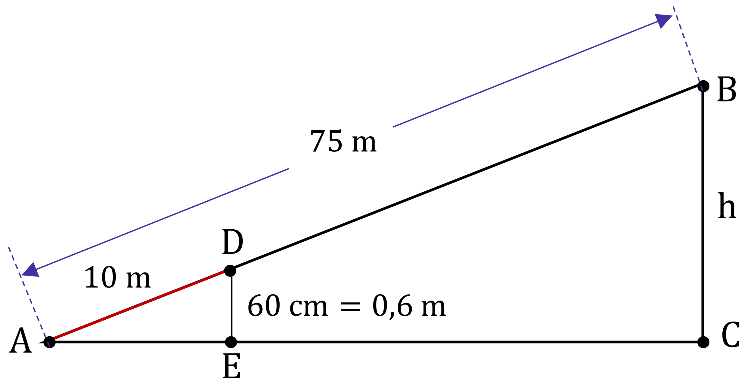
Gabarito: LETRA A.

24. (FGV/BANESTES/2018) Uma rampa AB de inclinação constante em relação ao plano horizontal tem 75m de comprimento. Sabe-se que percorrendo 10 m sobre essa rampa, a altura aumenta 60 cm, como mostra a figura abaixo.



Percorrendo toda a rampa, a altura h assinalada na figura será de:
A) 4,5 m
B) 4,8 m
C) 5,0 m
D) 5,2 m
E) 5,4 m

Comentários:
Vamos colocar algumas informações do enunciado no desenho.



Perceba que **o triângulo ADE é semelhante ao triângulo ABC**. Assim,

$$\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD} \qquad \rightarrow \qquad \frac{h}{0{,}6}=\frac{75}{10} \qquad \rightarrow \qquad h=7{,}5\cdot 0{,}6 \qquad \rightarrow \qquad h=4{,}5\ m$$

Gabarito: LETRA A.

25. (FGV/ALE-RO/2018) O retângulo ABCD tem dimensões AB = 2 e BC = 4. Os pontos M e N são médios dos lados BC e CD, respectivamente. O cosseno do ângulo AMN é igual a

A) $-1/\sqrt{3}$

B) $1/\sqrt{5}$

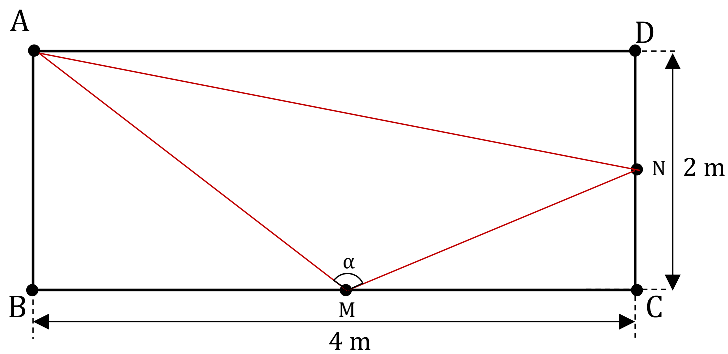
C) $-1/\sqrt{5}$

D) $1/\sqrt{10}$

E) $-1/\sqrt{10}$

Comentários:

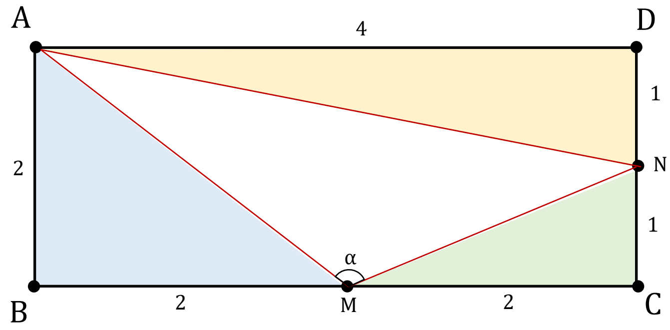
Vamos desenhar a situação proposta pelo enunciado.



Observe que temos o triângulo AMN e queremos **determinar o cosseno do ângulo α**. Nessa hora, a lei dos cossenos deve vir na cabeça!!

$$AN^2=AM^2+MN^2-2\cdot AM\cdot MN\cdot\cos\alpha$$

Note que **AN, AM e MN são hipotenusas de triângulos retângulos em que sabemos os catetos**. Observe a figura abaixo.



Vamos aplicar o teorema de Pitágoras para **o triângulo retângulo ABM**.

$$AM^2 = 2^2 + 2^2 \quad \rightarrow \quad AM^2 = 8 \quad \rightarrow \quad AM = 2\sqrt{2}\text{ m}$$

Agora, mesma coisa para **o triângulo retângulo MNC**.

$$MN^2 = 2^2 + 1^2 \quad \rightarrow \quad MN^2 = 5 \quad \rightarrow \quad MN = \sqrt{5}$$

Por fim, aplicando o teorema de Pitágoras para **o triângulo retângulo ADN**.

$$AN^2 = 4^2 + 1^2 \quad \rightarrow \quad AN^2 = 17 \quad \rightarrow \quad AN = \sqrt{17}\text{ m}$$

Vamos usar os valores determinados acima para AM, MN e AN na **lei dos cossenos**.

$$17 = 8 + 5 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos\alpha \quad \rightarrow \quad 17 = 13 - 4\sqrt{10} \cdot \cos\alpha$$

$$4 = -4\sqrt{10} \cdot \cos\alpha \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}}$$

Gabarito: LETRA E.

VUNESP

26. (VUNESP/PREF. TAUBATÉ/2022) Um mestre de obras precisa de um pedaço de madeira cortada em formato de triângulo retângulo, com o maior lado medindo 37 cm, e o menor lado medindo 12 cm. O perímetro desse pedaço de madeira triangular deve ser de

A) 81 cm
B) 82 cm
C) 83 cm
D) 84 cm
E) 85 cm

Comentários:

Moçada, o maior lado de um triângulo retângulo é a hipotenusa. Sendo assim, a medida de **37 cm corresponde à medida da <u>hipotenusa</u>**. Por sua vez, o **12 cm é um dos catetos**. Com essas duas informações, podemos usar o Teorema de Pitágoras para determinar o outro cateto.

$$h^2 = a^2 + b^2 \quad \rightarrow \quad 37^2 = 12^2 + b^2 \quad \rightarrow \quad b^2 = 1369 - 144 \quad \rightarrow \quad b^2 = 1225$$

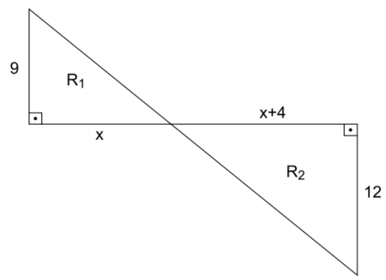
$$\boxed{b = 35 \text{ cm}}$$

Pronto, temos todos os lados do triângulo. Para determinar o perímetro, temos que **somar todos eles**.

$$2p = h + a + b \quad \rightarrow \quad 2p = 37 + 35 + 12 \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{2p = 84\ cm}}$$

Gabarito: LETRA D.

27. (VUNESP/TJ-SP/2017) A figura seguinte, cujas dimensões estão indicadas em metros, mostra as regiões R_1 e R_2, ambas com formato de triângulos retângulos, situadas em uma praça e destinadas a atividades de recreação infantil para faixas etárias distintas.



Se a área de R_1 é 54 m², então o perímetro de R_2 é, em metros, igual a

A) 40.

B) 42.

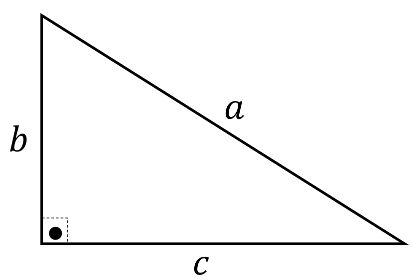
C) 54.

D) 48.

E) 36.

Comentários:

Pessoal, temos dois triângulos retângulos. Na teoria, vimos que a área do triângulo retângulo é calculada da seguinte forma:



$$A_T = \frac{bc}{2}$$

Note que **os catetos de R_1 são "9" e "x"**. Além disso, sabemos **que a área de R_1 é 54 cm²**. Com isso,

$$\frac{9x}{2} = 54 \quad \rightarrow \quad 9x = 108 \quad \rightarrow \quad x = \frac{108}{9} \quad \rightarrow \quad x = 12 \text{ cm}$$

Com o valor de "x", podemos concluir que o cateto "$x + 4$" de R_2 vale, na verdade, 16 cm.
- A questão pede o perímetro de R_2, ou seja, **a soma de todos os lados do triângulo**. Note que ainda não sabemos a hipotenusa. Para encontrá-la, vamos usar o teorema de Pitágoras.

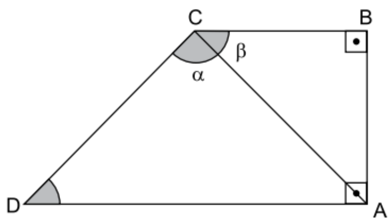
$$H^2 = 16^2 + 12^2 \quad \rightarrow \quad H^2 = 256 + 144 \quad \rightarrow \quad H^2 = 400 \quad \rightarrow \quad H = 20\ cm$$

Pronto! **Temos a hipotenusa e os dois catetos de R_2**. Para obter o perímetro, basta somarmos tudo!

$$Perímetro\ de\ R_2 = 20 + 16 + 12 \quad \rightarrow \quad Perímetro\ de\ R_2 = 48\ cm$$

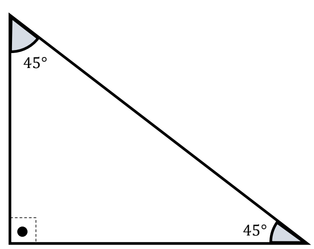
Gabarito: LETRA D.

28. (VUNESP/TJ-SP/2015) Na figura, o trapézio retângulo ABCD é dividido por uma de suas diagonais em dois triângulos retângulos isósceles, de lados $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DC}$.



Desse modo, é correto afirmar que a soma das medidas dos ângulos α e β é igual a
A) 125°.
B) 115°.
C) 110°.
D) 135°.
E) 130°.

Comentários:
Em um triângulo retângulo, teremos um ângulo reto (90°). Quando ele é isóscele, os outros ângulos serão iguais a 45°, conforme mostra a figura abaixo.



Qual o motivo disso? Vamos lá! Lembre-se que **a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°**.

$$a + b + c = 180°$$

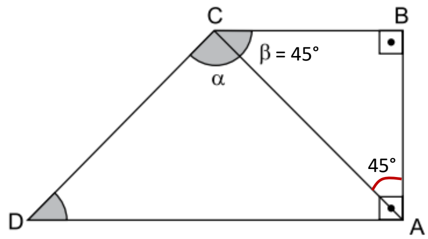
- Quando o triângulo é retângulo, **um dos ângulos é igual a 90°**. Vamos dizer que seja "a". Logo,

$$90° + b + c = 180° \quad \rightarrow \quad b + c = 90°$$

- Quando o triângulo é isóscele, **ele possui dois ângulos iguais**. Portanto, $b = c = x$.

$$x + x = 90° \quad \rightarrow \quad 2x = 90° \quad \rightarrow \quad x = 45°$$

Assim, em um triângulo retângulo isósceles, sempre **teremos um ângulo de 90° e outros dois de 45°**. Agora, vamos para a questão em si. De acordo com o enunciado, tínhamos **um trapézio que foi dividido em dois triângulos retângulos isósceles**. Sendo assim, vamos olhar atentamente para a figura dada no enunciado.



Observe que **ABC é um dos triângulos retângulos**. Se já temos o ângulo de 90° em B, então os demais serão de 45°, já que é um triângulo retângulo isósceles. Com isso, já podemos dizer que $\boldsymbol{\beta = 45°}$ Falta determinarmos α. Como **DCA é outro triângulo retângulo isósceles**, então α mede 90° ou 45°. Para decidir qual dois é o valor de α, podemos ir por tentativa, para ganhar velocidade.

Se α fosse 45°, a soma de α e β seria 90°. **Não há alternativa com esse valor**. Consequentemente, α não pode ser 45° e **o único valor que sobra para ele é 90°**. Com isso, $\alpha + \beta = 45° + 90° = 135°$.

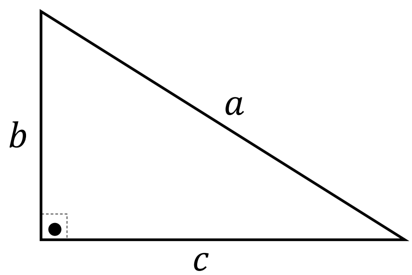
Gabarito: LETRA D.

29. (VUNESP/Prefeitura Municipal da Estância Turística de São Roque (SP)/2020) De um terreno no formato de triângulo retângulo, sabe-se que o maior e o menor lados medem 25 metros e 15 metros, respectivamente. A medida do terceiro lado desse terreno é igual a

A) 19,5 metros.
B) 20,0 metros.
C) 20,5 metros.
D) 21,0 metros.
E) 21,5 metros.

Comentários:

Galera, a questão falou de triângulo retângulo. Quando isso acontecer, lembre-se da seguinte imagem:



- O lado de comprimento **"a" é chamado de hipotenusa** e é o maior lado do triângulo retângulo.
- Os lados de comprimento **"b" e "c" são chamados de catetos**.

Esses três comprimentos se relacionam por meio do Teorema de Pitágoras que diz: **"o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos".**

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Como o enunciado disse que **o maior lado mede 25 metros**, então já temos o valor da hipotenusa.

$$a = 25$$

Por sua vez, **o menor lado mede 15 metros**. Ele é um dos catetos, vamos dizer que seja b.

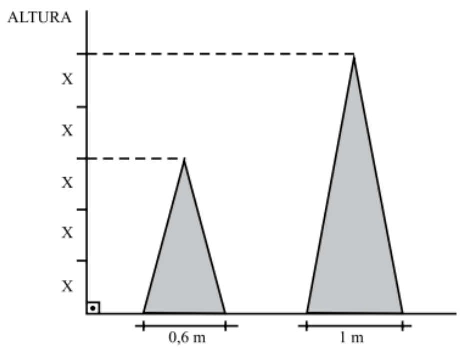
$$b = 15$$

Com essas duas medidas, podemos achar a terceira **usando o Teorema de Pitágoras**.

$$25^2 = 15^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad c^2 = 625 - 225 \quad \rightarrow \quad c^2 = 400 \quad \rightarrow \quad c = 20 \text{ metros}$$

Gabarito: LETRA B.

30. (VUNESP/TJ-SP/2011) A figura compara as alturas, medidas em metros, de dois painéis decorativos triangulares, fixados em uma parede, que simulam árvores de Natal. Sabendo-se que a soma das medidas das alturas dos dois painéis é igual a 4 m, e que em cada painel foram instaladas 200 lampadazinhas coloridas por metro quadrado, pode-se concluir que o número de lâmpadas instaladas no painel de maior altura foi igual a



A) 200.
B) 250.
C) 275.
D) 300.

Comentários:
Olhando para a figura, vemos que **o painel menor tem altura de "3x"**, enquanto **o painel maior tem altura de "5x"**. Como o enunciado disse que **a soma dessas alturas é 4 metros**, podemos equacionar:

$$3x + 5x = 4 \quad \rightarrow \quad 8x = 4 \quad \rightarrow \quad x = 0{,}5\ m$$

Assim, cada "x" na figura equivale a 0,5 metros.

- Se o **painel <u>menor</u>** tem altura igual a "3x", quando substituímos o valor de "x" ficamos com:

$$Altura\ do\ Painel\ Menor = 3 \cdot 0{,}5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{Altura\ do\ Painel\ Menor = 1{,}5\ m}$$

- Se o **painel <u>maior</u>** tem altura igual a "5x", quando substituímos o valor de "x" ficamos com:

$$Altura\ do\ Painel\ Maior = 5 \cdot 0{,}5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{Altura\ do\ Painel\ Maior = 2{,}5\ m}$$

Para encontrar o número de lâmpadas instaladas no <u>painel de maior altura</u>, **precisamos encontrar sua <u>área</u>**.

- A **base é igual a 1 m** e **a altura é 2,5 m**. Assim,

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \quad \rightarrow \quad A = \frac{1 \cdot 2{,}5}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A = 1{,}25\ m^2}$$

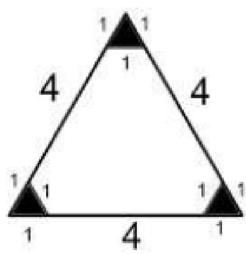
- Como o enunciado falou que **200 lâmpadas por metro quadrado**, basta multiplicarmos os dois valores.

$$Total\ de\ Lâmpadas = 200 \cdot 1{,}25 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{Total\ de\ Lâmpadas = 250}$$

Gabarito: LETRA B.

Outras Bancas

31. (RBO/ISS-BH/2022) Na figura a seguir, temos um triângulo equilátero de lado 6 dm, e em cada vértice desse triângulo, temos triângulo equilátero de lado 1 dm.



O percentual do triângulo de lado 6 dm, que está escurecido, é de, aproximadamente,

A) 6,67%.
B) 7,33%.
C) 8,33%.
D) 9,00%.
E) 10,2%

Comentários:

Questão sobre a área do **triângulo <u>equilátero</u>**! O primeiro passo é lembrar da fórmula:

$$A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

Agora, vamos calcular **a área do triângulo equilátero de 6 dm de lado**.

$$A_M = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \quad \rightarrow \quad A_M = \frac{36\sqrt{3}}{4} \quad \rightarrow \quad A_M = 9\sqrt{3}\ \text{dm}^2$$

Depois, precisamos encontrar a área do triângulo menor, que está escurecido. Note que esses triângulos menores também **são equiláteros e possuem 1 dm de lado**. Logo:

$$A_m = \frac{1^2\sqrt{3}}{4} \quad \rightarrow \quad A_m = \frac{\sqrt{3}}{4}\ \text{dm}^2$$

Opa, temos **a área de 1 triângulo escurecido, mas são 3 deles na figura**! Assim:

$$A_t = 3A_m \quad \rightarrow \quad A_t = \frac{3\sqrt{3}}{4}\ \text{dm}^2$$

Para descobrir o percentual do triângulo maior que está escurecido, dividimos A_t por A_M.

$$\frac{A_t}{A_m} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{9\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad \frac{A_t}{A_m} = \frac{1}{12} \quad \rightarrow \quad \frac{A_t}{A_m} = 0{,}0833\ \ldots$$

Sendo assim, o percentual é dado pela multiplicação do resultado acima **por 100**.

$$\boxed{\frac{A_t}{A_m} = 8{,}33\%}$$

Gabarito: LETRA C.

32. (FUNDATEC/PREF. FLORES DA CUNHA/2022) Analise as assertivas a seguir:

I. Todo triângulo retângulo tem um ângulo reto.
II. Todo triângulo retângulo tem catetos e hipotenusa.
III. Os ângulos internos de um triângulo retângulo possuem medidas iguais.

Quais estão corretas?
A) Apenas I.
B) Apenas II.
C) Apenas I e II.
D) Apenas II e III.
E) I, II e III.

Comentários:
Vamos analisar as assertivas.

I. Todo triângulo retângulo tem um ângulo reto.
Certo. É exatamente a presença de um **ângulo reto (90 graus)** que caracteriza o triângulo retângulo.

II. Todo triângulo retângulo tem catetos e hipotenusa.
Certo. Todo triângulo retângulo tem **dois catetos e uma hipotenusa**. A relação entre esses elementos é dada pelo **Teorema de Pitágoras**.

III. Os ângulos internos de um triângulo retângulo possuem medidas iguais.
Errado. Todo triângulo tem três ângulos. No triângulo retângulo, um desses ângulos será o de 90 graus. No entanto, os outros dois ângulos podem assumir quaisquer valores, **não necessariamente iguais**.

Gabarito: LETRA C.

33. (IDECAN/IBGE/2022) Considere as seguintes afirmações abaixo:

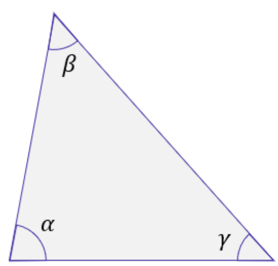
I. A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180°.

II. Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

III. Em todo triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois.

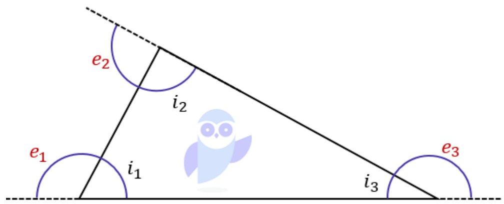
Assinale o item correto:
A) Somente I está correta.
B) Somente II está correta.
C) Somente I e II estão corretas.
D) Somente II e III estão corretas
E) Todas as afirmações estão corretas.

Comentários:
I. A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180°.
Certo. É um resultado muito importante no contexto do estudo dos triângulos! Anote ele.



$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$$

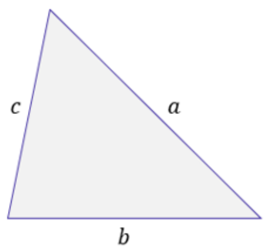
II. Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.
Certo também! É um resultado menos comum, mas igualmente importante. Nós demonstramos na teoria!



$$\boxed{e_1 = i_2 + i_3}$$

III. Em todo triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois.

Certo. É o que conhecemos como desigualdade triangular, também interpretada como uma **condição de existência** para o triângulo.



$$a < b + c \qquad b < a + c \qquad c < a + b$$

Gabarito: LETRA E.

Questões Comentadas

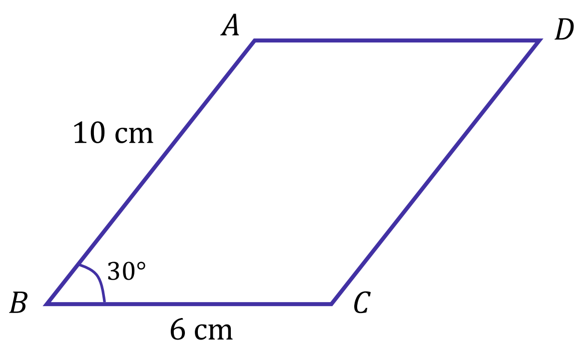
Quadriláteros

CEBRASPE

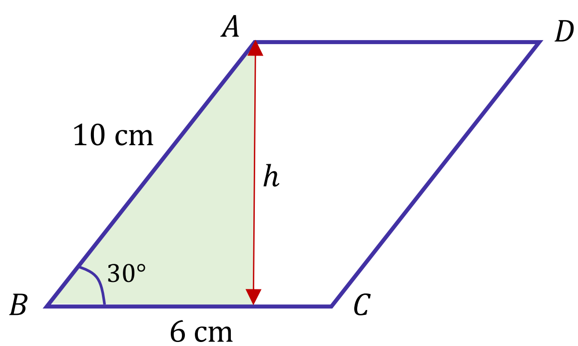
1. (CESPE/FUB/2022) Julgue o item que se segue, relacionados a geometria plana e espacial.

Um paralelogramo $ABCD$ com $\overline{AB} = 10\ cm$, $\overline{BC} = 6\ cm$ e $A\hat{B}C = 30°$ tem área igual a $30\ cm^2$.

Comentários:
Vamos desenhar esse paralelogramo!



Para calcular **a área desse paralelogramo**, precisamos primeiramente encontrar sua altura.



Note que "**h" é o cateto oposto do ângulo de 30°**, enquanto **o lado AB é a hipotenusa** do triângulo destacado em verde. Sendo assim, podemos escrever:

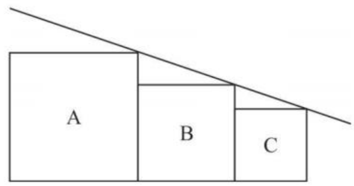
$$\text{sen}\ 30° = \frac{h}{10} \quad \rightarrow \quad h = 10 \cdot \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{h = 5\ cm}}$$

Com a altura, podemos encontrar a área **multiplicando a base BC por h.**

$$A = BC \cdot h \quad \rightarrow \quad A = 6 \cdot 5 \quad \rightarrow \quad \boxed{A = \mathbf{30\ cm^2}}$$

Gabarito: CERTO.

2. (CESPE/SEFAZ-RS/2019) Os quadrados A, B e C foram colocados lado a lado, de modo que uma reta contém os três vértices superiores, como mostra a figura a seguir

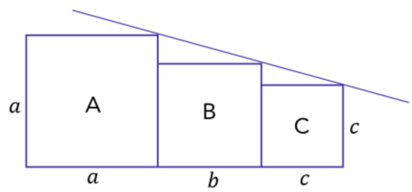


Se a área do quadrado A for 24 cm², e a área do quadrado C for 6 cm², então a área do quadrado B será igual a

A) 9 cm²
B) 10 cm²
C) 12 cm²
D) 15 cm²
E) 18 cm²

Comentários:

Vamos esquematizar, **destacando os lados** de cada quadrado.

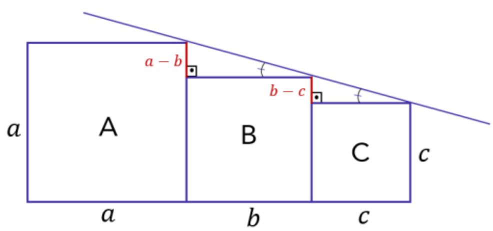


Lembre-se que **os lados de um quadrado são todos iguais**. Portanto, os lados do quadrado A medem todos uma mesma quantidade "a". Analogamente, os lados de B medem um mesmo valor "b". O enunciado trouxe as áreas dos quadrados A e C. **Com essas áreas, conseguimos determinar o valor dos lados**.

$$A_A = a^2 \quad \rightarrow \quad 24 = a^2 \quad \rightarrow \quad a = 2\sqrt{6}\ cm$$

$$A_C = c^2 \quad \rightarrow \quad 6 = c^2 \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{6}\ cm$$

Agora que temos os lados dos quadrados A e C, você deve estar se perguntando como faremos para encontrar o lado de B. Para isso, **precisamos encontrar uma relação que envolva esses valores**. A reta desenhada sobre os quadrados não veio por acaso. Ela está aí para ajudá-lo a perceber que **os triângulos retângulos formados por ela são semelhantes**.



Agora, podemos **usar semelhança de triângulos** para encontrar uma relação entre os lados.

$$\frac{a-b}{b}=\frac{b-c}{c}$$

Fazendo **meio pelos extremos**, ficamos com:

$$b^2-bc=ac-bc \quad \rightarrow \quad b^2=ac \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_B=b^2=ac}$$

Pessoal, observe que encontramos direto **o valor da área de B**. Logo, para encontrarmos a resposta da questão, basta substituirmos os valores.

$$A_B=2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_B=12\ cm^2}$$

Gabarito: LETRA C.

3. (CESPE/TJ-PR/2019) O carpinteiro José cortou um retângulo de madeira medindo 80 cm de comprimento por 60 cm de largura. Ele precisa cortar outro retângulo, com a mesma área do primeiro, mas com comprimento um quarto maior que o daquele outro. Desse modo, em relação à largura do primeiro retângulo, a largura do segundo deverá

A) diminuir um terço.

B) diminuir um quinto.

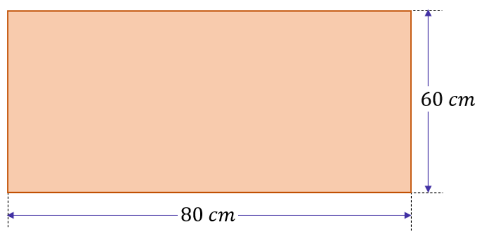
C) aumentar três vezes.

D) aumentar um quinze avos.

E) aumentar trinta e seis quinze avos.

Comentários:

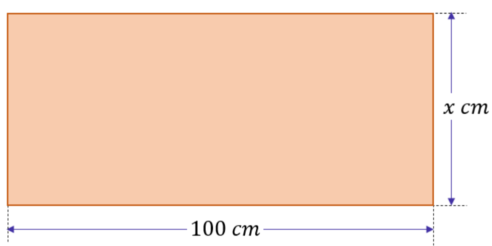
José cortou um retângulo de madeira medindo 80 cm x 60 cm. Assim, temos algo do tipo:



A área de um retângulo é o produto dos seus lados.

$$A=80\cdot 60 \quad \rightarrow \quad A=4800\ cm^2$$

Ele quer cortar outro retângulo com essa **mesma área** e **com comprimento um quarto maior que 80 cm**. Ora, **um quarto de 80 cm é 20 cm**. Assim, o comprimento do novo retângulo será $80+20=100\ cm$.



A questão nos pergunta **qual deve ser a largura do novo retângulo** para que a área continue a mesma. Para determinar isso, podemos usando novamente a fórmula da área.

$$4800 = 100 \cdot x \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{x = 48\ cm}$$

Note, portanto, que a largura deve diminuir de 60 cm para 48 cm, para que a área continue igual. A diminuição foi de 12 unidades. Observe que **12 é exatamente um quinto de 60**. Assim, podemos marcar a letra B.

Gabarito: LETRA B.

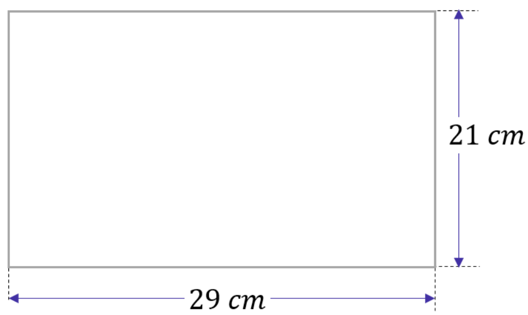
4. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) Julgue o item a seguir, relativo a sequências numéricas.

Situação hipotética: As margens de uma folha de papel retangular medem 21 cm × 29 cm. Cortando essa folha ao meio, pelo ponto médio da margem maior, obtêm-se duas folhas em que as margens medem 21 cm × 29/2 cm.

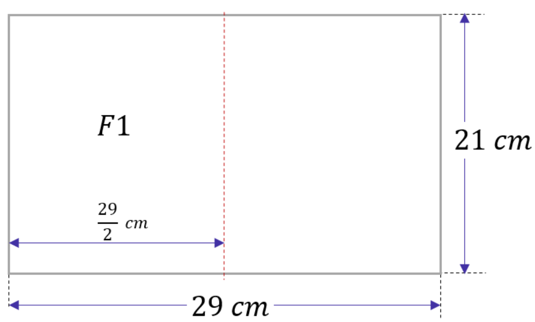
Desprezando uma delas, a outra é denominada folha F1. Cortando F1 ao meio, pelo ponto médio da margem maior, obtêm-se duas folhas em que as margens medem 21/2 cm x 29/2 cm. Desprezando uma delas, a outra é denominada folha F2. Esse processo de divisão pode ser continuado sucessivamente.

Assertiva: Nessa situação, a área da folha F6 será inferior a 9 cm².

Comentários:
Temos uma folha com o seguinte aspecto:



Vamos cortá-la ao meio, pelo **ponto médio da margem maior**.



Concorda que **F1 vai ter metade da área da folha inicial**? E quando partimos F1 no meio novamente, vamos ficar com **metade da metade**? E assim sucessivamente? Vamos calcular a área da folha inteira:

$$A = 21 \cdot 29 \quad \rightarrow \quad A = 609\ cm^2$$

A folha $F1$ terá área igual a metade da área da folha inteira.

$$A_{F1} = \frac{609}{2} \quad \rightarrow \quad A_{F1} = 304{,}5\ cm^2$$

Quando você partir na metade novamente, a área da folha $F2$ será a metade da área da folha $F1$.

$$A_{F2} = \frac{304{,}5}{2} \quad \rightarrow \quad A_{F2} = 152{,}25\ cm^2$$

Podemos fazer isso **até a folha F6**.

$$A_{F3} = \frac{152{,}25}{2} \quad \rightarrow \quad A_{F3} = 76{,}125\ cm^2$$

$$A_{F4} = \frac{76{,}125}{2} \quad \rightarrow \quad A_{F4} = 38{,}0625\ cm^2$$

$$A_{F5} = \frac{38{,}0625}{2} \quad \rightarrow \quad A_{F5} = 19{,}03125\ cm^2$$

$$A_{F6} = \frac{19{,}03125}{2} \quad \rightarrow \quad A_{F6} = 9{,}515625\ cm^2$$

Essa solução seria uma via mais **"força bruta".** Ir dividindo um por um até encontrar a área de F6. No entanto, você poderia perceber no começo que **dividir algo pela metade 6 vezes é o mesmo que dividir por $\mathbf{2^6 = 64}$**. Sendo assim, você obteria o mesmo resultado fazendo direto que:

$$A_{F6} = \frac{609}{2^6} \quad \rightarrow \quad A_{F6} = \frac{609}{64} \quad \rightarrow \quad A_{F6} = 9{,}515625\ cm^2$$

Ressalto também que **você <u>não necessita</u> dessa "precisão" toda**, uma vez **que a questão não pede o valor exato**, mas apenas quer saber se é inferior ou superior a um determinado número. Logo, **fazer as contas considerando apenas <u>duas casas decimais</u> já é suficiente (rsrs)**. *Firmeza?!* Note que a área é superior a 9 cm², tornando o item incorreto.

Gabarito: ERRADO.

5. (CESPE/CAGE-RS/2018) Em um bairro nobre de determinada cidade, uma imobiliária colocou à venda vários terrenos: independentemente do tamanho, o preço do metro quadrado é o mesmo para todos os terrenos à venda. Um terreno retangular de 600 m² de área custa R$ 3.240.000. Em outro terreno, também retangular, um dos lados é 25% maior que o lado equivalente do primeiro terreno; o outro lado é 20% menor que o lado equivalente do primeiro terreno. Nesse caso, o preço do segundo terreno é igual a

A) R$ 1.458.000.

B) R$ 3.240.000.
C) R$ 3.402.000.
D) R$ 3.078.000.
E) R$ 3.564.000.

Comentários:
Note que **os terrenos são retângulos** e, portanto, **a área é dada pelo produto dos lados**. Considere que o primeiro terreno tenha **lados $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$**. Assim,

$$a \cdot b = 600$$

O segundo terreno tem um dos lados medindo **25% a mais do que o lado equivalente no primeiro terreno**. Com isso, **esse lado valeria $\mathbf{1,25}\boldsymbol{a}$**. Concorda? Analogamente, se **o outro lado é 20% menor**, então ele vale 80% do lado equivalente no primeiro terreno. Assim, **o segundo lado valeria $\mathbf{0,80}\boldsymbol{b}$**. A área do terreno é:

$$A = (1{,}25a) \cdot (0{,}8b) \quad \rightarrow \quad A = ab \quad \rightarrow \quad A = 600$$

Veja que $\mathbf{1,25 \cdot 0,8 = 1}$. Sendo assim, **o segundo terreno tem a mesma área do primeiro** e, portanto, deve possuir a mesmo valor. Com isso, seu preço também é de R$ 3.240.000.

Gabarito: LETRA B.

6. (CESPE/IFF/2018) Os lados de um terreno quadrado medem 100 m. Houve erro na escrituração, e ele foi registrado como se o comprimento do lado medisse 10% a menos que a medida correta. Nessa situação, deixou-se de registrar uma área do terreno igual a
A) 20 m².
B) 100 m².
C) 1.000 m².
D) 1.900 m².
E) 2.000 m².

Comentários:
A área de um quadrado é **o comprimento do lado elevado ao quadrado**. Assim, em um terreno quadrado de lado 100 m, temos que sua área é:

$$A_T = a^2 \quad \rightarrow \quad A_T = 100^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_T = 10.000\ m^2}$$

Mas, na hora de escriturar, **o lado do terreno foi registrado por um valor errado**. Esse valor é 10% menor do que o real. Assim, **o lado considerado foi de apenas 90 m**. Tudo bem?! Se o lado registrado é 10% menor, então ele vale 90% do lado real. **90% de 100 é 90**. A área desse quadrado de lado igual a 90 metros é:

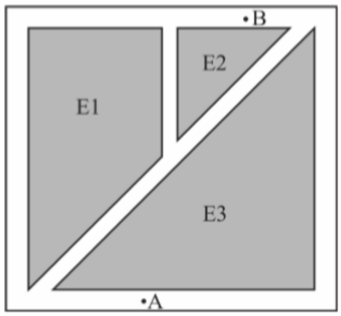
$$A_{ERRO} = 90^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{ERRO} = 8.100\ m^2}$$

Se a área real é de 10.000 m² e foi registrado uma área de 8.100 m², então a diferença entre as áreas é de:

$$Diferença = 10.000 - 8.100 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{Diferença = 1.900\ m^2}$$

Gabarito: LETRA D.

(PM-AL/2018) Texto para as próximas questões
A figura seguinte mostra a planta baixa de um condomínio. O terreno ocupado pelo condomínio é um quadrado de lados que mede 60 m. Nesse condomínio, as áreas indicadas por E1, E2 e E3 correspondem aos locais onde estão construídos os prédios residenciais, e as regiões em branco correspondem às vias de livre circulação para pedestres e veículos.



A partir da figura e das informações precedentes, julgue os itens a seguir, considerando que a área de E2 seja igual a 200 m².

7. (CESPE/PM-AL/2018) Se a área de E3 for igual à área da região ocupada pelas vias de livre circulação e se a área de E1 for igual a 900 m², então a área de E3 será igual a 1.250 m².

Comentários:
O terreno ocupado pelo condomínio **é um quadrado de lado 60 m**. Assim, a área total do terreno é:

$$A_T = 60^2 \quad \rightarrow \quad A_T = 3600\ m^2$$

Sabemos que a área **E2 mede 200 m²** e a área de **E1 é igual a 900 m²**. A pergunta que fazemos é: quanto de espaço sobrará para a construção de E3 e das vias? Devemos fazer a seguinte subtração:

$$A_{sobra} = A_T - A_{E1} - A_{E2} \quad \rightarrow \quad A_{sobra} = 3600 - 900 - 200 \quad \rightarrow \quad A_{sobra} = 2500\ m^2$$

Note que temos disponíveis **2.500 m² para a construção de E3 e das vias**. Como as duas devem ocupar igual área, então **a área de cada uma será metade desse valor**.

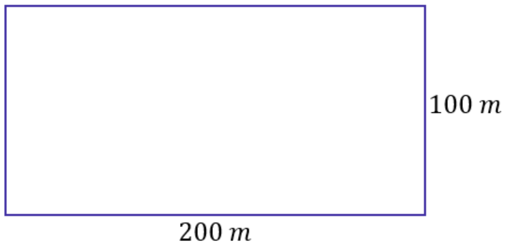
$$A_{E3} = A_{vias} = \frac{2500}{2} = 1.250\ m^2$$

Gabarito: CERTO.

8. (CESPE/SEDF/2017) No item a seguir, é apresentada uma situação hipotética seguida de uma assertiva a ser julgada, a respeito de juros, divisão proporcional e regra de três.

Um terreno retangular medindo 100 m × 200 m foi colocado à venda por R$ 250.000,00. O terreno poderá ser vendido inteiro ou em frações e, nesse caso, o preço do m² da fração de terreno é igual ao do m² do terreno inteiro. Nessa situação, se um indivíduo desejar comprar uma fração medindo 50 m × 100 m, ele pagará R$ 125.000,00 por essa fração de terreno.

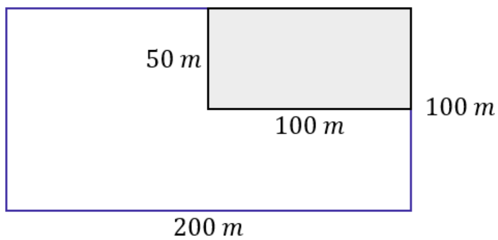
Comentários:
Pessoal, o terreno colocado à venda tem $200 \times 100 = \mathbf{20.000\ m^2}$ **de área**.



Ele foi colocado a venda **por R$ 250.000,00**. Logo, podemos calcular o preço do metro quadrado.

$$P_{m^2} = \frac{R\$\ 250.000{,}00}{20.000\ m^2} \quad \rightarrow \quad P_{m^2} = R\$\ 12{,}5\ por\ m^2$$

Uma pessoa quer comprar uma fração desse terreno, de tamanho **50 por 100 m**. Algo do tipo:



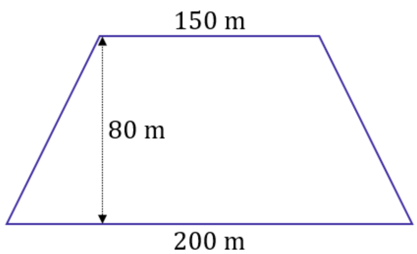
Portanto, a área da fração desejada pelo indivíduo é $50 \times 100 = 5.000\ m^2$. Como **o preço do metro quadrado da fração é igual ao do m² do terreno inteiro**, basta fazermos:

$$P_{fração} = A_{fração} \cdot P_{m^2} \quad \rightarrow \quad P_{fração} = 12{,}5 \cdot 5000 \quad \rightarrow \quad P_{fração} = R\$\ 62.500{,}00$$

Logo, **ele pagará R$ 62.500,00 e não R$ 125.000,00**.

Gabarito: ERRADO.

9. (CESPE/CPRM/2016)



A área do trapézio apresentado, em que a altura é igual a 80 m, a base maior mede 200 m e a base menor, 150 m, é igual a
A) 8.000 m²
B) 6.000 m²
C) 23.000 m²
D) 21.000 m²
E) 14.000 m²

Comentários:
Questão que exige a **aplicação direta da fórmula da área do trapézio**. Lembre-se da teoria que:

$$A_{trapézio} = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

- B: representa o comprimento da **base maior**;
- b: representa o comprimento da **base menor**;
- h: representa a **altura do trapézio**.

O enunciado forneceu os seguintes valores:

- $B = 200\ m$;
- $b = 150\ m$;
- $h = 80\ m$.

Substituindo na expressão:

$$A_{trapézio} = \frac{(200+150)\cdot 80}{2} \quad \rightarrow \quad A_{trapézio} = \frac{28000}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{trapézio} = 14.000\ m^2}$$

Gabarito: LETRA E.

10. (CESPE/BACEN/2013) A numeração das notas de papel-moeda de determinado país é constituída por duas das 26 letras do alfabeto da língua portuguesa, com ou sem repetição, seguidas de um numeral com 9 algarismos arábicos, de 0 a 9, com ou sem repetição. Julgue o próximo item relativos a esse sistema de numeração.

Considere que, até o ano 2000, as notas de papel-moeda desse país fossem retangulares e medissem 14 cm × 6,5 cm e que, a partir de 2001, essas notas tivessem passado a medir 12,8 cm × 6,5 cm, mas tivessem mantido a forma retangular. Nesse caso, com o papel-moeda gasto para se fabricar 10 notas de acordo com as medidas adotadas antes de 2000 é possível fabricar 11 notas conforme as medidas determinadas após 2001.

Comentários:
O primeiro passo é **calcular as áreas de cada uma das notas**.

- Nota antiga (14 cm x 6,5 cm)

$$A_{antiga} = 14 \cdot 6{,}5 \quad \rightarrow \quad A_{antiga} = 91\ cm^2$$

- Nota nova (12,8 cm x 6,5 cm)

$$A_{nova} = 12{,}8 \cdot 6{,}5 \quad \rightarrow \quad A_{nova} = 83{,}2\ cm^2$$

Agora, vamos calcular quanto papel moeda é gasto **para fabricar 10 notas antigas e 11 notas novas**.

- 10 notas antigas possuem uma área de:

$$A_{10} = \mathbf{10} \cdot A_{antiga} \quad \rightarrow \quad A_{10} = 10 \cdot 91 \quad \rightarrow \quad A_{10} = 910\ cm^2$$

- 11 notas novas possuem uma área de:

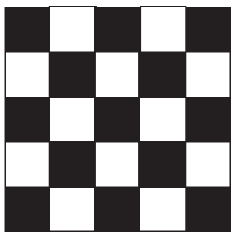
$$A_{11} = \mathbf{11} \cdot A_{nova} \quad \rightarrow \quad A_{11} = 11 \cdot 83{,}2 \quad \rightarrow \quad A_{11} = 915{,}2\ cm^2$$

A área de papel necessária para produzir 11 notas novas **é maior** do que para produzir 10 notas antigas. Assim, o item erra quando afirma que com o papel gasto para produzir 10 notas antigas seria possível produzir 11 novas.

Gabarito: ERRADO.

CESGRANRIO

11. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) A Figura mostra um tabuleiro 5x5, composto por 25 quadradinhos idênticos. A área total do tabuleiro é de 500 cm².



A soma das áreas, em cm², de todos os quadradinhos escuros desse tabuleiro é igual a

A) 240

B) 250

C) 260

D) 270

E) 280

Comentários:

Pessoal, questão para aquecermos! **São 25 quadradinhos, todos idênticos**. Como **a área total do tabuleiro é de 500 m²**, para encontrarmos a área de um único quadradinho, basta dividirmos essa área total pela quantidade de quadradinhos. Assim,

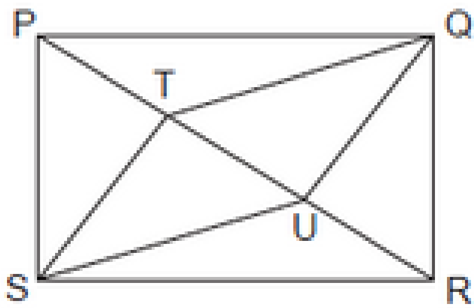
$$\text{Área de } 1 \text{ quadradinho} = \frac{500}{25} \quad \rightarrow \quad \text{Área de } 1 \text{ quadradinho} = 20\ \text{cm}^2$$

Se contarmos a quantidade de quadradinhos escuros, **encontramos 13**. Logo, **a soma** das áreas de todos os quadradinhos escuros é dada por:

$$S = 13 \cdot 20 \quad \rightarrow \quad S = 260\ \text{cm}^2$$

Gabarito: LETRA C.

12. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Em um retângulo de lados PQ = 12 cm e QR = 9 cm, os pontos T e U dividem a diagonal em três segmentos iguais, como ilustrado na Figura abaixo.



A área do quadrilátero STQU, em cm², é igual a

A) 108

B) 72

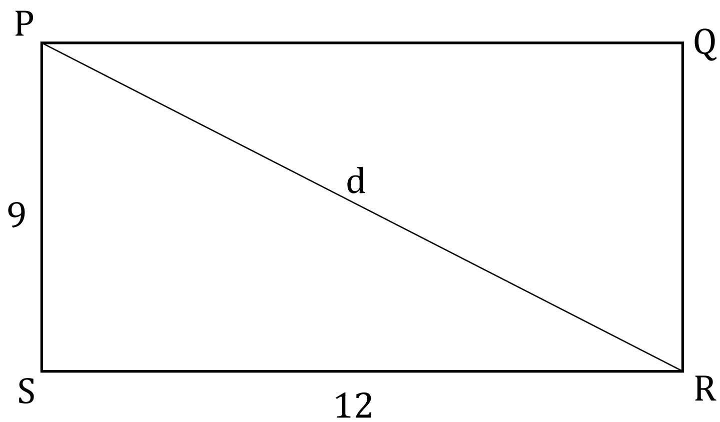
C) 54

D) 48

E) 36

Comentários:

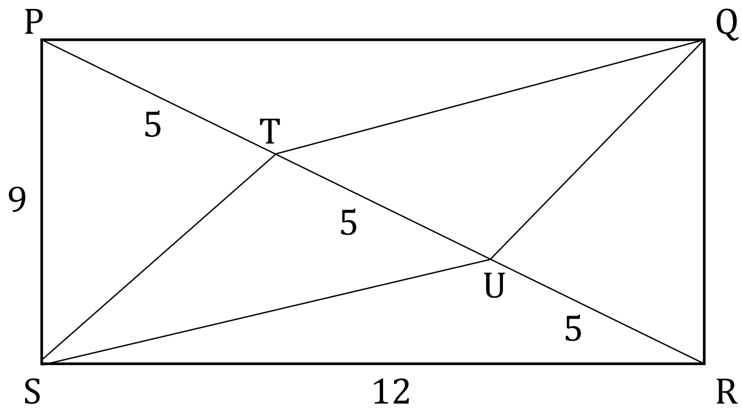
Vamos bem com calma. A primeira informação que precisamos é saber a diagonal. Afinal, ela é quem está sendo dividida em três pedaços iguais. Para encontrá-la, é importante percebemos o seguinte:



Observe que a diagonal é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos 12 e 9. Vamos aplicar o Teorema de Pitágoras para determiná-la.

$$d^2 = 12^2 + 9^2 \quad \rightarrow \quad d^2 = 144 + 81 \quad \rightarrow \quad d^2 = 225 \quad \rightarrow \quad d = 15$$

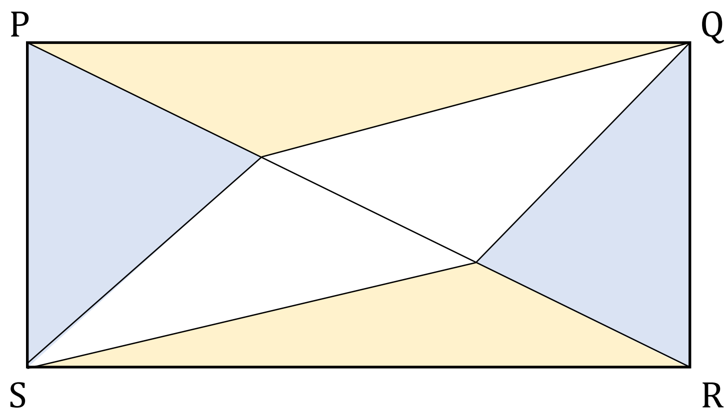
Como os pontos T e U dividem a diagonal em três segmentos iguais, cada segmento medirá 5 cm. Veja.



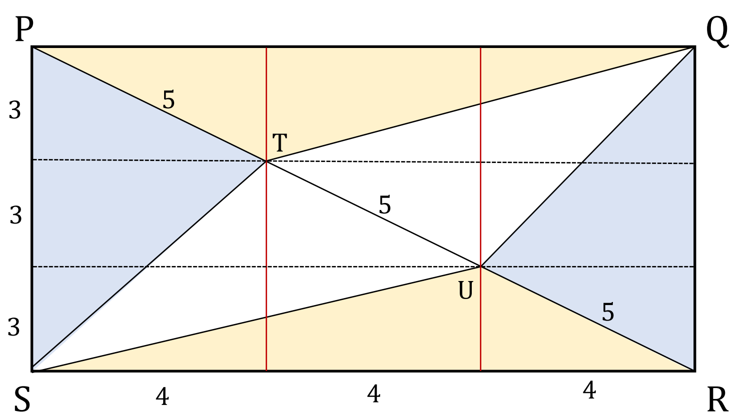
Qual vai ser nossa estratégia para determinar a área do quadrilátero STQU? Primeiramente, determinaremos **a área do quadrilátero PQSR**. Como estamos diante de um retângulo, basta multiplicarmos os lados, observe:

$$S_{PQRS} = 9 \cdot 12 \quad \rightarrow \quad \mathbf{S_{PQRS} = 108\ cm^2}$$

Sabemos a área total do retângulo, para determinar a área do quadrilátero SQTU, devemos subtrair da área total, a área dos seguintes triângulos:



Perceba que são **dois triângulos beges iguais** e **dois triângulos azuis**, também iguais. Você deve estar se perguntando como faremos para encontrar essas áreas. Para isso, precisaremos riscar um pouco essa figura.



Não se assuste! Tente ver que quando dividimos as diagonais em segmentos iguais, as horizontais e verticais que passam pelos pontos T e U **dividirão os lados do triângulo também em partes iguais**. Um jeito de perceber isso é por meio dos **triângulos retângulos de hipotenusas iguais a 5**.

Com eles, podemos lembrar do triângulo retângulo pitagórico de catetos 3 e 4. Com isso em mente, podemos concluir que **a altura do triângulo bege é igual a 3** e **a altura do triângulo azul é igual a 4**. Logo, é possível calcularmos as áreas.

$$S_{\text{triângulo bege}} = \frac{12 \cdot 3}{2} \quad \rightarrow \quad S_{\text{triângulo bege}} = 18 \text{ cm}^2$$

$$S_{\text{triângulo azul}} = \frac{9 \cdot 4}{2} \quad \rightarrow \quad S_{\text{triângulo azul}} = 18 \text{ cm}^2$$

Agora, para determinarmos **a área do quadrilátero STQU**, devemos fazer:

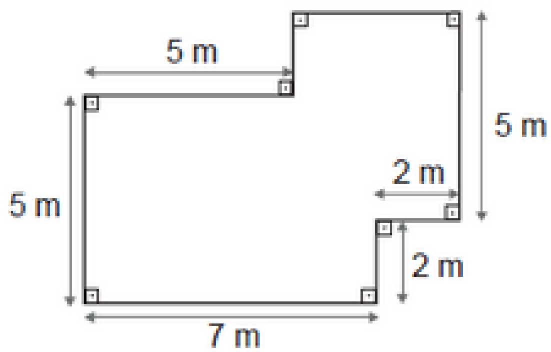
$$S_{STQU} = S_{PQRS} - 2S_{bege} - 2S_{azul} \quad \rightarrow$$

$$S_{STQU} = 108 - 36 - 36 \quad \rightarrow$$

$$S_{STQU} = 36 \text{ cm}^2$$

Gabarito: LETRA E.

13. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) A planta baixa do estoque de uma empresa está representada pela Figura abaixo. Todas as medidas indicadas estão na unidade metro, e todos os ângulos indicados na Figura são retos.

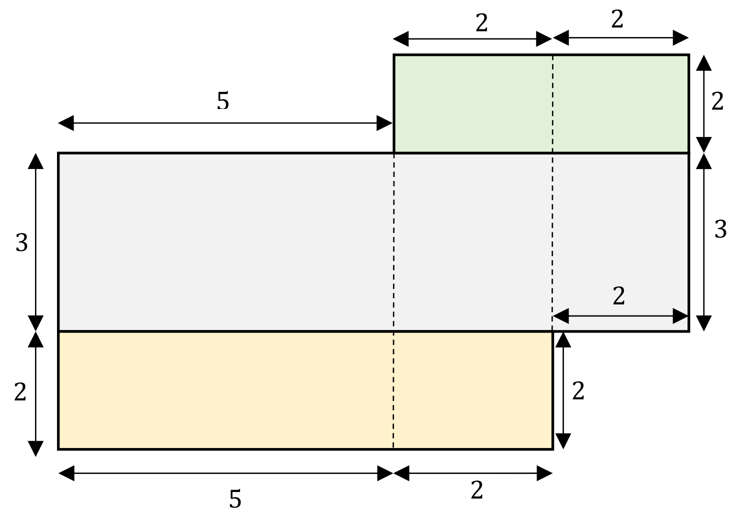


A medida da área do estoque, em metros quadrados, é

A) 32
B) 45
C) 49
D) 55
E) 63

Comentários:

Para calcularmos **a área do estoque**, devemos dividir a planta da seguinte forma:



Calcularemos *a área de cada um dos retângulos destacados*. Note também que dividi algumas medidas para facilitar a visualização dos lados de cada um desses triângulos.

$$S_{verde} = 4 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad S_{verde} = 8 \text{ m}^2$$

$$S_{cinza} = 3 \cdot 9 \quad \rightarrow \quad S_{cinza} = 27 \text{ m}^2$$

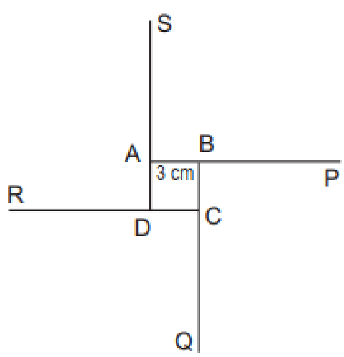
$$S_{bege} = 7 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad S_{bege} = 14 \text{ m}^2$$

Logo, a área do estoque é dada por:

$$S_{estoque} = S_{verde} + S_{cinza} + S_{bege} \quad \rightarrow \quad S_{estoque} = 8 + 27 + 14 \quad \rightarrow \quad \mathbf{S_{estoque} = 49 \text{ m}^2}$$

Gabarito: LETRA C.

14. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) Num quadrado ABCD, de lado 3 cm, prolonga-se AB, na direção de A para B, até um ponto P, tal que BP = 3 AB. Em seguida, prolonga-se o lado BC, de B para C, até o ponto Q, tal que CQ = 3 BC. Do mesmo modo, prolongam-se os lados CD e DA, respectivamente, até os pontos R e S, conforme a Figura a seguir.



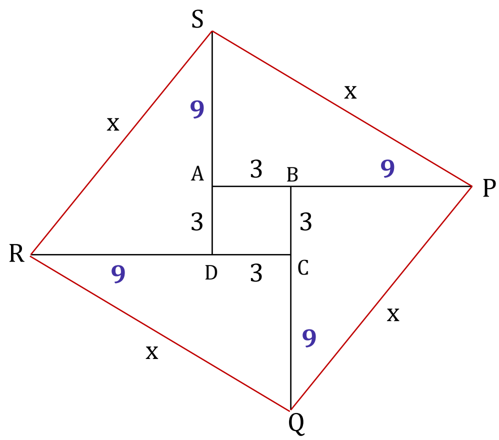
O perímetro, em cm, do quadrilátero PQRS será igual a

A) 12

B) 30

C) 36
D) 48
E) 60

Comentários:
Vamos desenhar um pouco, não tem jeito!



A questão pergunta o perímetro do quadrilátero PQRS. Quando olhamos para a figura acima, temos que essa medida é igual a 4x. Note que ***"x" é a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos iguais a 9 e 12***. Para perceber isso, basta observamos os *triângulos APS ou SRD ou RCQ ou PBQ*. Sendo assim, podemos determinar "x" por meio do **Teorema de Pitágoras**.

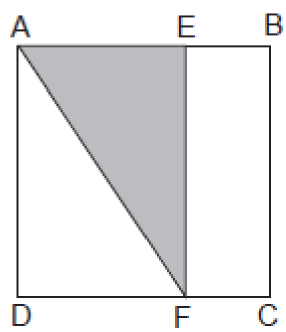
$$x^2 = 9^2 + 12^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 81 + 144 \quad \rightarrow \quad x^2 = 225 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 15\ cm}$$

Com o valor de "x" determinado, o perímetro será o quadruplo desse valor!

$$\text{Perímetro} = 4 \cdot 15 \quad \rightarrow \quad \textbf{Perímetro = 60 cm}$$

Gabarito: LETRA E.

15. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2018) Na Figura a seguir, ABCD é um quadrado de lado 10, e EF é traçado perpendicularmente aos lados AB e CD de modo que a área do triângulo AEF é 30% da área do quadrado.



Quanto mede FC?
A) 3
B) 4

C) 5
D) 6
E) 7

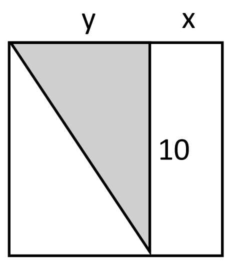
Comentários:
Primeiramente, vamos calcular **a área do quadrado ABCD**. Como o lado do quadrado mede 10, então sua área pode ser encontrada por:

$$S_{ABCD} = 10^2 \quad \rightarrow \quad S_{ABCD} = 100$$

Como **a área do triangulo AEF é 30% da área do quadrado**, então:

$$S_{AEF} = 30\% \cdot 100 \quad \rightarrow \quad S_{AEF} = 30$$

Agora, vamos olhar mais atentamente para a figura resumida abaixo.



A questão quer a medida FC. Note que **ela será exatamente a medida "x" indicada na figura**. Por sua vez, o **"y" é um dos catetos do triângulo retângulo**. Lembre-se que temos a área desse triângulo e o outro cateto, que é 10. Com isso, conseguimos determinar "y".

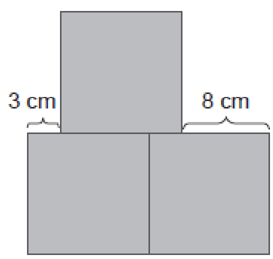
$$S_{AEF} = \frac{10y}{2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{S_{AEF}}{5} \quad \rightarrow \quad y = \frac{30}{5} \quad \rightarrow \quad y = 6$$

Ora, se $y = 6$, então x será dado por:

$$x + y = 10 \quad \rightarrow \quad x = 10 - 6 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 4}$$

Gabarito: LETRA B.

16. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) A Figura a seguir é composta por três quadrados idênticos, com um deles apoiado em outros dois que possuem um lado comum.



A área, em cm², de cada quadrado é igual a

A) 24

B) 72

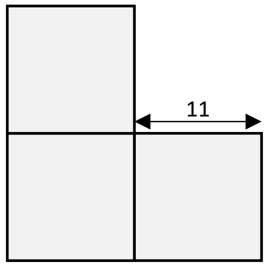
C) 73

D) 121

E) 576

Comentários:

Pessoal, se **os quadrados são iguais**, então podemos posicioná-los da seguinte maneira:



Perceba que quando afastamos o quadrado de cima 3 cm **para a esquerda**, **esses 3 cm "vão" para o outro lado**. Com isso, podemos concluir que **o lado do quadrado é a soma $8+3=11$ cm**. Com o lado do quadrado, podemos encontrar sua área.

$$\mathrm{S}=\mathrm{L}^2 \quad \rightarrow \quad \mathrm{S}=11^2 \quad \rightarrow \quad \mathrm{S}=121\ \mathrm{cm}^2$$

Gabarito: LETRA D.

17. (CESGRANRIO/IBGE/2016) Ao duplicar a largura de um determinado retângulo e reduzir à metade o comprimento desse mesmo retângulo, obtém-se um quadrado de perímetro P. O perímetro do retângulo original é

A) 2,5P

B) 0,25P

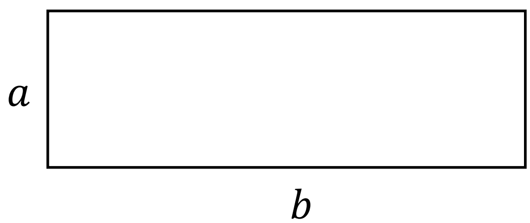
C) 1,25P

D) 0,75P

E) P

Comentários:

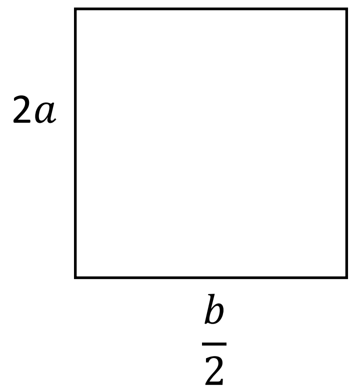
Primeiramente, vamos considerar um retângulo qualquer como o desenhado abaixo.



Lembre-se que **perímetro é a soma de todos os lados**. Sendo assim, considerando o retângulo acima, podemos tirar que seu perímetro é:

$$p = 2a + 2b$$

Agora, precisamos mexer na medida dos lados. O enunciado pede para **duplicar a largura** e **reduzir o comprimento pela metade**. Sendo assim,



O enunciado diz que **o resultado é um <u>quadrado</u>**, sendo assim:

$$2a = \frac{b}{2} \quad \rightarrow \quad b = 4a$$

O perímetro desse quadrado é:

$$P = 2 \cdot 2a + \frac{2 \cdot b}{2} \quad \rightarrow \quad P = 4a + b \quad \rightarrow \quad P = 4a + 4a \quad \rightarrow \quad P = 8a$$

Vamos escrever **o perímetro original como função apenas de "a":**

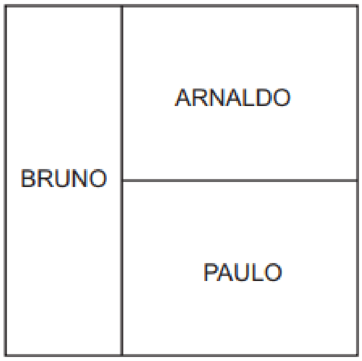
$$p = 2a + 2b \quad \rightarrow \quad p = 2a + 2 \cdot 4a \quad \rightarrow \quad p = 10a$$

Com os dois perímetros escritos em função de "a", podemos, agora, **<u>compará-los</u>**.

$$\frac{p}{P} = \frac{10a}{8a} \quad \rightarrow \quad \frac{p}{P} = 1{,}25 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{p = 1{,}25P}$$

Gabarito: LETRA C.

18. (CESGRANRIO/IBGE/2014) Três herdeiros, Arnaldo, Bruno e Paulo, dividiram um terreno quadrado de 42 metros de lado em três terrenos retangulares de áreas iguais. A Figura abaixo mostra a divisão e a parte que coube a cada um.



O perímetro, em metros, do terreno retangular destinado a Bruno é

A) 588
B) 105
C) 147
D) 112
E) 126

Comentários:

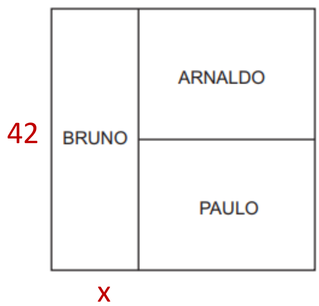
Primeiramente, vamos calcular a área do terreno. Como **o lado mede 42 m**, então a área é dada por:

$$S = 42^2 \quad \rightarrow \quad S = 1764\ m^2$$

Como esse retângulo foi dividido em **três retângulos de áreas iguais**, então cada um dos retângulos tem a seguinte área:

$$S = \frac{1764}{3} \quad \rightarrow \quad S = 588\ m^2$$

Para encontrarmos o perímetro do terreno destinado a Bruno, ainda **precisamos encontrar um dos lados**.



Como já sabemos a área do terreno de Bruno, para determinarmos "x", basta fazermos:

$$42x = 588 \quad \rightarrow \quad x = \frac{588}{42} \quad \rightarrow \quad x = 14\ m$$

Pronto, com os dois lados do retângulo, podemos determinar o perímetro.

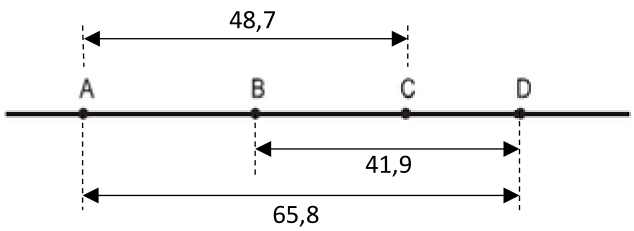
$$P = 2 \cdot 42 + 2 \cdot 14 \quad \rightarrow \quad \mathbf{P = 112\ m}$$

Gabarito: LETRA D.

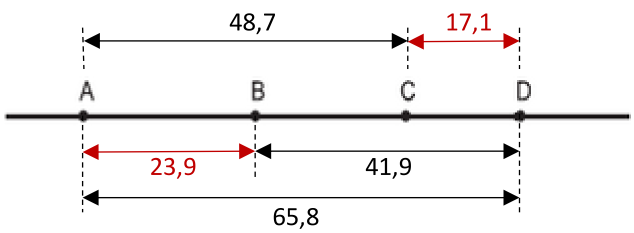
19. (CESGRANRIO/BB/2012) No modelo abaixo, os pontos A, B, C e D pertencem à mesma reta. O ponto A dista 65,8 mm do ponto D; o ponto B dista 41,9 mm do ponto D, e o ponto C está a 48,7 mm do ponto A.

Qual é, em milímetros, a distância entre os pontos B e C?
A) 17,1
B) 23,1
C) 23,5
D) 23,9
E) 24,8

Comentários:
Vamos colocar essas medidas "no papel". Fica bem melhor para visualizarmos.



Agora, vamos usar esse desenho para *determinarmos algumas outras medidas*.



O segmento AB foi calculado assim:

$$AB = AD - BD \quad \rightarrow \quad AB = 65{,}8 - 41{,}9 \quad \rightarrow \quad \mathbf{AB = 23,9\ cm}$$

Por sua vez, o segmento CD foi calculado da seguinte forma:

$$CD = AD - AC \quad \rightarrow \quad CD = 65{,}8 - 48{,}7 \quad \rightarrow \quad \mathbf{CD = 17,1\ cm}$$

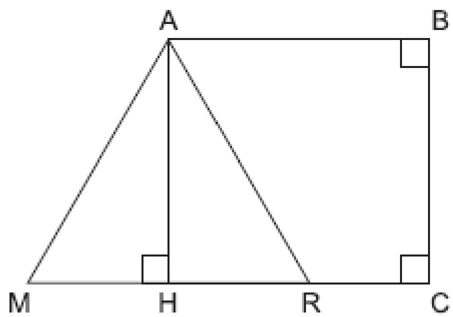
O enunciado pede **o segmento BC**. Para encontrá-lo, devemos perceber que:

$$AB + BC + CD = AD$$

$$23{,}9 + \mathrm{BC} + 17{,}1 = 65{,}8 \quad \rightarrow \quad \mathrm{BC} = 65{,}8 - 41 \quad \rightarrow \quad \mathbf{BC = 24,8\ cm}$$

Gabarito: LETRA E.

20. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2011) Na figura abaixo, temos o triângulo equilátero MAR, de área S, e o retângulo ABCH, de área $11S/6$.



Observe que o segmento AH é uma das alturas do triângulo MAR. A área do trapézio ABCR é

A) $2S/3$

B) $3S/5$

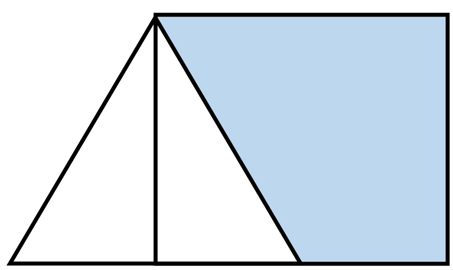
C) $7S/4$

D) $5S/2$

E) $4S/3$

Comentários:

Galera, estamos buscando a seguinte área:



Note que **essa área é a área do retângulo menos metade da área do triângulo equilátero** (*pois metade do triângulo está "dentro" do quadrado e precisamos descontar essa área. Tudo ok?)* Ora, o enunciado disse que **a área do retângulo é $11S/6$**. Se **a área do triângulo é S**, então metade dessa área será S/2. Com isso,

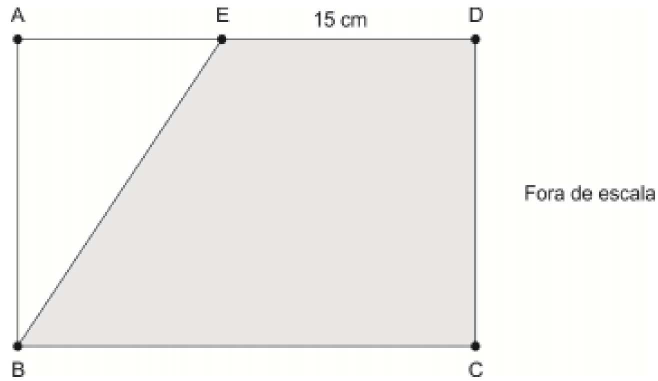
$$A_{trap} = A_{ret} - \frac{A_{triang}}{2} \quad \rightarrow \quad A_{trap} = \frac{11S}{6} - \frac{S}{2}$$

$$A_{trap} = \frac{11S - 3S}{6} \quad \rightarrow \quad A_{trap} = \frac{8S}{6} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{trap} = \frac{4S}{3}}$$

Gabarito: LETRA E.

FCC

21. (FCC/PREF. SJRP/2019) O ponto E pertence ao lado AD do retângulo ABCD e ED=15 cm, conforme mostra a figura.

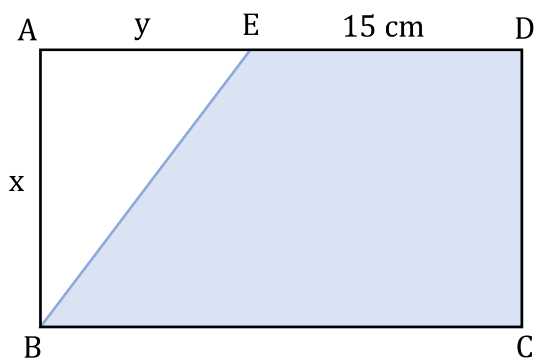


Sabendo que a área do retângulo ABCD é 336 cm² e que a área do trapézio BCDE é 273 cm², a medida, em cm, do lado AB, é:

A) 14
B) 15
C) 16
D) 17
E) 18

Comentários:

Pessoal, vamos redesenhar essa figura, colocando as informações que ainda não temos.



A área do retângulo ABCD é 336 cm². Assim,

$$x(y+15) = 336 \quad \rightarrow \quad xy + 15x = 336 \quad (1)$$

A área do trapézio BCDE é 273 cm². Logo,

$$\frac{(15+15+y)x}{2} = 273 \quad \rightarrow \quad 30x + xy = 546 \quad (2)$$

(1) e (2) formam um sistema com **duas equações e duas incógnitas**. Podemos resolvê-lo. Subtraindo (1) de (2), membro a membro, ficamos:

$$(30x + xy) - (15x + xy) = 546 - 336$$

$$30\text{x} - 15\text{x} = 210 \quad \rightarrow \quad 15\text{x} = 210 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 14\ cm}$$

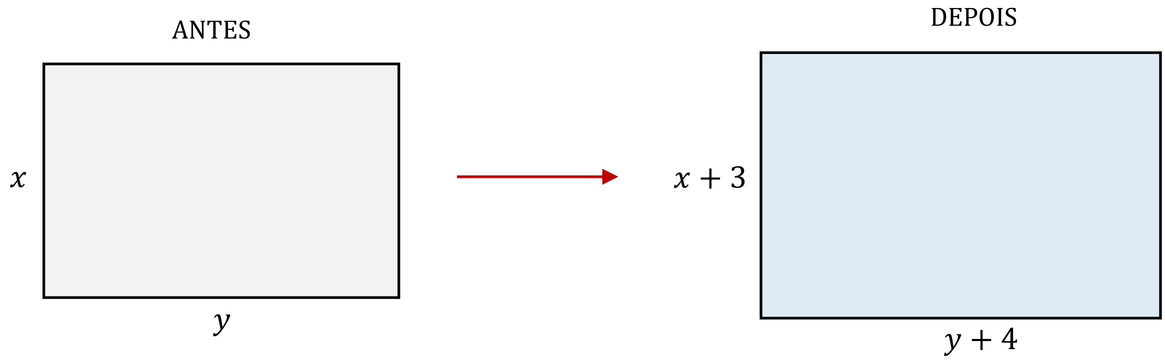
Gabarito: LETRA A.

22. (FCC/AGED-MA/2018) Uma empresa designou para recreação de seus funcionários um espaço retangular de dimensões inteiras e diferentes da unidade, em metros, cuja área é 793 m². Sabe-se que a área de um retângulo é o produto de suas duas dimensões. No último mês, a empresa aumentou a dimensão maior desse espaço retangular em 4 metros e a menor em 3 metros. Feito isso, a área de recreação dos funcionários aumentou em

A) 247 m²
B) 12 m²
C) 315 m²
D) 189 m²
E) 49 m²

Comentários:

Vamos desenhar a situação proposta pelo enunciado.



Antes do aumento, a área do espaço era de 793 m². Com isso, podemos escrever:

$$xy = 793$$

Aqui devemos atentar para uma informação muito importante do enunciado:

"... um espaço retangular de **dimensões <u>inteiras</u>** e **<u>diferentes</u> da unidade** ..."

Assim, os valores de "x" e "y" não podem ser "quebrados" ou iguais a "1".

Quando fazemos **a decomposição de 793 em números primos**, obtemos:

$$793 = 13 \cdot 61$$

Como, pelo desenho, consideramos que **"x" é a menor dimensão** e **"y" a maior**, podemos concluir que:

$$x = 13 \quad \text{e} \quad y = 61$$

Dessa forma, **após o aumento de 3 e 4 metros em cada um dos lados**, ficamos com a seguinte área:

$$S = (13 + 3) \cdot (61 + 4) \quad \rightarrow \quad S = 16 \cdot 65 \quad \rightarrow \quad S = 1.040\ m^2$$

Com o valor das duas áreas, podemos calcular de quanto foi o aumento.

$$\text{Aumento} = 1040 - 793 \quad \rightarrow \quad \mathbf{Aumento = 247\ m^2}$$

Gabarito: LETRA A.

23. (FCC/SABESP/2018) De um quadrado de papel cujo lado mede 12 cm, recorta-se de um dos vértices um quadrado cujo lado é igual a 2 cm e do vértice oposto recorta-se outro quadrado cujo lado é igual a 4 cm. Após a retirada desses dois quadrados recortados a figura restante apresenta a área de

A) 124 cm².
B) 68 cm².
C) 84 cm².
D) 36 cm².
E) 164 cm².

Comentários:

Temos um quadrado cujo **lado mede 12 cm**. Sua área é:

$$S_1 = 12^2 \quad \rightarrow \quad S_1 = 144\ cm^2$$

O quadrado de **2 cm de lado** retirado de um dos vértices tem área igual a:

$$S_2 = 2^2 \quad \rightarrow \quad S_2 = 4\ cm^2$$

O quadrado de **4 cm de lado** retirado do outro vértice tem área igual a:

$$S_3 = 4^2 \quad \rightarrow \quad S_3 = 16\ cm^2$$

Ora, como **recortamos os dois últimos quadrados do quadrado maior**, a área resultante da figura será:

$$S = S_1 - S_2 - S_3 \quad \rightarrow \quad S = 144 - 4 - 16$$

$$\mathbf{S = 124\ cm^2}$$

Gabarito: LETRA A.

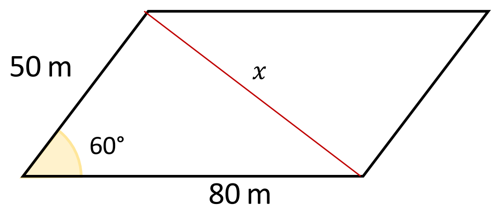
24. (FCC/SEDU-ES/2018) Em uma cidade o Prefeito designou que em um quarteirão, de formato igual a um paralelogramo, cujas medidas dos lados são 50 m e 80 m e seus ângulos são 60° e 120°, fosse construída uma praça. A primeira providência seria a construção de duas calçadas que cruzassem o interior da praça,

como se fossem as duas diagonais do paralelogramo. Desconsiderando a largura das calçadas, o comprimento da menor delas é de

A) 70 m.
B) 68 m.
C) 72 m.
D) 75 m.
E) 67 m.

Comentários:

Questão bacana sobre **paralelogramo**! Vamos desenhar o que está acontecendo.



Observe que marcamos **a menor diagonal de vermelho**. Ela fica de frente **ao ângulo de 60°**. Sendo assim, podemos usar **a lei dos cossenos**.

$$x^2 = 50^2 + 80^2 - 2 \cdot 50 \cdot 80 \cdot \cos 60°$$

$$x^2 = 2500 + 6400 - 8000 \cdot \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x^2 = 8900 - 4000 \quad \rightarrow \quad x^2 = 4900$$

$$\mathrm{x = 70\ m}$$

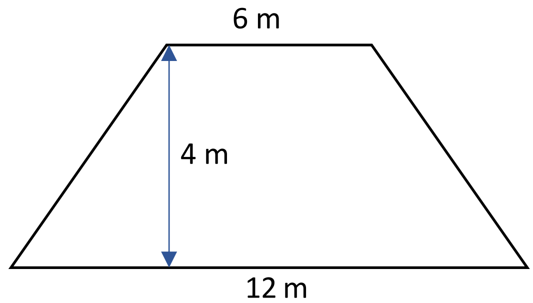
Gabarito: LETRA A.

25. (FCC/SABESP/2017) Um terreno tem a forma de um trapézio. Os lados não paralelos têm a mesma medida. A base maior desse trapézio mede 12 m, a base menor mede 6 m e a altura mede 4 m. A área e o perímetro desse terreno são, respectivamente, iguais a

A) 32 m² e 28 m.
B) 36 m² e 28 m.
C) 36 m² e 24 m.
D) 32 m² e 24 m.
E) 36 m² e 26 m.

Comentários:

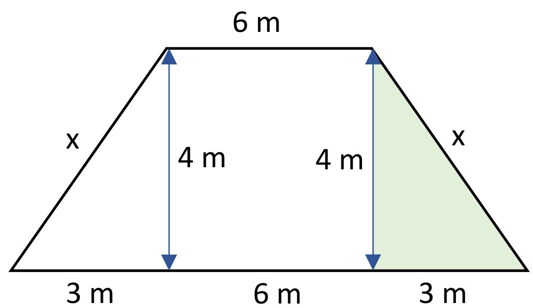
Vamos desenhar esse trapézio construído no enunciado.



Como temos **as duas bases e a altura**, já podemos encontrar a área!

$$S = \frac{(B + b)h}{2} \quad \rightarrow \quad S = \frac{(12 + 6) \cdot 4}{2} \quad \rightarrow \quad S = 36\ m^2$$

Com esse cálculo, já eliminamos as alternativas A e D. Agora, para encontrarmos o perímetro, **precisamos de todos os lados**. Afinal, o perímetro do trapézio nada mais é do que **a soma de todos os seus quatro lados**. Como o enunciado informa que os lados não paralelos são iguais, então:



Observe que o lado **"x" é exatamente a hipotenusa** do triângulo retângulo destacado. Assim, podemos determinar seu valor por meio do **Teorema de Pitágoras**.

$$x^2 = 3^2 + 4^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 25 \quad \rightarrow \quad x = 5\ m$$

Com o valor do lado desconhecido que faltava, agora podemos calcular o perímetro da figura.

$$2p = 5 + 5 + 12 + 6 \quad \rightarrow \quad \mathbf{2p = 28\ m}$$

Gabarito: LETRA B.

FGV

26. (FGV/PC-RJ/2022) Modificamos um retângulo, aumentando sua base em 32% e diminuindo sua altura em 32%. Então, sua área:

A) não se alterou;

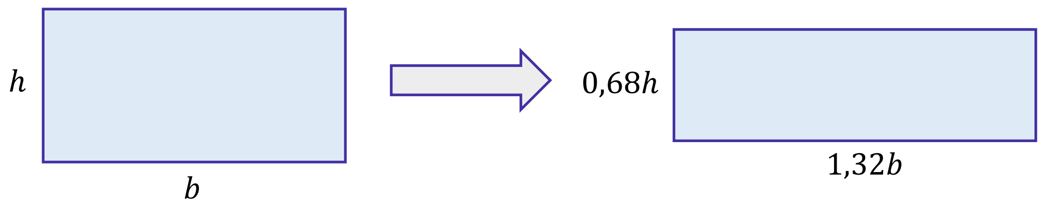
B) diminuiu cerca de 10%;

C) aumentou cerca de 10%;

D) diminuiu cerca de 20%;

E) aumentou cerca de 20%.

Comentários:
Vamos fazer um esquema do que está acontecendo aqui!



Na primeira situação, a área do retângulo é dada por:

$$A_1 = bh$$

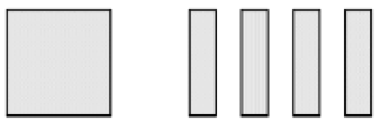
Por sua vez, depois do **aumento da base em 32%** e da **redução da altura em 32%,** então a área passa a ser:

$$A_2 = (0{,}68h) \cdot (1{,}32b) \qquad \rightarrow \qquad A_2 = 0{,}89 \cdot A_1$$

Sendo assim, note que **a área diminui por volta de 11%**. A alternativa mais próxima disso é a B.

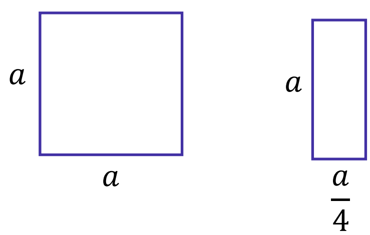
Gabarito: LETRA B.

27. (FGV/SEFAZ-BA/2022) Um quadrado foi cortado em 4 retângulos iguais como mostra a figura.



A soma dos perímetros dos retângulos é maior que o perímetro do quadrado em
A) 50%.
B) 100%.
C) 150%
D) 180%
E) 200%

Comentários:
Vamos desenhar um pouco.



Lembre-se que o perímetro é a **soma de todos os lados** de um polígono.

Seja "a" o lado do quadrado, então o seu **perímetro é igual a "4a"**.

Agora, note que como o quadrado é dividido em quatro retângulos, então um lado do retângulo terá dimensão igual a "a" e o outro lado terá dimensão igual a "a/4".

$$\text{Perímetro} = \text{a} + \text{a} + \frac{\text{a}}{4} + \frac{\text{a}}{4} \quad \rightarrow \quad \text{Perímetro} = \frac{5\text{a}}{2}$$

Como são 4 retângulos, então para encontrarmos **a soma dos perímetros de todos os retângulos** fazemos:

$$\text{Total} = 4 \cdot \frac{5\text{a}}{2} \quad \rightarrow \quad \text{Total} = 10\text{a}$$

Por fim, quando comparamos os dois valores:

$$\frac{(10a - 4a)}{4a} \cdot 100 = \frac{6}{4} \cdot 100 = 150\%$$

Logo, a soma dos perímetros dos retângulos é **150% maior** do que o perímetro do quadrado.

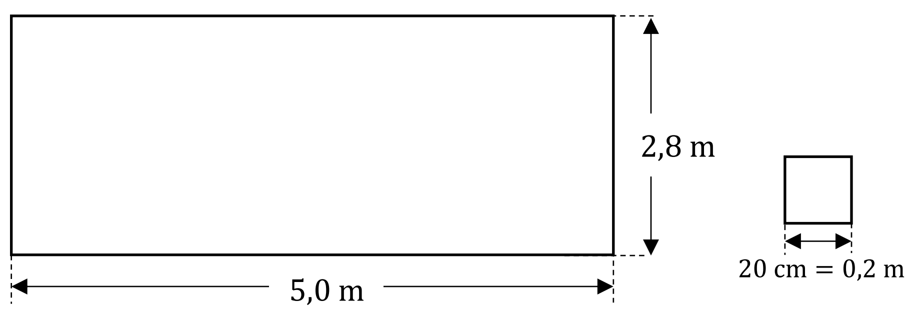
Gabarito: LETRA C.

28. (FGV/IMBEL/2021) Uma parede retangular de 5,0 m por 2,8 m deve ser ladrilhada com ladrilhos quadrados de 20 cm de lado. O número mínimo de ladrilhos necessários para fazer esse ladrilhamento é

A) 340.
B) 350.
C) 360.
D) 380.
E) 420.

Comentários:

Temos o seguinte:



- O primeiro passo é calcular **a área da parede retangular** (A_p).

$$\text{A}_\text{p} = 5{,}0 \cdot 2{,}8 \quad \rightarrow \quad \text{A}_\text{p} = 14\ \text{m}^2$$

- O segundo passo é calcular **a área do ladrilho** (A_l). Vamos usar **o lado do quadrado em metros**, para que as duas áreas fiquem na mesma unidade (m²).

$$\mathrm{A_l} = 0{,}2^2 \quad \rightarrow \quad \mathrm{A_l} = 0{,}04\ \mathrm{m}^2$$

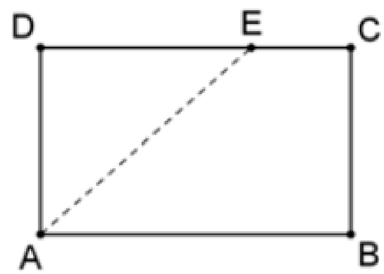
- Para determinar quantos ladrilhos vão ser necessários para preencher a parede (n), devemos **dividir a área da parede pela área de cada ladrilho**.

$$n = \frac{A_p}{A_l} \quad \rightarrow \quad n = \frac{14}{0{,}04} \quad \rightarrow \quad n = 350$$

Logo, serão necessários **350 ladrilhos**.

Gabarito: LETRA B.

29. (FGV/PM-SP/2021) O retângulo ABCD da figura a seguir tem as dimensões AB = 10 e BC = 6.

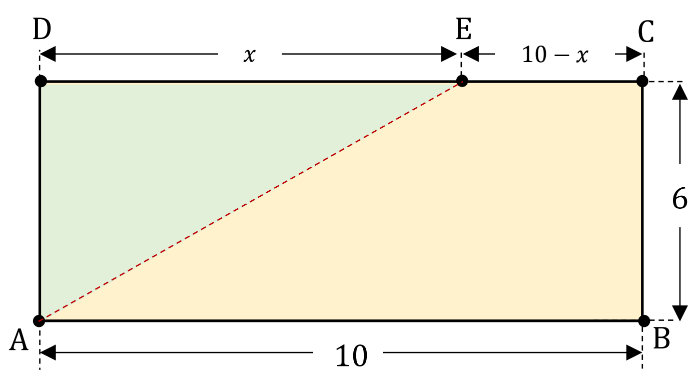


O ponto E do lado CD é tal que o segmento AE divide o retângulo em duas partes de forma que a área de uma seja o dobro da área da outra. O segmento DE mede

A) 13/2
B) 16/3
C) 20/3
D) 21/4
E) 25/4

Comentários:

Vamos esquematizar essa situação de uma forma melhor.



O segmento AE divide o retângulo em duas regiões. Uma verde e outra amarela. A área da região amarela é o dobro da área da região verde.

$$A_{amarela} = 2 \cdot A_{verde} \qquad (1)$$

- Para calcularmos **a área da região amarela**, devemos perceber que **ela tem o formato de um trapézio**. Em um trapézio, sabemos que vale a seguinte relação:

$$A_{trapézio} = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

Quando olhamos para a região amarela, tiramos que $\boldsymbol{B = 10, b = 10 - x}$ **e** $\boldsymbol{h = 6}$. Substituindo,

$$A_{amarela} = \frac{\big(10 + (10 - x)\big)\cdot 6}{2} \quad \rightarrow \quad A_{amarela} = 3\cdot(20 - x) \quad \rightarrow \quad A_{amarela} = 60 - 3x \quad (2)$$

- Para calcularmos **a área da região verde**, devemos perceber que **ela tem o formato de um triângulo retângulo**. A área de um triângulo retângulo é dada pelo **produto de seus catetos dividido por 2**. Como os catetos do respectivo triângulo são "x" e "6", ficamos com:

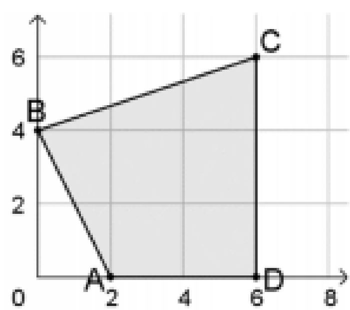
$$A_{verde} = \frac{6x}{2} \quad \rightarrow \quad A_{verde} = 3x \quad (3)$$

Usando (2) e (3) em (1),

$$60 - 3x = 2\cdot 3x \quad \rightarrow \quad 6x + 3x = 60 \quad \rightarrow \quad 9x = 60 \quad \rightarrow \quad x = \frac{60}{9} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = \frac{20}{3}}$$

Gabarito: LETRA C.

30. (FGV/IMBEL/2021) Um terreno tem a forma de um quadrilátero ABCD. A figura a seguir mostra sua representação no plano cartesiano, onde cada unidade representa 10 metros.



Sejam x e y os comprimentos das diagonais AC e BD, respectivamente. É correto afirmar que

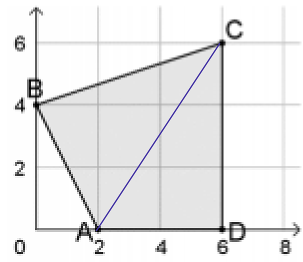
A) x – y é aproximadamente igual a 2 metros.

B) x – y é aproximadamente igual a 5 metros.

C) y – x é aproximadamente igual a 2 metros.

D) y – x é aproximadamente igual a 5 metros.
E) x = y.

Comentários:
Vamos traçar a diagonal AC.

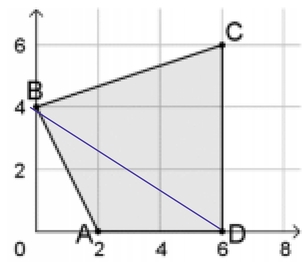


Note que **AC é a hipotenusa do triângulo retângulo ACD**. O cateto AD mede 4 unidades e o cateto CD mede 6 unidades. Com isso, podemos **usar o teorema de Pitágoras para determinar a hipotenusa AC**.

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

$$AC^2 = 4^2 + 6^2 \quad \rightarrow \quad AC^2 = 16 + 36 \quad \rightarrow \quad AC = \sqrt{52}$$

Agora, vamos traçar a diagonal BD.



Note que **BD é a hipotenusa do triângulo OBD**, em que "O" é a origem do sistema. O cateto OB tem 4 unidades e o cateto OD tem 6 unidades. Assim, podemos **usar o teorema de Pitágoras para determinar BD**.

$$BD^2 = OB^2 + OD^2$$

$$BD^2 = 4^2 + 6^2 \quad \rightarrow \quad BD^2 = 16 + 36 \quad \rightarrow \quad BD = \sqrt{52}$$

Como **as duas diagonais possuem a mesma medida**, concluímos que $x = y$.

Gabarito: LETRA E.

VUNESP

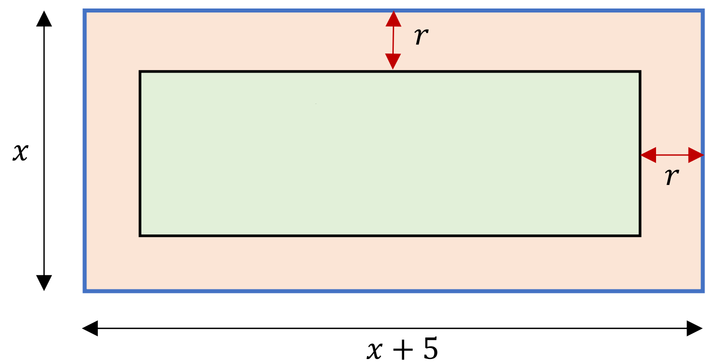
31. (VUNESP/ALESP/2022) Um terreno retangular tem o lado maior com 5 metros a mais que o lado menor. A prefeitura exige que haja um recuo em cada lado para realizar construções. Realizando os recuos

obrigatórios, o proprietário perde 75 m² da área do terreno para a construção da casa. Essa perda corresponde à décima parte da área total do terreno. Com essas informações, é correto afirmar que a medida do contorno desse terreno é, em metros, igual a

A) 110
B) 105
C) 120
D) 115
E) 100

Comentários:

Vamos desenhar um pouco.



Agora, vamos analisar as informações do enunciado!

- O lado maior do retângulo tem 5 metros a mais do que o lado menor. Por esse motivo, **os lados do retângulo são "x" e "x+5"**.

- A prefeitura exige um recuo. Chamamos esse recuo de "r".

A área em "bege" é a área perdida do terreno, **valendo 75 m²**.

Com essas informações, já podemos concluir algumas coisas.

- Como essa perda equivale à decima parte da área do terreno, então **a área total é 750 m²**. Sendo assim,

$$x(x+5) = 750 \quad \rightarrow \quad x^2 - 5x - 750 = 0$$

É uma equação de segundo grau. Vamos usar **Bhaskara** para resolvê-la.

- Cálculo do Discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \rightarrow \quad \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-750) \quad \rightarrow \quad \Delta = 25 + 3000 \quad \rightarrow \quad \Delta = 3025$$

- Cálculo das Raízes

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{3025}}{2 \cdot 1} \quad \rightarrow \quad x = \frac{5 \pm 55}{2}$$

$$x' = \frac{5+55}{2} \quad \rightarrow \quad x' = \frac{60}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{x' = 30}$$

$$x'' = \frac{5-55}{2} \quad \rightarrow \quad x'' = \frac{-50}{2} \quad \rightarrow \quad x'' = -25$$

Como estamos trabalhando com medidas, **o valor negativo não faz sentido para nós**, apenas o positivo. Assim, $x = 30$. Como o outro lado do retângulo é **5 metros maior**, $x + 5 = 35$. A questão pede o valor do perímetro (contorno) desse terreno. Com isso:

$$\text{perímetro} = 30 + 30 + 35 + 35 \quad \rightarrow \quad \text{perímetro} = 60 + 70 \quad \rightarrow \quad \boxed{\textbf{perímetro} = \textbf{130 m}}$$

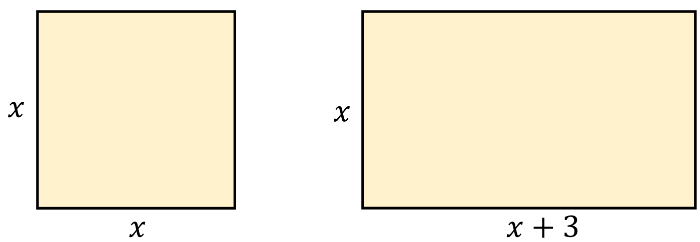
Gabarito: LETRA A.

32. (VUNESP/ALESP/2022) Comprei um terreno quadrado e em seguida comprei outro, retangular, cuja largura é igual ao lado do terreno quadrado, e o comprimento tem 3 metros a mais que a largura. Sabendo que a área total dos dois terrenos é de 324 m², a diferença entre as áreas desses dois terrenos é, em metros quadrados, igual a

A) 38
B) 42
C) 40
D) 44
E) 36

Comentários:

Opa, vamos desenhar mais um pouco!



Temos dois terrenos, um quadrado e outro retângulo. As medidas de cada um estão na figura acima.

Como **a soma das áreas dos terrenos é igual a 324**, podemos escrever:

$$A_q + A_r = 324 \quad \rightarrow \quad x^2 + x(x+3) = 324$$

Desenvolvendo um pouco,

$$2x^2 + 3x - 324 = 0$$

É uma equação de segundo grau. Vamos usar **Bhaskara** para resolvê-la.

- Cálculo do Discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \rightarrow \quad \Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-324) \quad \rightarrow \quad \Delta = 9 + 2592 \quad \rightarrow \quad \Delta = 2601$$

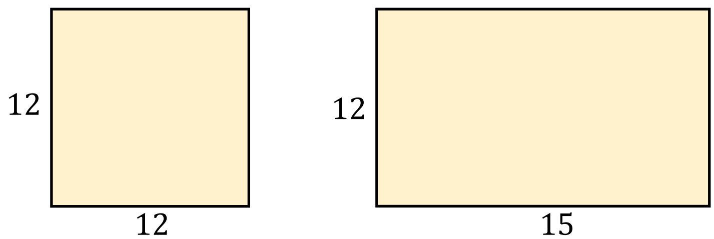
- Cálculo das Raízes

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{2601}}{2 \cdot 2} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-3 \pm 51}{4}$$

$$x' = \frac{-3 + 51}{4} \quad \rightarrow \quad x' = \frac{48}{4} \quad \rightarrow \quad \boxed{x' = 12}$$

$$x'' = \frac{-3 - 51}{4} \quad \rightarrow \quad x'' = \frac{-54}{4} \quad \rightarrow \quad x'' = -13{,}5$$

O resultado negativo não importa para nós! O motivo disso é o fato de que estamos trabalhando com medidas. Naturalmente, **elas são valores positivos**. Portanto, ficamos com a seguinte situação:



- Área do Quadrado:

$$A_q = 12^2 \quad \rightarrow \quad A_q = 144 \text{ m}^2$$

- Área do Retângulo:

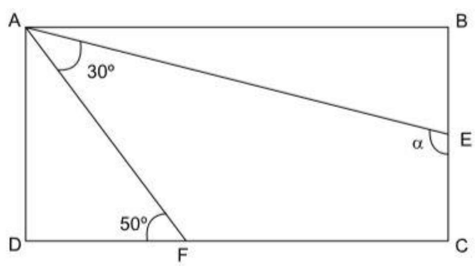
$$A_r = 12 \cdot 15 \quad \rightarrow \quad A_r = 180 \text{ m}^2$$

A questão pede a diferença entre essas duas áreas.

$$\text{Dif} = 180 - 144 \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{Dif} = 36 \text{ m}^2}$$

Gabarito: LETRA E.

33. (VUNESP/ Prefeitura Municipal de Piracicaba (SP)/2020) O retângulo ABCD foi dividido em 3 regiões, conforme mostra a figura.



A medida do ângulo indicado por α no quadrilátero AECF é

A) 100°.

B) 110°.

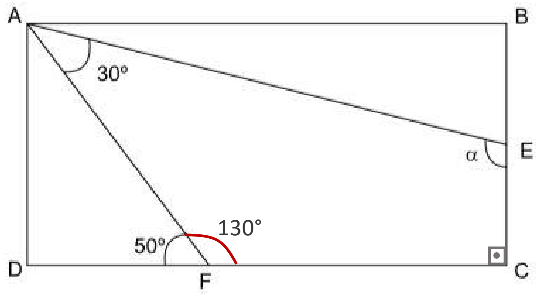
C) 120°.

D) 130°.

E) 140°.

Comentários:

Nessa questão, precisamos lembrar que **a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°**. Assim,



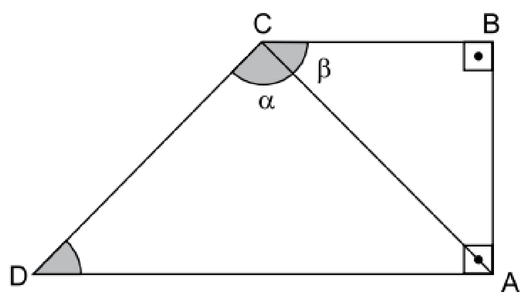
Note que **o suplementar de 50° é 130°**. Com isso, podemos somar os ângulos internos do quadrilátero AECF e igualar essa soma a 360°. Observe como fica:

$$30° + 130° + \alpha + 90° = 360°$$

$$250° + \alpha = 360° \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{\alpha = 110°}$$

Gabarito: LETRA B.

34. (VUNESP/TJ-SP/2015) Na figura, o trapézio retângulo ABCD é dividido por uma de suas diagonais em dois triângulos retângulos isósceles, de lados $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DC}$.



Desse modo, é correto afirmar que a soma das medidas dos ângulos α e β é igual a

A) 125°.

B) 115°.

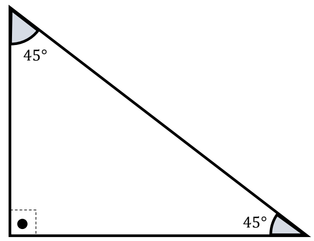
C) 110°.

D) 135°.

E) 130°.

Comentários:

Em um triângulo retângulo, teremos um ângulo reto (90°). Quando ele é isóscele, os outros ângulos serão iguais a 45°, conforme mostra a figura abaixo.



Qual o motivo disso? Vamos lá! Lembre-se que **a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°**.

$$a + b + c = 180°$$

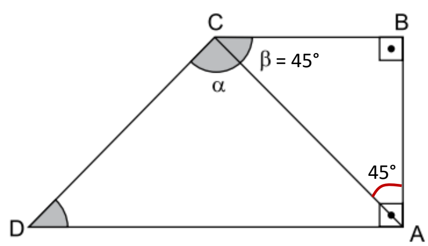
- Quando o triângulo é retângulo, **um dos ângulos é igual a 90°**. Vamos dizer que seja "a". Logo,

$$90° + b + c = 180° \quad \rightarrow \quad b + c = 90°$$

- Quando o triângulo é isóscele, **ele possui dois ângulos iguais**. Portanto, $b = c = x$.

$$x + x = 90° \quad \rightarrow \quad 2x = 90° \quad \rightarrow \quad x = 45°$$

Assim, em um triângulo retângulo isósceles, sempre **teremos um ângulo de 90° e outros dois de 45°**. Agora, vamos para a questão em si. De acordo com o enunciado, tínhamos **um trapézio que foi dividido em dois triângulos retângulos isósceles**. Sendo assim, vamos olhar atentamente para a figura dada no enunciado.



Observe que **ABC é um dos triângulos retângulos**. Se já temos o ângulo de 90° em B, então os demais serão de 45°, já que é um triângulo retângulo isósceles. Com isso, já podemos dizer que $\boldsymbol{\beta = 45°}$.

Falta determinarmos α. Como **DCA é outro triângulo retângulo isósceles**, então α mede 90° ou 45°. Para decidir qual dois é o valor de α, podemos ir por tentativa, para ganhar velocidade.

Se α fosse 45°, a soma de α e β seria 90°. **Não há alternativa com esse valor**. Consequentemente, α não pode ser 45° e **o único valor que sobra para ele é 90°**. Com isso,

$$\alpha + \beta = 45° + 90° = 135°$$

Gabarito: LETRA D.

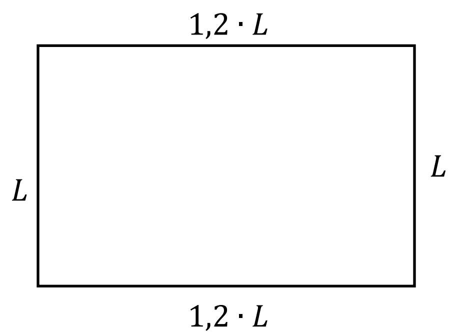
35. (VUNESP/Prefeitura Municipal da Estância Turística de São Roque (SP)/2020) Uma sala de aula, com perímetro de 22 metros, tem o comprimento equivalendo a 1,2 vezes a sua largura. A área dessa sala de aula, em metros quadrados, é igual a

A) 24.
B) 26.
C) 28.
D) 30.
E) 32.

Comentários:

Para evitar dúvidas, a questão poderia ter falado que **o formato da sala é retangular**. Mesmo ela não falando diretamente, quando a questão comenta sobre o comprimento e a largura, temos um bom indicativo que realmente estamos lidando com um retângulo. Tudo bem?!

Vamos considerar que a largura seja L. Se **o comprimento é igual a 1,2 vezes a largura**, então podemos escrever que $C = 1{,}2L$. Em um desenho, ficaríamos com o seguinte:



- O enunciado disse que **o perímetro é 22 metros**. Lembre-se que **o perímetro é a soma dos lados**. Assim,

$$L + L + 1{,}2L + 1{,}2L = 22 \quad \rightarrow \quad 4{,}4L = 22 \quad \rightarrow \quad L = \frac{22}{4{,}4} \quad \rightarrow \quad L = 5$$

Pronto, encontramos que **a largura da sala é de 5 metros**. Já que o comprimento é 1,2 vezes a largura:

$$C = 1{,}2L \quad \rightarrow \quad C = 1{,}2 \cdot 5 \quad \rightarrow \quad C = 6$$

Agora que temos o comprimento e a largura, é possível encontrar a área do retângulo. Lembre-se que **a área de um retângulo é o produto do comprimento pela largura**. Portanto,

$$A = C \cdot L \quad \rightarrow \quad A = 6 \cdot 5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A = 30\ m^2}$$

Gabarito: LETRA D.

Outras Bancas

36. (IBFC/IBGE/2022) Ao analisar a cobertura territorial sobre sua responsabilidade, o coordenador riscou no mapa um retângulo de modo que representasse a maior área possível da região a ser trabalhada por

sua equipe. Se as medidas dos lados desse retângulo são 4,5 cm e 6 cm, então a medida da área desse retângulo, em m² é igual a:

A) 0,27
B) 0,027
C) 0,0027
D) 2,7
E) 0,000027

Comentários:

Atenção aqui, pessoal. A questão pede a área em **m²** e os lados do retângulo estão em centímetros. Logo, o primeiro passo é **transformar "cm" em "m"**. Para isso, basta dividir esses valores por 100.

$$a = 4{,}5 \text{ cm} = 0{,}045 \text{ m}$$

$$b = 6 \text{ cm} = 0{,}06 \text{ m}$$

A área de um retângulo é calculada pelo **produto dos lados**. Logo,

$$A = ab \quad \rightarrow \quad A = 0{,}045 \cdot 0{,}06 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A = 0,0027 \text{ m}^2}}$$

Gabarito: LETRA C.

37. (NUCEPI UESPI/PM-PI/2022) Durante uma manifestação na Avenida Frei Serafim em Teresina, os soldados Emanuel, Fábio e Gilson foram designados para acompanhar o evento. Quando retornaram ao quartel, o comandante indagou sobre o número de pessoas que participaram da manifestação. Emanuel informou que foi ocupada uma faixa retangular da Avenida, medindo 14 m por 176 m, pelos manifestantes. Fábio disse que, em média, havia 4 pessoas por metro quadrado. Por sua vez, Gilson fez as contas e informou ao comandante, de maneira correta, o número total de manifestantes. O número informado por Gilson foi de aproximadamente

A) 12.000 pessoas.
B) 11.000 pessoas.
C) 10.000 pessoas.
D) 9.000 pessoas.
E) 8.000 pessoas.

Comentários:

Note que a área ocupada foi uma **faixa retangular medindo 14 m por 176 m**. Sabemos que a área de um retângulo é dada pelo produto dos lados. Sendo assim,

$$A = 14 \cdot 176 \quad \rightarrow \quad A = 2464 \text{ m}^2$$

Para determinar o total de pessoas, devemos **multiplicar a área pela quantidade de pessoas por m²**.

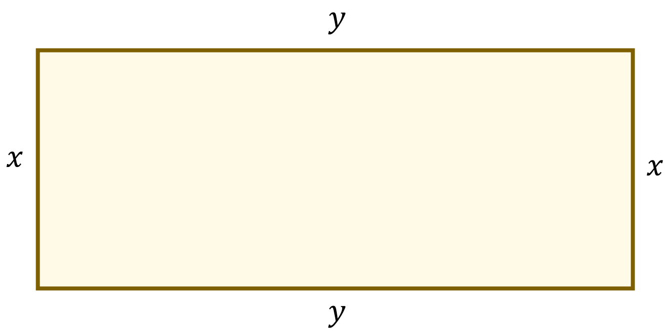
$$\text{Total de Pessoas} = 2464 \cdot 4 \quad \rightarrow \quad \boxed{\textbf{Total de Pessoas} = \mathbf{9856}}$$

Note que a alternativa que mais se aproxima do nosso resultado é a C.

Gabarito: LETRA C.

38. (AOCP/CM BAURU/2022) João, servidor da Câmara, possui um sítio que usa para descanso aos fins de semana. Ele pretende construir um galinheiro no sítio. Para isso, deseja utilizar um rolo com 200 metros de tela que ele já possui. Se a forma que João escolheu é a retangular e ele usará a tela em todos os lados do retângulo, qual é a área máxima que o galinheiro pode ter?
A) 1.600 m²
B) 2.000 m²
C) 2.400 m²
D) 2.500 m²
E) 2.700 m²

Comentários:
Questão bem legal! Vamos desenhar um pouco.



Observe que **o perímetro desse retângulo deve totalizar a quantidade de tela** que João tem disponível.

$$2x + 2y = 200 \quad \rightarrow \quad x + y = 100 \quad (1)$$

A área desse retângulo é dada por:

$$A = xy \quad (2)$$

Vamos isolar "x" em (1) e substituir em (2):

$$A = x(100 - x) \quad \rightarrow \quad A = 100x - x^2$$

Note que **A é uma função de segundo grau em "x"**. Se você já estudou funções, sabe que o valor máximo (ou mínimo) dessa função acontece no **"x" do vértice**.

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad \rightarrow \quad x_v = -\frac{100}{2 \cdot (-1)} \quad \rightarrow \quad x_v = 50$$

Ou seja, **para que a área seja máxima, x deve ser igual a 50**. Quando usamos esse valor em (1), determinamos que **"y" também deve ser igual a 50**. Com os valores de "x" e "y", podemos encontrar a área máxima.

$$A_{max} = 50 \cdot 50 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A_{max} = 2500\ \mathrm{m}^2}}$$

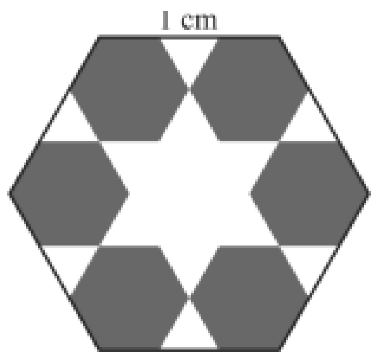
Gabarito: LETRA D.

QUESTÕES COMENTADAS

Polígonos

CEBRASPE

1. (CESPE/SEFAZ-RS/2018) A figura a seguir ilustra a primeira etapa de um processo recursivo que, a partir de um hexágono regular em que os lados medem 1 cm de comprimento, constroem-se 6 novos hexágonos regulares.



Nesse processo, os lados do hexágono externo são divididos em 3 partes iguais e, conforme mostra a figura, são construídos outros 6 hexágonos regulares; em cada um deles, o comprimento dos lados é igual a $\frac{1}{3}$. Na segunda etapa, dividem-se os lados desses 6 novos hexágonos em 3 partes iguais, e constroem-se, de maneira semelhante à primeira etapa, outros 36 hexágonos regulares. Esse processo pode seguir indefinidamente.

Nessa situação, sabendo-se que, se o comprimento dos lados de um hexágono regular for igual a L cm, a área desse hexágono será igual a $\frac{3\sqrt{3}}{2}L^2$ cm² é correto concluir que a soma das áreas dos hexágonos obtidos na 5.ª etapa do processo recursivo descrito é igual a

A) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \sqrt{3}$ cm²

B) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \sqrt{3}$ cm²

C) $\left(\frac{3}{2}\right)^5 \times \sqrt{3}$ cm²

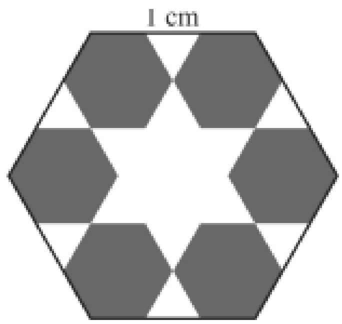
D) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \sqrt{3}$ cm²

E) $\left(\frac{3}{2}\right)^4 \times \sqrt{3}$ cm²

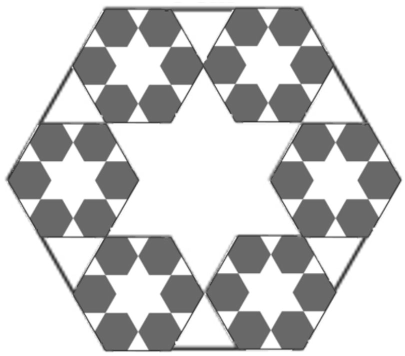
Comentários:

Vamos lá. É interessante perceber que começamos com **um hexágono de 1 cm de comprimento**. À medida que o processo segue, os novos hexágonos possuem lado 1/3 do hexágono de origem. Devemos descrever as etapas.

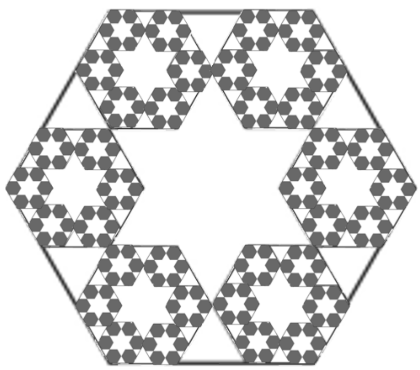
- **Etapa 0:** Tínhamos um grande hexágono de lado igual a 1 cm.
- **Etapa 1:** Dentro do hexágono, desenhamos **6 mini hexágonos**, cada um com lado igual a 1/3 cm.



- **Etapa 2:** Dentro de cada mini hexágono desenhado anteriormente, desenhamos hexágonos ainda menores. **Eles possuem lado igual a um terço do lado do "original"**, ou seja, 1/9 cm. Como tínhamos 6 hexágonos anteriormente e cada hexágono cabe mais 6 mini hexágonos, ficaremos então com 36 deles.



- **Etapa 3:** Repetimos o processo. Tínhamos 36 mini hexágonos, desenharemos mais 6 em cada um deles. Ficaremos então com $36 \cdot 6 = 216$. O lado deles será um terço do de origem, assim, $1/27$ cm.



- **Etapa 4:** Dentro de cada um dos 216 mini hexágonos, desenharemos mais 6. Ficaremos com $216 \cdot 6 = 1296$. O lado deles será $1/81$ cm.

- **Etapa 5:** Teremos $1296 \cdot 6 = 7776$ mini hexágonos. O lado será igual a um terço de 1/81, isto é, 1/243 cm.

O enunciado fala que **a área de um hexágono** é dada pela fórmula:

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2} L^2$$

Logo, sabendo que o mini hexágono que obtemos com a 5ª etapa tem lado $1/243 = 1/3^5$ cm, podemos encontrar sua área.

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3^5}\right)^2 \quad \rightarrow \quad A = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3^9} \quad cm^2$$

No entanto, **essa área é de apenas um único mini hexágono**. Na 5ª etapa, temos $7776 = 6^5$ deles. Assim,

$$A_T = 6^5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3^9} \quad \rightarrow \quad A_T = (2^5 \cdot 3^5) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3^9} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_T = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \sqrt{3} \ \ cm^2}$$

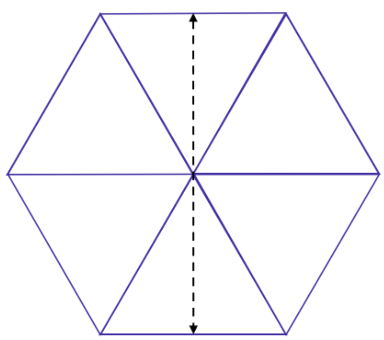
Gabarito: LETRA A.

2. (CESPE/FUB/2018) A figura a seguir mostra uma mesa em que o tampo é um hexágono regular cujo lado mede 80 cm.

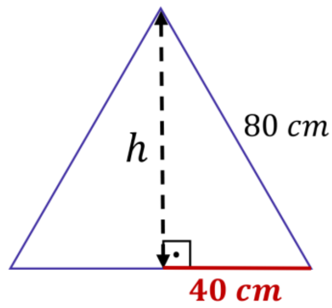
Julgue o item que se segue, a respeito da geometria do tampo dessa mesa.

A distância entre dois lados paralelos do tampo da mesa é superior a 1,3 m.

Comentários:
Em outras palavras, o item quer saber a distância representada pela linha pontilhada no desenho abaixo:



Lembre-se que **um hexágono regular é formado por 6 triângulos equiláteros**. Assim, a distância entre dois lados paralelos é igual ao **dobro da altura de um desses triângulos**. Acompanhe o esquema.



Observe que podemos utilizar o **teorema de Pitágoras** para determinar a altura h.

$$80^2 = h^2 + 40^2 \quad \rightarrow \quad h^2 = 6400 - 1600 \quad \rightarrow \quad h^2 = 4800 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{h = 40\sqrt{3}\ cm}$$

Descobrimos a altura do triângulo. No entanto, a distância entre os lados paralelos é duas vezes esse valor.

$$d = 2 \cdot h \quad \rightarrow \quad d = 2 \cdot 40\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad d = 80\sqrt{3}\ cm$$

Pessoal, uma das poucas raízes que **devemos lembrar o valor aproximado** é a $\sqrt{3}$. Guarde com você que:

$$\sqrt{3} \cong 1{,}73$$

Assim, quando usamos esse valor para calcular d, ficamos com:

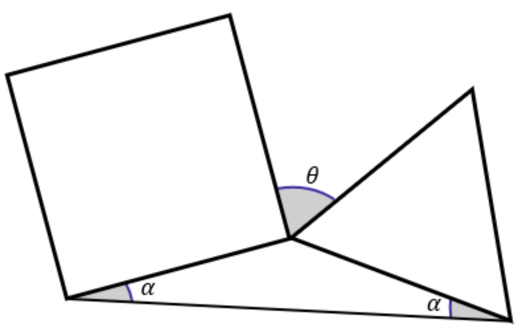
$$d \cong 138{,}4\ cm \qquad \text{ou} \qquad d \cong 1{,}384\ m$$

Repare que o item afirma que **a distância é superior a 1,3 metros**. Logo, está correto.

Gabarito: CERTO.

FGV

3. (FGV/BANESTES/2018) A figura abaixo mostra um triângulo isósceles, um quadrado e um triângulo equilátero. Sabe-se que os ângulos assinalados com a letra α medem 25°.



O ângulo assinalado com a letra θ mede:

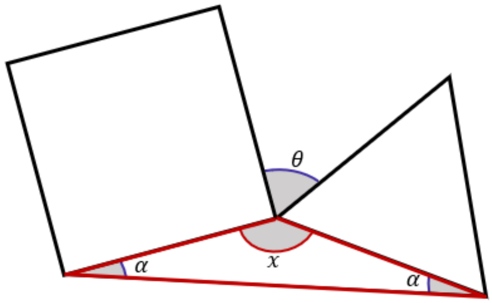
A) 65°

B) 70°

C) 75°

D) 80°
E) 85°

Comentários:
Guarde sempre com você: a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Dito isso, já conseguimos encontrar o ângulo quase "atrás" do θ.



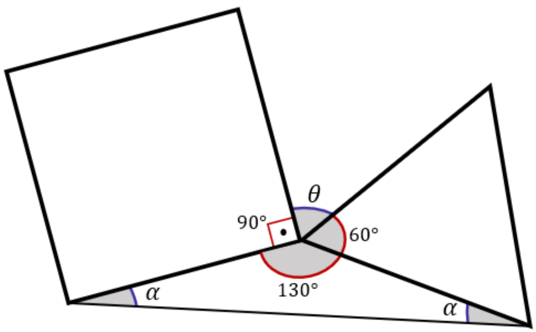
Veja o triângulo que destacamos em vermelho. A soma de todos os ângulos internos é igual a 180. Assim,

$$x + \alpha + \alpha = 180° \quad \rightarrow \quad x + 2\alpha = 180°$$

O enunciado informa que $\alpha = 25°$. Podemos substituir na expressão e determinar x.

$$x + 2 \cdot 25° = 180° \quad \rightarrow \quad x + 50° = 180° \quad \rightarrow \quad x = 180° - 50° \quad \rightarrow \quad x = 130°$$

Somente com x não conseguimos determinar θ. Precisamos levar em consideração que temos um quadrado e um triângulo equilátero. Nós já discutimos brevemente que um quadrado possui quatro ângulos retos. Isto é, cada um deles mede exatamente 90°. Por outro lado, o triângulo equilátero possui todos os seus ângulos internos iguais a 60°. Observe na figura abaixo.



Devemos perceber que os quatro ângulos fecham "uma volta". Logo, o somatório é igual a 360°.

$$\theta + 130° + 60° + 90° = 360° \quad \rightarrow \quad \theta + 280° = 360° \quad \rightarrow \quad \theta = 360° - 280° \quad \rightarrow \quad \theta = 80°$$

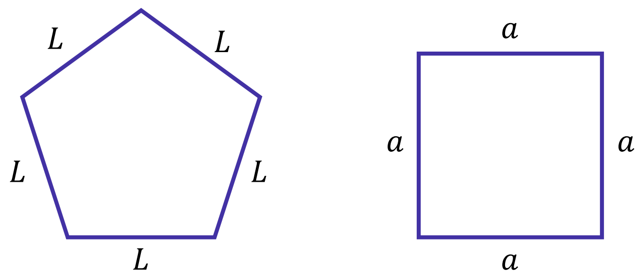
Gabarito: LETRA D.

4. (FGV/PREF. SALVADOR/2017) Um pentágono regular e um quadrado têm o mesmo perímetro. O lado do pentágono mede 6,0 cm. O lado do quadrado mede
A) 5,0 cm.

B) 6,0 cm.
C) 6,5 cm.
D) 7,0 cm.
E) 7,5 cm.

Comentários:

O perímetro de um polígono é dado pela soma de todos os lados. Um **pentágono regular possui 5 lados com a mesma medida**. Vamos chamar o lado do pentágono de "L". Por sua vez, **o quadrado tem quatro lados iguais**. Vamos chamar o lado do quadrado de "a". Confira o desenho abaixo!



Pentágono Regular

Quadrado

Assim, o perímetro do pentágono regular é:

$$Périmetro\ Pentágono\ Regular = L + L + L + L + L$$

$$Perímetro\ Pentágono\ Regular = 5L$$

Analogamente, o perímetro do quadrado fica:

$$Perímetro\ Quadrado = a + a + a + a$$

$$Perímetro\ Quadrado = 4a$$

O enunciado disse que **as figuras possuem <u>o mesmo perímetro</u>**. Logo,

$$5L = 4a$$

Como **estamos querendo <u>o lado do quadrado</u>**, vamos isolar "a".

$$a = \frac{5L}{4}$$

A questão nos deu o lado do pentágono, $L = 6$ cm.

$$\mathrm{a} = \frac{5 \cdot 6}{4} \quad \rightarrow \quad \mathrm{a} = \frac{30}{4} \quad \rightarrow \quad \mathbf{a = 7,5\ cm}$$

Gabarito: LETRA E.

Outras Bancas

5. (AOCP/SED-MS/2022) Considere os seguintes polígonos, todos de mesmo perímetro: triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular. Sendo A_1 a área do triângulo equilátero, A_2 a área do quadrado e A_3 a área do hexágono, o valor de $\frac{A_1+A_3}{A_2}$ é:

A) $\frac{5\sqrt{3}}{9}$

B) $\frac{5\sqrt{2}}{9}$

C) $\frac{10\sqrt{3}}{9}$

D) $\frac{10\sqrt{2}}{9}$

E) 10

Comentários:

Vamos lá! As áreas de cada um dos polígonos citados são as seguintes:

- Triângulo Equilátero:

$$A_1 = \frac{L_1^2\sqrt{3}}{4}$$

L_1 é o lado do triângulo.

- Quadrado:

$$A_2 = L_2^2$$

L_2 é o lado do quadrado.

- Hexágono Regular:

$$A_3 = \frac{3L_3^2\sqrt{3}}{2}$$

L_3 é o lado do hexágono.

O enunciado nos diz que **todos os polígonos possuem o mesmo perímetro**. Vamos chamá-lo de P. Lembre-se que o perímetro nada mais é que **a soma de todos os lados do polígono**.

- Para o triângulo equilátero:

$$P = 3L_1 \qquad \rightarrow \qquad L_1 = \frac{P}{3}$$

- Para o quadrado:

$$P = 4L_2 \quad \rightarrow \quad L_2 = \frac{P}{4}$$

- Para o hexágono regular:

$$P = 6L_3 \quad \rightarrow \quad L_3 = \frac{P}{6}$$

Com os lados em função do perímetro, podemos reescrever as fórmulas das áreas.

- **Triângulo Equilátero:**

$$A_1 = \frac{L_1^2\sqrt{3}}{4} \quad \rightarrow \quad A_1 = \frac{\left(\frac{P}{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} \quad \rightarrow \quad \boxed{A_1 = \frac{P^2\sqrt{3}}{36}}$$

- **Quadrado:**

$$A_2 = L_2^2 \quad \rightarrow \quad A_2 = \left(\frac{P}{4}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{A_2 = \frac{P^2}{16}}$$

- **Hexágono Regular:**

$$A_3 = \frac{3L_3^2\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad A_3 = \frac{3\left(\frac{P}{6}\right)^2\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{A_3 = \frac{3P^2\sqrt{3}}{72}}$$

Pronto! Todas as áreas estão em função de P. Agora, vamos calcular **a razão que o enunciado pediu**.

$$k = \frac{A_1 + A_3}{A_2} \quad \rightarrow \quad k = \frac{\frac{P^2\sqrt{3}}{36} + \frac{3P^2\sqrt{3}}{72}}{\frac{P^2}{16}} \quad \rightarrow \quad k = \frac{\frac{5P^2\sqrt{3}}{72}}{\frac{P^2}{16}} \quad \rightarrow \quad k = \frac{80\sqrt{3}}{72}$$

Vamos **simplificar a fração por 8**.

$$\boxed{k = \frac{10\sqrt{3}}{9}}$$

Gabarito: LETRA C.

6. (RBO/ISS-BH/2022) A partir do conceito: “Dado um polígono convexo qualquer, diagonal é o segmento que une dois vértices não consecutivos”. Assim, um triângulo não possui diagonais, pois, como só possui três vértices, não é possível unir dois vértices não consecutivos, o quadrado possui duas diagonais e partir de um dos vértices, encontramos, apenas um outro vértice não consecutivo, enquanto, que no pentágono

convexo temos 5 diagonais, e nesse polígono encontramos a partir de um vértice, dois outros vértices não consecutivos. A partir dessas informações, monta-se a tabela a seguir.

Nome do Polígono	Número de lados	Número de diagonais	A partir de um dos vértices, o número de vértices não consecutivos
Triângulo	3	0	0
Quadrado	4	2	1
Pentágono	5	5	2
Hexágono	6	9	3
Heptágono	7	14	4

Verifica-se que existe uma certa regularidade entre o número de lados, número de diagonais e o número de vértices não consecutivos contados a partir de um dos vértices. Então, o número de diagonais de um polígono convexo que possui 102 lados é igual a

A) 4.852.
B) 4.947.
C) 4.998.
D) 5.049.
E) 5.100.

Comentários:

Pessoal, **o número de diagonais** de um polígono convexo de "n" lados é dado pela seguinte relação:

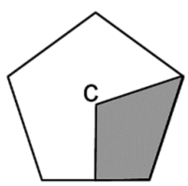
$$d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

O enunciado quer o número de diagonais de um polígono com **102 lados**. Assim,

$$d = \frac{102 \cdot (102-3)}{2} \quad \rightarrow \quad d = \frac{102 \cdot 99}{2} \quad \rightarrow \quad d = 51 \cdot 99 \quad \rightarrow \quad \boxed{d = 5.049}$$

Gabarito: LETRA D.

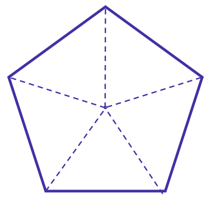
7. (UNIRV/PREF. RIO VERDE/2022) A figura representa um pentágono regular com centro no ponto C. A porcentagem sombreada no interior desse pentágono é



A) 20%
B) 25%
C) 30%

D) 40%

Comentários:
Pessoal, vamos dar uma olhada melhor no pentágono regular.

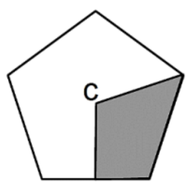


Note que podemos considerar **a área de um pentágono como a soma da área desses 5 triângulos**. Como o pentágono é regular, então **as áreas desses triângulos são iguais**. Desse modo, podemos escrever:

$$A_p = 5A_T$$

Em que A_T é a área de **1 triângulo** desse dentro do pentágono.

Agora, visualize novamente a imagem da questão.



Observe que a área hachurada é exatamente **a área de 1 triângulo mais a metade do triângulo vizinho**. Com isso, podemos escrever que:

$$A_h = 1{,}5A_T$$

Para determinar a porcentagem, fazemos:

$$\frac{A_h}{A_p} = \frac{1{,}5A_t}{5A_t} \quad \rightarrow \quad \frac{A_h}{A_p} = \frac{1{,}5}{5} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{A_h}{A_p} = 0{,}3}$$

Logo, a área hachurada corresponde a **30% da área total**.

Gabarito: LETRA C.

Lista de Questões

Noções Elementares

CEBRASPE

1. (CESPE/PREF. BARRA DOS COQUEIROS/2020) A seguinte tabela apresenta a distância aproximada, em linha reta, entre a cidade de Itabaiana e quatro outras cidades de Sergipe.

	Lagarto	Aracaju	Estância	Poço Verde
Itabaiana	35 km	50 km	60 km	80 km

Com base nessas informações, é correto afirmar que um círculo com área de 3.200 km² centrado em Itabaiana

A) não inclui nenhuma das outras quatro cidades listadas.

B) inclui, além de Itabaiana, apenas a cidade de Lagarto.

C) inclui, além de Itabaiana, apenas as cidades de Lagarto e Aracaju.

D) inclui, além de Itabaiana, apenas as cidades de Lagarto, Aracaju e Estância.

E) inclui todas as cidades listadas.

2. (CESPE/SEFAZ-RS/2019) O relógio analógico de Audir danificou-se exatamente à zero hora (meia-noite) de certo dia, e o ponteiro dos minutos passou a girar no sentido anti-horário, mas com a mesma velocidade que tinha antes do defeito. O ponteiro das horas permaneceu funcionando normalmente, girando no sentido horário. Considerando as informações do texto, assinale a opção que apresenta a relação entre os arcos x e y percorridos, respectivamente, pelos ponteiros dos minutos e das horas do relógio de Audir entre duas sobreposições consecutivas.

A) $x - y = 90°$

B) $x - y = 180°$

C) $x + y = 180°$

D) $x + y = 360°$

E) $x = y$

Outras Bancas

3. (OMNI/PREF. LENÇOIS PTA/2021) Consideremos três pontos A, B e C em um plano π, análise as opções abaixo e marque aquela que tem uma afirmação verdadeira.

A) Entre os pontos A, B e C, sempre é possível desenhar um triângulo.

B) O segmento AB, ou seja, o segmento de reta que começa no ponto A e termina no ponto B, tem uma quantidade finita de pontos.

C) A reta que passa pelos pontos A e B, pode passar também pelo ponto C.

D) A, B e C não podem estar todos no plano π.

4. (AOCP/PREF. TERESÓPOLIS/2021) Sabe-se que a diferença entre o dobro do suplemento de um ângulo x e os dois quintos da medida desse mesmo ângulo x é zero. Dessa forma, é correto afirmar que a medida do ângulo x é igual a

A) 180°
B) 150°
C) 120°
D) 90°
E) 30°

5. (AOCP/PREF. TERESÓPOLIS/2021) Em um plano, considere duas retas r e s, distintas e paralelas entre si, e uma reta t transversal à reta r e à reta s, determinando ângulos em suas intersecções. Em relação aos ângulos determinados por essas três retas, é correto afirmar que

A) no total, são determinados 10 ângulos nas intersecções dessas três retas.
B) os pares de ângulos que estão entre as retas r e s e estão em posições alternadas em relação à reta t são denominados ângulos alternos externos.
C) os pares de ângulos que não estão entres as retas r e s e estão em posições alternadas em relação à reta t são denominados ângulos alternos internos.
D) os pares de ângulos que estão entre as retas r e s e estão do mesmo lado em relação à reta t são denominados ângulos colaterais internos.
E) os pares de ângulos que não estão entre as retas r e s e estão do mesmo lado em relação à reta t são denominados ângulos alternos.

GABARITO

1. LETRA A
2. LETRA D
3. LETRA C
4. LETRA B
5. LETRA D

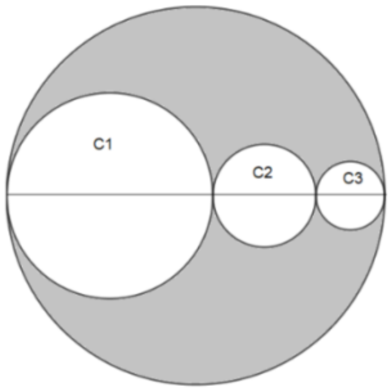
Lista de Questões

Circunferências

CEBRASPE

1. (CESPE/SEDUC-AL/2021) Julgue o item subsequente, relativos a geometria.

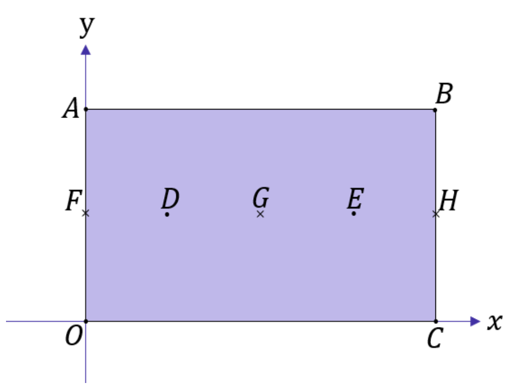
Considere que, na figura a seguir, os raios dos círculos internos C1, C2 e C3 sejam, respectivamente, iguais a r, $r/2$ e $r/3$, em que r é um número real positivo. Nesse caso, a área da parte em cinza é igual a $2\pi r^2$.



2. (CESPE/IFF/2018) Um quadrado tem todos os seus vértices sobre uma circunferência de 4 cm de raio. Nesse caso, a área desse quadrado é igual a

A) 4 cm²
B) 8 cm²
C) 16 cm²
D) 32 cm²
E) 64 cm²

3. (CESPE/SEDUC-AL/2017) A figura seguinte mostra, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, em que a unidade de medida é o metro, uma região retangular OABC. O lado OA mede 600 m e o lado OC mede 800 m.



A figura mostra também os pontos F = ponto médio de OA, H = ponto médio de CB, G = centro do retângulo OABC, D = ponto médio de FG, e E = ponto médio de GH. Nos pontos O, A, B, C, D e E foram instalados pontos de acesso à Internet — wi-fi. Nessa configuração, o usuário consegue se conectar à Internet desde que o seu smartphone esteja a 200 m ou menos de qualquer desses pontos de acesso. Com base nessas informações e na figura apresentada, julgue o próximo item.

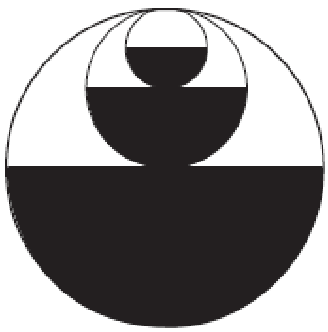
Na parte externa ao retângulo OABC, o acesso à Internet a partir dos referidos pontos de acesso se restringe a uma região em que a área é inferior a 384.000 m².

CESGRANRIO

4. (CESGRANRIO/LIQUIGAS/2018) Carlos e Eduardo estão em um pátio circular e notaram que, se ambos estivessem sobre a circunferência que limita o pátio, então a maior distância que um deles poderia ficar do outro mediria 24 metros. Ao notarem isso, eles se dispuseram em posições que realizam tal distância máxima. Se Eduardo ficar parado em sua posição, e Carlos caminhar até ele, pela circunferência do pátio, então, a medida mínima do comprimento percorrido por Carlos, em metros, será mais próxima de

A) 30
B) 15
C) 45
D) 38
E) 70

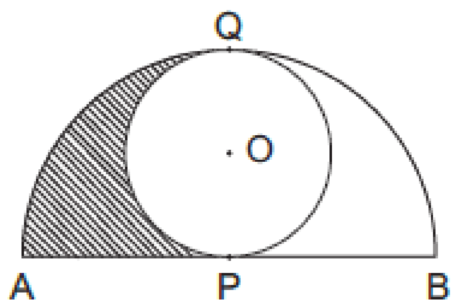
5. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2014) A figura a seguir foi construída de modo que cada círculo menor tangencia um diâmetro do círculo imediatamente maior no seu centro. A área pintada mede 63 cm².



A área do círculo maior, em cm², vale

A) 76
B) 84
C) 90
D) 93
E) 96

6. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2009)



A figura acima ilustra um círculo de centro em O e raio igual a 1 cm, inscrito em um semicírculo. P é o ponto médio do segmento AB. O círculo tangencia o semicírculo em P e Q. Os pontos O, P e Q são colineares. A área hachurada vale, em cm²,

A) 3π

B) 2π

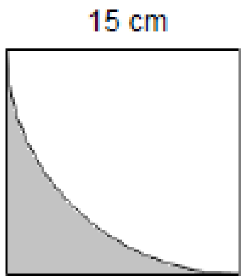
C) $3\pi/2$

D) π

E) $\pi/2$

FCC

7. (FCC/SABESP/2019) Verifica-se na figura abaixo, um quadrado e um arco de circunferência.



O perímetro da região cinza é:

A) $30 + \left(\frac{15}{2}\right)\pi$

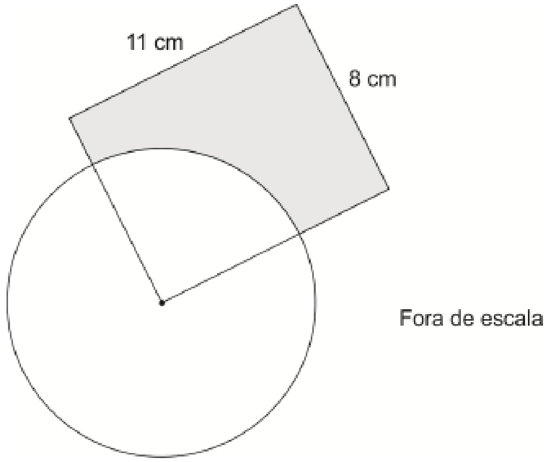
B) $30 + \left(\frac{2}{15}\right)\pi$

C) $15 + \left(\frac{15}{2}\right)\pi$

D) $15 + \left(\frac{2}{15}\right)\pi$

E) 30

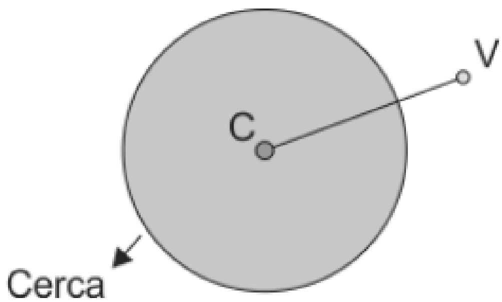
8. (FCC/PREF. SJRP/2019) Um dos vértices de um retângulo de lados 11 cm e 8 cm é o centro de uma circunferência, conforme mostra a figura abaixo.



Sabendo que a área da parte sombreada da figura é $\frac{352-\pi}{4}$ cm², o raio da circunferência, em cm, mede:

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

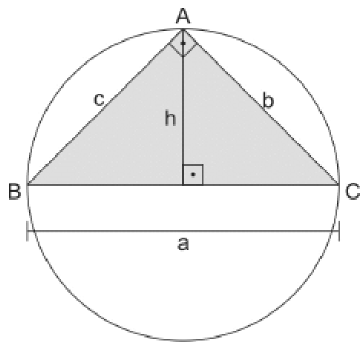
9. (FCC/SEDU-ES/2018) Um celeiro circular de raio 9 metros e centro C está cercado para que os animais não possam entrar. Uma vaca, indicada por V, está fora do celeiro e amarrada por uma corda de comprimento $CV = 12$ metros. Essa vaca pode pastar em qualquer local que esteja fora do celeiro e ao alcance da extensão da corda que a amarra, conforme mostra a figura abaixo.



Adotando $\pi = 3$, a área total que está ao alcance da vaca para que ela possa pastar, em m², é igual a

A) 120.
B) 27.
C) 169.
D) 189.
E) 18.

10. (FCC/EMAE/2018) Considere o triângulo retângulo isósceles abaixo com $a = 10\sqrt{2}$ m.



Então, c e b medem, respectivamente:

A) $6\sqrt{2}$ e $8\sqrt{2}$ m.

B) 6 e 8 m.

C) $5\sqrt{2}$ e $5\sqrt{2}$ m.

D) $7\sqrt{2}$ e $7\sqrt{2}$ m.

E) 10 e 10 m.

11. (FCC/SEDU-ES/2018) A Terra é aproximadamente uma esfera de raio igual a 6400 km. Adotando-se essa medida do raio terrestre e $\pi = 3$, a distância entre duas localidades que estejam sobre a linha do Equador terrestre e em meridianos afastados em 18° um do outro é igual a

A) 2560 km.

B) 1280 km.

C) 3840 km.

D) 1920 km.

E) 640 km.

12. (FCC/METRO SP/2016) Em um gráfico de setores (gráfico de "pizza") utilizado para representar a distribuição de todos os funcionários de uma empresa por diferentes faixas salariais, a faixa salarial com maior porcentagem de funcionários ocupa 3/8 do gráfico. O setor circular correspondente a essa faixa salarial tem ângulo central de medida igual a

A) 120°

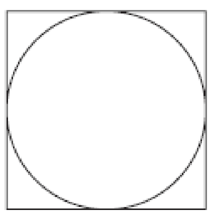
B) 90°

C) 75°

D) 135°

E) 225°

13. (FCC/CM SÃO PAULO/2014) Para se obter a área de um círculo, multiplica-se o quadrado da medida do raio pelo número π, que vale aproximadamente 3,14. Para se obter a área de um quadrado, basta elevar a medida do lado ao quadrado. Na figura, temos um círculo inscrito em um quadrado de área igual a 100 cm^2.

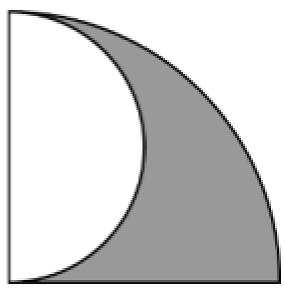


A área aproximada da região do quadrado não coberta pelo círculo, em centímetros quadrados, é

A) 78,5.
B) 84,3.
C) 21,5.
D) 157.
E) 62,7.

FGV

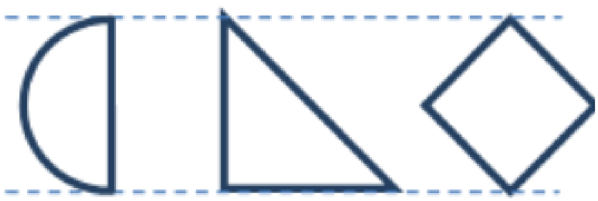
14. (FGV/CODEMIG/2015) A região sombreada na figura é conhecida como "barbatana de tubarão" e foi construída a partir de um quadrante de círculo de raio 4 e de um semicírculo.



A área dessa "barbatana de tubarão" é:

A) 2π
B) $5\pi/2$
C) 3π
D) $7\pi/2$
E) 4π

15. (FGV/PREF. OSASCO/2014) Considere o semicírculo, o triângulo retângulo e o quadrado mostrados abaixo.



Sabendo-se que o diâmetro no semicírculo, os catetos do triângulo retângulo e a diagonal do quadrado têm o mesmo tamanho, é correto concluir que:

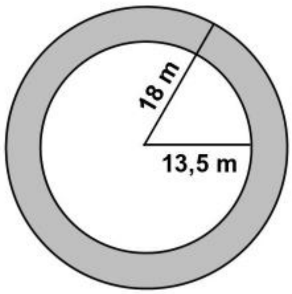
A) apenas o semicírculo e o quadrado têm a mesma área;
B) apenas o quadrado e o triângulo têm a mesma área;
C) apenas o semicírculo e o triângulo têm a mesma área;
D) todas as três figuras têm áreas diferentes;
E) as três figuras têm a mesma área.

Outras Bancas

16. (FUNDATEC/BM RS/2022) Um círculo de raio r tem área πr^2. Se dobrarmos o seu raio, teremos que a sua área aumenta:

A) 2 vezes.
B) 4 vezes.
C) 6 vezes.
D) 8 vezes.
E) 10 vezes.

17. (FUNPAR/PM-PR/2021) Um irrigador distribui água numa região circular, de raio 13,5 m. Devido a um defeito, esse irrigador precisou ser trocado por outro, que passou a irrigar uma região circular de raio 18 m. Assinale a alternativa que apresenta a área da parte cinza, indicada na figura abaixo, que corresponde à região que passou a ser coberta pelo segundo irrigador, além daquela coberta pelo primeiro. Use $\pi = \frac{22}{7}$



A) 346,50 m².
B) 396,00 m².
C) 409,50 m².
D) 445,50 m².
E) 495,00 m².

18. (FUNDATEC/PREF. AMETISTA DO SUL/2021) Quantos metros mede a circunferência de um círculo cujo diâmetro é igual a 18 m? (utilizar $\pi = 3,14$).

A) 56,52.
B) 70,65.
C) 84,78.
D) 98,91
E) 113,04.

Gabarito

1. CERTO
2. LETRA D
3. CERTO
4. LETRA D
5. LETRA E
6. LETRA E
7. LETRA A
8. LETRA A
9. LETRA D
10. LETRA E
11. LETRA D
12. LETRA D
13. LETRA C
14. LETRA A
15. LETRA B
16. LETRA B
17. LETRA D
18. LETRA A

LISTA DE QUESTÕES

Triângulos

CEBRASPE

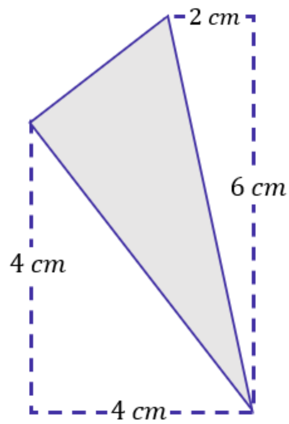
1. (CESPE/FUB/2022) Julgue o item que se segue, relacionados a geometria plana e espacial.

Considere que um triângulo ABC tenha lados com as seguintes medidas: 3 cm, 5 cm e 7 cm. Se o triângulo DEF é semelhante ao triângulo ABC e tem perímetro 25 cm, então o menor lado do triângulo DEF é 5 cm.

2. (CESPE/FUB/2022) Julgue o item que se segue, relacionados a geometria plana e espacial.

Seja ABC um triângulo com $A\hat{B}C = 90°$ e $A\hat{C}B = 30°$. Se $\overline{BC} = \sqrt{3}$ cm e se a altura com relação ao vértice B encontra o segmento $\overline{AC}$ no ponto D, então o comprimento do segmento $\overline{AD}$ é 1 cm.

3. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) O triângulo ABC mostrado a seguir está inscrito no retângulo incompleto, de lados pontilhados. As medidas dos lados do retângulo podem ser observadas na figura seguinte.



O valor da área do triangulo ABC apresentado anteriormente é igual a

A) 6 cm²
B) 7 cm²
C) 8 cm²
D) 12 cm²
E) 16 cm²

4. (CESPE/SEFAZ-RS/2018) Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 13 centímetros e um dos catetos mede 5 centímetros. Nesse triângulo, considere o retângulo inscrito, em que o comprimento do lado maior é igual ao dobro do comprimento do lado menor, e um dos lados maiores está sobre o cateto maior do triângulo. Com base nessas informações, é correto afirmar que a área desse retângulo é igual a

A) $\frac{11.250}{529}\ cm^2$

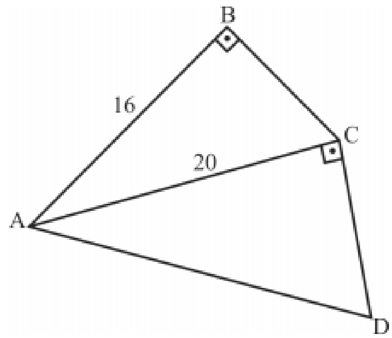
B) $\frac{3.600}{289}\ cm^2$

C) $\frac{3.600}{49}\ cm^2$

D) $\frac{1800}{121} cm^2$

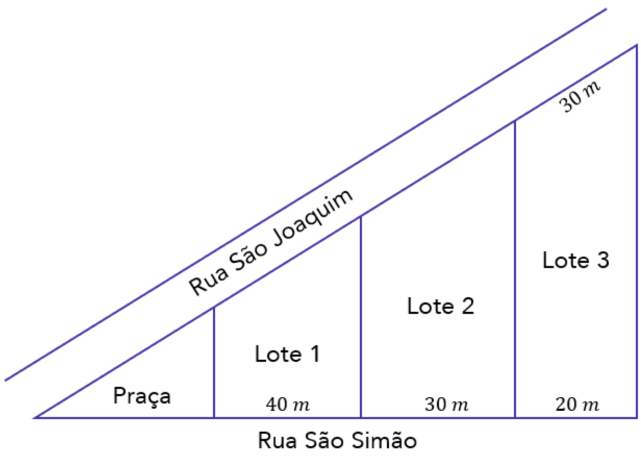
E) $1.800\ cm^2$

5. (CESPE/IFF/2018)



No polígono ABCD da figura precedente, os triângulos ABC e ACD são semelhantes e retângulos — nos vértices B e C, respectivamente. Além disso, AB = 16 cm, AC = 20 cm e CD é o lado menor do triângulo ACD. Nessa situação, AD mede

A) 24 cm.
B) 25 cm.
C) 28 cm.
D) 32 cm.
E) 36 cm.



(CBM-DF/2016) A figura acima ilustra parte da planta de um bairro, entre as ruas São Joaquim e São Simão. As divisas dos lotes são segmentos de retas paralelas e perpendiculares à reta que determina a rua São Simão. São destacados os lotes 1, 2, 3 e uma praça, bem como os comprimentos, em metros, das frentes dos lotes 1, 2 e 3 para a rua São Simão e o comprimento, em metros, da frente do lote 3 para a rua São Joaquim. A respeito desses lotes, julgue os itens a seguir.

6. (CESPE/CBM-DF/2016) A diferença entre o comprimento da divisa dos lotes 1 e 2 e o comprimento da divisa da praça e do lote 1 é superior a 45 metros.

7. (CESPE/CBM-DF/2016) A frente do lote 2 para a rua São Joaquim mede 45 metros.

8. (CESPE/SEGP-AL/2013) Ao descrever a cena de um crime, um agente mencionou que o corpo foi localizado em um terreno plano e que o ponto do terreno correspondente à posição da cabeça da vítima estava a 2,5 m de um poste de iluminação, a 3,2 m de uma placa de trânsito e a 4,1 m de um semáforo vertical, no interior da região triangular determinada pelo poste, pela placa de trânsito e pelo semáforo. Com base nessa situação, julgue o item seguinte.

A distância entre o poste de iluminação e a placa de trânsito é superior a 6 m.

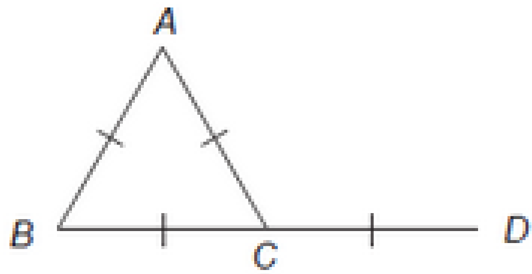
Texto para as próximas questões
(EBC/2011) Considere que as retas r e s sejam paralelas e que a distância entre elas é de 2 cm; que, na reta r, sejam marcados 4 pontos, de forma que a distância de qualquer um deles ao mais próximo seja de 5 cm; que, na reta s, sejam marcados 5 pontos, de forma que a distância de qualquer um deles ao mais próximo seja de 3 cm. Com base nessas informações e considerando, ainda, as áreas dos triângulos de vértices nos pontos marcados nas retas r e s, é correto afirmar que

9. (CESPE/EBC/2011) A maior área é igual a 15 cm².

10. (CESPE/EBC/2011) A menor área é igual a 5 cm².

CESGRANRIO

11. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2017) Um arame de extremidades C e D e 8 cm de comprimento é dobrado de modo a formar um triângulo equilátero ABC mantendo os pontos B, C e D alinhados, conforme a Figura a seguir.



Qual a distância, em centímetros, entre os pontos A e D?
A) $\sqrt{3}$
B) $2\sqrt{3}$
C) $4\sqrt{3}$
D) 2
E) 4

12. (CESGRANRIO/IBGE/2016) Considere as seguintes definições:

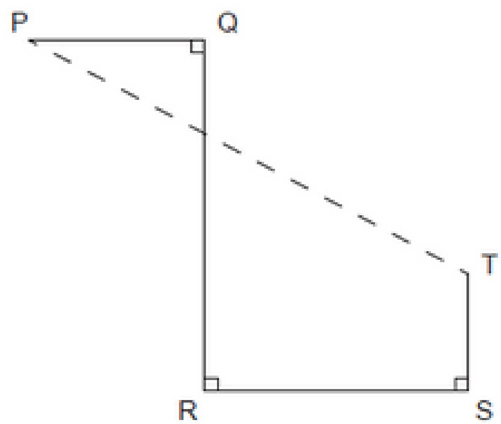
1 - Um triângulo é chamado de escaleno quando os seus lados possuem comprimentos diferentes.

2 - Um triângulo é chamado de isósceles quando há dois de seus lados com o mesmo comprimento.

3 - Um triângulo é chamado de equilátero quando todos os seus lados possuem o mesmo comprimento.

De acordo com as definições apresentadas, um triângulo não é escaleno quando, e apenas quando, ele
A) é isósceles.
B) é isósceles, mas não é equilátero.
C) não é isósceles.
D) não é equilátero, nem é isósceles.
E) não é equilátero.

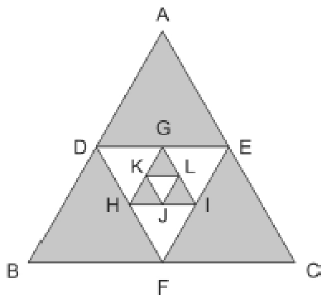
13. (CESGRANRIO/IBGE/2016) Na Figura a seguir, PQ mede 6 cm, QR mede 12 cm, RS mede 9 cm, e ST mede 4 cm.



A distância entre os pontos P e T, em cm, mede
A) 17
B) 21
C) 18
D) 20
E) 19

FCC

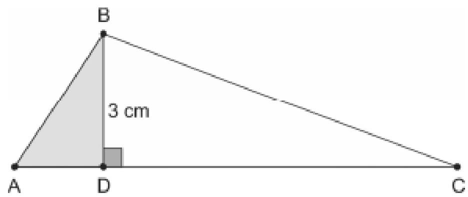
14. (FCC/SABESP/2019) O triângulo ABC, de área 64 cm², foi dividido pelos segmentos DE, DF, EF, em quatro triângulos congruentes. O triângulo DEF, por sua vez, foi dividido pelos segmentos GH, HI e GI, em quatro triângulos congruentes, o mesmo acontecendo com o triângulo GHI através dos segmentos JK, KL, LJ.



Assim sendo, a área da região sombreada na figura é, em cm²,

A) 60
B) 63
C) 64
D) 51
E) 48

15. (FCC/PREF. SJRP/2019) Em um triângulo ABC a altura BD relativa ao lado AC mede 3 cm, conforme mostra a figura.



Sabendo que o segmento CD é 6 cm maior que o segmento AD e que a área do triângulo BCD é o quádruplo da área do triângulo ABD, a área do triângulo ABC, em cm², é:

A) 12
B) 15
C) 18
D) 21
E) 24

16. (FCC/SEDU-ES/2018) A altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo ABC mede 12 cm. Se um dos catetos do triângulo ABC mede 15 cm, a medida do outro cateto, em centímetros, é igual a

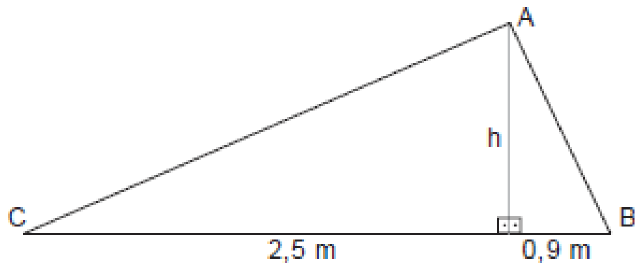
A) 24.
B) 18.
C) 22.
D) 16.
E) 20.

17. (FCC/METRO SP/2016) Em um gráfico de setores (gráfico de "pizza") utilizado para representar a distribuição de todos os funcionários de uma empresa por diferentes faixas salariais, a faixa salarial com maior porcentagem de funcionários ocupa 3/8 do gráfico. O setor circular correspondente a essa faixa salarial tem ângulo central de medida igual a

A) 120°
B) 90°

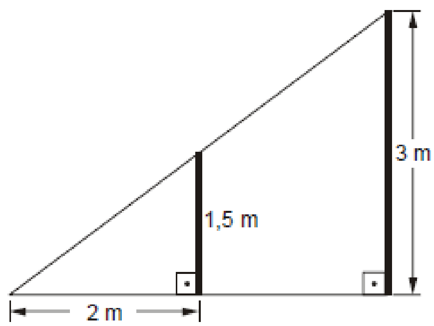
C) 75°
D) 135°
E) 225°

18. (FCC/SEDU-ES/2016) Para que o triângulo ABC, indicado na figura, seja triângulo retângulo, com ângulo reto no vértice A, a medida da altura h, relativa ao lado BC, deverá ser igual a



A) 1,5 m
B) 1,1 m
C) 1,4 m
D) 1,2 m
E) 1,3 m

19. (FCC/SEE-MG/2012) Após uma ventania, um guarda florestal percebeu que uma das árvores do parque havia se inclinado para a direita, estando na iminência de cair. Para escorá-la, foram utilizadas duas hastes de madeira: uma de altura 1,5 m, colocada no solo, a 2 m do pé da árvore, apoiada no tronco, e outra, medindo 3,0 m, colocada de forma a apoiar a extremidade do ramo mais alto. As duas hastes foram colocadas perpendiculares ao solo.



Com base nos dados, conclui-se que a altura da árvore é
A) 3,5 m
B) 4,0 m
C) 4,5 m
D) 5,0 m

20. (FCC/SEE-MG/2012) Em um triângulo isósceles, o perímetro mede 105 cm. Sabe-se que a base tem a metade da medida de cada um dos outros dois lados. Nessas condições, as medidas dos lados desse triângulo correspondem a
A) Base: 21 cm e outros lados medem 42 cm cada.

B) Base: 26,25 cm e outros lados medem 52,5 cm cada.
C) Base: 17,5 cm e outros lados medem 35 cm cada.
D) Base: 35 cm e outros lados medem 70 cm cada.

FGV

21. (FGV/CGU/2022) Em um plano horizontal há um poste vertical com uma lâmpada (L) em cima, um objeto vertical (X) com 2 m de altura e uma parede vertical (P). O plano que contém o poste e o objeto é perpendicular ao plano da parede.

Quando o objeto (X) é equidistante do poste e da parede, a parte de sua sombra projetada na parede mede 50 cm (Fig 1).

Quando a distância do objeto (X) à parede é o triplo de sua distância ao poste, a sua sombra no chão mede 3,2 m (Fig 2).

Fig 1

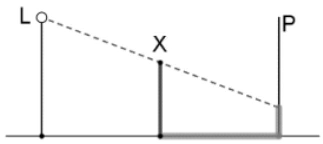
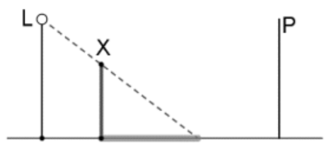
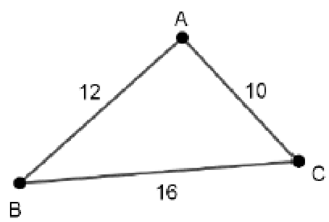


Fig 2



A distância, em metros, entre o poste e a parede é:
A) 8,4
B) 8,2
C) 9,2
D) 9,6
E) 10,0

22. (FGV/CBM-AM/2022) As cidades A, B e C são ligadas por três estradas. De A até B são 12 km, de B até C são 16 km e de C até A são 10 km. Não há outros caminhos.



Mário está na estrada BC em um ponto tal que, para ir à cidade A é indiferente passar por B ou por C, pois percorrerá a mesma distância.

Jorge está na estrada AB em um ponto tal que, para ir à cidade C é indiferente passar por B ou por A, pois percorrerá a mesma distância.

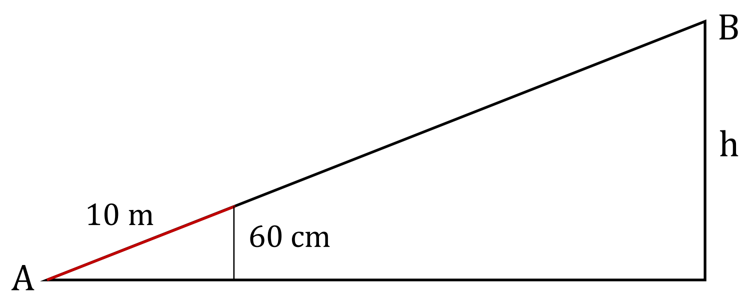
Para que Mário encontre Jorge deverá percorrer, no mínimo,

A) 9 km
B) 10 km
C) 11 km
D) 12 km
E) 13 km

23. (FGV/PREF. ANGRA/2019) Seja A a área do triângulo de lados 5, 5, 6 e seja B a área do triângulo de lados 5, 5, 8. A relação entre A e B é

A) $A = B$
B) $A = 4B/3$
C) $A = 3B/4$
D) $A = 8B/9$
E) $A = 9B/8$

24. (FGV/BANESTES/2018) Uma rampa AB de inclinação constante em relação ao plano horizontal tem 75m de comprimento. Sabe-se que percorrendo 10 m sobre essa rampa, a altura aumenta 60 cm, como mostra a figura abaixo.



Percorrendo toda a rampa, a altura h assinalada na figura será de:

A) 4,5 m
B) 4,8 m
C) 5,0 m
D) 5,2 m
E) 5,4 m

25. (FGV/ALE-RO/2018) O retângulo ABCD tem dimensões AB = 2 e BC = 4. Os pontos M e N são médios dos lados BC e CD, respectivamente. O cosseno do ângulo AMN é igual a

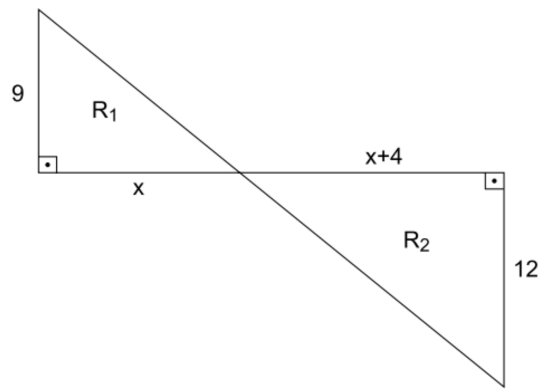
A) $-1/\sqrt{3}$
B) $1/\sqrt{5}$
C) $-1/\sqrt{5}$
D) $1/\sqrt{10}$
E) $-1/\sqrt{10}$

VUNESP

26. (VUNESP/PREF. TAUBATÉ/2022) Um mestre de obras precisa de um pedaço de madeira cortada em formato de triângulo retângulo, com o maior lado medindo 37 cm, e o menor lado medindo 12 cm. O perímetro desse pedaço de madeira triangular deve ser de

A) 81 cm
B) 82 cm
C) 83 cm
D) 84 cm
E) 85 cm

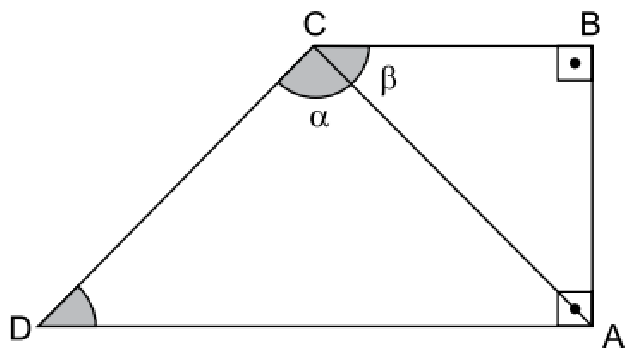
27. (VUNESP/TJ-SP/2017) A figura seguinte, cujas dimensões estão indicadas em metros, mostra as regiões R_1 e R_2, ambas com formato de triângulos retângulos, situadas em uma praça e destinadas a atividades de recreação infantil para faixas etárias distintas.



Se a área de R_1 é 54 m², então o perímetro de R_2 é, em metros, igual a

A) 40.
B) 42.
C) 54.
D) 48.
E) 36.

28. (VUNESP/TJ-SP/2015) Na figura, o trapézio retângulo ABCD é dividido por uma de suas diagonais em dois triângulos retângulos isósceles, de lados $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DC}$.



Desse modo, é correto afirmar que a soma das medidas dos ângulos α e β é igual a

A) 125°.

B) 115°.

C) 110°.

D) 135°.

E) 130°.

29. (VUNESP/Prefeitura Municipal da Estância Turística de São Roque (SP)/2020) De um terreno no formato de triângulo retângulo, sabe-se que o maior e o menor lados medem 25 metros e 15 metros, respectivamente. A medida do terceiro lado desse terreno é igual a

A) 19,5 metros.

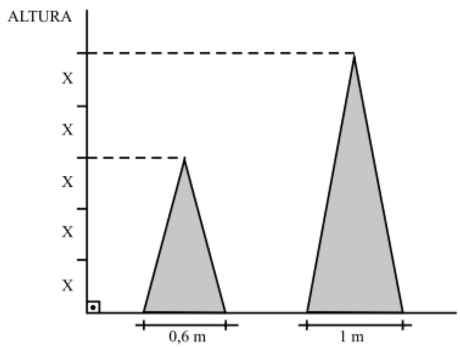
B) 20,0 metros.

C) 20,5 metros.

D) 21,0 metros.

E) 21,5 metros.

30. (VUNESP/TJ-SP/2011) A figura compara as alturas, medidas em metros, de dois painéis decorativos triangulares, fixados em uma parede, que simulam árvores de Natal. Sabendo-se que a soma das medidas das alturas dos dois painéis é igual a 4 m, e que em cada painel foram instaladas 200 lampadazinhas coloridas por metro quadrado, pode-se concluir que o número de lâmpadas instaladas no painel de maior altura foi igual a



A) 200.

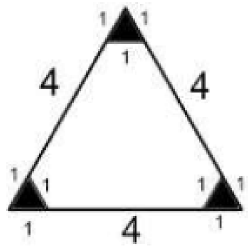
B) 250.

C) 275.

D) 300.

Outras Bancas

31. (RBO/ISS-BH/2022) Na figura a seguir, temos um triângulo equilátero de lado 6 dm, e em cada vértice desse triângulo, temos triângulo equilátero de lado 1 dm.



O percentual do triângulo de lado 6 dm, que está escurecido, é de, aproximadamente,

A) 6,67%.
B) 7,33%.
C) 8,33%.
D) 9,00%.
E) 10,2%

32. (FUNDATEC/PREF. FLORES DA CUNHA/2022) Analise as assertivas a seguir:

I. Todo triângulo retângulo tem um ângulo reto.
II. Todo triângulo retângulo tem catetos e hipotenusa.
III. Os ângulos internos de um triângulo retângulo possuem medidas iguais.

Quais estão corretas?

A) Apenas I.
B) Apenas II.
C) Apenas I e II.
D) Apenas II e III.
E) I, II e III.

33. (IDECAN/IBGE/2022) Considere as seguintes afirmações abaixo:

I. A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180°.
II. Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.
III. Em todo triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois.
Assinale o item correto:

A) Somente I está correta.
B) Somente II está correta.
C) Somente I e II estão corretas.
D) Somente II e III estão corretas
E) Todas as afirmações estão corretas.

GABARITO

1. CERTO
2. ERRADO
3. LETRA C
4. LETRA D
5. LETRA B
6. ERRADO
7. CERTO
8. ERRADO
9. CERTO
10. ERRADO
11. LETRA B
12. LETRA A
13. LETRA A
14. LETRA D
15. LETRA B
16. LETRA E
17. LETRA D
18. LETRA A
19. LETRA D
20. LETRA A
21. LETRA D
22. LETRA B
23. LETRA A
24. LETRA A
25. LETRA E
26. LETRA D
27. LETRA D
28. LETRA D
29. LETRA B
30. LETRA B
31. LETRA C
32. LETRA C
33. LETRA E

LISTA DE QUESTÕES

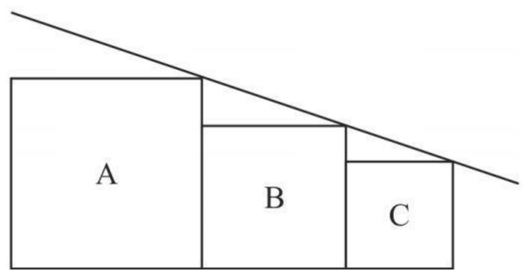
Quadriláteros

CEBRASPE

1. (CESPE/FUB/2022) Julgue o item que se segue, relacionados a geometria plana e espacial.

Um paralelogramo $ABCD$ com $\overline{AB} = 10\ cm$, $\overline{BC} = 6\ cm$ e $A\hat{B}C = 30°$ tem área igual a 30 cm^2.

2. (CESPE/SEFAZ-RS/2019) Os quadrados A, B e C foram colocados lado a lado, de modo que uma reta contém os três vértices superiores, como mostra a figura a seguir



Se a área do quadrado A for 24 cm², e a área do quadrado C for 6 cm², então a área do quadrado B será igual a

A) 9 cm²
B) 10 cm²
C) 12 cm²
D) 15 cm²
E) 18 cm²

3. (CESPE/TJ-PR/2019) O carpinteiro José cortou um retângulo de madeira medindo 80 cm de comprimento por 60 cm de largura. Ele precisa cortar outro retângulo, com a mesma área do primeiro, mas com comprimento um quarto maior que o daquele outro. Desse modo, em relação à largura do primeiro retângulo, a largura do segundo deverá

A) diminuir um terço.
B) diminuir um quinto.
C) aumentar três vezes.
D) aumentar um quinze avos.
E) aumentar trinta e seis quinze avos.

4. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) Julgue o item a seguir, relativo a sequências numéricas.

Situação hipotética: As margens de uma folha de papel retangular medem 21 cm × 29 cm. Cortando essa folha ao meio, pelo ponto médio da margem maior, obtêm-se duas folhas em que as margens medem 21 cm × 29/2 cm. Desprezando uma delas, a outra é denominada folha F1. Cortando F1 ao meio, pelo ponto médio da margem maior, obtêm-se duas folhas em que as margens medem 21/2 cm x 29/2 cm. Desprezando uma delas, a outra é denominada folha F2. Esse processo de divisão pode ser continuado sucessivamente.

Assertiva: Nessa situação, a área da folha F6 será inferior a 9 cm².

5. (CESPE/CAGE-RS/2018) Em um bairro nobre de determinada cidade, uma imobiliária colocou à venda vários terrenos: independentemente do tamanho, o preço do metro quadrado é o mesmo para todos os terrenos à venda. Um terreno retangular de 600 m² de área custa R$ 3.240.000. Em outro terreno, também retangular, um dos lados é 25% maior que o lado equivalente do primeiro terreno; o outro lado é 20% menor que o lado equivalente do primeiro terreno. Nesse caso, o preço do segundo terreno é igual a

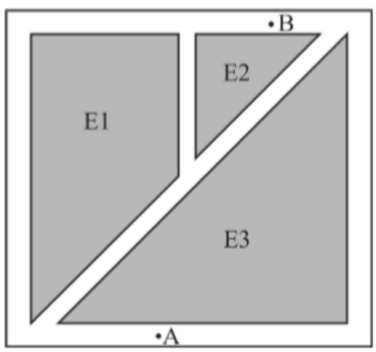
A) R$ 1.458.000.
B) R$ 3.240.000.
C) R$ 3.402.000.
D) R$ 3.078.000.
E) R$ 3.564.000.

6. (CESPE/IFF/2018) Os lados de um terreno quadrado medem 100 m. Houve erro na escrituração, e ele foi registrado como se o comprimento do lado medisse 10% a menos que a medida correta. Nessa situação, deixou-se de registrar uma área do terreno igual a

A) 20 m².
B) 100 m².
C) 1.000 m².
D) 1.900 m².
E) 2.000 m².

(PM-AL/2018) Texto para as próximas questões

A figura seguinte mostra a planta baixa de um condomínio. O terreno ocupado pelo condomínio é um quadrado de lados que mede 60 m. Nesse condomínio, as áreas indicadas por E1, E2 e E3 correspondem aos locais onde estão construídos os prédios residenciais, e as regiões em branco correspondem às vias de livre circulação para pedestres e veículos.



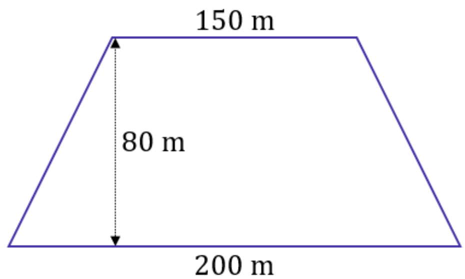
A partir da figura e das informações precedentes, julgue os itens a seguir, considerando que a área de E2 seja igual a 200 m².

7. (CESPE/PM-AL/2018) Se a área de E3 for igual à área da região ocupada pelas vias de livre circulação e se a área de E1 for igual a 900 m², então a área de E3 será igual a 1.250 m².

8. (CESPE/SEDF/2017) No item a seguir, é apresentada uma situação hipotética seguida de uma assertiva a ser julgada, a respeito de juros, divisão proporcional e regra de três.

Um terreno retangular medindo 100 m × 200 m foi colocado à venda por R$ 250.000,00. O terreno poderá ser vendido inteiro ou em frações e, nesse caso, o preço do m² da fração de terreno é igual ao do m² do terreno inteiro. Nessa situação, se um indivíduo desejar comprar uma fração medindo 50 m × 100 m, ele pagará R$ 125.000,00 por essa fração de terreno.

9. (CESPE/CPRM/2016)



A área do trapézio apresentado, em que a altura é igual a 80 m, a base maior mede 200 m e a base menor, 150 m, é igual a

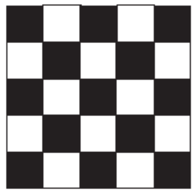
A) 8.000 m²
B) 6.000 m²
C) 23.000 m²
D) 21.000 m²
E) 14.000 m²

10. (CESPE/BACEN/2013) A numeração das notas de papel-moeda de determinado país é constituída por duas das 26 letras do alfabeto da língua portuguesa, com ou sem repetição, seguidas de um numeral com 9 algarismos arábicos, de 0 a 9, com ou sem repetição. Julgue o próximo item relativos a esse sistema de numeração.

Considere que, até o ano 2000, as notas de papel-moeda desse país fossem retangulares e medissem 14 cm × 6,5 cm e que, a partir de 2001, essas notas tivessem passado a medir 12,8 cm × 6,5 cm, mas tivessem mantido a forma retangular. Nesse caso, com o papel-moeda gasto para se fabricar 10 notas de acordo com as medidas adotadas antes de 2000 é possível fabricar 11 notas conforme as medidas determinadas após 2001.

CESGRANRIO

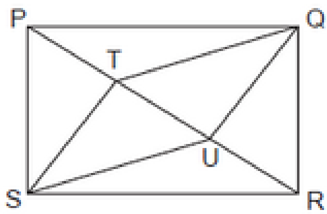
11. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) A Figura mostra um tabuleiro 5x5, composto por 25 quadradinhos idênticos. A área total do tabuleiro é de 500 cm².



A soma das áreas, em cm², de todos os quadradinhos escuros desse tabuleiro é igual a

A) 240
B) 250
C) 260
D) 270
E) 280

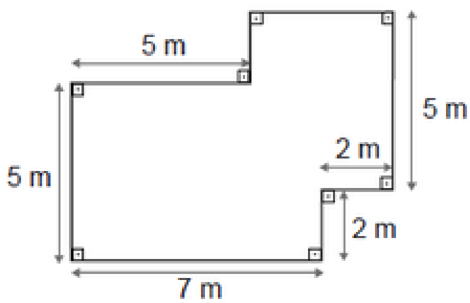
12. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Em um retângulo de lados PQ = 12 cm e QR = 9 cm, os pontos T e U dividem a diagonal em três segmentos iguais, como ilustrado na Figura abaixo.



A área do quadrilátero STQU, em cm², é igual a

A) 108
B) 72
C) 54
D) 48
E) 36

13. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) A planta baixa do estoque de uma empresa está representada pela Figura abaixo. Todas as medidas indicadas estão na unidade metro, e todos os ângulos indicados na Figura são retos.

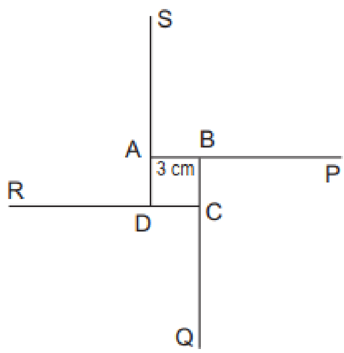


A medida da área do estoque, em metros quadrados, é

A) 32
B) 45
C) 49
D) 55

E) 63

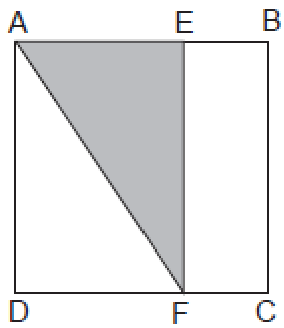
14. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) Num quadrado ABCD, de lado 3 cm, prolonga-se AB, na direção de A para B, até um ponto P, tal que BP = 3 AB. Em seguida, prolonga-se o lado BC, de B para C, até o ponto Q, tal que CQ = 3 BC. Do mesmo modo, prolongam-se os lados CD e DA, respectivamente, até os pontos R e S, conforme a Figura a seguir.



O perímetro, em cm, do quadrilátero PQRS será igual a

A) 12
B) 30
C) 36
D) 48
E) 60

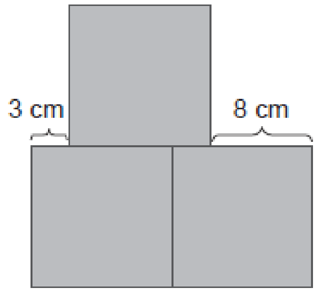
15. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2018) Na Figura a seguir, ABCD é um quadrado de lado 10, e EF é traçado perpendicularmente aos lados AB e CD de modo que a área do triângulo AEF é 30% da área do quadrado.



Quanto mede FC?

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7

16. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) A Figura a seguir é composta por três quadrados idênticos, com um deles apoiado em outros dois que possuem um lado comum.



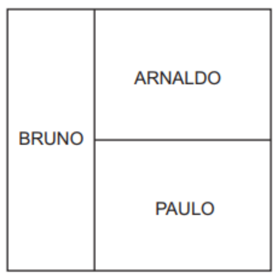
A área, em cm², de cada quadrado é igual a

A) 24
B) 72
C) 73
D) 121
E) 576

17. (CESGRANRIO/IBGE/2016) Ao duplicar a largura de um determinado retângulo e reduzir à metade o comprimento desse mesmo retângulo, obtém-se um quadrado de perímetro P. O perímetro do retângulo original é

A) 2,5P
B) 0,25P
C) 1,25P
D) 0,75P
E) P

18. (CESGRANRIO/IBGE/2014) Três herdeiros, Arnaldo, Bruno e Paulo, dividiram um terreno quadrado de 42 metros de lado em três terrenos retangulares de áreas iguais. A Figura abaixo mostra a divisão e a parte que coube a cada um.



O perímetro, em metros, do terreno retangular destinado a Bruno é

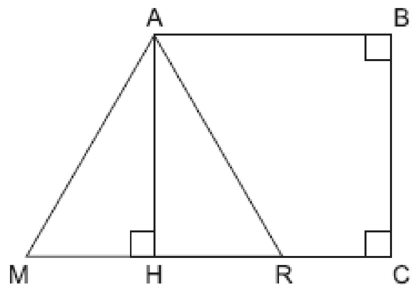
A) 588
B) 105
C) 147
D) 112
E) 126

19. (CESGRANRIO/BB/2012) No modelo abaixo, os pontos A, B, C e D pertencem à mesma reta. O ponto A dista 65,8 mm do ponto D; o ponto B dista 41,9 mm do ponto D, e o ponto C está a 48,7 mm do ponto A.

Qual é, em milímetros, a distância entre os pontos B e C?

A) 17,1
B) 23,1
C) 23,5
D) 23,9
E) 24,8

20. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2011) Na figura abaixo, temos o triângulo equilátero MAR, de área S, e o retângulo ABCH, de área $11S/6$.

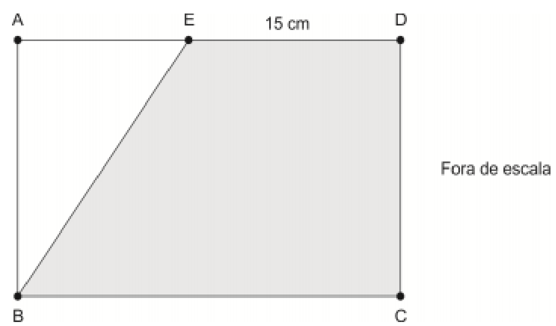


Observe que o segmento AH é uma das alturas do triângulo MAR. A área do trapézio ABCR é

A) $2S/3$
B) $3S/5$
C) $7S/4$
D) $5S/2$
E) $4S/3$

FCC

21. (FCC/PREF. SJRP/2019) O ponto E pertence ao lado AD do retângulo ABCD e ED=15 cm, conforme mostra a figura.



Sabendo que a área do retângulo ABCD é 336 cm² e que a área do trapézio BCDE é 273 cm², a medida, em cm, do lado AB, é:

A) 14

B) 15
C) 16
D) 17
E) 18

22. (FCC/AGED-MA/2018) Uma empresa designou para recreação de seus funcionários um espaço retangular de dimensões inteiras e diferentes da unidade, em metros, cuja área é 793 m². Sabe-se que a área de um retângulo é o produto de suas duas dimensões. No último mês, a empresa aumentou a dimensão maior desse espaço retangular em 4 metros e a menor em 3 metros. Feito isso, a área de recreação dos funcionários aumentou em

A) 247 m²
B) 12 m²
C) 315 m²
D) 189 m²
E) 49 m²

23. (FCC/SABESP/2018) De um quadrado de papel cujo lado mede 12 cm, recorta-se de um dos vértices um quadrado cujo lado é igual a 2 cm e do vértice oposto recorta-se outro quadrado cujo lado é igual a 4 cm. Após a retirada desses dois quadrados recortados a figura restante apresenta a área de

A) 124 cm².
B) 68 cm².
C) 84 cm².
D) 36 cm².
E) 164 cm².

24. (FCC/SEDU-ES/2018) Em uma cidade o Prefeito designou que em um quarteirão, de formato igual a um paralelogramo, cujas medidas dos lados são 50 m e 80 m e seus ângulos são 60° e 120°, fosse construída uma praça. A primeira providência seria a construção de duas calçadas que cruzassem o interior da praça, como se fossem as duas diagonais do paralelogramo. Desconsiderando a largura das calçadas, o comprimento da menor delas é de

A) 70 m.
B) 68 m.
C) 72 m.
D) 75 m.
E) 67 m.

25. (FCC/SABESP/2017) Um terreno tem a forma de um trapézio. Os lados não paralelos têm a mesma medida. A base maior desse trapézio mede 12 m, a base menor mede 6 m e a altura mede 4 m. A área e o perímetro desse terreno são, respectivamente, iguais a

A) 32 m² e 28 m.
B) 36 m² e 28 m.
C) 36 m² e 24 m.
D) 32 m² e 24 m.
E) 36 m² e 26 m.

FGV

26. (FGV/PC-RJ/2022) Modificamos um retângulo, aumentando sua base em 32% e diminuindo sua altura em 32%. Então, sua área:

A) não se alterou;

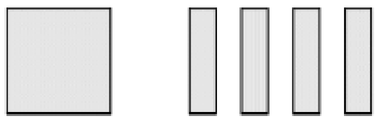
B) diminuiu cerca de 10%;

C) aumentou cerca de 10%;

D) diminuiu cerca de 20%;

E) aumentou cerca de 20%.

27. (FGV/SEFAZ-BA/2022) Um quadrado foi cortado em 4 retângulos iguais como mostra a figura.



A soma dos perímetros dos retângulos é maior que o perímetro do quadrado em

A) 50%.

B) 100%.

C) 150%

D) 180%

E) 200%

28. (FGV/IMBEL/2021) Uma parede retangular de 5,0 m por 2,8 m deve ser ladrilhada com ladrilhos quadrados de 20 cm de lado. O número mínimo de ladrilhos necessários para fazer esse ladrilhamento é

A) 340.

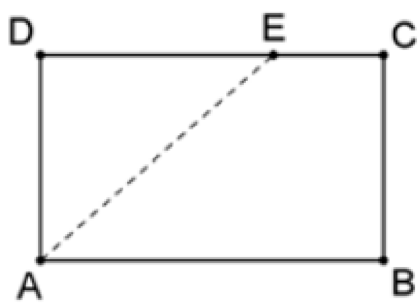
B) 350.

C) 360.

D) 380.

E) 420.

29. (FGV/PM-SP/2021) O retângulo ABCD da figura a seguir tem as dimensões AB = 10 e BC = 6.



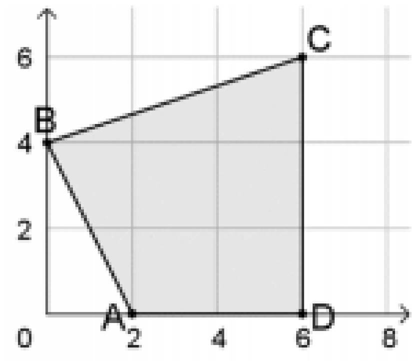
O ponto E do lado CD é tal que o segmento AE divide o retângulo em duas partes de forma que a área de uma seja o dobro da área da outra. O segmento DE mede

A) 13/2

B) 16/3

C) 20/3
D) 21/4
E) 25/4

30. (FGV/IMBEL/2021) Um terreno tem a forma de um quadrilátero ABCD. A figura a seguir mostra sua representação no plano cartesiano, onde cada unidade representa 10 metros.



Sejam x e y os comprimentos das diagonais AC e BD, respectivamente. É correto afirmar que
A) x – y é aproximadamente igual a 2 metros.
B) x – y é aproximadamente igual a 5 metros.
C) y – x é aproximadamente igual a 2 metros.
D) y – x é aproximadamente igual a 5 metros.
E) x = y.

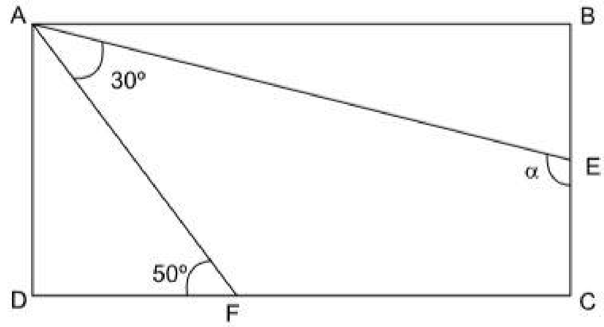
VUNESP

31. (VUNESP/ALESP/2022) Um terreno retangular tem o lado maior com 5 metros a mais que o lado menor. A prefeitura exige que haja um recuo em cada lado para realizar construções. Realizando os recuos obrigatórios, o proprietário perde 75 m² da área do terreno para a construção da casa. Essa perda corresponde à décima parte da área total do terreno. Com essas informações, é correto afirmar que a medida do contorno desse terreno é, em metros, igual a
A) 110
B) 105
C) 120
D) 115
E) 100

32. (VUNESP/ALESP/2022) Comprei um terreno quadrado e em seguida comprei outro, retangular, cuja largura é igual ao lado do terreno quadrado, e o comprimento tem 3 metros a mais que a largura. Sabendo que a área total dos dois terrenos é de 324 m², a diferença entre as áreas desses dois terrenos é, em metros quadrados, igual a
A) 38
B) 42
C) 40
D) 44

E) 36

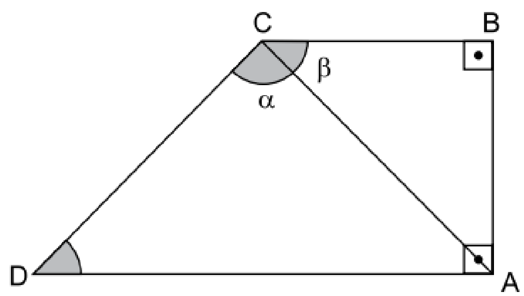
33. (VUNESP/ Prefeitura Municipal de Piracicaba (SP)/2020) O retângulo ABCD foi dividido em 3 regiões, conforme mostra a figura.



A medida do ângulo indicado por α no quadrilátero AECF é

A) 100°.
B) 110°.
C) 120°.
D) 130°.
E) 140°.

34. (VUNESP/TJ-SP/2015) Na figura, o trapézio retângulo ABCD é dividido por uma de suas diagonais em dois triângulos retângulos isósceles, de lados $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DC}$.



Desse modo, é correto afirmar que a soma das medidas dos ângulos α e β é igual a

A) 125°.
B) 115°.
C) 110°.
D) 135°.
E) 130°.

35. (VUNESP/Prefeitura Municipal da Estância Turística de São Roque (SP)/2020) Uma sala de aula, com perímetro de 22 metros, tem o comprimento equivalendo a 1,2 vezes a sua largura. A área dessa sala de aula, em metros quadrados, é igual a

A) 24.
B) 26.
C) 28.

D) 30.
E) 32.

Outras Bancas

36. (IBFC/IBGE/2022) Ao analisar a cobertura territorial sobre sua responsabilidade, o coordenador riscou no mapa um retângulo de modo que representasse a maior área possível da região a ser trabalhada por sua equipe. Se as medidas dos lados desse retângulo são 4,5 cm e 6 cm, então a medida da área desse retângulo, em m² é igual a:
A) 0,27
B) 0,027
C) 0,0027
D) 2,7
E) 0,000027

37. (NUCEPI UESPI/PM-PI/2022) Durante uma manifestação na Avenida Frei Serafim em Teresina, os soldados Emanuel, Fábio e Gilson foram designados para acompanhar o evento. Quando retornaram ao quartel, o comandante indagou sobre o número de pessoas que participaram da manifestação. Emanuel informou que foi ocupada uma faixa retangular da Avenida, medindo 14 m por 176 m, pelos manifestantes. Fábio disse que, em média, havia 4 pessoas por metro quadrado. Por sua vez, Gilson fez as contas e informou ao comandante, de maneira correta, o número total de manifestantes. O número informado por Gilson foi de aproximadamente
A) 12.000 pessoas.
B) 11.000 pessoas.
C) 10.000 pessoas.
D) 9.000 pessoas.
E) 8.000 pessoas.

38. (AOCP/CM BAURU/2022) João, servidor da Câmara, possui um sítio que usa para descanso aos fins de semana. Ele pretende construir um galinheiro no sítio. Para isso, deseja utilizar um rolo com 200 metros de tela que ele já possui. Se a forma que João escolheu é a retangular e ele usará a tela em todos os lados do retângulo, qual é a área máxima que o galinheiro pode ter?
A) 1.600 m²
B) 2.000 m²
C) 2.400 m²
D) 2.500 m²
E) 2.700 m²

Gabarito

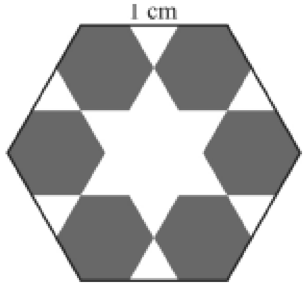
1. CERTO
2. LETRA C
3. LETRA B
4. ERRADO
5. LETRA B
6. LETRA D
7. CERTO
8. ERRADO
9. LETRA E
10. ERRADO
11. LETRA C
12. LETRA E
13. LETRA C
14. LETRA E
15. LETRA B
16. LETRA D
17. LETRA C
18. LETRA D
19. LETRA E
20. LETRA E
21. LETRA A
22. LETRA A
23. LETRA A
24. LETRA A
25. LETRA B
26. LETRA B
27. LETRA C
28. LETRA B
29. LETRA C
30. LETRA E
31. LETRA A
32. LETRA E
33. LETRA B
34. LETRA D
35. LETRA D
36. LETRA C
37. LETRA C
38. LETRA D

Lista de Questões

Polígonos

CEBRASPE

1. (CESPE/SEFAZ-RS/2018) A figura a seguir ilustra a primeira etapa de um processo recursivo que, a partir de um hexágono regular em que os lados medem 1 cm de comprimento, constroem-se 6 novos hexágonos regulares.



Nesse processo, os lados do hexágono externo são divididos em 3 partes iguais e, conforme mostra a figura, são construídos outros 6 hexágonos regulares; em cada um deles, o comprimento dos lados é igual a $\frac{1}{3}$. Na segunda etapa, dividem-se os lados desses 6 novos hexágonos em 3 partes iguais, e constroem-se, de maneira semelhante à primeira etapa, outros 36 hexágonos regulares. Esse processo pode seguir indefinidamente. Nessa situação, sabendo-se que, se o comprimento dos lados de um hexágono regular for igual a L cm, a área desse hexágono será igual a $\frac{3\sqrt{3}}{2}L^2$ cm² é correto concluir que a soma das áreas dos hexágonos obtidos na 5.ª etapa do processo recursivo descrito é igual a

A) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \sqrt{3}$ cm²

B) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \sqrt{3}$ cm²

C) $\left(\frac{3}{2}\right)^5 \times \sqrt{3}$ cm²

D) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \sqrt{3}$ cm²

E) $\left(\frac{3}{2}\right)^4 \times \sqrt{3}$ cm²

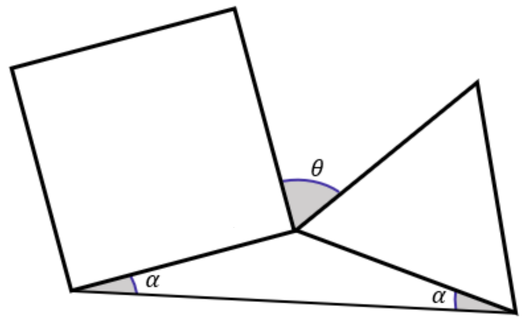
2. (CESPE/FUB/2018) A figura a seguir mostra uma mesa em que o tampo é um hexágono regular cujo lado mede 80 cm.

Julgue o item que se segue, a respeito da geometria do tampo dessa mesa.

A distância entre dois lados paralelos do tampo da mesa é superior a 1,3 m.

FGV

3. (FGV/BANESTES/2018) A figura abaixo mostra um triângulo isósceles, um quadrado e um triângulo equilátero. Sabe-se que os ângulos assinalados com a letra α medem 25°.



O ângulo assinalado com a letra θ mede:

A) 65°
B) 70°
C) 75°
D) 80°
E) 85°

4. (FGV/PREF. SALVADOR/2017) Um pentágono regular e um quadrado têm o mesmo perímetro. O lado do pentágono mede 6,0 cm. O lado do quadrado mede

A) 5,0 cm.
B) 6,0 cm.
C) 6,5 cm.
D) 7,0 cm.
E) 7,5 cm.

Outras Bancas

5. (AOCP/SED-MS/2022) Considere os seguintes polígonos, todos de mesmo perímetro: triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular. Sendo A_1 a área do triângulo equilátero, A_2 a área do quadrado e A_3 a área do hexágono, o valor de $\frac{A_1+A_3}{A_2}$ é:

A) $\frac{5\sqrt{3}}{9}$

B) $\frac{5\sqrt{2}}{9}$

C) $\frac{10\sqrt{3}}{9}$

D) $\frac{10\sqrt{2}}{9}$

E) 10

6. (RBO/ISS-BH/2022) A partir do conceito: "Dado um polígono convexo qualquer, diagonal é o segmento que une dois vértices não consecutivos". Assim, um triângulo não possui diagonais, pois, como só possui três vértices, não é possível unir dois vértices não consecutivos, o quadrado possui duas diagonais e partir de um dos vértices, encontramos, apenas um outro vértice não consecutivo, enquanto, que no pentágono convexo temos 5 diagonais, e nesse polígono encontramos a partir de um vértice, dois outros vértices não consecutivos. A partir dessas informações, monta-se a tabela a seguir.

Nome do Polígono	Número de lados	Número de diagonais	A partir de um dos vértices, o número de vértices não consecutivos
Triângulo	3	0	0
Quadrado	4	2	1
Pentágono	5	5	2
Hexágono	6	9	3
Heptágono	7	14	4

Verifica-se que existe uma certa regularidade entre o número de lados, número de diagonais e o número de vértices não consecutivos contados a partir de um dos vértices. Então, o número de diagonais de um polígono convexo que possui 102 lados é igual a

A) 4.852.

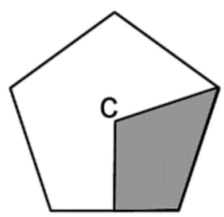
B) 4.947.

C) 4.998.

D) 5.049.

E) 5.100.

7. (UNIRV/PREF. RIO VERDE/2022) A figura representa um pentágono regular com centro no ponto C. A porcentagem sombreada no interior desse pentágono é



A) 20%

B) 25%

C) 30%

D) 40%

GABARITO

1. LETRA A
2. CERTO
3. LETRA D
4. LETRA E
5. LETRA C
6. LETRA D
7. LETRA C

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:

PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.