

· PROGRESSÃO HARMÔNICA ·

DEFINIÇÃO

$a_1, a_2, \dots, a_n$ é uma P.H. se e somente se

$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ for uma P.A., com $a_i \neq 0 \forall i$.

EXEMPLO

3, 5, 7, 9, 13 $\rightarrow$ P.A.

$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{13}$ $\rightarrow$ P.H.



PROPRIEDADE

OBS.: MÉDIAS : $x_1, x_2, \dots, x_n$

MÉDIA ARITMÉTICA : $MA = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

MÉDIA GEOMÉTRICA : $MG = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$

MÉDIA HARMÔNICA : $M_H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$



- Dados 3 termos de uma P.H., o termo central será a média harmônica dos outros dois.

Prova: Se a, b, c é uma P.H. então

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \text{ é uma P.A. :}$$

↪ P.A. : $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}{2} = \frac{1}{b}$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b} \therefore b \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) = 2$$

$$b = \frac{2}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right)} \quad \square$$



EXEMPLO 01

Qual é o oitavo termo da P.H. $\frac{5}{5}, \frac{5}{7}, \frac{5}{9}$?

R :

(P.A.): $1 ; \overset{+2/5}{\curvearrowright} \frac{7}{5} ; \overset{+2/5}{\curvearrowright} \frac{9}{5} \dots$

$\rightarrow a_1 = 1$ e $r = \frac{2}{5}$

$\rightarrow a_n = a_1 + (n-1) \cdot r = 1 + (n-1) \cdot \frac{2}{5}$

$a_8 = 1 + (8-1) \cdot \frac{2}{5} = 1 + \frac{14}{5} = \underline{\underline{\frac{19}{5}}}$

Para a P.H. : $a_{8_{PH}} = \frac{5}{19}$



EXEMPLO 02

Insira 4 meios harmônicos entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{13}$.

R:

$$\text{P.H.} : \frac{1}{3}, \square, \square, \square, \square, \frac{1}{13}$$

$$\text{P.A.} : \boxed{3}, a_2, a_3, a_4, a_5, \boxed{13}$$

$a_1 \qquad \qquad \qquad a_6$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \quad \therefore \quad a_6 = 3 + (6-1) \cdot r = 13$$

$$5r = 10 \quad \therefore \quad r = 2$$

→ P.A.: 3, 5, 7, 9, 11, 13

invertendo

$$\text{P.H.} : \frac{1}{3}, \boxed{\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}}, \frac{1}{13}$$

