MODA

Nessa aula, aprenderemos outra importante medida descritiva: **a moda estatística**. **A moda é uma medida de posição e de tendência central que descreve o valor mais frequente de um conjunto de observações, ou seja, o valor de maior ocorrência dentre os valores observados.**

Na estatística, o termo moda foi introduzido por Karl Pearson, em 1895, influenciado, muito provavelmente, pela forma com que as pessoas se referiam àquilo que estava em destaque, em evidência, com o significado de coisa mais frequente.

A definição evidencia que **um conjunto de valores pode possuir uma ou mais modas,** ou **não possuir nenhuma.** Assim, dizemos que um conjunto é **unimodal, bimodal, trimodal** ou **plurimodal**, de acordo com o número de modas que apresenta. **A ausência de uma moda caracteriza o conjunto como amodal**.

Em geral, a moda é utilizada em distribuições nas quais o valor mais frequente é o mais importante da distribuição. **A moda também é útil para a determinação da medida de posição de variáveis qualitativas nominais, ou seja, variáveis não-numéricas que não podem ser ordenadas**.

O cálculo da moda ocorre de diferentes formas, a depender de como os dados estão organizados. Desse modo, aprenderemos a calcular a moda para as seguintes situações:

- dados não-agrupados;
- dados agrupados sem intervalos de classe (ou por valores); e
- dados agrupados em classes.

HORA DE PRATICAR!

(CESPE/IPHAN/2018) Define-se estatística descritiva como a etapa inicial da análise utilizada para descrever e resumir dados. Em relação às medidas descritivas, julgue o item a seguir.

A moda é o valor que apresenta a maior frequência da variável entre os valores observados.

Comentários:

A moda pode ser definida como o valor (ou os valores) que mais se repete(m) em uma amostra ou conjunto. Ou seja, que aparece(m) com maior frequência. Uma amostra pode apresentar mais de uma moda, sendo classificada como plurimodal; ou apenas uma moda, recebendo a denominação de unimodal; ou ainda amodal, quando todos os valores das variáveis em estudo apresentarem uma mesma frequência.

Gabarito: Certo.

(FCC/Pref. Macapá/2018) A medida de tendência central que representa o valor com maior frequência na distribuição normal de uma amostra probabilística é a

a) média amostral.

b) variância.

c) amplitude total.

d) mediana.

e) moda amostral.

Comentários:

Vamos analisar cada uma das alternativas:

- Alternativa A: **Errada**. A média é determinada pela soma dos valores de um determinado conjunto de medidas, dividindo-se o resultado dessa soma pela quantidade dos valores que foram somados;
- Alternativa B: **Errada**. A variância é uma medida de dispersão que mostra o quão distantes os valores estão da média. É definida como a média dos quadrados dos desvios de uma amostra com relação a sua própria média;
- Alternativa C: **Errada**. A amplitude total é a diferença entre o maior e o menor valor observado em uma amostra;
- Alternativa D: **Errada**. A mediana é o valor que divide uma amostra ou uma distribuição de probabilidade em duas partes iguais. Em termos mais simples, a mediana é o valor situado no meio de um conjunto de dados. Se houver um número par de observações, a mediana será definida como a média dos dois valores do meio;
- Alternativa E: **Correta**. De fato, a moda é o valor que aparece com maior frequência no conjunto de dados.

Gabarito: E.

Moda para dados não-agrupados.

Para determinarmos **a moda de um conjunto ordenado de valores não agrupados em classes, basta identificarmos o elemento (ou elementos) de maior frequência no conjunto**. Diferentemente das outras medidas de tendência central, **a moda nem sempre existirá em um conjunto de valores**. Além disso, em certas situações, poderemos ter uma, duas, ou várias modas no mesmo conjunto.

Com relação ao número de modas, o conjunto de pode ser classificado como:

- **amodal**: **quando todos os elementos apresentam a mesma frequência**, isto é, **quando todos aparecem o mesmo número de vezes**:

$$\{1, 2, 3, 5, 6, 8, 10\}$$

- **unimodal**: **quando a frequência de um elemento é maior que as frequências dos demais elementos**. **Isto é, quando o conjunto tem uma única moda.** No conjunto a seguir, o elemento **2** repete-se **cinco** vezes, enquanto o elemento **3** aparece **duas** vezes. Logo, $M_o = 2$.

$$\left\{\underbrace{2, 2, 2, 2, 2}_{5\ elementos}, \underbrace{3, 3}_{2\ elementos}\right\}$$

- **bimodal**: **quando as frequências de dois elementos são iguais e maiores que as frequências dos demais elementos**. **Isto é, quando o conjunto tem um duas modas.** No conjunto a seguir, os elementos **2** e **3** repetem-se **cinco** vezes, enquanto o elemento **4** aparece **duas** vezes. Logo, $M_o = 2$ e $M_o = 3$.

$$\left\{\underbrace{2, 2, 2, 2, 2}_{5\ elementos}, \underbrace{3, 3, 3, 3, 3}_{5\ elementos}, \underbrace{4, 4}_{2\ elementos}\right\}$$

- **multimodal ou plurimodal**: **quando as frequências de três ou mais elementos são iguais e maiores que as frequências dos demais elementos.** **Isto é, quando o conjunto tem três ou mais modas.** No conjunto a seguir, os elementos **2**, **3** e **4** repetem-se **cinco** vezes, enquanto o elemento **5** aparece **duas** vezes. Logo, $M_o = 2$, $M_o = 3$ e $M_o = 4$.

$$\left\{\underbrace{2, 2, 2, 2, 2}_{5\ elementos}, \underbrace{3, 3, 3, 3, 3}_{5\ elementos}, \underbrace{4, 4, 4, 4, 4}_{5\ elementos}, \underbrace{5, 5}_{2\ elementos}\right\}$$

(CESPE/PF/2018)

	DIA				
	1	2	3	4	5
X (quantidade diária de drogas apreendidas, em kg)	10	22	18	22	28

Tendo em vista que, diariamente, a Polícia Federal apreende uma quantidade X, em kg, de drogas em determinado aeroporto do Brasil, e considerando os dados hipotéticos da tabela precedente, que apresenta os valores observados da variável X em uma amostra aleatória de 5 dias de apreensões no citado aeroporto, julgue o item.

A moda da distribuição dos valores X registrados na amostra foi igual a 22 kg.

Comentários:

A moda é o valor que mais se repete na amostra, isto é, o valor de maior frequência. A tabela mostra que nos dias 2 e 4 foram apreendidos 22kg de drogas. Logo, de acordo com a tabela, o valor 22 tem a maior frequência da distribuição de valores X (2), representando a moda da amostra.

Gabarito: Certo.

25. (CESPE/ANATEL/2004)

MESES	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV
N	100	70	70	60	50	100	50	50	30	20

A tabela acima mostra os números mensais de reclamações (N) feitas por usuários de telefonia fixa, registradas em uma central de atendimento, entre os meses de fevereiro a novembro de 2003. Considerando esses dados, julgue o item que se segue.

A moda dos números mensais de reclamações registradas é igual a 100.

Comentários:

Como vimos, a moda é representada pelo valor que mais se repete em uma amostra, isto é, pelo valor de maior frequência. O valor que aparece mais vezes na tabela é 50, nos meses de junho, agosto e setembro. Portanto, a moda do conjunto é igual a 50.

Gabarito: Errado.

Moda para dados agrupados sem intervalos de classe

Quando **os dados estão agrupados por valores**, isto é, quando não agrupados em intervalos de classe, o cálculo da moda também é realizado de maneira simples e rápida. **Para tanto, devemos identificar o valor que apresenta a maior frequência absoluta.** Vejamos um exemplo.

EXEMPLIFICANDO

Considere que o Estratégia Concursos tenha realizado um simulado, contendo 50 questões, com 100 estudantes da área fiscal, obtendo a seguinte distribuição de acertos:

Nº de Acertos (X_i)	Frequência Absoluta (f_i)
45	8
46	12
47	28
48	32
49	17
50	3

Para calcular a moda dessa distribuição, devemos identificar o maior valor existente na coluna de frequências.

Nº de Acertos (X_i)	Frequência Absoluta (f_i)
45	8
46	12
47	28
48	**32**
49	17
50	3

Como podemos observar, o maior valor é 32. Logo, a moda da distribuição é o resultado de 48 questões corretas, pois corresponde a maior frequência. Portanto, podemos concluir que a maior concentração dos participantes errou apenas duas questões:

$$M_o = 48$$

HORA DE PRATICAR!

(CESPE/Pref. São Cristóvão/2018) A tabela seguinte mostra a distribuição das idades dos 30 alunos da turma A do quinto ano de uma escola de ensino fundamental.

Idade (em anos)	9	10	11	12	13	14
Quantidade de estudantes	6	22	0	1	0	1

A partir dessa tabela, julgue o item.

A moda dessa distribuição é igual a 11 anos.

Comentários:

A moda de uma tabela de frequências é representada pelo valor com maior número de ocorrências. A tabela mostra que a maior parte dos alunos (22) possui 10 anos de idade. Portanto, esse é o valor da moda da distribuição.

Gabarito: Errado.

(CESPE/IFF/2018) A distribuição das notas dos 20 alunos de uma sala de aula na prova de matemática está mostrada na tabela a seguir.

Nota do aluno	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
Número de alunos	3	3	1	7	6

Nessa situação, a moda dessas notas é igual a

a) 6,0.

b) 6,5.

c) 7,0.

d) 7,5.

e) 8,0.

Comentários:

A moda é representada pelo elemento de maior frequência em uma distribuição agrupada por valor. A tabela mostra que a maior parte dos alunos alcançou a nota 8,0 na prova de matemática. Logo, esse será o valor da moda da distribuição.

Gabarito: E.

(CESPE/TCE-PA/2016)

Número diário de denúncias registradas (X)	Frequência Relativa
0	0,3
1	0,1
2	0,2
3	0,1
4	0,3
Total	**1,0**

A tabela precedente apresenta a distribuição de frequências relativas da variável X, que representa o número diário de denúncias registradas na ouvidoria de determinada instituição pública. A partir das informações dessa tabela, julgue o item seguinte.

A moda da variável X é igual a 2.

Comentários:

A moda é indicada pelo(s) elemento(s) que mais se repete(m) em uma distribuição, isto é, os valores de maiores frequências. A tabela mostra que os valores 0 e 4 têm frequência relativa 0,3. Portanto, temos um conjunto bimodal (duas modas), representadas pelos valores 0 e 4.

Gabarito: Errado.

MODA PARA DADOS AGRUPADOS EM CLASSES

Quando os **dados** estão **agrupados em classes de mesma amplitude**, **a moda será o valor dominante da classe que apresenta a maior frequência**, que é denominada **classe modal**. A seguir, veremos os principais métodos empregados no cálculo da moda de distribuições agrupadas por intervalos de classe: moda bruta, moda de Pearson, moda de Czuber e moda de King.

Moda Bruta

A maneira mais simples de calcular a moda é tomar o **ponto médio da classe modal**. Esse valor, ao qual denominamos de **moda bruta**, é determinado pela seguinte fórmula:

$$\boxed{\boldsymbol{M_O = \frac{l_{inf} + l_{sup}}{2}}}$$

em que l_{inf} é o limite inferior da classe modal; e l_{sup} é o limite superior da classe modal.

EXEMPLIFICANDO

Considere a distribuição de frequências apresentada a seguir, que descreve as faixas etárias de um grupo de 220 alunos do Estratégia Concursos:

Faixa etária (X_i)	Frequência (f_i)
$\mathbf{10 \vdash 20}$	30
$\mathbf{20 \vdash 30}$	50
$\mathbf{30 \vdash 40}$	70
$\mathbf{40 \vdash 50}$	60
$\mathbf{50 \vdash 60}$	10
Total	**220**

Como todas as classes possuem a mesma amplitude, a classe modal é aquela com maior frequência simples. No caso, trata-se da terceira classe:

$$30 \vdash 40\ (frequência\ 70).$$

Temos, então, as seguintes informações:

- limite inferior da classe modal: $l_{inf} = 30$; e
- limite superior da classe modal: $l_{sup} = 40$.

Aplicando a fórmula da moda bruta, temos:

$$M_O = \frac{l_{inf} + l_{sup}}{2}$$

$$M_O = \frac{30 + 40}{2} = 35$$

FIQUE ATENTO!

Esse assunto **raramente é explorado** em provas de concursos públicos.

HORA DE PRATICAR!

(IBFC/INEP/2012) Os “pesos" de vinte atletas estão distribuídos de acordo com a tabela abaixo:

Pesos (kg)	Frequência (f_i)
$55 \vdash 65$	10
$65 \vdash 75$	4
$75 \vdash 85$	4
$85 \vdash 95$	2
Total	**20**

Considerando a distribuição acima, assinale a alternativa que apresenta respectivamente os valores da média e da moda bruta:

a) 75kg e 65kg

b) 69kg e 55kg

c) 80kg e 55kg

d) 69kg e 60kg

e) 75kg e 60kg

Comentários:

A classe modal é a primeira, pois possui a maior frequência absoluta (10). A moda bruta corresponde ao ponto médio da primeira classe.

$$M_O = \frac{55 + 65}{2} = 60$$

O enunciado também pediu para calcularmos a média. Para tanto, precisamos dos pontos médios das classes. Além disso, devemos multiplicar cada ponto médio pela sua respectiva frequência, e somar todos os resultados:

Pesos	Frequência (f_i)	Pontos médios (PM_i)	$PM_i \times f_i$
$55 \vdash 65$	10	60	$60 \times 10 = 600$
$65 \vdash 75$	4	70	$70 \times 4 = 280$
$75 \vdash 85$	4	80	$80 \times 4 = 320$
$85 \vdash 95$	2	90	$90 \times 2 = 180$
Total	**20**		**1.380**

Agora, vamos encontrar a média:

$$\bar{x} = \frac{\sum PM_i \times f_i}{\sum f_i}$$

$$\bar{x} = \frac{1.380}{20} = 69$$

Portanto, os valores da média e da moda bruta são, respectivamente, 69 e 60.

Gabarito: D.

Moda de Pearson

O matemático Karl Pearson observou a existência de uma **relação empírica** que permite **calcular a moda quando são conhecidas a média ($\overline{x}$) e a mediana (M_d)** de uma distribuição **moderadamente assimétrica**. Quando essas condições são satisfeitas, podemos aplicar a relação denominada de **moda de Pearson**:

$$\boxed{M_o = 3 \times M_d - 2 \times \overline{x}}$$

em que $\bar{x}$ é a média M_d é a mediana da distribuição.

EXEMPLIFICANDO

Considere a distribuição de frequências apresentada a seguir, que descreve as faixas etárias de um grupo de 220 alunos do Estratégia Concursos:

Faixa etária (X_i)	Frequência (f_i)
$10 \vdash 20$	30
$20 \vdash 30$	50
$30 \vdash 40$	70
$40 \vdash 50$	60
$50 \vdash 60$	10
Total	**220**

Faremos uma nova tabela, incluindo as informações de pontos médios e frequência acumulada.

Faixa etária (X_i)	Pontos médios (PM_i)	Frequência (f_i)	Frequência acumulada (f_{ac})	$PM_i \times f_i$
$10 \vdash 20$	15	30	30	$15 \times 30 = 450$
$20 \vdash 30$	25	50	80	$25 \times 50 = 1.250$
$30 \vdash 40$	35	70	150	$35 \times 70 = 2.450$
$40 \vdash 50$	45	60	210	$45 \times 60 = 2.700$
$50 \vdash 60$	55	10	220	$55 \times 10 = 550$
Total		**220**		**7.400**

Depois de construir a tabela, facilmente encontramos a média:

$$\bar{x} = \frac{\sum PM_i \times f_i}{\sum f_i}$$

$$\bar{x} = \frac{7.400}{220} \cong 33{,}64$$

Vamos ao cálculo da mediana. Já sabemos que a mediana divide o conjunto ao meio e ocupa a posição central do conjunto. Portanto, a mediana ocupa a posição 110 e está no intervalo que vai de 30 a 40, pois é o primeiro cuja frequência acumulada supera o valor de 110.

Temos, então, as seguintes informações:

- limite inferior da classe mediana: $l_{inf} = 30$;
- amplitude da classe mediana: $h = 40 - 30 = 10$;
- frequência acumulada anterior à classe mediana: $f_{ac_{ant}} = 80$;
- frequência absoluta da classe mediana: $f_i = 70$; e
- somatório das frequências absolutas: $\sum f_i = 220$.

Aplicando a fórmula da mediana, temos:

$$M_d = l_{inf} + \left[\frac{\left(\frac{\sum f_i}{2}\right) - f_{ac_{ant}}}{f_i}\right] \times h$$

$$M_d = 30 + \left[\frac{\left(\frac{220}{2}\right) - 80}{70}\right] \times (40 - 30)$$

$$M_d = 30 + \left(\frac{110 - 80}{70}\right) \times 10$$

$$M_d = 30 + \left(\frac{30}{70}\right) \times 10$$

$$M_d = 30 + \left(\frac{30}{7}\right) \cong 34{,}28$$

Agora que conhecemos a média e a mediana, podemos aplicar a fórmula de Pearson:

$$M_o = 3 \times M_d - 2 \times \bar{x}.$$

$$M_o = 3 \times 34{,}28 - 2 \times 33{,}64 = 35{,}56$$

FIQUE ATENTO!

Esse assunto é **pouco explorado** em provas de concursos públicos.

A mediana ocupa a posição $\frac{\sum f_i}{2} = 100$. A classe mediana corresponde ao primeiro intervalo cuja frequência acumulada supera esse valor, logo, a **classe mediana** está no intervalo que vai de 8 a 10.

Sabendo disso, podemos encontrar a mediana por meio da fórmula:

$$M_d = l_{inf} + \left[\frac{\left(\frac{\sum f_i}{2}\right) - f_{ac_{ant}}}{f_i}\right] \times h$$

- O limite inferior da classe é $l_{inf} = 8$.
- A frequência acumulada da classe anterior é $f_{ac_{ant}} = 80$.
- A frequência da própria classe é $f_i = 80$.
- A amplitude da classe é $h = 10 - 8 = 2$.

HORA DE PRATICAR!

(FCC/Pref. Manaus/2019) Conforme um levantamento realizado em um órgão público e analisando a distribuição dos salários, em R$ 1.000,00, de todos os seus funcionários, obteve-se a tabela de frequências absolutas abaixo, com k sendo um número inteiro positivo.

Salários (s)	Número de funcionários
$2 < s \leq 4$	$2k$
$4 < s \leq 6$	20
$6 < s \leq 8$	50
$8 < s \leq 10$	80
$10 < s \leq 12$	$8k$
Total	$\mathbf{40k}$

Considere que a média aritmética (Me) foi calculada considerando que todos os valores incluídos num certo intervalo de classe são coincidentes com o ponto médio deste intervalo, que a mediana (Md) foi calculada pelo método da interpolação linear e que a moda (Mo) foi obtida pela relação de Pearson, ou seja, Mo = 3xMd – 2xMe. O valor encontrado para Mo, em R$ 1.000,00, foi igual a

a) 1,76 k.

b) 1,70 k.

c) 1,64 k.

d) 1,60 k.

e) 1,82 k.

Comentários:

Vamos iniciar encontrando o número total de funcionários, calculando o valor de k:

$$2k + 20 + 50 + 80 + 8k = 40k$$

$$150 = 40k - 8k - 2k$$

$$30k = 150$$

$$k = 5$$

Substituindo k na tabela temos um total de 200 funcionários. Faremos uma nova tabela, incluindo as informações de pontos médios e frequência acumulada.

Salários	Pontos médios (PM_i)	Nº de funcionários (f_i)	Frequência acumulada (f_{ac})	$PM_i \times f_i$
$2 < s \leq 4$	3	10	10	30
$4 < s \leq 6$	5	20	30	100
$6 < s \leq 8$	7	50	80	350
$8 < s \leq 10$	9	80	160	720
$10 < s \leq 12$	11	40	200	440
Total		**200**		**1640**

Agora, podemos calcular a média:

$$\bar{x} = \frac{1640}{200} = 8{,}2$$

A mediana se encontra na posição:

$$\frac{\sum f_i}{2} = \frac{200}{2} = 100$$

A classe mediana corresponde ao primeiro intervalo cuja frequência acumulada supera esse valor, logo, a classe mediana está no intervalo que vai de 8 a 10. Portanto, os seguintes dados serão empregados na fórmula do valor mediano:

- limite inferior da classe é $l_{inf} = 8$;
- frequência acumulada da classe anterior é $f_{ac_{ant}} = 80$;
- frequência da própria classe é $f_i = 80$;
- amplitude da classe é $h = 10 - 8 = 2$.

Para encontrar a mediana, utilizaremos a fórmula:

$$M_d = l_{inf} + \left[\frac{\left(\frac{\sum f_i}{2}\right) - f_{ac_{ant}}}{f_i}\right] \times h$$

$$M_d = 8 + \left[\frac{\left(\frac{200}{2}\right) - 80}{80}\right] \times (10 - 8)$$

$$M_d = 8 + \left[\frac{100 - 80}{80}\right] \times (10 - 8)$$

$$M_d = 8 + \left[\frac{20}{80}\right] \times (2)$$

$$M_d = 8 + 0{,}5$$

$$M_d = 8{,}5$$

Calculando a moda:

$$M_o = 3 \times Md - 2 \times Me$$

$$M_o = 3 \times 8{,}5 - 2 \times 8{,}2$$

$$M_o = 9{,}1$$

A resposta é dada é função de k, então dividimos esse valor por 5:

$$\frac{9{,}1}{5} = 1{,}82$$

Logo, a resposta é $1{,}82k$

Gabarito: E.

(FCC/SEFAZ-BA/2019) Considere a distribuição dos salários, em R$ 1.000,00, dos funcionários lotados em uma repartição pública, representada abaixo pela tabela de frequências relativas acumuladas, sendo k a frequência relativa acumulada do 4º intervalo de classe.

Classes de salários	Frequência relativa acumulada (%)
$\mathbf{1} \dashv \mathbf{3}$	5
$\mathbf{3} \dashv \mathbf{5}$	15
$\mathbf{5} \dashv \mathbf{7}$	40
$\mathbf{7} \dashv \mathbf{9}$	k
$\mathbf{9} \dashv \mathbf{11}$	100

Sabe-se que a média aritmética (M_e) foi calculada considerando que todos os valores incluídos num certo intervalo de classe são coincidentes com o ponto médio desse intervalo, que a mediana (M_d) foi calculada pelo método da interpolação linear e que a moda (M_o) foi obtida pela relação de Pearson, ou seja, $M_o = 3 \times M_d - 2 \times M_e$. Dado que $M_e = R\$\ 7.200,00$, então M_o é igual a

a) R$ 7.350,00.

b) R$ 8.500,00.

c) R$ 7.700,00.

d) R$ 8.100,00.

e) R$ 7.400,00.

Comentários:

Para iniciar a resolução da questão, precisamos saber qual o valor de k que representa a frequência acumulada da classe 7 a 9. Para isso, vamos calcular a frequência relativa de cada classe, e montar uma tabela, já calculando os pontos médios das classes e as devidas frequências relativas:

Classes de salários	Pontos médios (PM_i)	Frequência relativa acumulada (%)	Frequência simples (f_i)	$PM_i \times f_i$
$1 \dashv 3$	2	5	$= 5$	10
$3 \dashv 5$	4	15	$15 - 5 = 10$	40
$5 \dashv 7$	6	40	$40 - 15 = 25$	150
$7 \dashv 9$	8	K	$= k - 40$	$8k - 320$
$9 \dashv 11$	10	100	$= 100 - k$	$1000 - 10k$
Total			$\mathbf{100}$	$\mathbf{880 - 2k}$

De acordo com o enunciado, a média vale 7.200. Logo, podemos calcular o valor de k:

$$7{,}2 = \frac{880 - 2k}{100}$$

$$7{,}2 = 880 - 2k$$
$$2k = 880 - 720$$
$$k = \frac{160}{2}$$
$$k = 80$$

Reescrevendo a tabela anterior:

Classes de salários	Pontos médios (PM_i)	Frequência relativa acumulada (%)	Frequência simples (f_i)	$PM_i \times f_i$
1 ⊣ 3	2	5	5	10
3 ⊣ 5	4	15	10	40
5 ⊣ 7	6	40	25	150
7 ⊣ 9	8	80	40	320
9 ⊣ 11	10	100	20	200
Total			**100**	**720**

Já temos as frequências acumuladas de todas as classes, então podemos determinar a mediana. Se a mediana divide o conjunto ao meio e ocupa a posição central do conjunto, então a mediana ocupa a posição 50 e a classe mediana corresponde ao intervalo de 7 a 9.

Portanto, os seguintes dados serão empregados na fórmula do valor mediano:

- limite inferior da classe é $l_{inf} = 7$;
- frequência acumulada da classe anterior é $f_{ac_{ant}} = 40$;
- frequência da própria classe é $f_i = 40$;
- amplitude da classe é $h = 9 - 7 = 2$.

Usando a fórmula da mediana, temos:

$$M_d = l_{inf} + \left[\frac{\left(\frac{\sum f_i}{2}\right) - f_{ac_{ant}}}{f_i}\right] \times h$$

$$M_d = 7 + \left[\frac{\left(\frac{100}{2}\right) - 40}{40}\right] \times (9 - 7)$$

$$M_d = 7 + \left[\frac{50 - 40}{40}\right] \times 2$$

$$M_d = 7 + \left[\frac{10}{40}\right] \times 2$$

$$M_d = 7 + 0,5$$

$$M_d = 7,50$$

Aplicando à fórmula dada no enunciado, temos:

$$M_o = 3 \times M_d - 2 \times \bar{x}$$

$$M_o = 3 \times 7,5 - 2 \times 7,2$$

$$M_o = 8,1$$

$$M_o = 8.100$$

Gabarito: D.

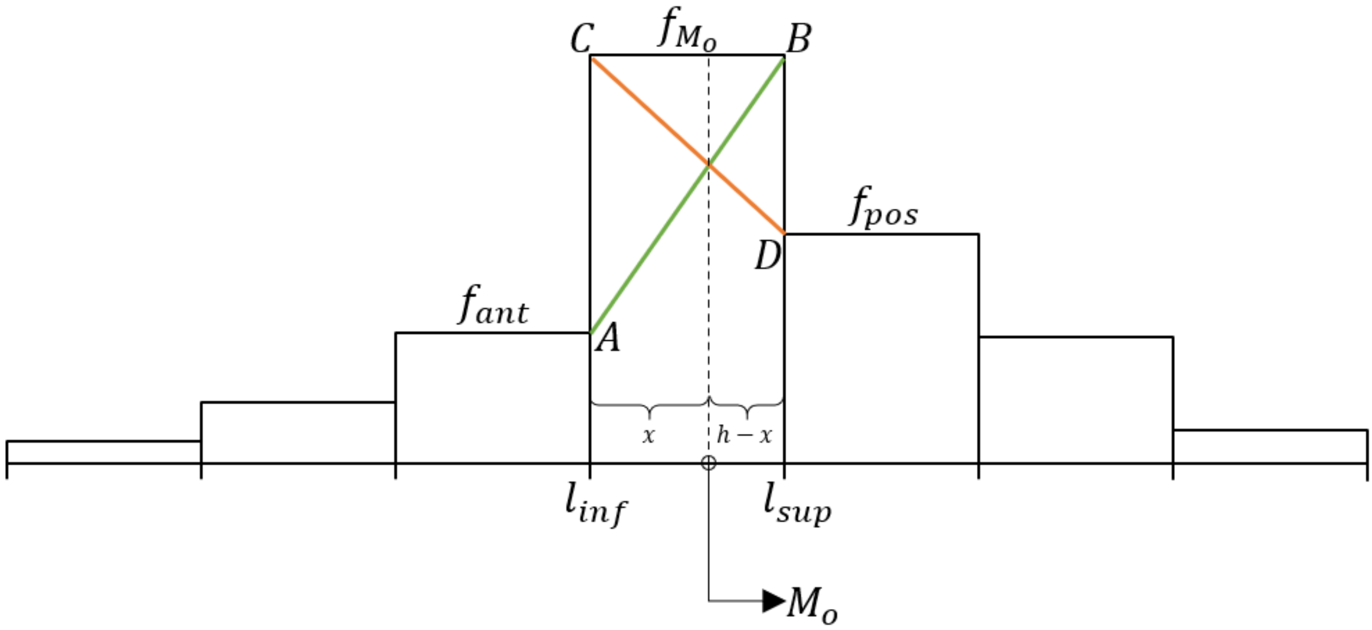
Moda de Czuber

O matemático **Emanuel Czuber elaborou um processo gráfico capaz de aproximar o cálculo da moda**. Para determinar graficamente a moda, **Czuber partiu de um histograma, utilizando os três retângulos correspondentes à classe modal e às classes adjacentes (anterior e posterior)**.

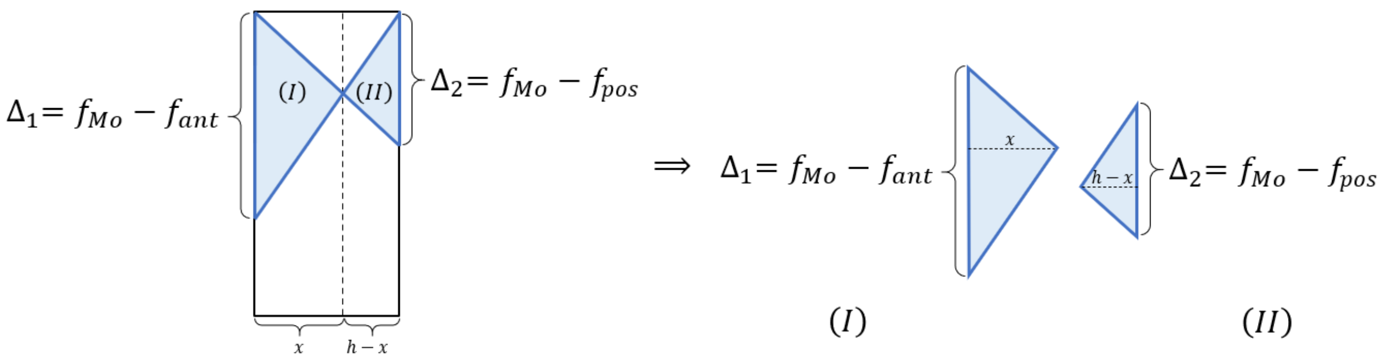
A moda é o valor do limite inferior (l_{inf}) da classe modal acrescido de um valor x, isto é,

$$\boxed{\boldsymbol{M_o = l_{inf} + x}}$$

Nesse caso, o valor de x é determinado pela intersecção dos segmentos $\overline{AB}$ (que une o **limite superior da classe que antecede** a classe modal **ao limite superior da classe modal**) e $\overline{CD}$ (que une o **limite inferior da classe modal** ao **inferior da classe posterior**).



Reparem nos triângulos (I) e (II), indicados na figura a seguir:



Agora, usando as relações de semelhança entre triângulos e de proporcionalidade, sabemos que:

$$\frac{\Delta_1}{x} = \frac{\Delta_2}{h - x}$$

Fazendo a multiplicação cruzada das frações, temos que:

$$\Delta_1 \times (h - x) = \Delta_2 \times x$$

$$\Delta_1 \times h - \Delta_1 \times x = \Delta_2 \times x$$

$$\Delta_1 \times h = \Delta_2 \times x + \Delta_1 \times x$$

$$\Delta_1 \times h = (\Delta_1 + \Delta_2) \times x$$

Portanto, descobrimos o valor de x:

$$x = \left[\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right] \times h$$

Como a moda é igual ao limite inferior da classe modal adicionado de x, temos que:

$$M_o = l_{inf} + x$$

Logo,

$$\boxed{\boldsymbol{M_o = l_{inf} + \left[\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right] \times h}}$$

Essa fórmula também costuma ser escrita da seguinte forma:

$$\boxed{\boldsymbol{M_o = l_i + \left[\frac{f_{Mo} - f_{ant}}{(f_{Mo} - f_{ant}) + (f_{Mo} - f_{post})}\right] \times h}}$$

Outros autores preferem o seguinte formato:

$$\boxed{\boldsymbol{M_o = l_i + \left[\frac{f_{Mo} - f_{ant}}{2 \times f_{Mo} - (f_{ant} + f_{post})}\right] \times h}}$$

FIQUE ATENTO!

Quando a **classe modal coincidir** com a **primeira ou** com a **última classe**, **devemos considerar que**:
$f_{ant} = 0\ (se\ for\ a\ primeira\ classe)$;
$f_{post} = 0\ (se\ for\ a\ \text{última}\ classe)$.

PRESTE MAIS ATENÇÃO!

Segundo a hipótese de Czuber, **a moda divide o intervalo da classe modal em distâncias proporcionais às diferenças entre a frequência da classe modal e as frequências das classes adjacentes**.

EXEMPLIFICANDO

Considere a distribuição de frequências apresentada a seguir, que descreve as faixas etárias de um grupo de 220 alunos do Estratégia Concursos:

Faixa etária (X_i)	Frequência (f_i)
$\mathbf{10 \vdash 20}$	30
$\mathbf{20 \vdash 30}$	50
$\mathbf{30 \vdash 40}$	70
$\mathbf{40 \vdash 50}$	60
$\mathbf{50 \vdash 60}$	10
Total	**220**

A classe modal é aquela com maior frequência simples. No caso, trata-se da terceira classe:

$$30 \vdash 40\ (\text{frequência}\ 70).$$

Temos, então, as seguintes informações:

- limite inferior da classe modal: $l_{inf} = 30$;
- amplitude da classe modal: $h = 40 - 30 = 10$;
- frequência da classe modal: $f_{Mo} = 70$;
- frequência da classe anterior à classe modal: $f_{ant} = 50$; e
- frequência da classe posterior à classe modal: $f_{post} = 60$.

Aplicando a fórmula de Czuber, temos:

$$M_o = l_i + \left[\frac{f_{Mo} - f_{ant}}{(f_{Mo} - f_{ant}) + (f_{Mo} - f_{post})}\right] \times h$$

$$M_o = 30 + \left[\frac{70 - 50}{(70 - 50) + (70 - 60)}\right] \times (40 - 30)$$

$$M_o = 30 + \left(\frac{20}{20 + 10}\right) \times 10$$

$$M_o = 30 + \left(\frac{20}{30}\right) \times 10 \cong 36{,}66$$

HORA DE PRATICAR!

(IBFC/EBSERH/2020) A tabela apresenta a distribuição de frequência da variável "tamanho, em metros, do novelo de lã a ser vendido numa loja".

Classes	0⊢ 2,5	2,5⊢ 5,0	5,0⊢ 7,5	7,5⊢ 10,0	10,0⊢ 12,5	12,5⊢ 15
F_i	2	3	4	8	7	5

De acordo com a tabela, a moda da distribuição, pelo método de Czuber, é igual a:

a) 9,5

b) 8,3

c) 8

d) 9,75

e) 9,25

Comentários:

A classe modal é a classe com maior frequência absoluta (7,5 a 10,0).

A moda de Czuber é dada por:

$$M_o = l_i + h \times \frac{(f_{mo} - f_{ant})}{2f_{mo} - (f_{ant} + f_{post})}$$

Em que:

- $l_i =$ limite inferior da classe modal;
- $h =$ amplitude da classe modal;
- $f_{mo} =$ frequência da classe modal;
- $f_{ant} =$ frequência da classe anterior à classe modal;
- $f_{post} =$ frequência da classe posterior à classe modal.

Aplicando a fórmula, temos:

$$M_o = 7{,}5 + 2{,}5 \times \frac{(8-4)}{2 \times 8 - (4+7)}$$

$$M_o = 7{,}5 + 2{,}5 \times \frac{4}{16 - 11}$$

$$M_o = 7{,}5 + 2{,}5 \times \frac{4}{5}$$

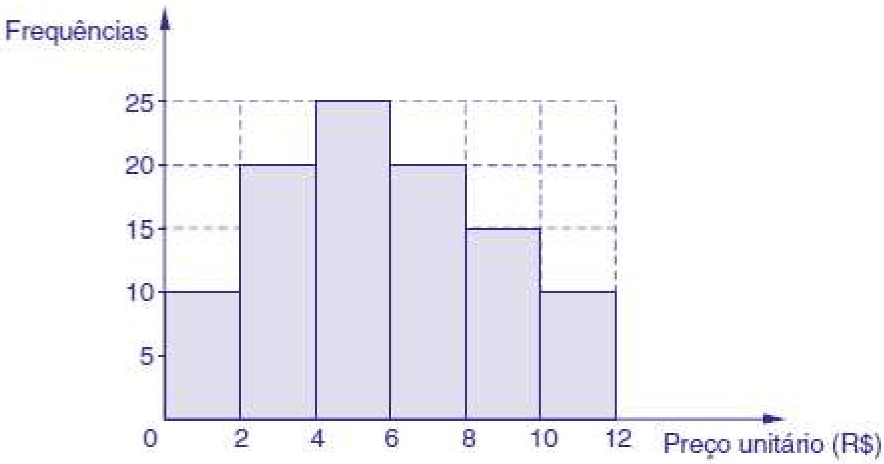
$$M_o = 7{,}5 + 2{,}5 \times 0{,}8$$

$$M_o = 7{,}5 + 2$$

$$M_o = 9{,}5$$

Gabarito: A.

(FCC/SEPLA DR SP/2019) Instruções: Para responder à questão utilize as informações do histograma de frequências absolutas abaixo correspondente à distribuição dos preços unitários de venda de determinado componente eletrônico comercializado no mercado. Considere para as resoluções que os intervalos de classe são fechados à esquerda e abertos à direita.



O valor da moda da distribuição (Mo) obtida através da fórmula de Czuber:

$$M_o = l_i + h \times \frac{f_{Mo} - f_{ant}}{2 \times f_{Mo} - (f_{ant} + f_{post})}$$

Em que:

l_i **= limite inferior da classe modal**

h **= amplitude da classe modal**

f_{Mo} **= frequência da classe modal**

f_{ant} **= frequência da classe anterior à classe modal**

f_{post} **= frequência da classe posterior à classe modal**

é igual a

a) R$ 4,60

b) R$ 4,65

c) R$ 4,70

d) R$ 4,75

e) R$ 5,00

Comentários:

Para iniciar a resolução da questão, vamos representar os dados em formato tabular:

Classe	Ponto médio (X)	Frequência Simples (f)
$\mathbf{0 < s \leq 2}$	1	10
$\mathbf{2 < s \leq 4}$	3	20
$\mathbf{4 < s \leq 6}$	5	25
$\mathbf{6 < s \leq 8}$	7	20
$\mathbf{8 < s \leq 10}$	9	15
$\mathbf{10 < s \leq 12}$	11	10

A classe modal é aquela com maior frequência simples. No caso, trata-se da terceira classe:

$$4 < s \leq 6 \; (frequência \; 25).$$

Temos, então, as seguintes informações:

- limite inferior da classe modal: $l_{inf} = 4$;
- amplitude da classe modal: $h = 6 - 4 = 2$;
- frequência da classe modal: $f_{Mo} = 25$;
- frequência da classe anterior à classe modal: $f_{ant} = 20$; e
- frequência da classe posterior à classe modal: $f_{post} = 20$.

Reparem que tanto a frequência da classe anterior quanto a frequência da classe posterior são 20. Quando isso ocorre, a moda cai no ponto médio da classe modal. Logo, já podemos afirmar que a média é 5.

Em todo caso, vamos aos cálculos. A fórmula de Czuber é a que segue:

$$M_o = l_i + \left[\frac{f_{Mo} - f_{ant}}{(f_{Mo} - f_{ant}) + (f_{Mo} - f_{post})}\right] \times h$$

$$M_o = 4 + \left[\frac{25 - 20}{(25 - 20) + (25 - 20)}\right] \times 2$$

$$M_o = 4 + \left[\frac{5}{5 + 5}\right] \times 2$$

$$M_o = 4 + \left[\frac{5}{10}\right] \times 2 = 5$$

Gabarito: E.

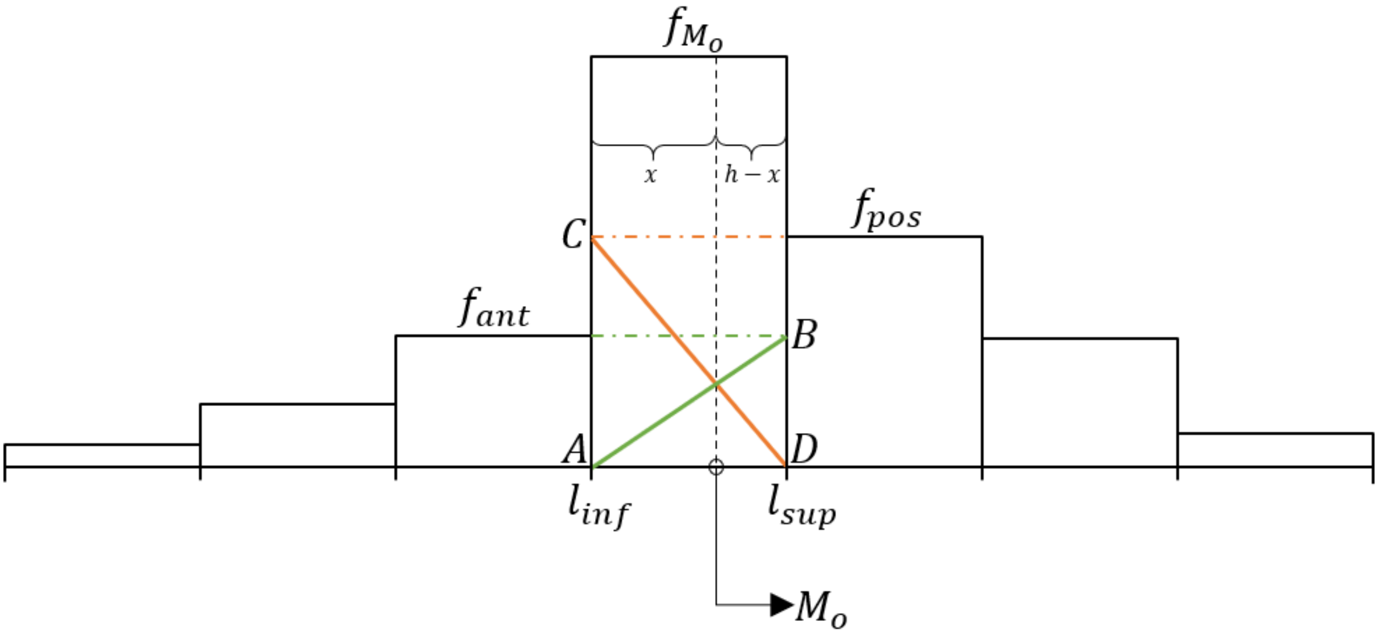
Moda de King

O estatístico **Wilford King também desenvolveu um processo gráfico capaz de determinar o valor da moda de forma aproximada**. Para determinar graficamente a moda, **King partiu de um histograma, utilizando apenas os dois retângulos correspondentes às classes adjacentes (anterior e posterior)**.

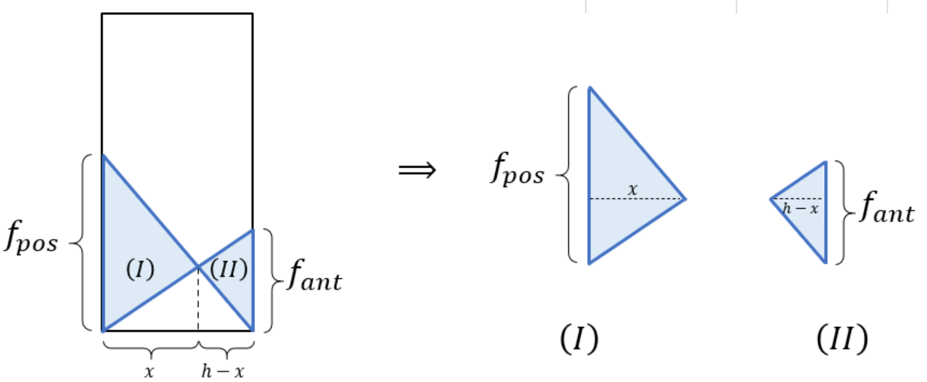
A moda é o valor do limite inferior da classe modal acrescida de um valor x, isto é,

$$\boxed{\boldsymbol{M_o = l_{inf} + x}}$$

Nesse caso, o valor de x é determinado pela intersecção dos segmentos $\overline{AB}$ (que une **o limite inferior da classe modal** à **projeção da frequência anterior na posição do limite superior da classe modal**) e $\overline{CD}$ (que une **a projeção da frequência posterior na posição do limite inferior** **ao limite superior da classe modal**).



A proposta de King também está baseada nos conceitos de semelhança entre os triângulos e proporcionalidade. Reparem nos triângulos (I) e (II), indicados na figura a seguir:



Usando as relações de semelhança entre triângulos e de proporcionalidade, concluímos que:

$$\frac{f_{pos}}{x} = \frac{f_{ant}}{h - x}$$

Fazendo a multiplicação cruzada das frações, temos que:

$$f_{pos} \times (h - x) = f_{ant} \times x$$

$$f_{pos} \times h - f_{pos} \times x = f_{ant} \times x$$

$$f_{pos} \times h = \left(f_{ant} + f_{pos}\right) \times x$$

Portanto, descobrimos o valor de x:

$$x = \frac{f_{pos}}{\left(f_{ant} + f_{pos}\right)} \times h$$

Como a moda é igual ao limite inferior da classe modal adicionado de x, temos que:

$$M_o = l_{inf} + x$$

$$\boxed{M_o = l_{inf} + \left[\frac{f_{pos}}{f_{ant} + f_{pos}}\right] \times h}$$

FIQUE ATENTO!

Os métodos de Czuber e King são similares sob vários aspectos, contudo, **divergem no que diz respeito às frequências adotadas**. **O método de King está lastreado na influência que as frequências adjacentes exercem sobre a classe modal**, **enquanto o procedimento de Czuber leva em consideração não apenas as frequências das classes adjacentes, mas também a própria frequência da classe modal**.

PRESTE MAIS ATENÇÃO!

Segundo a hipótese de King, **a moda divide o intervalo da classe modal em distâncias inversamente proporcionais às frequências das classes adjacentes**.

EXEMPLIFICANDO

Considere a distribuição de frequências apresentada a seguir, que descreve as faixas etárias de um grupo de 220 alunos do Estratégia Concursos:

Faixa etária (X_i)	Frequência (f_i)
$\mathbf{10 \vdash 20}$	30
$\mathbf{20 \vdash 30}$	50
$\mathbf{30 \vdash 40}$	70
$\mathbf{40 \vdash 50}$	60
$\mathbf{50 \vdash 60}$	10
Total	**220**

A classe modal é aquela com maior frequência simples. No caso, trata-se da terceira classe:

$$30 \vdash 40\ (frequência\ 70).$$

Temos, então, as seguintes informações:

- limite inferior da classe modal: $l_{inf} = 30$;
- amplitude da classe modal: $h = 40 - 30 = 10$;
- frequência da classe anterior à classe modal: $f_{ant} = 50$; e
- frequência da classe posterior à classe modal: $f_{post} = 60$.

Aplicando a fórmula de King, temos:

$$M_o = l_{inf} + \left[\frac{f_{pos}}{f_{ant} + f_{pos}}\right] \times h$$

$$M_o = 30 + \left[\frac{60}{50 + 60}\right] \times (40 - 30)$$

$$M_o = 30 + \left(\frac{60}{110}\right) \times 10$$

$$M_o = 30 + \left(\frac{6}{11}\right) \times 10 \cong 35{,}45$$

HORA DE PRATICAR!

(IAUPE/PM-PE/2018 - ADAPTADA) A tabela seguinte mostra a distribuição dos salários de uma corporação. Analise-a e responda a questão.

Salários (Mil R$)	3 ⊢ 6	6 ⊢ 9	9 ⊢ 12	12 ⊢ 15	15 ⊢ 18	18 ⊢ 21
Nº de militares	12	15	20	10	5	3

O salário modal, pelo método King, vale, em mil,

a) R$ 9

b) R$ 9,5

c) R$ 10,2

d) R$ 10,5

e) R$ 12

Comentários:

A classe modal é a de maior frequência absoluta.

A moda de King é dada por:

$$M_o = l_i + \left[\frac{f_{post}}{f_{ant} + f_{post}}\right] \times h$$

Em que:

- $l_i =$ limite inferior da classe modal
- $h =$ amplitude da classe modal
- $f_{ant} =$ frequência da classe anterior à classe modal
- $f_{post} =$ frequência da classe posterior à classe modal

Aplicando a fórmula temos:

$$M_o = 9 + \left[\frac{10}{15 + 10}\right] \times (12 - 9)$$

$$M_o = 9 + \left[\frac{10}{25}\right] \times 3$$

$$M_o = 9 + 0{,}4 \times 3$$

$$M_o = 9 + 1{,}20$$

$$M_o = 10{,}20$$

Gabarito: C

(FUNDATEC/SEFAZ-RS/2009) A tabela a seguir representa a distribuição de frequências da idade de uma amostra de moradores de um asilo. Utilize para resolver a questão.

X_i	f_i
$70 \vdash 74$	7
$74 \vdash 78$	19
$78 \vdash 82$	13
$82 \vdash 86$	11
$86 \vdash 90$	6
$90 \vdash 94$	4
Total	**60**

O valor da moda pelo método de King é:

a) 72,8.

b) 76,6.

c) 80,0.

d) 76,0.

e) 19,0.

Comentários:

A classe modal é aquela com maior frequência simples. No caso, trata-se da classe:

$$74 \vdash 78\ (frequência\ 19).$$

Temos, então, as seguintes informações:

- limite inferior da classe modal: $l_{inf} = 74$;
- amplitude da classe modal: $h = 4$;
- frequência da classe anterior à classe modal: $f_{ant} = 7$; e
- frequência da classe posterior à classe modal: $f_{post} = 13$.

A fórmula da moda de King é a que segue:

$$M_o = l_i + \left[\frac{f_{post}}{f_{ant} + f_{post}}\right] \times h$$

$$M_o = 74 + \frac{13}{7 + 13} \times 4$$

$$M_o = 74 + \frac{13}{20} \times 4$$

$$M_o = 76{,}6$$

Gabarito: B.

Moda para Distribuições com Amplitudes Não Constantes

Para que possamos utilizar os métodos de Czuber e King, é necessário que as amplitudes de todas as classes sejam iguais. Se isso não acontecer, as fórmulas terão que sofrer uma pequena adaptação, no sentido de considerar a densidade de frequência de cada classe.

Observe a distribuição de frequências apresentada a seguir, que descreve as faixas etárias de um grupo de 255 funcionários de uma fábrica.

Faixa Etária	Frequência
$10 \vdash 20$	30
$20 \vdash 35$	60
$35 \vdash 55$	80
$55 \vdash 60$	75
$60 \vdash 70$	10

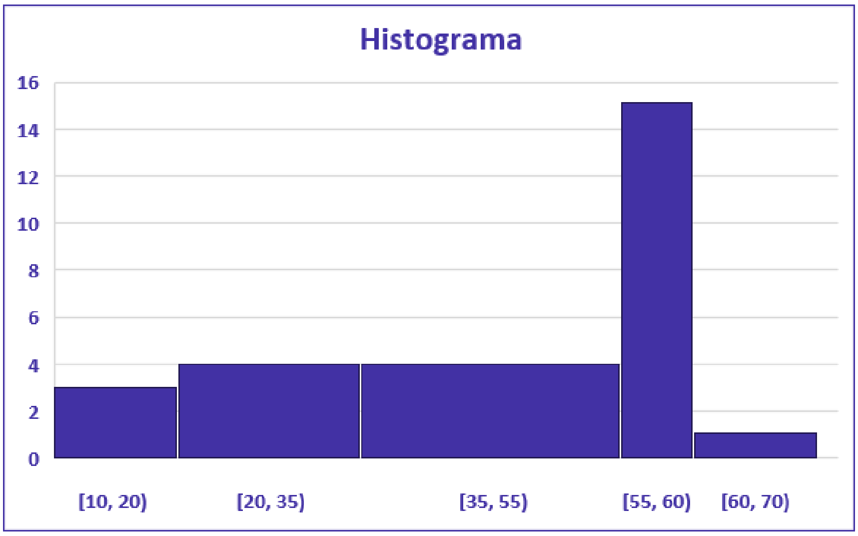
Como podemos observar, a classe que apresenta a maior frequência é a terceira ($f_i = 80$). Contudo, não é razoável supor que essa seja a classe modal, pois nela as idades estão distribuídas no intervalo de 35 a 55 anos, enquanto, na classe seguinte, em que há 75 funcionários, as idades estão distribuídas em um intervalo muito menor, de 55 a 60 anos.

Portanto, quando a distribuição possuir classes com amplitudes diferentes, não conseguiremos identificar a classe modal analisando a frequência pura e simplesmente. Nessa situação, **a classe modal será identificada com base na densidade de frequência, que resulta da divisão entre a frequência da classe e a sua amplitude.**

Dito isso, podemos computar as densidades de frequência para o nosso exemplo. Reparem que a quarta classe é que apresenta a maior densidade de frequência, sendo, portanto, a classe modal.

Faixa Etária	Frequência (f)	h	$d = \frac{f}{h}$
$\mathbf{10 \vdash 20}$	30	$\mathbf{20} - 10 = 10$	$\frac{30}{10} = 3$
$\mathbf{20 \vdash 35}$	60	$\mathbf{35} - 20 = 15$	$\frac{60}{15} = 4$
$\mathbf{35 \vdash 55}$	80	$\mathbf{55} - 35 = 20$	$\frac{80}{20} = 4$
$\mathbf{55 \vdash 60}$	**75**	$\mathbf{60 - 55 = 5}$	$\mathbf{\frac{75}{5} = 15}$
$\mathbf{60 \vdash 70}$	10	$\mathbf{70} - 60 = 10$	$\frac{10}{10} = 1$

A representação dos dados em um **histograma com classes de larguras desiguais** requer a **transformação dos valores de frequência absoluta em densidade de frequência**, pois a **área de cada retângulo deve ser proporcional à frequência da classe respectiva**. Vejamos:



Agora, para calcular as modas de Czuber e de King, temos que substituir as frequências pelas suas respectivas densidades de frequências:

$$\boxed{\boldsymbol{M_o^{Czuber} = l_{inf} + \left[\frac{df_{Mo} - df_{ant}}{(df_{Mo} - df_{ant}) + (df_{Mo} - df_{post})}\right] \times h}}$$

e

$$\boxed{\boldsymbol{M_o^{King} = l_{inf} + \left[\frac{df_{pos}}{df_{ant} + df_{pos}}\right] \times h.}}$$

Em nosso exemplo, o valor da moda de Czuber é:

$$M_o^{Czuber} = 55 + \left[\frac{15 - 4}{(15 - 4) + (15 - 1)}\right] \times 5$$

$$M_o^{Czuber} = 55 + \left[\frac{11}{11 + 14}\right] \times 5$$

$$M_o^{Czuber} = 55 + \left[\frac{11}{25}\right] \times 5 = 57{,}2$$

Por sua vez, a moda de King assume o seguinte valor:

$$M_o^{King} = 55 + \left[\frac{1}{4 + 1}\right] \times 5.$$

$$M_o^{King} = 55 + \left[\frac{1}{5}\right] \times 5 = 56$$

(CESPE/PF/2004)

Classificação	Mínimo	1°. Quartil	Mediana	Média	3°. Quartil	Máximo	Variância
A	20	25	27,5	30	32,5	50	49
B	18	23	32	33	42	52	100
A ou B	x	y	z	31	w	u	v

De acordo com um levantamento estatístico, a média das idades de um grupo de presidiários é igual a 31 anos de idade. Nesse levantamento, os presidiários foram classificados como A ou B, dependendo da sua condição psicossocial. Constatou-se que a média das idades dos presidiários classificados como A é menor que a média das idades dos presidiários classificados como B. A tabela acima apresenta algumas medidas estatísticas obtidas por meio desse levantamento.

A partir das informações acima, julgue o item que se segue.

A moda das idades dos presidiários classificados como A, segundo a fórmula de Czuber, está entre 25,5 e 26 anos de idade.

Comentários:

Conhecendo os valores mínimo, máximo e os quartis, podemos determinar a distribuição de frequências. Isso ocorre porque os quartis separam o conjunto de dados em quatro partes iguais, cada uma com 25% das observações. Vejamos:

Classe	Frequência Relativa (%)
20,0 - 25,0	25
25,0 - 27,5	25
27,5 - 32,5	25
32,5 - 50,0	25

Reparem que as classes têm amplitudes diferentes. Por conta disso, o cálculo da moda deverá levar em consideração a densidade de frequência, que resulta da divisão entre a frequência simples (f) e a ampiltude de classe (h):

Classe	Frequência Relativa (%)	Amplitude de Classe	Densidade de Frequência
20,0 - 25,0	25	5	5
25,0 - 27,5	25	2,5	10
27,5 - 32,5	25	5	5
32,5 - 50,0	25	17,5	25/17,5

Observem que todas as classes possuem a mesma frequência relativa simples. Assim, a classe modal será aquela com menor amplitude, pois isso vai resultar na maior densidade de frequência. Logo, a classe modal será a segunda.

Sabendo disso, temos que a classe anterior será a primeira e a classe posterior será a terceira. Reparem que a densidade de frequência da classe anterior é igual à densidade de frequência da classe posterior. Quando isso ocorre, a moda ocupa a posição central da classe modal. Portanto:

$$\frac{25 + 27{,}5}{2} = 26{,}25$$

De todo modo, vamos aplicar a fórmula de Czuber:

$$M_o = l_i + \left[\frac{df_{Mo} - df_{ant}}{(df_{Mo} - f_{ant}) + (df_{Mo} - df_{post})}\right] \times h$$

$$M_o = 25{,}0 + \left[\frac{10 - 5}{(10 - 5) + (10 - 5)}\right] \times 2{,}5$$

$$M_o = 25{,}0 + \left[\frac{5}{5 + 5}\right] \times 2{,}5$$

$$M_o = 25{,}0 + \left[\frac{5}{10}\right] \times 2{,}5 = 26{,}25$$

Gabarito: Errado.

PROPRIEDADES DA MODA

A moda apresenta duas propriedades principais: a soma (ou subtração) de uma constante; e a multiplicação (ou divisão) por uma constante. Essas propriedades são parecidas com as que vimos em aulas anteriores, quando tratamos da média e da mediana.

1º Propriedade

- **Somando-se (ou subtraindo-se) uma constante c a todos os valores de uma variável, a moda do conjunto fica aumentada (ou diminuída) dessa constante.**

EXEMPLIFICANDO

Para explicar essa propriedade, vamos tomar como exemplo a sequência $\{\boldsymbol{x_n}\} = \{3, 8, 8, 8, 10\}$, cuja moda é:

$$M_{o_x} = 8$$

Se adicionarmos o número 5 a cada um dos termos da sequência, iremos obter uma nova lista $\{y_n\} = \{x_n + 5\} = \{8, 13, 13, 13, 15\}$, cuja moda é:

$$M_{o_y} = 13$$

Veja que a adição do número 5 a cada um dos termos da sequência fez com que a moda também aumentasse em 5 unidades, indo de 8 para 13.

2º Propriedade

- **Multiplicando-se (ou dividindo-se) todos os valores de uma variável por uma constante c, a moda do conjunto fica multiplicada (ou dividida) por essa constante.**

EXEMPLIFICANDO

Para explicar essa propriedade, vamos tomar como exemplo a sequência $\{\boldsymbol{x_n}\} = \{3, 8, 8, 8, 10\}$, cuja moda é:

$$M_{o_x} = 8$$

Se multiplicarmos cada um dos termos da sequência por 5, iremos obter uma nova lista $\{y_n\} = \{x_n \times 5\} = \{15, 40, 40, 40, 50\}$, cuja moda é:

$$M_{o_y} = 40$$

Veja que a multiplicação de cada um dos termos da sequência por 5 fez com que a moda também fosse multiplicada por 5, aumentando de 8 para 40.

RESUMO DA AULA

MODA

A moda é uma medida de posição e de tendência central que descreve o valor mais frequente de um conjunto de observações, ou seja, o valor de maior ocorrência dentre os valores observados.

A moda é útil para a determinação da medida de posição de variáveis qualitativas nominais, ou seja, variáveis não-numéricas que não podem ser ordenadas.

Moda para dados não-agrupados.

Com relação ao número de modas, o conjunto de pode ser classificado como:

- **Moda**
  - **Amodal**
    - Todos os elementos apresentam a mesma frequência. Todos aparecem o mesmo número de vezes
    - Ex.: $\{1, 2, 3, 5, 6, 8, 10\}$
  - **Unimodal**
    - A frequência de um elemento é maior que as frequências dos demais elementos. Tem uma única moda.
    - Ex.: $\left\{\underbrace{2,2,2,2,2}_{5\ elementos}, \underbrace{3,3}_{2\ elementos}\right\}$
  - **Bimodal**
    - As frequências de dois elementos são iguais e maiores que as frequências dos demais elementos. Tem duas modas.
    - Ex.: $\left\{\underbrace{2,2,2,2,2}_{5\ elementos}, \underbrace{3,3,3,3,3}_{5\ elementos}, \underbrace{4,4}_{2\ elementos}\right\}$
  - **Multimodal ou plurimodal**
    - As frequências de três ou mais elementos são iguais e maiores que as frequências dos demais elementos. Tem três ou mais modas.
    - Ex.: $\left\{\underbrace{2,2,2,2,2}_{5\ elementos}, \underbrace{3,3,3,3,3}_{5\ elementos}, \underbrace{4,4,4,4,4}_{5\ elementos}, \underbrace{5,5}_{2\ elementos}\right\}$

Moda para dados agrupados em classes

DADOS AGRUPADOS EM CLASSE		**MODA**
de mesma amplitude	→	Será o valor dominante da classe que apresenta a maior frequência, que é denominada classe modal.

Moda Bruta

Sobre a moda bruta, podemos afirmar que:

I – É calculada tomando o ponto médio da classe modal. ;

II – É determinado pela seguinte fórmula: $\boldsymbol{M_O = \frac{l_{inf}+l_{sup}}{2}}$

III – em que l_{inf} é o limite inferior da classe modal; e l_{sup} é o limite superior da classe modal.

Moda de Pearson

Sobre a moda de Pearson, podemos afirmar que:

I – A moda calculada quando são conhecidas a média ($\bar{x}$) e a mediana (M_d) de uma distribuição moderadamente assimétrica;

II – É determinado pela seguinte fórmula: $\boldsymbol{M_o = 3 \times M_d - 2 \times \bar{x}}$

III – Em que $\bar{x}$ é a média M_d é a mediana da distribuição

Moda de Czuber

Sobre a moda de Czuber, podemos afirmar que:

I – A moda divide o intervalo da classe modal em distâncias proporcionais às diferenças entre a frequência da classe modal e as frequências das classes adjacentes.;

II – A moda é o valor do limite inferior (l_{inf}) da classe modal acrescido de um valor x: $\boldsymbol{M_o = l_{inf} + x}$

III – É determinado pela seguinte fórmula: $\boldsymbol{M_o = l_i + \left[\frac{f_{Mo} - f_{ant}}{(f_{Mo} - f_{ant}) + (f_{Mo} - f_{post})}\right] \times h}$

Moda de King

Sobre a moda de King, podemos afirmar que:

I – A moda divide o intervalo da classe modal em distâncias inversamente proporcionais às frequências das classes adjacentes;

II – A moda é o valor do limite inferior da classe modal acrescida de um valor x: $\boldsymbol{M_o = l_{inf} + x}$

III – É determinado pela seguinte fórmula: $\boldsymbol{M_o = l_{inf} + \left[\frac{f_{pos}}{f_{ant} + f_{pos}}\right] \times h}$

Moda para Distribuições com Amplitudes Não Constantes

I – Para que possamos utilizar os métodos de Czuber e King, é necessário que as amplitudes de todas as classes sejam iguais;

II – Para distribuições que possuem classes com amplitudes diferentes a classe modal será identificada com base na densidade de frequência, que resulta da divisão entre a frequência da classe e a sua amplitude.

Propriedades da Moda

1º Propriedade

- **Somando-se (ou subtraindo-se) uma constante c a todos os valores de uma variável, a moda do conjunto fica aumentada (ou diminuída) dessa constante.**

2º Propriedade

- **Multiplicando-se (ou dividindo-se) todos os valores de uma variável por uma constante c, a moda do conjunto fica multiplicada (ou dividida) por essa constante.**