

## Aula 17

*TSE - Concurso Unificado (Analista  
Judiciário - Área Administrativa)  
Raciocínio Lógico e Matemática - 2023  
(Pré-Edital)*

Autor:  
**Equipe Exatas Estratégia  
Concursos**

# Índice

1) Noções Introdutórias .....	3
2) Prisma .....	10
3) Pirâmide .....	17
4) Cilindro .....	22
5) Cone .....	25
6) Esfera .....	32
7) Questões Comentadas - Noções Introdutórias - Multibancas .....	35
8) Questões Comentadas - Prisma - Multibancas .....	42
9) Questões Comentadas - Pirâmide - Multibancas .....	60
10) Questões Comentadas - Cilindro - Multibancas .....	71
11) Questões Comentadas - Cone - Multibancas .....	89
12) Questões Comentadas - Esfera - Multibancas .....	99
13) Lista de Questões - Noções Introdutórias - Multibancas .....	106
14) Lista de Questões - Prisma - Multibancas .....	109
15) Lista de Questões - Pirâmide - Multibancas .....	116
16) Lista de Questões - Cilindro - Multibancas .....	120
17) Lista de Questões - Cone - Multibancas .....	127
18) Lista de Questões - Esfera - Multibancas .....	130

# GEOMETRIA ESPACIAL

## Noções Introdutórias

### Poliedros

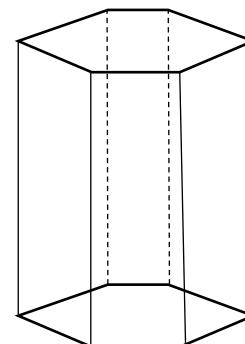
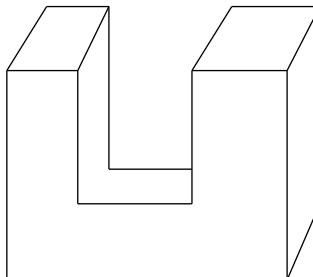
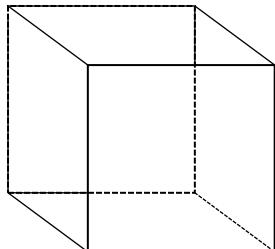
O primeiro passo na Geometria Espacial é **entender o que é um poliedro**. Para isso, é preciso que você tenha feito a aula de Geometria Plana, pois usaremos muitos conceitos vistos lá. Vamos lá!



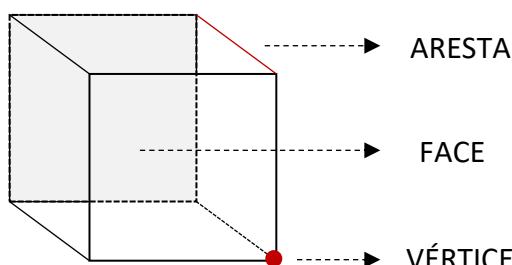
Poliedro é um sólido geométrico limitado por uma quantidade finita de polígonos. Além disso, é importante ressaltar que cada um desses polígonos divide um lado com um outro, vizinho a ele.

*Professor, é o quê?!!* Calma, aluno! Quando falamos assim, realmente parece um pouco complicado. No entanto, **vamos visualizar alguns poliedros**.

### Exemplos de Poliedros



Talvez o poliedro mais conhecido seja **o cubo** (que é o primeiro da esquerda na figura acima). Note que o cubo tem seis faces e cada uma dessas faces é um **quadrado**. Aproveitando esse cubo, vamos estudar alguns elementos que estão presentes nos poliedros de modo geral.



- A **face** normalmente é conhecida como o "lado" do poliedro. Uma observação importante é que ela sempre será um polígonos.

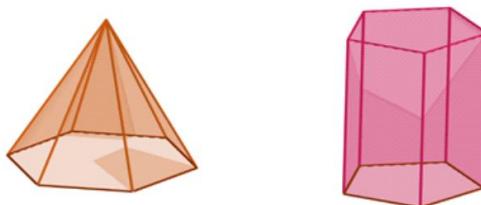
- A **aresta** é a intersecção de duas dessas faces. Ademais, também podemos defini-la como sendo o segmento de reta que une dois vértices.

- O **vértice** é o ponto de encontro das arestas. Ele forma um "cantinho" no referido sólido geométrico.

Esclarecido isso, podemos notar que **o cubo tem 6 faces, 12 arestas e 8 vértices**. Vocês também chegaram nesses números?!



**(PREF. AREIAL/2021)** As figuras representam uma pirâmide de base hexagonal e um prisma de base pentagonal. Analise as afirmações e coloque (V) para as verdadeiras e (F) para as falsas.



- ( ) Somando as arestas da pirâmide e do prisma obtemos 27 arestas.
- ( ) O prisma possui 2 vértices a mais que a pirâmide.
- ( ) O prisma possui 10 arestas.
- ( ) A pirâmide e o prisma possuem a mesma quantidade de faces.

Marque a alternativa que contém a sequência CORRETA de preenchimento dos parênteses.

- A) V, F, F e V.
- B) V, F, V e F.
- C) F, V, F e F.
- D) V, V, F e V.
- E) F, V, V e F.

#### Comentários:

(V) Somando as arestas da pirâmide e do prisma obtemos 27 arestas.

Lembre-se que uma **aresta é o segmento de reta que liga dois vértices**. Na pirâmide de base hexagonal que o enunciado trouxe, temos **12 arestas**. Por sua vez, no prisma de base pentagonal teremos mais **15 arestas**. Com isso, realmente **a soma das quantidades de arestas será 27**.

(F) O prisma possui 2 vértices a mais que a pirâmide.

**O vértice é o ponto de encontro de duas arestas**, ele forma um "canto" na nossa figura. Na pirâmide, perceba que temos 6 vértices na base e mais um no topo. Com isso, **contamos sete vértice**. Já no prisma, temos 5 vértices em cada base (superior e inferior). Com isso, totalizamos **10 vértices no prisma analisado**. Assim, note que **o prisma possui 3 vértices (e não 2) a mais que a pirâmide**.

(F) O prisma possui 10 arestas.

Como já havíamos contado na primeira afirmação, **o prisma possui 15 arestas e não 10.**

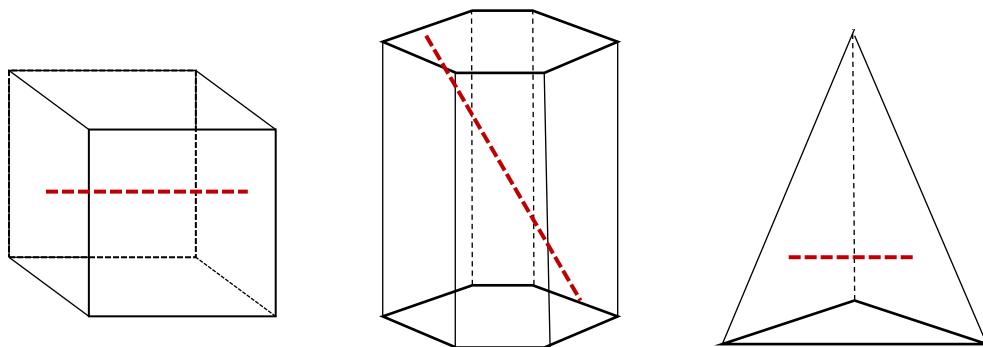
(V) A pirâmide e o prisma possuem a mesma quantidade de faces.

**A face é o que chamamos de "lado" do poliedro.** E é sempre um polígono (triângulo, retângulo, pentágono, por exemplo). No prisma que o enunciado trouxe, temos 5 faces laterais e 2 bases (que também contam como faces). Com isso, **são 7 faces no prisma.** Por sua vez, na pirâmide, temos 6 faces laterais e uma base (como falamos, também é uma face), **totalizando sete faces também.** Logo, afirmação correta.

**Gabarito: LETRA A.**

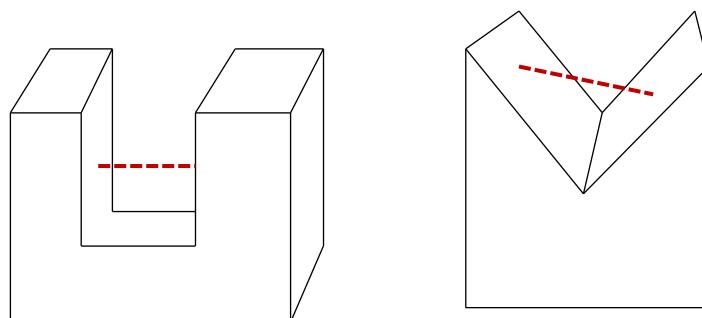
Agora, quero contar para vocês que podemos classificar os poliedros em convexos ou não convexos.

- **Poliedro Convexo:** todo poliedro em que qualquer segmento de reta com extremidades nas faces está inteiramente contido dentro do poliedro. Para melhor entendimento, veja alguns poliedros convexos.



Note que as retas que traçamos unindo pontos nas faces ficam totalmente dentro do poliedro!! Quando isso acontece para qualquer segmento de reta com essas características, o poliedro é convexo!

- **Poliedro Não Convexo (ou côncavo):** qualquer poliedro que não seja convexo.



Nosso estudo se concentrará **nos poliedros convexos.**

## Relação de Euler

A relação de Euler envolve a quantidade de vértices, faces e arestas em um **poliedro convexo**.

$$V + F = A + 2$$

-  $V$  é o **número de vértices**;

-  $F$  é o **número de faces**;

- $A$  é o **número de arestas**.

Por exemplo, lembra quando contamos **o número de vértices, faces e arestas do cubo**? Nós encontramos:

$$\begin{aligned} F &= 6; \\ A &= 12; \\ V &= 8; \end{aligned}$$

Substituindo na expressão, temos que:

$$8 + 6 = 12 + 2 \rightarrow 14 = 14 \quad \checkmark$$

Note que a relação bate certinho para o cubo. Assim, com o intuito de entender como essa relação pode ser cobrada, vamos ver uma questão bem atual que exigiu o conhecimento da fórmula acima.



**(PREF. CONCEIÇÃO DE MACABÚ/2020)** Os alunos do curso de Licenciatura em Matemática construíram durante a aula de Geometria, um poliedro de isopor. Ao analisarem melhor a figura, uma aluna verificou que o número de vértices é o quádruplo do número de faces acrescido de dois. Um outro aluno verificou que número de arestas é igual ao triplo do número de faces acrescido de doze. Com essas duas observações feitas pelos alunos, esse poliedro possui quantos vértices?

- A) 6.
- B) 26.
- C) 30.
- D) 32.

#### Comentários:

Pessoal, a questão fala de número de vértices, faces e arestas. Qual a expressão que relaciona toda essas três quantidades? É a **relação de Euler**.

$$V + F = A + 2 \quad (1)$$

Agora vamos ver quais as observações que os alunos fizeram.

- **O número de vértices é o quádruplo do número de faces acrescido de dois.**

$$V = 4F + 2 \quad (2)$$

- **O número de arestas é igual ao triplo do número de faces acrescido de doze.**

$$A = 3F + 12 \quad (3)$$

Vamos substituir (2) e (3) em (1).

$$(4F + 2) + F = (3F + 12) + 2 \rightarrow 5F - 3F = 12 \rightarrow 2F = 12 \rightarrow F = 6$$

Logo, o número de faces desse poliedro de isopor é 6. Podemos usar esse resultado em (2) e determinar o número de vértices que a questão pede.

$$V = 4 \cdot 6 + 2 \rightarrow V = 26$$

**Gabarito:** LETRA B.

## Poliedros de Platão

Os poliedros de Platão são poliedros que obedecem a **três condições básicas**:

- (i) Possuem o mesmo número de arestas em cada face;
- (ii) De cada vértice partem a mesma quantidade de arestas;
- (iii) Obedecem a relação de Euler.

Só existem **cinco classes** de poliedros que obedecem a todas essas condições: **o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro**.

<b>Tetraedro</b>	4 faces
<b>Hexaedro</b>	6 faces
<b>Octaedro</b>	8 faces
<b>Dodecaedro</b>	12 faces
<b>Icosaedro</b>	20 faces

## Poliedros Regulares

Poliedros regulares são poliedros que também obedecem a algumas condições, quais sejam:

- (i) **suas faces são polígonos regulares;**
- (ii) de cada vértice **partem o mesmo número de arestas;**
- (iii) são poliedros convexos.

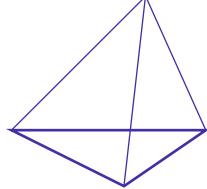
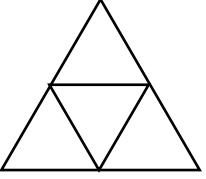
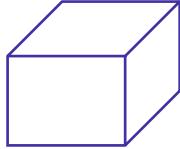
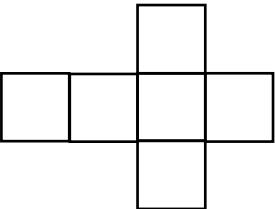
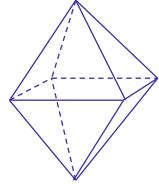
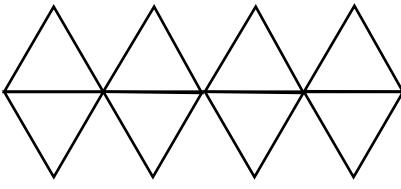
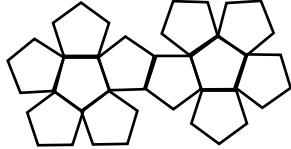
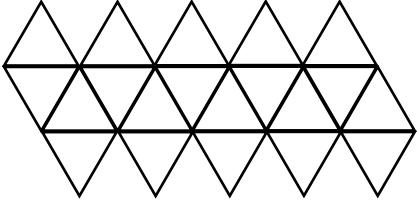
Uma conclusão importante das condições acima é que **todo poliedro regular é um poliedro de Platão**, mas **nem todo poliedro de Platão é um poliedro regular**. Vamos detalhar.

- (i) Note que se as faces de um poliedro regular são polígonos regulares, então **toda face tem a mesma quantidade de arestas**, o que satisfaz a primeira condição que vimos para o Poliedro de Platão;
- (ii) A segunda condição para ser um poliedro regular é exatamente a mesma para ser um poliedro de Platão.
- (iii) Por sua vez, temos que para ser um poliedro regular, esse poliedro deve ser convexo. Vimos que **a relação de Euler vale para todo poliedro convexo**. Portanto, a terceira e última condição para o poliedro ser um poliedro de Platão também está satisfeita.

Vamos conhecer os Poliedros Regulares, eles também são cinco!

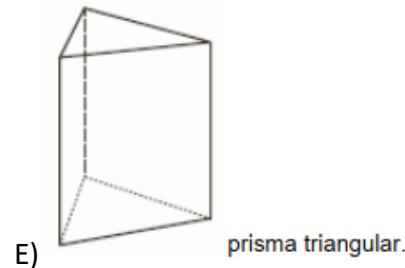
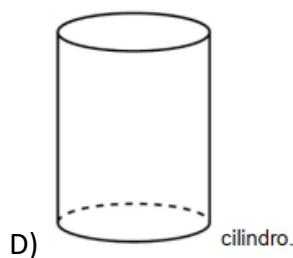
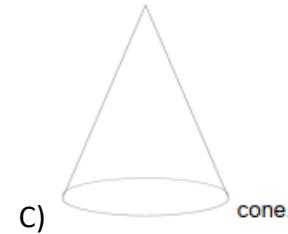
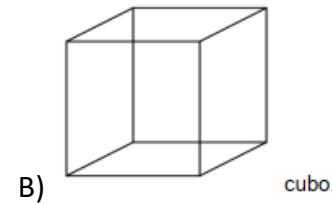
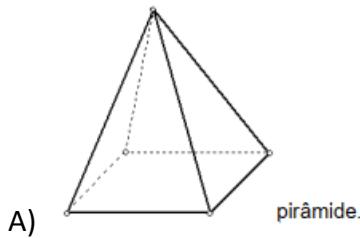


## Poliedros Regulares

Poliedro	Planificação	Informações
 <b>Tetraedro Regular</b>		<p>O tetraedro regular é uma pirâmide em que todas as suas 4 faces são triângulos equiláteros.</p> $V = 4$ $A = 6$
 <b>Hexaedro Regular</b>		<p>O hexaedro regular é o "nome científico" do famoso cubo. Note que todas suas 6 faces são quadradas.</p> $V = 8$ $A = 12$
 <b>Octaedro Regular</b>		<p>O octaedro regular também é chamado de bipirâmide quadrada. As suas 8 faces são triângulos equiláteros.</p> $V = 6$ $A = 12$
 <b>Dodecaedro Regular</b>		<p>O dodecaedro regular é formado por 12 faces! Cada uma das faces é um pentágono regular.</p> $V = 20$ $A = 30$
 <b>Icosaedro Regular</b>		<p>O icosaedro regular é formado por 20 faces! Cada uma das faces é um triângulo equilátero.</p> $V = 12$ $A = 30$



**(PREF. MAIRINQUE/2011)** Um poliedro é considerado regular se todas as suas faces forem formadas por polígonos regulares idênticos e também se todos os seus vértices forem o ponto de encontro do mesmo número de arestas. Assinale a alternativa que apresenta um poliedro regular.



#### Comentários:

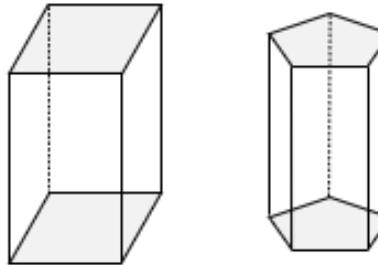
Questão apenas para identificarmos o que acabamos de ver! Conforme vimos na lista anterior, **o cubo (hexaedro regular)** é um poliedro regular. Podemos marcar a alternativa B de cara.

**O cilindro e o cone não são poliedros.** Eles são "corpos redondos" que estudaremos em breve. Já a pirâmide e o prisma triangular das alternativas A e E não se encaixam na definição de poliedro regular. Para isso, basta observarmos que suas faces **não são polígonos regulares**.

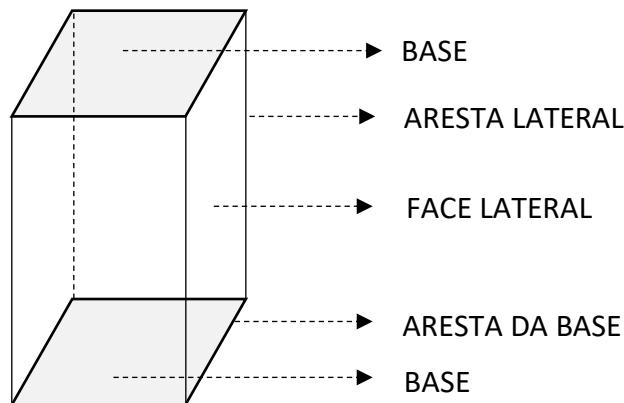
**Gabarito:** LETRA B.

## Prisma

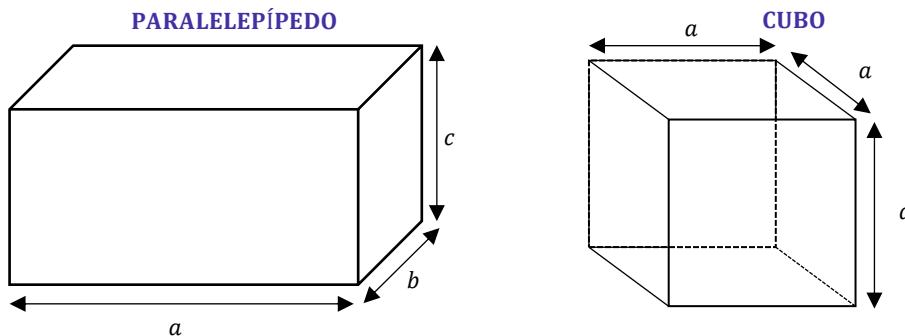
O prisma é um poliedro convexo que possui **duas bases paralelas distintas** (que são polígonos). **As faces laterais são paralelogramos**. Vamos conhecer alguns.



O prisma da esquerda é chamado de **prisma quadrangular**, pois sua base é um quadrilátero. Por sua vez, o prisma da direita é um **prisma pentagonal**, pois sua base é um pentágono. Vamos conhecer seus elementos.



Todos os prismas terão os elementos acima. *Especial atenção nas duas bases paralelas, ok?!* Dito isso, quero apresentar para dois prismas bem famosos.



Esses dois sólidos geométricos **são os mais comuns em prova!!** Todos dois são prismas quadrangulares. A principal diferença entre os dois é que, no cubo, **todas as arestas possuem a mesma medida**. Normalmente, as questões vão nos perguntar sobre áreas e volumes. Vamos falar sobre isso!

## Áreas

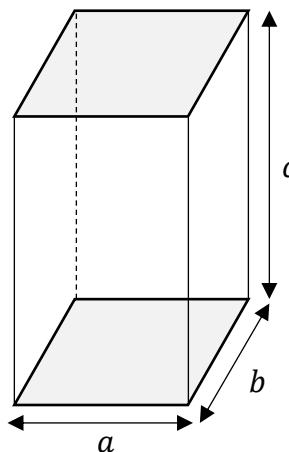
A **área total da superfície de um prisma** é calculada por meio da seguinte soma:

$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$$

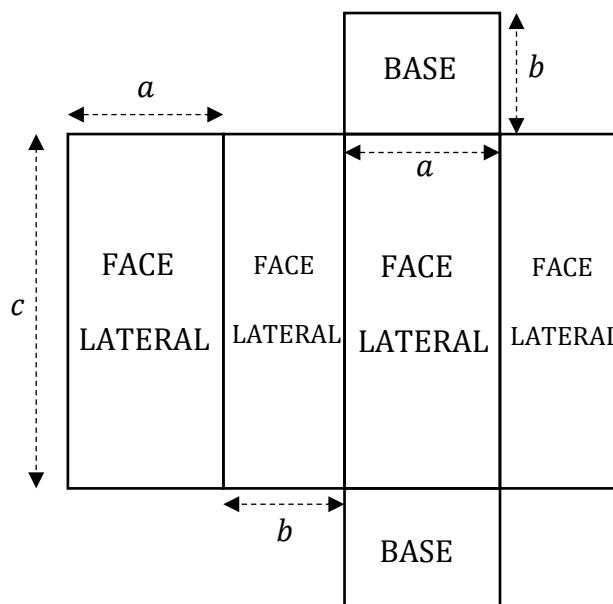
Observe que a área total é composta de duas parcelas. A área lateral e a área da base.

- **Área Lateral ( $A_{lateral}$ )**: soma das áreas das faces laterais. No prisma, as faces laterais são paralelogramos (mais especificamente, serão retângulos quando os prismas forem retos).

- **Área da Base ( $A_{base}$ )**: É a área do polígono que está na base. Se a base for um quadrado, será a área do quadrado, se for um pentágono, será a área do pentágono, etc.



No paralelepípedo acima, vemos que **as bases são retângulos de lados "a" e "b"**, enquanto **as faces são dois retângulos de lados "b" e "c"** e **outros dois de lados "a" e "c"**. Podemos visualizar isso com a planificação.



### - Cálculo da Área Lateral:

Temos quatro faces laterais. Nos prismas retos, elas serão retângulos. Aprendemos na aula de Geometria Plana que a área de retângulos é calculada pelo produto de suas duas dimensões. Assim,

$$A_{lateral} = ac + bc + ac + bc \rightarrow A_{lateral} = 2ac + 2bc$$

### - Cálculo da Área da Base:

A base é um retângulo de lados "a" e "b". Assim,

$$A_{base} = ab$$

### - Cálculo da Área Total:

$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$$

Vamos substituir o que achamos.

$$A_{total} = 2ac + 2bc + 2ab$$

$$A_{total} = 2 \cdot (ac + bc + ab)$$

Essa é **a área superficial de um paralelepípedo**. Ela aparece em provas com uma certa frequência! Nos cubos, todas as arestas são iguais a "a", podemos fazer o seguinte:

$$A_{total} = 2 \cdot (a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a) \rightarrow A_{total} = 2 \cdot (a^2 + a^2 + a^2) \rightarrow A_{total} = 2 \cdot 3a^2$$

$$A_{total} = 6a^2$$

Essa é **a área superficial de um cubo**! Vamos praticar um pouco essa teoria.

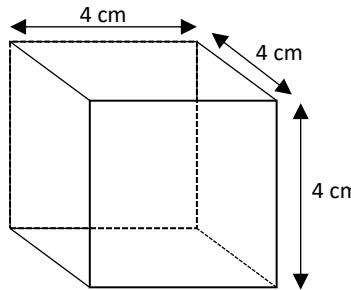


**(PREF. FRECHEIRINHA/2021)** Sabendo que as arestas de um hexaedro regular medem 4 cm cada uma, determine a área total da superfície.

- A) 96 cm<sup>2</sup>.
- B) 60 cm<sup>2</sup>.
- C) 24 cm<sup>2</sup>.
- D) 36 cm<sup>2</sup>.
- E) 48 cm<sup>2</sup>.

### Comentários:

Um **hexaedro regular é um nome bonito para "cubo"**. Isso mesmo, hexaedro regular é um cubo.



Um **cubo** possui **6 faces**. Cada face é exatamente **um quadrado de arestas iguais a 4 cm**. Assim, para calcular a área total da superfície, basta **calcular a área do quadrado e multiplicá-la por 6**. Da aula de Geometria Plana, a área de um quadrado é dada por:

$$A_Q = a^2$$

Substituindo o valor da aresta  $a = 4$ :

$$A_Q = 4^2 \rightarrow A_Q = 16 \text{ cm}^2$$

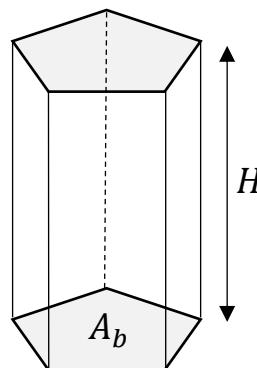
Essa é a área de uma das faces. **O cubo tem 6**. Assim,

$$A_{Total} = 6 \cdot A_Q \rightarrow A_{total} = 6 \cdot 16 \rightarrow A_{total} = 96 \text{ cm}^2$$

**Gabarito:** LETRA A.

## Volume

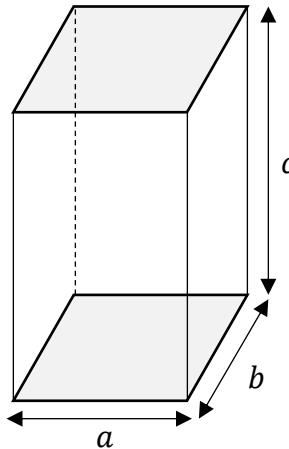
Quando calculamos o volume de algum sólido, estamos **quantificando o espaço que está sendo ocupado por ele**. Considere o prisma abaixo, como exemplo,



Para calcular o volume de prismas, usamos a seguinte expressão:

$$V = A_b H$$

Em que  **$A_b$  é a área da base** e  **$H$  é a altura**. No caso do paralelepípedo, vamos ter o seguinte:



A base é um retângulo de lados "a" e "b". Assim, sua área é dada por:  $A_b = ab$ . Por sua vez, temos **uma altura de medida "c"**. O volume fica:

$$V = abc$$

Esse é o volume de um paralelepípedo! **Cai demais em questões!** Ele é dado pelo produto das três dimensões! No caso do cubo, lembre-se que todas as arestas medem "a". Logo,

$$V = a \cdot a \cdot a$$

$$V = a^3$$

Esse é a fórmula para calcularmos o volume de um cubo.



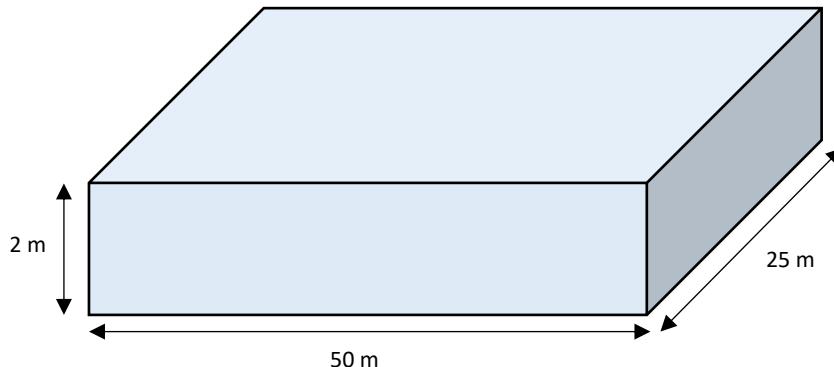
**(PM-SP/2021)** Estudos feitos em 2018 pelo Instituto Trata Brasil, a partir de dados do Sistema Nacional de Informações sobre Saneamento (Snis), mostrou que cerca de 38% da água potável que passa por sistemas de distribuição no Brasil é desperdiçada em vazamentos durante o processo de produção, tratamento e distribuição. Também entram nessa conta desvios ilegais e furtos de água. Esse volume de água equivale a 7 mil piscinas olímpicas de água potável jogadas fora todos os dias.

Considerando que piscinas olímpicas precisam ter um comprimento de 50 metros, uma largura de 25 metros e profundidade mínima de 2 metros, o volume de água potável desperdiçada diariamente nos sistemas de distribuição no Brasil, segundo o estudo citado anteriormente, é de, no mínimo,

- A) 6,65 bilhões de litros.
- B) 2,5 milhões de litros.
- C) 17,5 bilhões de litros.
- D) 17,5 milhões de litros.
- E) 6,65 milhões de litros.

**Comentários:**

A piscina olímpica tem a forma de um paralelepípedo com dimensões informadas pelo enunciado:



Vemos que o volume de um paralelepípedo é dado pelo **produto de suas três dimensões**. Assim,

$$V = 2 \cdot 50 \cdot 25 \rightarrow V = 2500 \text{ m}^3$$

Observe que a quantidade de água desperdiçada equivale a **7 mil piscinas dessas**.

$$V_{\text{água}} = 7000V \rightarrow V_{\text{água}} = 7000 \cdot 2500 \rightarrow V_{\text{água}} = 17.500.000 \text{ m}^3$$

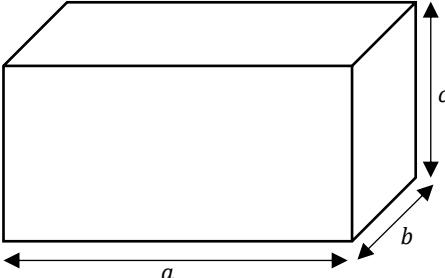
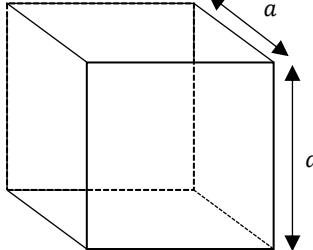
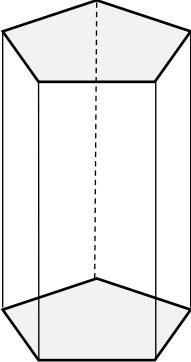
Observe que **o volume nas alternativas está em litros, mas encontramos em metros cúbicos**. Assim, para transformar metros cúbicos em litros, devemos **multiplicar o resultado por 1000**.

$$V_{\text{água}} = 17.500.000 \cdot 1000 \rightarrow V_{\text{água}} = 17.500.000.000 \text{ L}$$

Assim, a quantidade de água desperdiçada é de **17,5 bilhões de litros**.

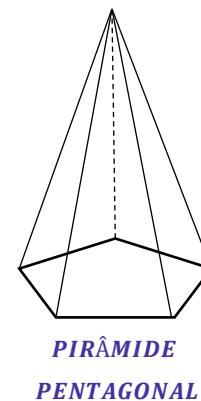
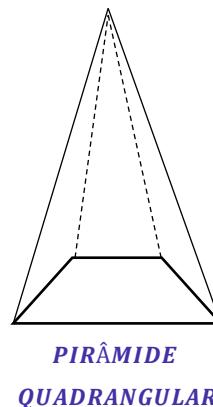
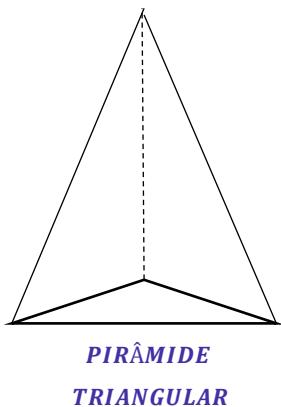
**Gabarito:** LETRA C.



Nome	Prisma	Área Superficial e Volume
Paralelepípedo		$A_{total} = 2 \cdot (ac + bc + ab)$ $V = abc$
Cubo		$A_{total} = 6a^2$ $V = a^3$
Prisma Qualquer		$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$ $V = A_b H$

## Pirâmide

Chegou a vez de falarmos das pirâmides! **Elas são poliedros!** Aqui, faces laterais serão triângulos!! Observe algumas.



Note que nas pirâmides, **vamos ter uma única base**. Ademais, algumas arestas que partem da base se encontram em um ponto superior, que vamos chamar de **vértice da pirâmide**.

### Áreas

A área superficial total de uma pirâmide é calculada de maneira muito semelhante à que vimos anteriormente para prismas. A diferença é que **não multiplicaremos a área da base por 2**, afinal, **aqui só temos uma única base mesmo**.

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base}$$

### Volume

Por sua vez, o volume de uma pirâmide é calculado por meio da seguinte expressão:

$$V = \frac{A_b H}{3}$$

Em que  **$A_b$  é a área da base** e  **$H$  é a altura**. Uma observação importante é que **há a divisão por 3**, fato que não acontece para os prismas.

**(PREF. PERUÍBE/2019)** Uma pirâmide de base retangular e altura 12 cm tem volume de 100 cm<sup>3</sup>. A área da base dessa pirâmide, em cm<sup>2</sup>, é

- A) 25.
- B) 26.
- C) 30.
- D) 36.
- E) 50.

**Comentários:**

Questão para **aplicarmos a fórmula que acabamos de ver**. O volume de uma pirâmide é dado por:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

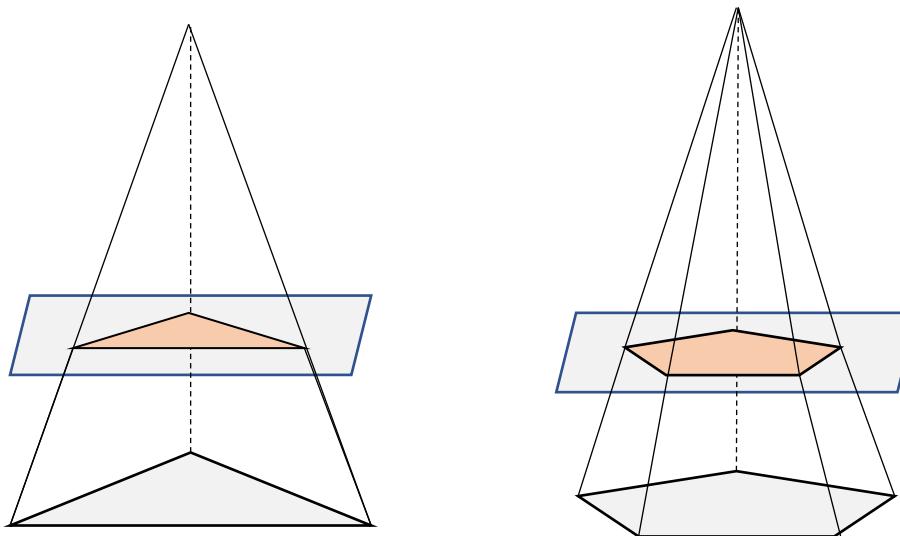
Como **o enunciado disse que  $V = 100 \text{ cm}^3$  e  $h = 12 \text{ cm}$** , vamos substituir esses valores na fórmula acima para determinar a área da base  $A_b$ .

$$100 = \frac{A_b \cdot 12}{3} \quad \rightarrow \quad 4 \cdot A_b = 100 \quad \rightarrow \quad A_b = 25 \text{ cm}^2$$

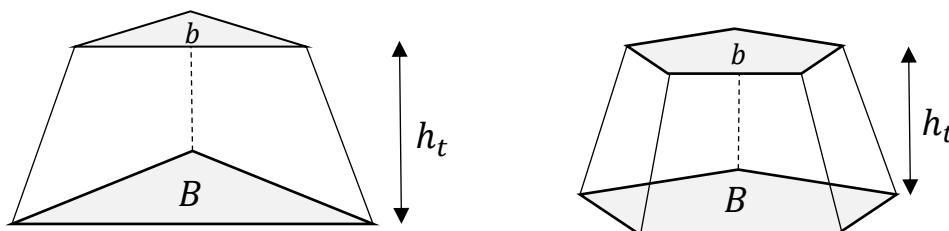
**Gabarito:** LETRA A.

**Tronco de Pirâmide**

Grosso modo, o tronco de pirâmide é um pedaço dela. Observe a situação:



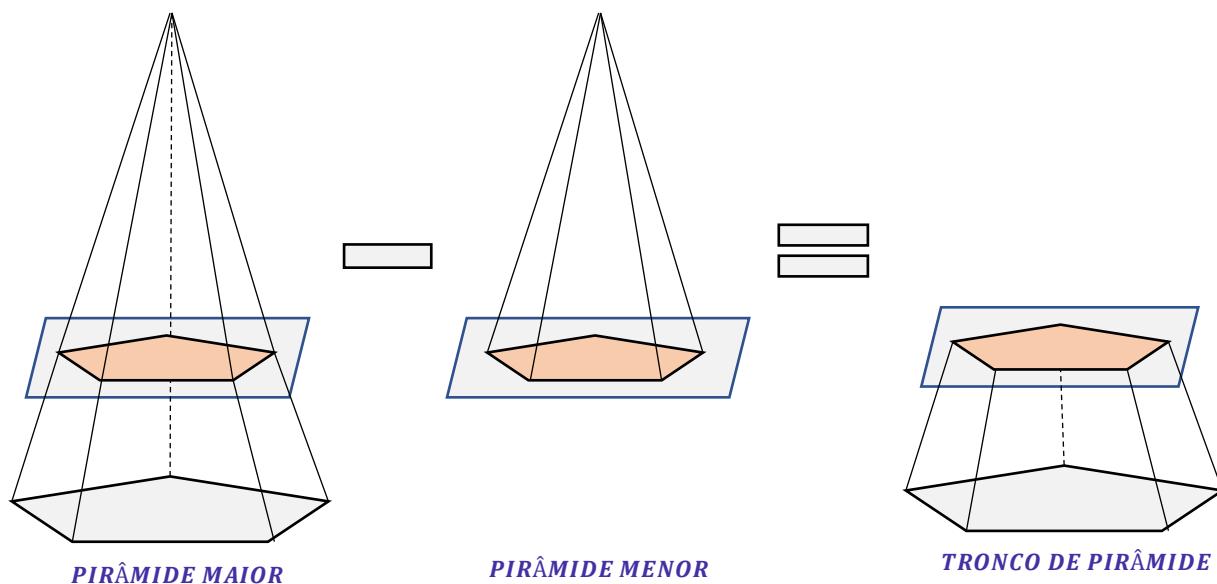
Temos um plano paralelo à base seccionando as pirâmides. Esse plano divide a pirâmide maior em duas partes: **uma pirâmide menor, na parte superior**, e **um tronco de pirâmide, na parte inferior**. Vou separar apenas os troncos para podermos analisá-los melhor.



**$h_t$  é a altura do tronco**, enquanto **B** representa a área da base maior e **b**, a área da base menor.

O volume desses troncos pode ser calculado de duas formas.

Para chegarmos na primeira forma, é importante entendermos o seguinte:



Assim, veja que podemos calcular o volume de um tronco pegando **o volume da pirâmide maior e subtraindo o volume da pirâmide menor**. Assim,

$$V_{tronco} = V_{pirâmide\ maior} - V_{pirâmide\ menor}$$

A segunda forma de calcularmos o volume de um tronco de pirâmide é aplicando a fórmula abaixo:

$$V = \frac{h_T}{3} (B + \sqrt{Bb} + b)$$

Relembrando:  **$h_t$  é a altura do tronco**, enquanto **B** representa a área da base maior e **b**, a área da base menor.

Para nosso curso, **não há custo benefício em demonstrar a expressão acima**. Ela cai muito raramente e em concursos específicos da área da matemática. De qualquer forma, na maioria das vezes poderemos usar a primeira alternativa.

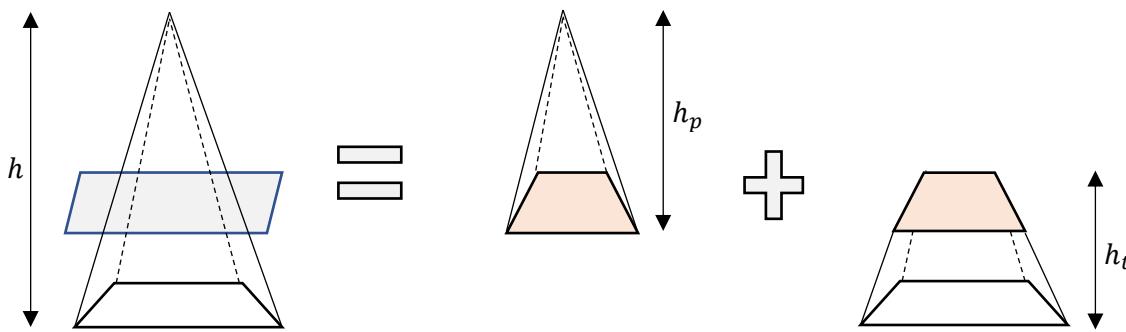


**(PREF. SOLÂNEA/2019 - ADAPTADA)** Uma pirâmide regular de base quadrada com  $h$  cm de altura é seccionada por um plano paralelo à base, determinando dois sólidos: uma pirâmide menor e um tronco de pirâmide. O volume do tronco de pirâmide é sete vezes o volume da pirâmide menor. Pode-se afirmar que a altura do tronco é: (use:  $B/b = 4$ )

- A)  $h/5$  cm  
 B)  $h/3$  cm  
 C)  $h/6$  cm  
 D)  $h/4$  cm  
 E)  $h/2$  cm

**Comentários:**

Temos a seguinte situação:



O enunciado disse que **o volume do tronco de pirâmide é sete vezes o volume da pirâmide menor**. Assim,

$$V_{tronco} = 7 \cdot V_{pirâmide menor} \quad (1)$$

Ademais, sabemos que:

$$V_{tronco} = V_{pirâmide maior} - V_{pirâmide menor} \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2):

$$7 \cdot V_{pirâmide menor} = V_{pirâmide maior} - V_{pirâmide menor}$$

Logo,

$$V_{pirâmide maior} = 8 \cdot V_{pirâmide menor} \quad (3)$$

Sabemos que **o volume de uma pirâmide** é dado por:

$$V = \frac{A_b H}{3}$$

- Para a **pirâmide maior**, ficamos com:

$$V_{pirâmide maior} = \frac{Bh}{3}$$

- Para a **pirâmide menor**, ficamos com:

$$V_{\text{pirâmide menor}} = \frac{bh_p}{3}$$

Assim, usando esses dois resultados em (3):

$$\frac{Bh}{3} = \frac{8bh_p}{3} \quad \rightarrow \quad h_p = \left(\frac{B}{b}\right) \frac{h}{8}$$

Usando o dado do enunciado que  $\frac{B}{b} = 4$ , ficamos com:

$$h_p = 4 \cdot \frac{h}{8} \quad \rightarrow \quad h_p = \frac{h}{2}$$

Essa é a altura da pirâmide menor em função de  $h$ . Para **encontrar a altura do tronco**, fazemos:

$$h_t = h - h_p$$

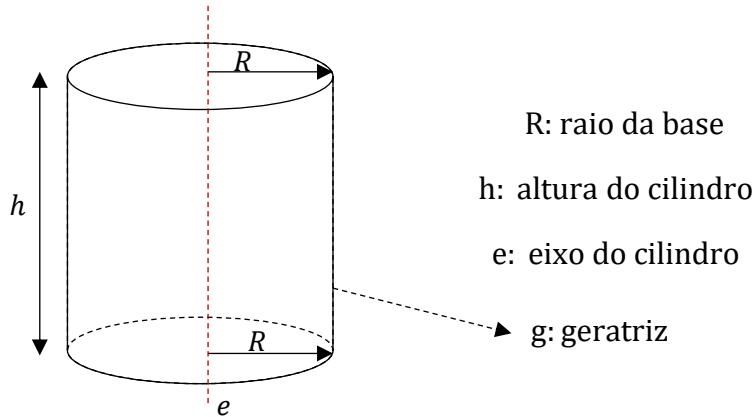
Substituindo,

$$h_t = h - \frac{h}{2} \quad \rightarrow \quad \mathbf{h_t = \frac{h}{2}}$$

**Gabarito:** LETRA E.

## Cilindro

Opa!! Entramos nos cilindros! Nesse ponto, deixamos de falar de poliedros. O cilindro, o cone e a esfera são exemplos do corpos redondos. A partir desse ponto, não precisaremos mais falar de vértices, arestas ou faces. Observe os elementos de um cilindro.



$R$ : raio da base

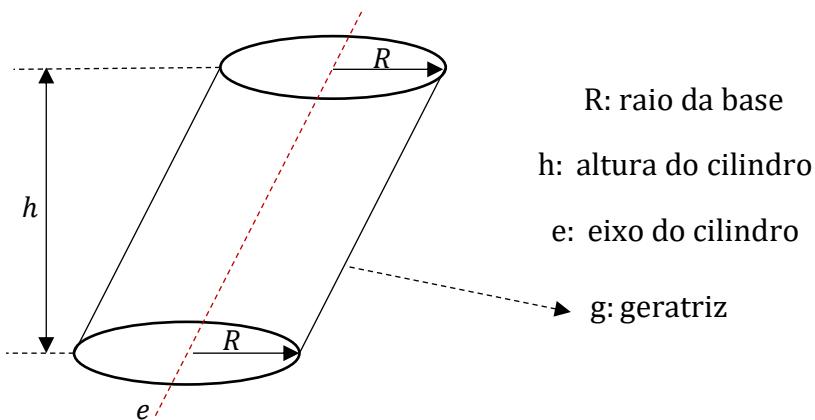
$h$ : altura do cilindro

$e$ : eixo do cilindro

$g$ : geratriz

Esse é um cilindro circular reto. Chamamos o cilindro de reto quando a geratriz for perpendicular ao plano das bases.

Agora, observe um exemplo de cilindro circular oblíquo.



$R$ : raio da base

$h$ : altura do cilindro

$e$ : eixo do cilindro

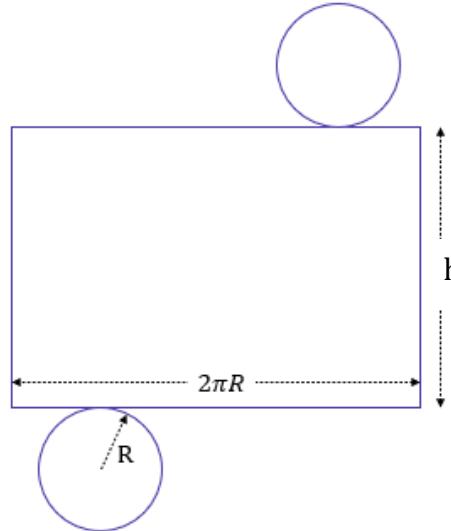
$g$ : geratriz

Na maioria das vezes, lidaremos com cilindros retos.

No entanto, vale a pena saber que também existem os cilindros oblíquos, tudo bem?

## Áreas

Para calcular a área superficial, é interessante planificarmos o cilindro circular reto.



Observe que quando planificamos um cilindro, a sua lateral é um retângulo de lados "2 $\pi$ R" e "h". Logo,

$$A_{lateral} = 2\pi Rh$$

Por sua vez, as bases são círculos. Com isso, a área da base fica:

$$A_{base} = \pi R^2$$

Como temos duas bases, devemos considerar essa área duas vezes. Assim, a área superficial total fica:

$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$$

$$A_{total} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$$

Colocando  $2\pi R$  em evidência:

$$A_{total} = 2\pi R(h + R)$$

## Volume

O volume de um cilindro é calculado da mesma forma que fizemos para o prisma.

$$V = A_b h$$

Como sabemos que a área da base é  $\pi R^2$ , podemos substituir:

$$V = \pi R^2 h$$



**(PM-SP/2021)** Para abastecer os carros da corporação, há um tanque cilíndrico de combustível, com 2 m de diâmetro e 1,5 m de altura. A capacidade desse tanque é de, aproximadamente,

- A) 4.100 litros.
- B) 4.400 litros.
- C) 4.700 litros.
- D) 5.000 litros.
- E) 5.300 litros.

**Comentários:**

Quando uma questão de geometria espacial falar de capacidade, ela estará se referindo ao volume. Observe que o formato do tanque é cilíndrico. Dessa forma, **é o volume de um cilindro que estamos procurando**. De acordo com o que acabamos de ver, essa grandeza é dada por:

$$V = A_b H$$

**A base de um cilindro é um círculo.** Assim, sua área pode ser calculada por meio da seguinte fórmula:

$$A_b = \pi R^2$$

**O enunciado forneceu o diâmetro.** Com ele, podemos determinar o raio R.

$$R = \frac{D}{2} \rightarrow R = \frac{2}{2} \rightarrow R = 1 \text{ m}$$

Com o raio em mãos, **podemos encontrar a área da base**.

$$A_b = \pi \cdot 1^2 \rightarrow A_b = \pi \text{ cm}^2$$

Como  $\pi \approx 3,14$ , vamos substituir:

$$A_b = 3,14 \text{ cm}^2$$

A questão também já trouxe a altura do cilindro,  $H = 1,5 \text{ m}$ . Assim,

$$V = A_b H \rightarrow V = 3,14 \cdot 1,5 \rightarrow V = 4,71 \text{ m}^3$$

Observe que **o nosso resultado foi em metros cúbicos ( $\text{m}^3$ )**. No entanto, as alternativas estão em litros (L).

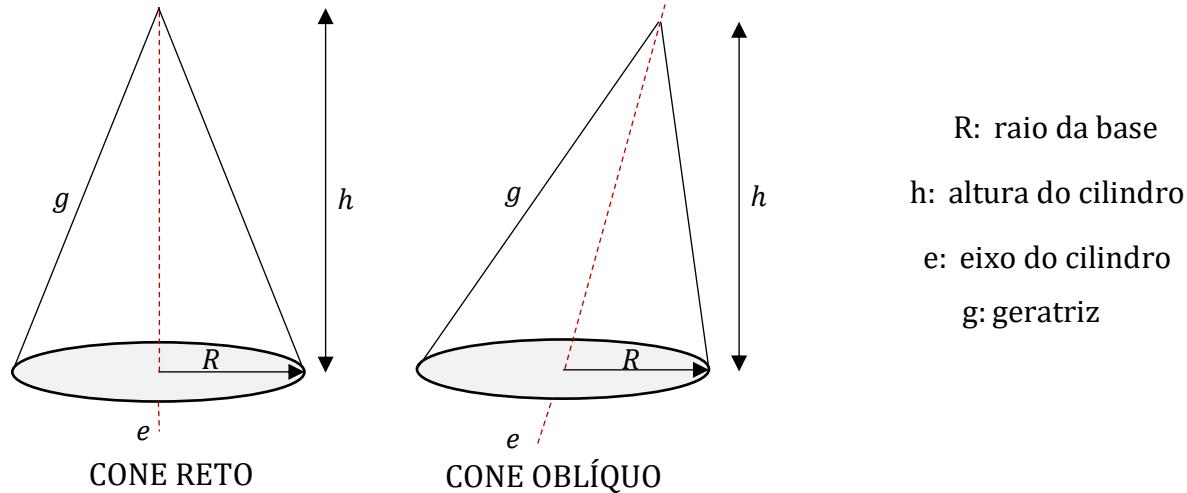
Para fazer essa transformação, **devemos multiplicar o resultado por 1000**.

$$V = 4,71 \cdot 1000 \rightarrow V = 4710 \text{ litros}$$

Como a questão fala em **valor aproximado**, podemos marcar a **alternativa C**.

## Cone

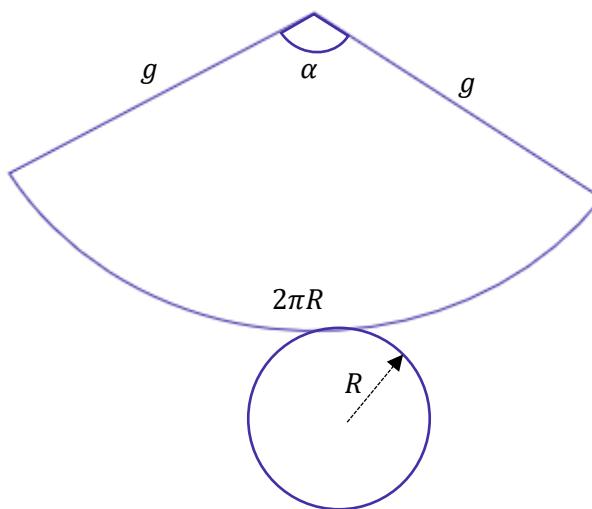
Nosso próximo corpo redondo **é o cone!** É a forma da casquinha de sorvete! Assim como nos cilindros, temos a "versão reta" e a "versão oblíqua". Vamos analisá-las.



Observe que no cone reto, **o eixo é perpendicular ao plano da base**. Por sua vez, no cone oblíquo, o eixo não será perpendicular. *Apresentados ao cone?!* Vamos aprender como calcular sua área superficial e seu volume.

## Áreas

Assim como fizemos anteriormente, é interessante **planificarmos o cone** para entendermos como sua área superficial é calculada.



Observe que a **área lateral é a área de setor circular cujo ângulo central é  $\alpha$  e raio é igual a geratriz**. Por meio de uma regra de três, podemos encontrar que:

$$A_{lateral} = \pi R g$$

Por sua vez, a base é um círculo. Sua área sai mais rapidamente:

$$A_{base} = \pi R^2$$

A área superficial total é a soma das duas.

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base}$$

$$A_{total} = \pi Rg + \pi R^2$$

Colocando " $\pi R$ " em evidência,

$$A_{total} = \pi R \cdot (g + R)$$

**(PREF. SALVADOR/2019)** Em um cone de revolução, cada geratriz mede 12 cm e faz  $30^\circ$  com o eixo do cone.

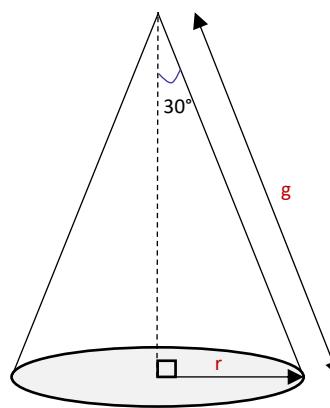
A área lateral desse cone em  $\text{cm}^2$  é

- A)  $24\pi$
- B)  $36\pi$
- C)  $48\pi$
- D)  $60\pi$
- E)  $72\pi$

#### Comentários:

A área lateral de um cone é dada por  $A_{lateral} = \pi r g$ . Perceba que **temos a geratriz, mas não temos o raio**.

Com isso, devemos encontrar o raio ( $r$ ) a partir do ângulo de  $30^\circ$  que a geratriz faz com o eixo do cone.



Note que temos um triângulo retângulo em que " $r$ " é o cateto oposto relativo ao ângulo de  $30^\circ$ , enquanto  $g$  é a hipotenusa. Dessa forma,

$$\sin 30^\circ = \frac{r}{g} \quad \rightarrow \quad r = g \cdot \sin 30^\circ$$

Substituindo  $g = 12$  e  $\sin 30^\circ = 1/2$ :

$$r = 12 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow r = 6 \text{ cm}$$

Com o raio e a geratriz, agora é só **substituirmos esses valores** na fórmula da área lateral.

$$A_{lateral} = \pi r g \rightarrow A_{lateral} = \pi \cdot 6 \cdot 12 \rightarrow A_{lateral} = 72\pi \text{ cm}^2$$

**Gabarito:** LETRA E.

## Volume

Já o volume de cone é semelhante ao que vimos para a pirâmide.

$$V = \frac{A_b h}{3}$$

Como sabemos que a base de um cone é um círculo, podemos usar que  $A_b = \pi R^2$ .

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$



**(PREF. ITANHAÉM/2020)** Assinale a alternativa que apresenta o volume de um cone que possui 18 cm de raio e 26 cm de altura. Use para  $\pi = 3,14$ .

- A) 1.469,52 cm<sup>3</sup>
- B) 13.225,68 cm<sup>3</sup>
- C) 26.451,36 cm<sup>3</sup>
- D) 8.817,12 cm<sup>3</sup>
- E) 4.408,56 cm<sup>3</sup>

### Comentários:

Questão para treinarmos a fórmula do volume de um cone.

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

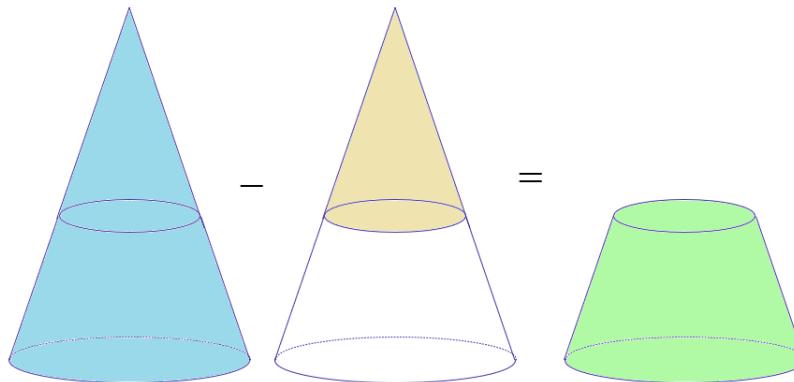
O enunciado nos disse que  **$R = 18 \text{ cm}$ ,  $h = 26 \text{ cm}$  e  $\pi = 3,14$** . Vamos substituir na fórmula acima.

$$V = \frac{3,14 \cdot 18^2 \cdot 26}{3} \rightarrow V = \frac{81,64 \cdot 324}{3} \rightarrow V = 8.817,12 \text{ cm}^3$$

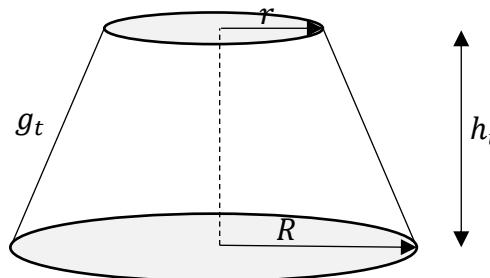
**Gabarito:** LETRA D.

## Tronco de Cone

Assim como na pirâmide, temos também o tronco de cone. Ele é formado da mesma forma: cortamos um cone maior com um plano paralelo a base. Esse corte divide o cone maior em duas partes: **um cone menor, na parte superior**, e **um tronco de cone, na parte inferior**. Observe como podemos imaginar a situação:



O tronco de cone está representado em verde. Vamos detalhar um pouco mais seus elementos.



R: raio da base maior

r: raio da base menor

$h_t$ : altura do tronco

$g_t$ : raio da base

Temos duas formas de calcular **o volume do tronco de cone**. A primeira é subtraindo o volume do cone menor do volume do cone maior.

$$V_{tronco} = V_{cone\ maior} - V_{cone\ menor}$$

A outra alternativa é por meio da seguinte fórmula:

$$V = \frac{\pi h_t}{3} (R^2 + Rr + r^2)$$

Mais uma vez, não fique tão assustado com essa parte relativa aos troncos, ela ainda não é nada comum em concursos. Coloco aqui para deixar nosso material mais completo, pois pode ser cobrado eventualmente.

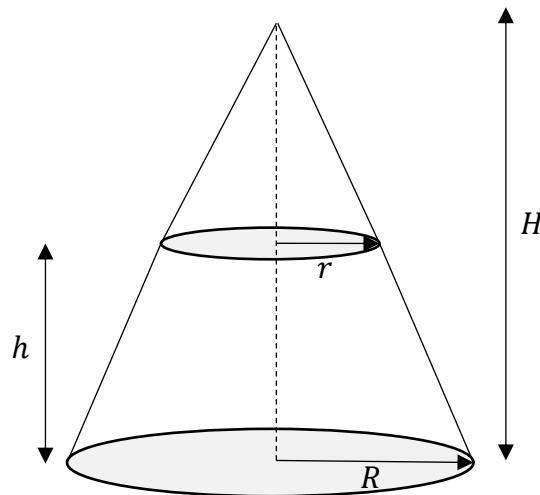


**(UFSC/2019)** Considere um cone de altura  $H$  e raio da base  $R$ . A que altura, a partir da base, se deve fazer um corte paralelo à base de forma que o tronco de cone correspondente tenha metade do volume do cone original?

- A)  $\frac{H(2-\sqrt[3]{4})}{2}$       B)  $\frac{H(\sqrt{2}-1)}{4}$       C)  $\frac{H(\sqrt[3]{2}-1)}{2}$       D)  $\frac{H(2-\sqrt[3]{2})}{2}$       E)  $\frac{H(4-\sqrt{2})}{4}$

**Comentários:**

Confira abaixo como fica uma a situação desenhada.



**O enunciado quer a altura  $h$ .** Para encontrá-la, devemos usar a informação de que **o tronco de cone tem metade do volume do cone original**. Assim,

$$V_{tronco} = \frac{V_{cone\ maior}}{2} \quad (1)$$

Além disso, lembre-se que o volume de um tronco de cone pode ser calculado da seguinte forma:

$$V_{tronco} = V_{cone\ maior} - V_{cone\ menor} \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2):

$$\frac{V_{cone\ maior}}{2} = V_{cone\ maior} - V_{cone\ menor} \quad \rightarrow \quad V_{cone\ menor} = \frac{V_{cone\ maior}}{2}$$

Com isso, lembre que **o volume de um cone** é expresso por:

$$V_{cone} = \frac{A_b H}{3}$$

Olhando para a figura que desenhamos, podemos escrever que:

- Para o cone maior:  $A_b = \pi R^2$
- Para o cone menor:  $A_b = \pi r^2$
- A altura do cone maior é  $H$ .
- A altura do cone menor é  $H - h$ .

Assim,

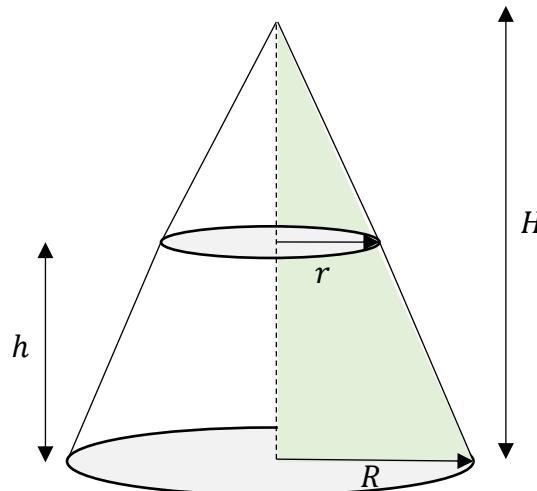
$$V_{cone\ maior} = \frac{\pi R^2 H}{3} \quad V_{cone\ menor} = \frac{\pi r^2 (H - h)}{3}$$

Substituindo na expressão que obtemos anteriormente.

$$\frac{\pi r^2 (H - h)}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi R^2 H}{3}$$

Simplificando,

$$2r^2(H - h) = R^2H \quad (3)$$



Observe o triângulo retângulo destacado. Nós podemos desenvolver uma **semelhança de triângulos**.

$$\frac{r}{R} = \frac{H - h}{H} \quad \rightarrow \quad r = R \cdot \left( \frac{H - h}{H} \right) \quad (4)$$

Substituindo (4) em (3):

$$2R^2 \cdot \left( \frac{H - h}{H} \right)^2 \cdot (H - h) = R^2 H$$

Podemos cortar os raios (R).

$$\frac{2(H-h)^3}{H^2} = H \quad \rightarrow \quad 2(H-h)^3 = H^3$$

Tirando **a raiz cúbica** dos dois lados.

$$\sqrt[3]{2(H-h)^3} = \sqrt[3]{H^3} \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{2} \cdot (H-h) = H$$

Isolando o "h".

$$\sqrt[3]{2}H - \sqrt[3]{2}h = H \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{2}h = \sqrt[3]{2}H - H \quad \rightarrow \quad h = \frac{H(\sqrt[3]{2} - 1)}{\sqrt[3]{2}}$$

Racionalizando com  $\sqrt[3]{2^2}$

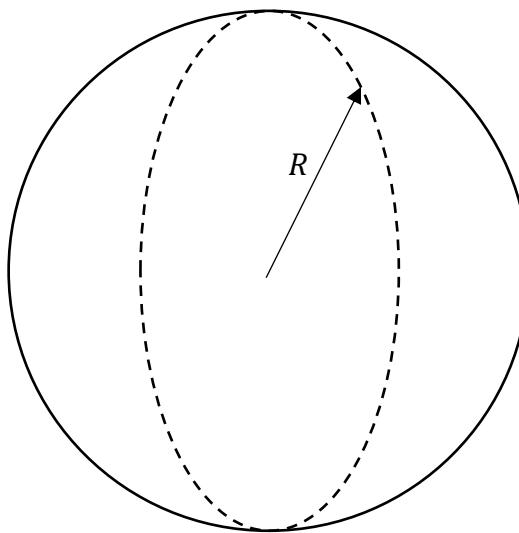
$$h = \frac{H(\sqrt[3]{2} - 1)}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{h = \frac{H(2 - \sqrt[3]{4})}{2}}$$

Ufa!! Essa não foi simples, em? Coloquei essa questão pois ela envolve diversos assuntos e serve como uma boa revisão! Note que falamos sobre: **cones, triângulo retângulo, semelhança de triângulos, racionalização e tudo isso com uma boa dose de manipulações algébricas!** (rsrs)

**Gabarito:** LETRA A.

## Esfera

Chegamos ao nosso último sólido e corpo redondo! **A esfera!** Acredito que é o que temos mais familiaridade e a abordaremos de forma bem direta nessa aula. Observe o seu formato.



Sobre a esfera, as questões **gostam de explorar a sua área superficial**. Para calculá-la, utilizamos a fórmula:

$$A_s = 4\pi R^2$$

Essa é uma outra fórmula em que o custo benefício de demonstrá-la é praticamente nulo.



**(PREF. SR CANAÃ/2019)** A área da superfície de uma esfera de diâmetro 6 m é: ( dado:  $\pi = 3$  )

- A)  $18 \text{ m}^2$ .
- B)  $36 \text{ m}^2$ .
- C)  $81 \text{ m}^2$ .
- D)  $108 \text{ m}^2$ .
- E)  $212 \text{ m}^2$ .

### Comentários:

Galera, a área superficial de uma esfera é dada:

$$A_s = 4\pi R^2$$

O enunciado nos forneceu o diâmetro. Sabemos que **o diâmetro é o dobro do raio**. Assim,

$$D = 2R \rightarrow R = \frac{D}{2} \rightarrow R = \frac{6}{2} \rightarrow R = 3 \text{ m}$$

O raio da esfera é 3 m. Podemos substituir na fórmula, não esquecendo que a questão pediu para considerar  $\pi = 3$ .

$$A_s = 4 \cdot 3 \cdot 3^2 \rightarrow A_s = 12 \cdot 9 \rightarrow \mathbf{A_s = 108 \text{ m}^2}$$

**Gabarito:** LETRA D.

Por fim, também devemos saber como calculamos o seu volume. Anote aí o volume da esfera:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$



**(PREF. CABEDELO/2020)** Considere uma esfera de raio de 3 cm. A razão entre o volume e a área da superfície dessa esfera é:

- A) 1 cm
- B) 1 cm<sup>3</sup>
- C) 2 $\pi$  cm
- D)  $\pi$  cm<sup>2</sup>
- E)  $\pi$

**Comentários:**

Questão apenas para **treinar as fórmulas** que estamos vendo. A esfera tem raio igual a 3 cm.

- Para calcular **a área superficial de uma esfera**, utilizamos a seguinte fórmula:

$$A_s = 4\pi R^2$$

Substituindo  $R = 3$ ,

$$A_s = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 \rightarrow A_s = 36\pi \text{ cm}^2$$

- Para calcular **o volume de uma esfera**, utilizamos a seguinte fórmula:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Substituindo  $R = 3$ ,

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^3}{3} \rightarrow V = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 \rightarrow V = 36\pi \text{ cm}^3$$

O enunciado pede a razão entre o volume e a área superficial.

$$\frac{V}{A_s} = \frac{36\pi \text{ cm}^3}{36\pi \text{ cm}^2} \rightarrow \frac{V}{A_s} = 1 \text{ cm}$$

**Gabarito:** LETRA A.

# QUESTÕES COMENTADAS

## Introdução

1. (DECEx/ESA/2021 - adaptada) Em relação à geometria espacial métrica, analise as sentenças abaixo assinalando V para verdadeiro ou F para falso.

- ( ) Um poliedro é convexo quando o segmento que liga dois dos seus pontos está sempre contido nele.
- ( ) Cada vértice de um poliedro é um ponto comum a três ou mais arestas.
- ( ) Um poliedro convexo é dito regular quando todas as suas faces são polígonos regulares e congruentes e em todos os vértices concorre o mesmo número de arestas.

A sequência correta relativa às afirmações acima é;

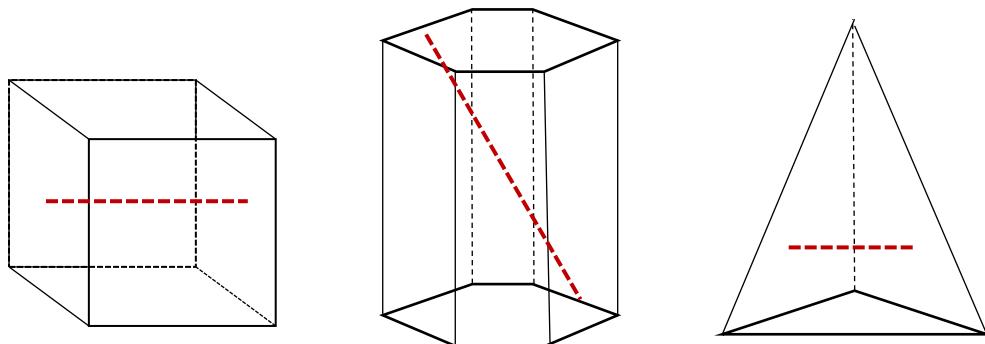
- A) VVF.
- B) FFF.
- C) VFV.
- D) VVV.
- E) FFV.

### Comentários:

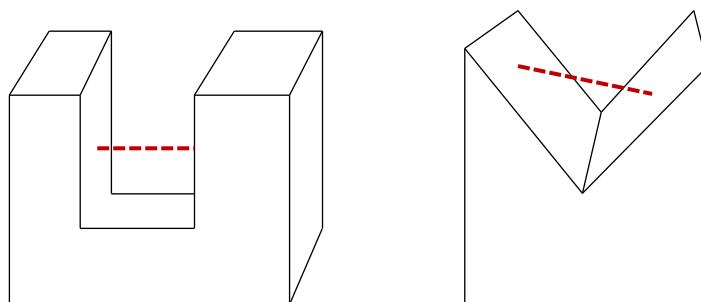
(V) Um poliedro é convexo quando o segmento que liga dois dos seus pontos está sempre contido nele.

**Certo.** É isso mesmo! *Lembra daquelas figuras que desenhamos na teoria?*

### Exemplos de Poliedros Convexos



### Exemplos de Poliedros Não Convexos

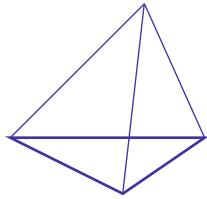
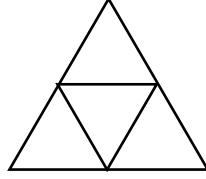
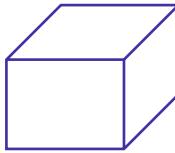
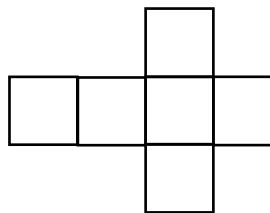
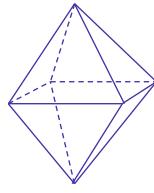
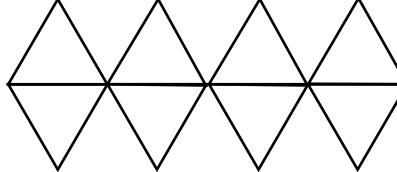
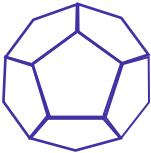
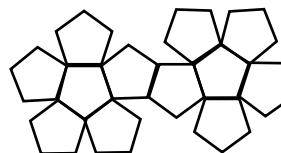
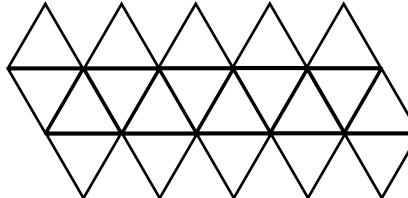


( ) Cada vértice de um poliedro é um ponto comum a três ou mais arestas.

**Certo.** Pessoal, o poliedro é uma figura **tridimensional**. Para ser assim, é necessário que em cada vértice concorram três ou mais arestas.

( ) Um poliedro convexo é dito regular quando todas as suas faces são polígonos regulares e congruentes e em todos os vértices concorre o mesmo número de arestas.

**Certo.** Essa é uma **ótima definição** para polígonos regulares. Para complementar, lembre-se que são **cinco** os **poliedros regulares**.

Poliedros Regulares		
Poliedro	Planificação	Informações
 Tetraedro Regular		O tetraedro regular é uma pirâmide em que todas as suas 4 faces são triângulos equiláteros (até a própria base). $V = 4$ $A = 6$
 Hexaedro Regular		O hexaedro regular é o "nome científico" do famoso cubo. Note que todas suas 6 faces são quadradas. $V = 8$ $A = 12$
 Octaedro Regular		O octaedro regular também é chamado de bipirâmide quadrada. As suas 8 faces são triângulos equiláteros. $V = 6$ $A = 12$
 Dodecaedro Regular		O dodecaedro regular é formado por 12 faces! Cada uma das faces é um pentágono regular. $V = 20$ $A = 30$
 Icosaedro Regular		O icosaedro regular é formado por 20 faces! Cada uma das faces é um triângulo equilátero. $V = 12$ $A = 30$

**2. (Inst. Excelência/PREF. TREMEMBÉ/2019)** A Geometria Espacial é o nome usual para geometria no espaço tridimensional, em que os sólidos estão inseridos. Um sólido é limitado por um ou mais planos ou superfícies, assim como as superfícies são limitadas por uma ou mais linhas. Sobre os sólidos geométricos, é CORRETO afirmar:

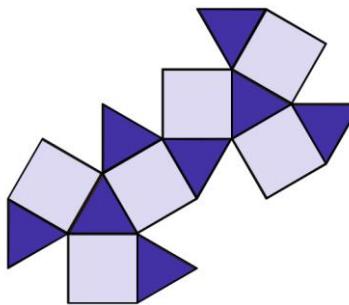
- A) Um cuboctaedro é um sólido geométrico irregular, composto de dois tipos de polígonos regulares: o quadrado e o triângulo.
- B) Pelo Teorema de Euler, sabe-se que o número de vértices somado ao número de faces é igual ao número de arestas subtraído de 2, para qualquer poliedro.
- C) A famosa pirâmide de Gizé, no Egito, não é um exemplo de poliedro.
- D) Poliedros regulares são muito conhecidos por sua simetria. No total, existem 6 poliedros regulares.

**Comentários:**

Vamos analisar cada alternativa.

- A) Um cuboctaedro é um sólido geométrico irregular, composto de dois tipos de polígonos regulares: o quadrado e o triângulo.

**É a nossa resposta.** O cuboctaedro é um sólido formado por **8 triângulos equiláteros e 6 quadrados**. Sua planificação tem o seguinte aspecto:



Ademais, anote aí que ele é um sólido conhecido como **arquimediano (ou semirregular)**, que são poliedros convexos que possuem **mais de um "tipo" de polígono regular em suas faces**. Caso você não conhecesse o cuboctaedro, também seria possível resolver essa questão por eliminação. Vamos ver!

- B) Pelo Teorema de Euler, sabe-se que o número de vértices somado ao número de faces é igual ao número de arestas subtraído de 2, para qualquer poliedro.

**Errado.** Lembre-se da Relação de Euler:  $V + F = A + 2$ . Ou seja, o número de vértices somado ao número de faces é igual ao número de arestas **somado** de 2.

- C) A famosa pirâmide de Gizé, no Egito, não é um exemplo de poliedro.

**Errado.** É um exemplo sim, pessoal. **Pirâmides são poliedros** e as estudaremos com mais detalhes nos capítulos posteriores dessa aula.

- D) Poliedros regulares são muito conhecidos por sua simetria. No total, existem 6 poliedros regulares.

**Errado.** Fizemos uma revisão disso na questão passada! São **5 poliedros regulares**: o tetraedro regular, o hexaedro regular, o octaedro regular, o dodecaedro regular e o icosaedro regular.

**Gabarito:** LETRA A.

3. (PRÓ-MUNICÍPIO/PREF. MASSAPÊ/2019) O que é um poliedro de Platão? Os poliedros de Platão são aqueles que possuem as seguintes propriedades:

I. Todas as faces apresentam o mesmo número de \_\_\_\_\_;

II. Todos os vértices possuem o mesmo número de arestas, isto é, se um vértice é a extremidade de três arestas, por exemplo, então todos serão também;

III. É \_\_\_\_\_;

IV. Seja o número de faces igual a  $F$ , de arestas igual a  $A$  e de vértices igual a  $V$ , então vale a seguinte relação, chamada de relação de \_\_\_\_\_:  $V - A + F = 2$ .

**A sequência correta para o preenchimento de lacunas está em:**

- A) Faces, côncavo, Euler;
- B) Faces, côncavo, Platão;
- C) Arestas, bidimensional, Platão;
- D) Arestas, convexo, Euler.

**Comentários:**

Questão para treinarmos um pouco as **propriedades** dos Poliedros de Platão.

I. Todas as faces apresentam o mesmo número de arestas. Afinal, todas as faces são polígonos regulares.

III. Os poliedros de Platão são convexos.

IV. Podemos relacionar o número de arestas, de vértices e de faces de um poliedro convexo por meio da Relação de Euler:  $V - A + F = 2$ .

**Gabarito:** LETRA D.

4. (DIRENS/EEAR/2021) Um poliedro convexo possui 20 faces, das quais 7 são pentagonais e 13 triangulares. Dessa forma, é correto afirmar que

- A) o número de arestas é 39.
- B) o número de arestas é 74.
- C) o número de vértices é 19.
- D) o número de vértices é 23.

**Comentários:**

Essa é uma questão clássica para aplicarmos a Relação de Euler. Perceba que o enunciado já forneceu que o **número de faces (F)** é 20. Como ele falou que 7 são pentagonais e 13 são triangulares, podemos encontrar o número de arestas.

**Nas faces pentagonais, temos 5 arestas em cada face.** Assim,

$$A_5 = 7 \cdot 5 \quad \rightarrow \quad A_5 = 35$$

Da mesma forma, **nas faces triangulares, temos três arestas em cada face**. Logo,

$$A_3 = 3 \cdot 13 \rightarrow A_3 = 39$$

Agora, vamos somar essas duas quantidades:

$$A' = A_5 + A_3 = 35 + 39 = 74$$

Cuidado aqui, galera! **Aqui tem o pulo do gato!** Lembre-se que uma aresta é comum a duas faces, ou seja, quando fazemos a conta acima, **contamos uma mesma aresta duas vezes!** É preciso dividir o resultado por 2 para encontrarmos o número de arestas verdadeiro.

$$A = \frac{A'}{2} \rightarrow A = \frac{74}{2} \rightarrow A = 37$$

Com o número de faces (F) e o número de arestas (A), podemos encontrar o número de vértices (V) por meio da Relação de Euler.

$$V + F = A + 2 \rightarrow V + 20 = 37 + 2 \rightarrow V + 20 = 39 \rightarrow \boxed{V = 19}$$

**Gabarito:** LETRA C.

**5. (QUADRIX/SEDF/2021)** Um cuboctaedro é um poliedro convexo composto por oito faces triangulares regulares e seis faces quadradas. Considerando essa informação, julgue o item.

O número de vértices do cuboctaedro é igual a 12.

#### Comentários:

Mais uma questão desse tal de cuboctaedro! Dessa vez, precisaremos usar a Relação de Euler para determinar o número de vértices (V).

Temos **oito faces triangulares**. Assim,

$$A_3 = 8 \cdot 3 \rightarrow A_3 = 24$$

Temos também **seis faces quadradas**. Logo,

$$A_4 = 6 \cdot 4 \rightarrow A_4 = 24$$

Mais uma vez, vamos somar essas duas quantidades de arestas.

$$A' = A_3 + A_4 = 24 + 24 = 48$$

Sempre cuidado nesse momento! Não é essa quantidade de arestas que vamos usar na fórmula de Euler! **É a metade dessa quantidade.** Isso acontece, pois, **cada aresta é comum a duas faces**. Sendo assim, ao realizar os cálculos acima, contamos uma mesma aresta duas vezes!

$$A = \frac{A'}{2} \rightarrow A = \frac{48}{2} \rightarrow A = 24$$

Pronto! Essa é a quantidade de arestas que usaremos na fórmula. Por fim, note que **como são 8 faces triangulares e 6 faces quadradas**, então temos um **total de 14 faces**. Na Relação de Euler fica:

$$V + F = A + 2 \quad \rightarrow \quad V + 14 = 24 + 2 \quad \rightarrow \quad V = 26 - 14 \quad \rightarrow \quad \boxed{V = 12}$$

**Gabarito: CERTO**

**6. (GUALIMP/PREF. CONC. MACABU/2020)** Os alunos do curso de Licenciatura em Matemática construíram durante a aula de Geometria, um poliedro de isopor. Ao analisarem melhor a figura, uma aluna verificou que o número de vértices é o quádruplo do número de faces acrescido de dois. Um outro aluno verificou que número de arestas é igual ao triplo do número de faces acrescido de doze. Com essas duas observações feitas pelos alunos, esse poliedro possui quantos vértices?

- A) 6.
- B) 26.
- C) 30.
- D) 32.

**Comentários:**

Vamos equacionar os fatos verificados por cada um dos alunos.

- O número de vértices é o quádruplo do número de faces acrescido de dois.

$$V = 4F + 2$$

- O número de arestas é igual ao triplo do número de faces acrescido de doze.

$$A = 3F + 12$$

Podemos usar essas duas informações na **Relação de Euler**.

$$V + F = A + 2$$

$$(4F + 2) + F = (3F + 12) + 2$$

$$5F + 2 = 3F + 14$$

$$2F = 12 \quad \rightarrow \quad F = 6$$

Esse poliedro tem **6 faces**. Podemos usar essa informação para encontrarmos o número de vértices.

$$V = 4F + 2 \quad \rightarrow \quad V = 4 \cdot 6 + 2 \quad \rightarrow \quad \boxed{V = 26}$$

**Gabarito: LETRA B.**

**7. (LEGALLE/PREF. GRAVATAÍ/2019)** Um poliedro convexo possui 20 faces e 12 vértices. O número de arestas desse poliedro é:

- A) 26.

- B) 28.
- C) 30.
- D) 32.
- E) 34.

**Comentários:**

Questão para aplicarmos a **Relação de Euler** diretamente!

De acordo com o enunciado, **o número de faces é 20**. Logo,  $F = 20$ .

Por sua vez, **o número de vértices é 12**. Assim,  $V = 12$ .

A Relação de Euler diz que:

$$V + F = A + 2$$

$$12 + 20 = A + 2 \quad \rightarrow \quad A = 32 - 2 \quad \rightarrow \quad \boxed{A = 30}$$

**Gabarito:** LETRA C.

# QUESTÕES COMENTADAS

## Prisma

### CEBRASPE

#### 1. (CESPE/SEDUC-AL/2021) Julgue o item subsequente, relativos a geometria.

Suponha que o volume (em  $\text{cm}^3$ ) de um cubo seja numericamente menor do que a área (em  $\text{cm}^2$ ) de sua superfície, isto é, a soma das áreas de suas faces. Nessa situação, o comprimento da aresta desse cubo é inferior a 6 cm.

#### Comentários:

Vamos relembrar as fórmulas do volume do cubo e da área superficial.

#### 1) Volume do cubo

$$V = a^3$$

#### 2) Área superficial

$$A_s = 6a^2$$

A questão quer o valor da aresta "a" para que  $V$  seja inferior a  $A_s$ .

$$V < A_s \quad \rightarrow \quad a^3 < 6a^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{a < 6 \text{ cm}}$$

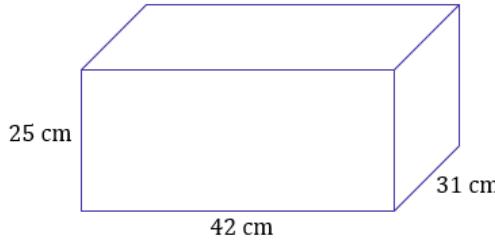
**Gabarito:** CERTO.

2. (CESPE/TJ-PR/2019) Mesmo com a informatização dos processos, ainda é grande o volume de papéis consumidos nas instituições públicas, o que demanda grandes espaços para seu armazenamento. Por exemplo, uma caixa na forma de um paralelepípedo retângulo medindo 31 cm de largura, 25 cm de altura e 42 cm de comprimento armazena 10 resmas de papel A4. Nesse caso, para armazenar 1.000 dessas caixas em um contêiner, é necessário que a capacidade desse contêiner seja de

- A) 32,55  $\text{m}^3$ .
- B) 39,20  $\text{m}^3$ .
- C) 77,50  $\text{m}^3$ .
- D) 98  $\text{m}^3$ .
- E) 105  $\text{m}^3$ .

#### Comentários:

Temos uma caixa no formato de paralelepípedo.



Sabemos que para calcular o volume de um paralelepípedo, devemos **multiplicar suas três dimensões**. Note que **as dimensões estão em centímetros e as respostas estão em metros cúbicos**. Para transformar centímetros em metros, **basta dividir aquele por 100**. Assim, o volume de uma única caixa é:

$$V = 0,25 \cdot 0,42 \cdot 0,31 \rightarrow V = 0,03255 \text{ m}^3$$

Veja que esse volume é **o volume de uma única caixa**. O enunciado quer saber o volume de 1000 delas. Logo, devemos multiplicar o resultado por 1000.

$$V_{total} = 1000 \cdot V \rightarrow V_{total} = 1000 \cdot 0,03255 \rightarrow V_{total} = 32,55 \text{ m}^3$$

**Gabarito:** LETRA A.

**3. (CESPE/FUB/2018)** Paulo, Maria e João, servidores lotados em uma biblioteca pública, trabalham na catalogação dos livros recém-adquiridos. Independentemente da quantidade de livros a serem catalogados em cada dia, Paulo cataloga  $1/4$ , Maria cataloga  $1/3$  e João,  $5/12$ . A respeito da catalogação de livros por esses servidores, julgue o item a seguir.

**Situação hipotética:** Cada um dos livros que serão catalogados em três dias de trabalho constitui um sólido que tem a forma de um paralelepípedo retângulo de  $2.000 \text{ cm}^3$  de volume. **Assertiva:** Nessa situação, se, nesse período, João catalogar 375 desses livros, então, nesse período, os três servidores juntos catalogarão uma quantidade de livros cuja soma dos volumes será superior a  $2 \text{ m}^3$ .

#### Comentários:

Beleza, vamos primeiro **determinar a quantidade total de livros**. O enunciado adiantou para nós e disse que **João cataloga 375** deles. Esse valor corresponde a  $5/12$  da quantidade total de livros. Podemos fazer uma regra de três simples e determinar quantos livros foram catalogados ao total, tudo bem?!

$$\begin{array}{ccc} 375 & \xleftarrow{\hspace{1cm}} & \frac{5}{12} \\ x & \xleftarrow{\hspace{1cm}} & 1 \end{array}$$

Multiplicando cruzado, ficamos com:

$$\frac{5x}{12} = 375 \rightarrow x = 900$$

Logo, **o total de livros é 900**. Pessoal, se não ficou claro, vou tentar explicar melhor.

- Quando o enunciado fala que João cataloga 5/12 dos livros, podemos dizer, com outras palavras, que João cataloga  $5/12 = 0,41666\dots = \mathbf{41,6\% dos livros}$ . Tudo bem?!
- Além disso, a questão disse que João catalogou 375 livros. Ora, podemos fazer uma regra de três a partir daí. Pensamos assim: "se 375 livros correspondem a 41,6%, então  $x$  livros correspondem a 100%".

Se são 900 livros e **cada livro tem  $2.000 \text{ cm}^3$** , então o volume total ocupado pelos 900 é dado por:

$$V_{total} = 900 \cdot 2000 \quad \rightarrow \quad V_{total} = 1.800.000 \text{ cm}^3$$

O problema é que encontramos um volume em  $\text{cm}^3$  e **é preciso comparar com  $\text{m}^3$** . Para fazer a conversão, podemos usar a seguinte estratégia:

- 1  $\text{m}^3$  equivale a multiplicar "1 m" três vezes.

$$V = 1 \text{ m}^3 = (1 \text{ m}) \cdot (1 \text{ m}) \cdot (1 \text{ m})$$

- Quantos centímetros existem em "1 m"? Ora, **1 metro tem 100 centímetros**.

$$V = 1 \text{ m}^3 = (100 \text{ cm}) \cdot (100 \text{ cm}) \cdot (100 \text{ cm}) = 1.000.000 \text{ cm}^3$$

Logo, acabamos de encontrar 1  $\text{m}^3$  tem 1.000.000  $\text{cm}^3$ . Assim, podemos fazer outra regra de três.

$$\begin{array}{ccc} 1 \text{ m}^3 & \xleftarrow{\hspace{1cm}} & 1.000.000 \text{ cm}^3 \\ x & \xleftarrow{\hspace{1cm}} & 1.800.000 \text{ cm}^3 \end{array}$$

Multiplicando cruzado.

$$1.000.000 \cdot x = 1.800.000 \quad \rightarrow \quad x = 1,8 \text{ m}^3$$

Note que a soma dos volumes **é inferior a 2  $\text{m}^3$**  e, portanto, o item encontra-se errado.

**Gabarito:** ERRADO.

## CESGRANRIO

**4. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2014)** Para embalar cada um dos sabonetes artesanais que produz, Sofia utiliza um pedaço de papel cuja área corresponde a  $4/3$  da superfície total do sabonete, que tem a forma de um paralelepípedo retângulo de 6 cm de comprimento, 4,5 cm de largura e 2 cm de altura. Qual é, em  $\text{cm}^2$ , a área do pedaço de papel?

- A) 32
- B) 64
- C) 72
- D) 88
- E) 128

**Comentários:**

Note que temos **um paralelepípedo de dimensões  $6 \text{ cm} \times 4,5 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$** . Para calcular a área total desse sólido, usamos a seguinte expressão:

$$A_{sup} = 2 \cdot (ab + bc + ca)$$

Substituindo  **$a = 6$ ,  $b = 4,5$  e  $c = 2$** , ficamos com,

$$A_{sup} = 2 \cdot (6 \cdot 4,5 + 4,5 \cdot 2 + 6 \cdot 2)$$

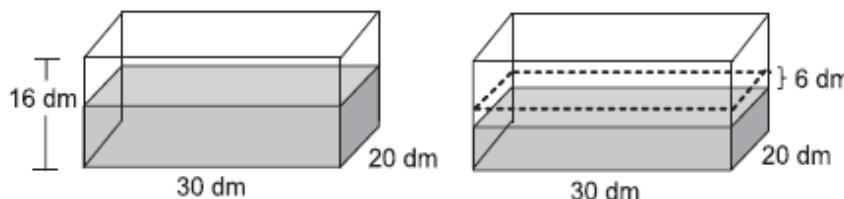
$$A_{sup} = 2 \cdot (27 + 9 + 12) \rightarrow A_{sup} = 96 \text{ cm}^2$$

Com a área do papel **é  $4/3$  da área da superfície total** do sabonete,

$$A_{papel} = \frac{4}{3} A_{sup} \rightarrow A_{papel} = \frac{4 \cdot 96}{3} \rightarrow A_{papel} = 128 \text{ cm}^2$$

**Gabarito:** LETRA E.

**5. (CESGRANRIO/BR/2013)** Um reservatório em forma de paralelepípedo, com 16 dm de altura, 30 dm de comprimento e 20 dm de largura, estava apoiado sobre uma base horizontal e continha água até a metade de sua capacidade. Parte da água foi consumida e, assim, o nível da água baixou 6 dm, como mostra a Figura a seguir.



**Quantos litros de água foram consumidos?**

- A) 1800
- B) 2400
- C) 3600
- D) 5400
- E) 7200

**Comentários:**

Para sabermos quantos **litros** de água foram consumidos, devemos lembrar **o volume de um paralelepípedo**:

$$V = abc$$

Usando  $a = 30$ ,  $b = 20$  e  $c = 6$ , ficamos com,

$$V = 30 \cdot 20 \cdot 6 \rightarrow V = 3.600 \text{ dm}^3$$

Era interessante saber que:  $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$

Logo,

$$V = 3.600 \text{ L}$$

Obs.:

- Pessoal, há algumas informação do enunciado que não precisamos usar. Como a questão pede apenas a **quantidade de água consumida**, basta usarmos a **altura que a água "desceu" no reservatório**. Para a área da base, utilizamos as dimensões do retângulo 30 dm x 20 dm.

**Gabarito:** LETRA C.

**6. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2012)** Para montar um cubo, dispõe-se de uma folha de cartolina retangular, de 30 cm de comprimento e 20 cm de largura. As faces do cubo, uma vez recortadas, serão unidas com fita adesiva. Qual é, em centímetros, a medida máxima da aresta desse cubo?

- A) 7
- B) 8
- C) 9
- D) 10
- E) 11

**Comentários:**

Galera, primeiramente vamos **calcular área dessa folha retangular**.

$$A_{\text{folha}} = 30 \cdot 20 \rightarrow A_{\text{folha}} = 600 \text{ cm}^2$$

Essa área deve **cobrir toda a área superficial do cubo**, que pode ser encontrada por:

$$A_{\text{cubo}} = 6a^2$$

Em que "**a**" é a aresta do cubo. Quando igualamos as duas expressões,

$$6a^2 = 600 \rightarrow a^2 = 100 \rightarrow a = 10 \text{ cm}$$

**Gabarito:** LETRA D.

**FCC**

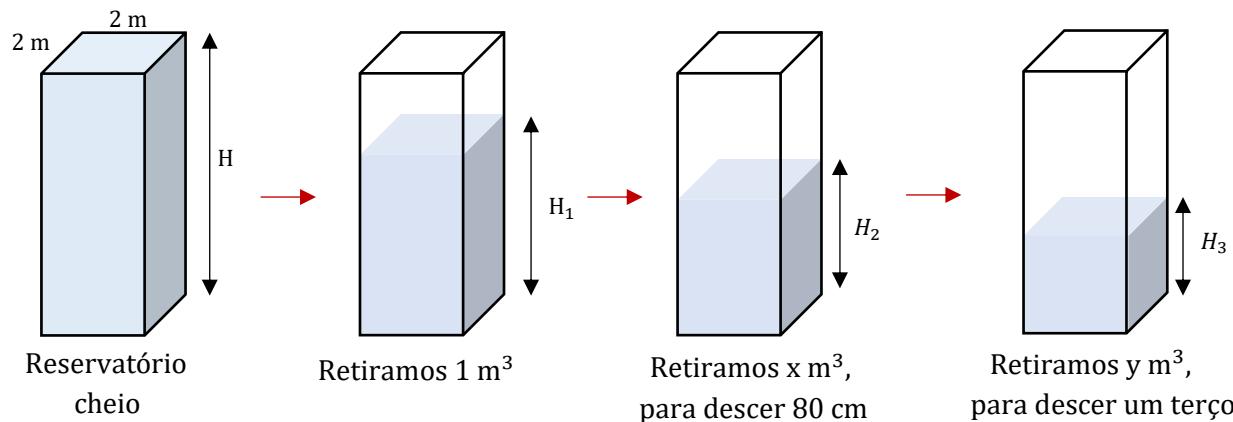
**7. (FCC/SABESP/2019)** Um reservatório, inicialmente cheio de água, tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo cuja base é um quadrado de lado 2 m. Em um primeiro momento, é retirado 1 m<sup>3</sup> de água desse reservatório e, depois, é retirada mais uma determinada quantidade de água, de maneira que essa segunda retirada faz o nível da água no reservatório descer 80 cm. Finalmente, é retirado um terço da água que ainda se encontra no reservatório, sobrando 2,8 m<sup>3</sup> de água em seu interior. A altura desse reservatório, em metros, mede

- A) 1
- B) 2,1

- C) 2,8  
D) 2,5  
E) 3

**Comentários:**

É interessante esquematizarmos os quatro momentos que o enunciado descreve.



Em um primeiro momento, temos o reservatório cheio e **dele é retirado um volume de  $1 \text{ m}^3$  de água**. Com isso, ficamos com a seguinte pergunta: *qual a nova altura da água nesse reservatório?*

Para responder isso, vamos inicialmente determinar a área da base desse paralelepípedo. Como a base é um quadrado de lado igual a 2 metros, podemos fazer:

$$A_b = 2^2 \rightarrow A_b = 4 \text{ m}^2$$

Com essa área da base, um **volume de  $1 \text{ m}^3$**  terá a seguinte altura em um paralelepípedo:

$$4h = 1 \rightarrow h = \frac{1}{4} \rightarrow h = 0,25 \text{ m}$$

Logo, podemos dizer que **a altura da água reduziu 0,25 metros**. Assim,

$$H_1 = H - 0,25$$

Depois disso, foi retirada mais uma quantidade, que **reduziu a altura da água em 80 cm** (0,8 metros). Logo,

$$H_2 = H_1 - 0,80 \rightarrow H_2 = H - 0,25 - 0,8 \rightarrow H_2 = H - 1,05$$

Por último, **foi retirada um terço da quantidade de água** que ainda estava no reservatório. Sendo assim, a altura foi reduzida de um terço.

$$H_3 = H_2 - \frac{H_2}{3} \rightarrow H_3 = \frac{2H_2}{3}$$

Substituindo  $H_2$ :

$$H_3 = \frac{2H - 2,10}{3}$$

Como o enunciado fala que **sobrou 2,8 m<sup>3</sup> dentro do reservatório**, podemos escrever que:

$$A_b H_3 = 2,8$$

Substituindo  $A_b = 4 \text{ m}^2$  e  $H_3 = \frac{2H - 2,10}{3}$ , ficamos com:

$$\frac{4 \cdot (2H - 2,10)}{3} = 2,8 \quad \rightarrow \quad 2H - 2,10 = 2,1 \quad \rightarrow \quad 2H = 4,2 \quad \rightarrow \quad H = 2,10 \text{ m}$$

Logo, a **altura do reservatório é H = 2,10 m**.

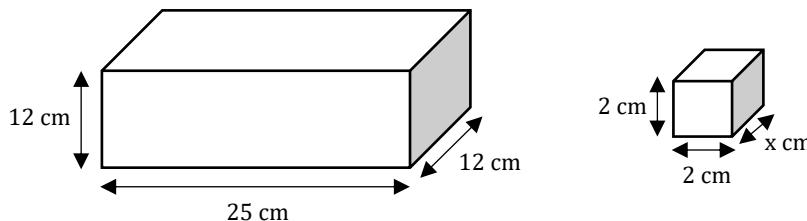
**Gabarito:** LETRA B.

**8. (FCC/PREF. SJRP/2019)** Uma caixa, na forma de paralelepípedo reto-retângulo, tem 25 cm de comprimento, 12 cm de largura e 12 cm de altura. Essa caixa será usada para armazenar pequenos blocos maciços, também na forma de paralelepípedos reto-retângulos, em que uma das faces é um quadrado de lado 2 cm. Sabendo que no máximo 180 desses blocos cabem totalmente no interior da caixa, a área total de cada bloco, em cm<sup>2</sup>, é:

- A) 36
- B) 40
- C) 48
- D) 52
- E) 64

**Comentários:**

Primeiramente, vamos desenhar a situação proposta no enunciado. Isso é fundamental, galera.



Do lado esquerdo da figura acima temos a caixa em que vamos colocar os blocos. Vamos calcular seu volume.

$$V_{\text{caixa}} = 12 \cdot 25 \cdot 12 \quad \rightarrow \quad V_{\text{caixa}} = 3.600 \text{ cm}^3$$

Do lado direito, o pequeno bloco que iremos colocar dentro da caixa. Note que só temos duas de suas dimensões, pois o enunciado falou que **uma de suas faces é um quadrado de lado igual a 2**. A dimensão desconhecida chamamos de "x". Podemos calcular o volume do bloco em função desse "x".

$$V_{\text{bloco}} = 2 \cdot 2 \cdot x \quad \rightarrow \quad V_{\text{bloco}} = 4x$$

Como **180 desses blocos cabem inteiramente na caixa**, podemos escrever que:

$$\frac{V_{\text{caixa}}}{V_{\text{bloco}}} = 180 \rightarrow \frac{3.600}{4x} = 180 \rightarrow x = \frac{3.600}{720} \rightarrow x = 5 \text{ cm}$$

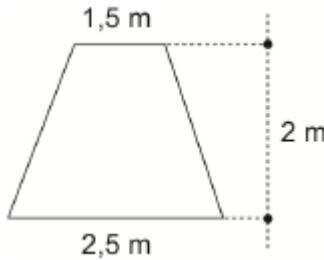
Pronto, temos todas as dimensões do bloco, e é possível calcular sua área total.

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot (ab + bc + ca)$$

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot (2 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 5) \rightarrow A_{\text{total}} = 2 \cdot 24 \rightarrow A_{\text{total}} = 48 \text{ cm}^2$$

**Gabarito:** LETRA C.

**9. (FCC/METRO-SP/2019)** Numa indústria alimentícia, construiu-se um reservatório de seção trapezoidal constante para o armazenamento de água potável. As medidas internas da seção do reservatório estão indicadas na figura.



Num determinado dia em que o reservatório apresentava-se completamente vazio, com o objetivo de enchê-lo até 80% de sua capacidade, um registro de alimentação, de vazão 25,4 litros por minuto, foi aberto. O encarregado do setor não percebeu, no entanto, que um ralo de escoamento do reservatório, cuja vazão era de 6,2 litros por minuto, também estava aberto. Sabendo que o tempo transcorrido do início do processo até a obtenção do objetivo exposto foi de 3 horas e 20 minutos, é correto concluir que a profundidade do reservatório, em metros, é de:

- A) 1,6.
- B) 1,2.
- C) 1,0.
- D) 0,8.
- E) 1,4.

#### Comentários:

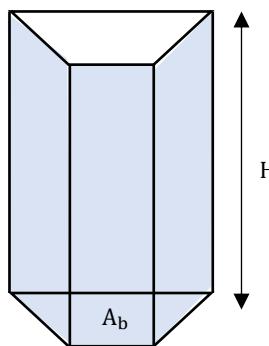
Pessoal, com outras palavras, o enunciado fala que **a base do reservatório é um trapézio**. Como vamos trabalhar com o volume de um sólido, é razoável já calcularmos a área da base. Lembre-se que a área do trapézio é dada por:

$$A_b = \frac{(b + B)h}{2}$$

Pela figura da questão, tiramos que **a base menor mede 1,5 m; a base maior, 2,5m; e a altura é 2 m**. Assim,

$$A_b = \frac{(1,5 + 2,5) \cdot 2}{2} \rightarrow A_b = 4,0 \text{ m}^2$$

Uma vez que temos esse valor, agora vamos discutir um pouco sobre o sólido. Galera, a questão diz que a **seção se mantém constante em todo reservatório**, isso nos indica que estamos lidando com um prisma.



Estamos interessados em determinar "H", ou seja, a altura do reservatório.

Para isso, note que se um registro alimenta o reservatório a uma vazão de 25,4 L/minuto e o ralo escoa essa água a uma vazão de 6,2 L/minuto, então, na prática, a vazão "real" será de:

$$V = 25,4 - 6,2 \rightarrow V = 19,2 \text{ L/min}$$

Considerando que em **3h20min temos 200 minutos**, então podemos fazer uma regra de três para encontrar o volume de água que encheu 80% do reservatório.

$$\begin{array}{ccc} 19,2 \text{ L} & \longleftrightarrow & 1 \text{ min} \\ x & \longleftrightarrow & 200 \text{ min} \end{array}$$

Multiplicando cruzado.

$$x = 19,2 \cdot 200 \rightarrow x = 3.840 \text{ L}$$

No entanto, a unidade "litros" não é muito boa para essa questão, pois **precisaremos encontrar dimensões que estão expressa em "metros"**. Para resolver essa situação, é interessante mudarmos de litro para  $\text{m}^3$ . Para isso, podemos usar uma outra regra de três.

$$\begin{array}{ccc} 0,001 \text{ m}^3 & \longleftrightarrow & 1 \text{ L} \\ y & \longleftrightarrow & 3.840 \text{ L} \end{array}$$

Multiplicando cruzado.

$$y = 0,001 \cdot 3.840 \rightarrow y = 3,84 \text{ m}^3$$

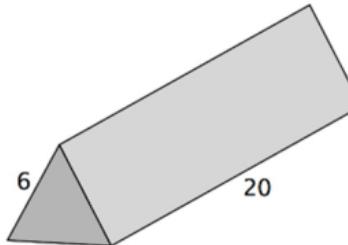
Pronto, o resultado acima corresponde a 80% do volume do reservatório! **Lembre-se que ele não encheu todo, mas sim 80%!!.** Agora, para determinarmos H, basta usarmos a fórmula do volume de um prisma, considerando que corresponde apenas a essa porcentagem.

$$V = 80\% \cdot A_b \cdot H \rightarrow 0,8 \cdot 4 \cdot H = 3,84 \rightarrow H = \frac{3,84}{3,2} \rightarrow H = 1,2 \text{ m}$$

**Gabarito:** LETRA B.

## FGV

**10. (FGV/PREF. ANGRA/2019)** Certa embalagem tem a forma de um prisma triangular regular como o representado na figura a seguir.



O comprimento da embalagem é de 20 cm e cada lado do triângulo mede 6cm. O volume dessa embalagem, em  $\text{cm}^3$ , é de, aproximadamente,

**Obs.:** utilize  $\sqrt{3} = 1,73$ .

- A) 250.
- B) 270.
- C) 290.
- D) 310.
- E) 330.

### Comentários:

Devemos calcular o volume de um prisma. Na teoria, vimos que:

$$V = A_b H$$

Como a base é um **triângulo equilátero de lado igual a 6**, podemos calcular sua área da seguinte forma:

$$A_b = \frac{L^2 \sqrt{3}}{4} \rightarrow A_b = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} \rightarrow A_b = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Usando a informação do enunciado que  $\sqrt{3} = 1,73$ :

$$A_b = 9 \cdot 1,73 \rightarrow A_b = 15,57 \text{ cm}^2$$

Observe que **o comprimento da embalagem corresponde à altura do prisma**, logo,  $H = 20$  cm.

$$V = 15,57 \cdot 20 \rightarrow V = 311,4 \text{ cm}^3$$

Entre as alternativas, o volume que mais se aproxima do que acabamos de encontrar é o da letra D.

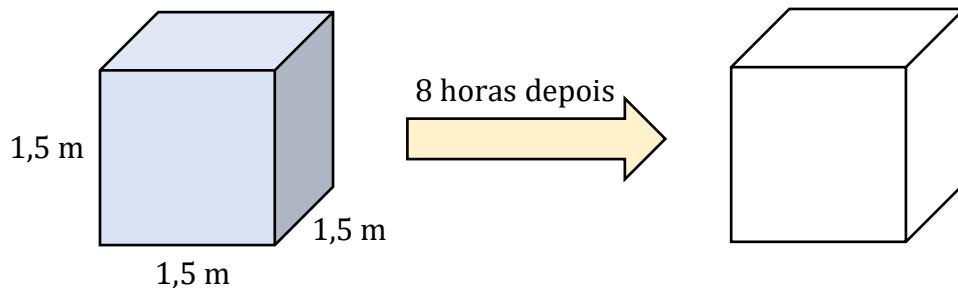
**Gabarito:** LETRA D.

**11. (FGV/BANESTES/2018)** Uma torneira aberta esvazia um tanque cúbico, completamente cheio, de 1,5 m de aresta em 8 horas. Com a mesma vazão, para esvaziar outro tanque cúbico, completamente cheio, com 3 m de aresta, uma torneira igual à primeira levaria:

- A) 16 horas.
- B) 24 horas.
- C) 32 horas.
- D) 48 horas.
- E) 64 horas.

**Comentários:**

Vamos esquematizar a primeira situação.



Com as informações acima, **devemos determinar qual a vazão com que o tanque está sendo esvaziado**. O primeiro passo para isso é calcular seu volume. Como estamos lidando com um cubo:

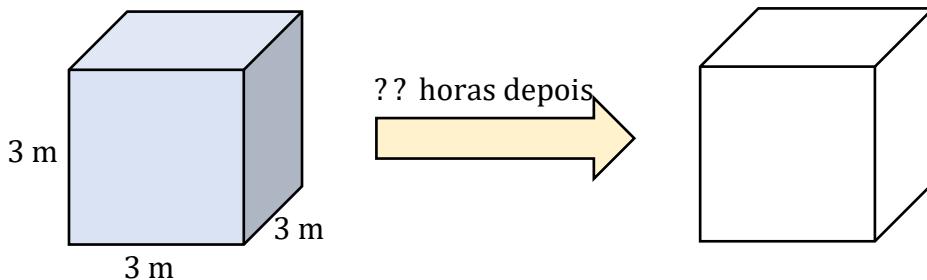
$$V = a^3 \rightarrow V = 1,5^3 \rightarrow V = 3,375 \text{ m}^3$$

Logo, como **o tanque demorou 8 horas para esvaziar todo**, podemos concluir que a vazão média ( $z$ ) foi de:

$$z = \frac{\Delta V}{\Delta t} \rightarrow z = \frac{3,375}{8} \rightarrow z \cong 0,42 \text{ m}^3/\text{hora}$$

O tanque esvaziou a uma taxa de **0,42 m<sup>3</sup> por hora**.

Em uma nova situação, temos um outro tanque, dessa vez maior. Queremos determinar em quanto tempo ele vai esvaziar **usando a mesma torneira** do tanque anterior (ou seja, esvaziando a mesma taxa).



Vamos calcular o volume desse novo tanque. Como ele continua com o formato cúbico:

$$V = a^3 \rightarrow V = 3^3 \rightarrow V = 27 \text{ m}^3$$

Com o novo volume, podemos encontrar o tempo decorrido usando a fórmula da vazão média.

$$z = \frac{\Delta V}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta V}{z}$$

Como o tanque esvaziou,  $\Delta V = 27 \text{ m}^3$ . Por sua vez, a **vazão média (z) não mudou** pois a torneira utilizada está sendo a mesma. Logo,

$$\Delta t = \frac{27}{0,42} \rightarrow \Delta t = 64,28 \text{ horas}$$

Observe que a alternativa que traz o valor aproximado de quanto tempo seria necessário para esvaziar esse segundo tanque é a alternativa E.

*Professor, eu nem sabia que estávamos estudando física para ter que aprender a fórmula da vazão média.*

Galera, na prática, não precisamos saber a fórmula da vazão para fazer esse exercício. **Podemos resolvê-lo por meio de regra de três.** No entanto, a intenção ao colocá-la nesses comentários é mostrar um caminho diferente de chegarmos na resposta. Na minha opinião, **essa forma é mais rápida e pode ser bastante útil em provas com tempo apertado.** Tudo bem?! Anote aí no seu caderno:

$$z = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

$z$  é a vazão média,  $\Delta V$  é a variação do volume e  $\Delta t$  é o intervalo de tempo.

**Gabarito:** LETRA E.

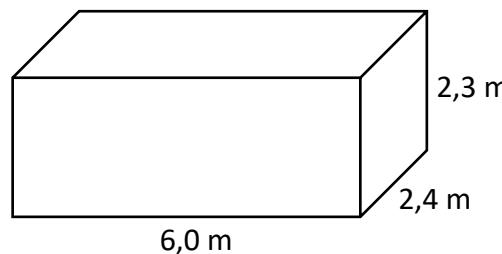
**12. (FGV/CODEBA/2016)** Um contêiner possui, aproximadamente, 6,0 m de comprimento, 2,4 m de largura e 2,3 m de altura. A capacidade cúbica desse contêiner é de, aproximadamente,

- A) 31  $\text{m}^3$ .
- B) 33  $\text{m}^3$ .
- C) 35  $\text{m}^3$ .
- D) 37  $\text{m}^3$ .

E)  $39 \text{ m}^3$ .

**Comentários:**

Um contêiner tem o **formato de um paralelepípedo**. Observe o desenho abaixo:



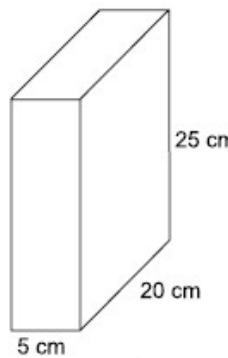
O volume de um paralelepípedo é o **produto de suas três dimensões**.

$$V = 6,0 \cdot 2,4 \cdot 2,3 \quad \rightarrow \quad V = 33,12 \text{ m}^3$$

**Gabarito:** LETRA B.

## VUNESP

13. (VUNESP/PREF. OSASCO/2022) Uma caixa de papelão, na forma de um prisma reto de base retangular, tem suas medidas indicadas na figura.



*Figura fora de escala*

Essa caixa está com  $3/5$  de sua capacidade total preenchida com sabão em pó. Se todo esse sabão for dividido em porções de  $125 \text{ cm}^3$  cada uma, o número de porções obtidas será

- A) 8
- B) 12
- C) 15
- D) 18
- E) 20

**Comentários:**

O primeiro passo é calcularmos **o volume dessa caixa**. Como se trata de um paralelepípedo, seu volume é calculado pelo produto das dimensões destacadas na imagem.

$$V = 5 \cdot 20 \cdot 25 \rightarrow V = 2500 \text{ cm}^3$$

No entanto, esse volume não está todo preenchido, apenas **3/5 dele**. Assim,

$$V_p = \left(\frac{3}{5}\right) \cdot 2500 \rightarrow V_p = 1500 \text{ cm}^3$$

Esse é o volume da caixa preenchida com sabão. Como **cada porção tem 125 cm<sup>3</sup>**, então o número de porções é dado pela razão do volume preenchido por 125.

$$n = \frac{1500}{125} \rightarrow n = 12$$

**Gabarito:** LETRA B.

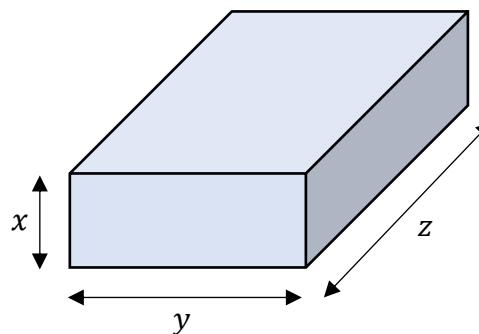
**14. (VUNESP/PM-SP/2022)** Um paralelepípedo reto-retângulo tem uma de suas faces de maior área apoiada sobre o chão, e, dessa maneira, sua área lateral é 200 cm<sup>2</sup>. Se esse paralelepípedo tivesse uma das faces de menor área apoiada sobre o chão, a área lateral seria 312 cm<sup>2</sup>. Sabendo que a área total do paralelepípedo é 392 cm<sup>2</sup>, sua maior aresta mede

- A) 21 cm.
- B) 20 cm.
- C) 15 cm.
- D) 14 cm.
- E) 12 cm.

**Comentários:**

Questão bem interessante, moçada! Vamos desenhar um pouco.

1) Paralelepípedo com a face de maior área apoiada no chão.



Note que nessa situação a área lateral é dada por:

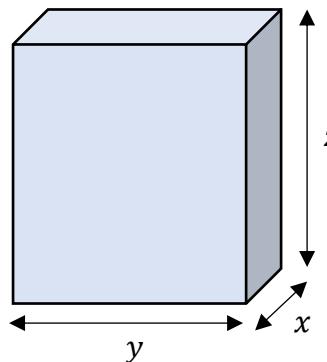
$$A_l = xy + xy + xz + xz \rightarrow A_l = 2xy + 2xz$$

De acordo com o enunciado, **essa área vale 200 cm<sup>2</sup>**.

$$2xy + 2xz = 200 \rightarrow xy + xz = 100 \quad (1)$$

Vamos guardar essa relação.

2) Paralelepípedo com a face de menor área apoiada no chão.



Com o paralelepípedo dessa forma, a área lateral é dada por:

$$A_l = yz + yz + xz + xz \rightarrow A_l = 2yz + 2xz$$

A questão também informou **o valor dessa área, que é 312 cm<sup>2</sup>**.

$$2yz + 2xz = 312 \rightarrow yz + xz = 156 \quad (2)$$

Por fim, temos que **a área total desse paralelepípedo é 392 cm<sup>2</sup>**. Logo,

$$2 \cdot (xy + yz + xz) = 392 \rightarrow xy + yz + xz = 196 \quad (3)$$

Note que temos **três equações e três incógnitas**. Vamos tentar resolvê-las.

Usando (2) em (3), ficamos com:

$$xy + 156 = 196 \rightarrow xy = 40 \quad (4)$$

Usando esse resultado em (1):

$$40 + xz = 100 \rightarrow xz = 60 \quad (5)$$

Usando (5) em (2):

$$yz + 60 = 156 \rightarrow yz = 96 \quad (6)$$

Agora, vamos dividir (5) por (4).

$$\frac{xz}{xy} = \frac{60}{40} \rightarrow \frac{z}{y} = \frac{3}{2} \rightarrow z = \frac{3y}{2} \quad (7)$$

Substituindo (7) em (6):

$$y \cdot \left(\frac{3y}{2}\right) = 96 \quad \rightarrow \quad y^2 = 64 \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{64} \quad \rightarrow \quad \boxed{y = 8 \text{ cm}}$$

Usando esse resultado em (7):

$$z = \frac{3 \cdot 8}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{z = 12 \text{ cm}}$$

Agora, falta apenas determinarmos "x". Podemos usar o valor de "z" em (5):

$$x \cdot 12 = 60 \quad \rightarrow \quad x = \frac{60}{12} \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 5 \text{ cm}}$$

Note que a maior das arestas mede 12 cm.

**Gabarito:** LETRA E.

## Outras Bancas

**15. (RBO/PREF. NAVEGANTES/2022)** Um reservatório de água em formato de um paralelepípedo tem dimensões 3 m x 2 m x 5,5 m e está com 72% de sua capacidade utilizada. Sabendo que 1 m<sup>3</sup> equivale a 1.000 litros, a quantidade de água que está neste reservatório é de:

- A) 33.000 L.
- B) 29.620 L.
- C) 25.540 L.
- D) 23.760 L.
- E) 23.120 L.

### Comentários:

O primeiro passo é calcular o volume desse reservatório. Como o seu formato é de paralelepípedo, o volume é dado pelo **produto de suas três dimensões**.

$$V = abc \quad \rightarrow \quad V = 3 \cdot 2 \cdot 5,5 \quad \rightarrow \quad V = 33 \text{ m}^3$$

Esse é o volume total do reservatório. No entanto, apenas **72% dele está preenchido com água**. Assim:

$$V_p = 72\% \cdot 33 \quad \rightarrow \quad V_p = 23,75 \text{ m}^3$$

Queremos  $V_p$  em litros. Como **1 m<sup>3</sup> equivale a 1.000 L**, temos que multiplicar o resultado acima por 1000.

$$V_p = 23,75 \cdot 1.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{V_p = 23.750 \text{ L}}$$

**Gabarito:** LETRA D.

**16. (IFBC/IBGE/2022)** Num posto de coleta, um agente censitário verificou que haviam chegado 12 notebooks idênticos e estavam todos fora da embalagem e empilhados numa única pilha. Se cada

notebook tem espessura de 5 cm, comprimento de 24 cm e largura de 18 cm, então o volume total dessa pilha é, em  $\text{dm}^3$ , igual a:

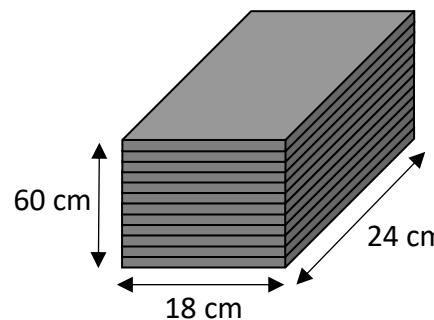
- A) 259,2
- B) 2592
- C) 25,92
- D) 2,592
- E) 25920

**Comentários:**

Perceba que essa pilha de notebook forma um prisma de base retangular, ou seja, um paralelepípedo. Como são 12 notebook com espessura de **5 cm cada**, a altura dessa pilha é dada por:

$$h = 5 \cdot 12 \rightarrow h = 60 \text{ cm}$$

Confira um esquema (não está em escala) dessa situação:



O volume total dessa pilha é dado pelo **produto das três dimensões**.

$$V = abc \rightarrow V = 60 \cdot 18 \cdot 24 \rightarrow V = 25.920 \text{ cm}^3$$

Muito cuidado aqui! **A questão pede o resultado em  $\text{dm}^3$** . Para fazer essa transformação, devemos dividir o resultado acima por 1.000.

$$V = \frac{25.920}{1000} \rightarrow \boxed{V = 25,92 \text{ dm}^3}$$

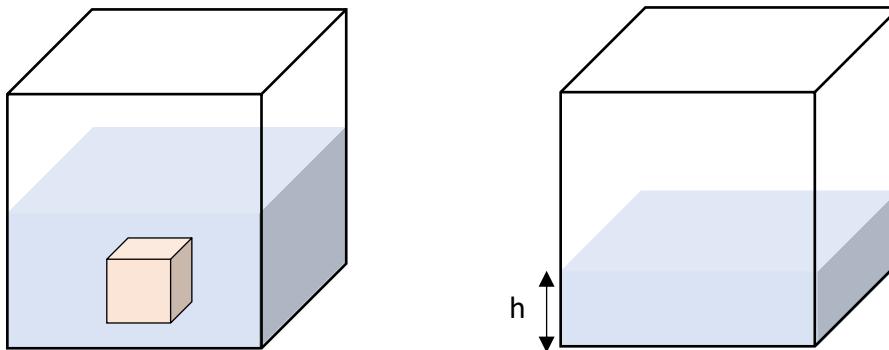
**Gabarito:** LETRA C.

**17. (FUNPAR/PM PR/2021)** Um recipiente possui formato de um cubo de aresta 12 cm. Há no recipiente 0,944 L de água e, no fundo, um dado também de formato cúbico, com aresta medindo 2 cm. Se o dado for retirado do recipiente, a altura do líquido nesse recipiente será de aproximadamente:

- A) 11,4 cm.
- B) 7,0 cm.
- C) 6,5 cm.
- D) 6,0 cm.
- E) 5,7 cm.

**Comentários:**

Primeiramente, vamos esquematizar essa situação para entender o que está acontecendo.



Queremos a altura "h" destacada na figura da direita. Note que como **já temos o volume de água**. Mas, antes de qualquer coisa, como as unidades das dimensões estão em cm, é interessante transformarmos o volume de água (0,944 L) **de litros para cm<sup>3</sup>**. Fazemos isso multiplicando esse volume por 1000.

$$V = 0,944 \cdot 1000 \rightarrow V = 944 \text{ cm}^3$$

Agora, vamos calcular a altura da água usando a fórmula do paralelepípedo:

$$V = 12 \cdot 12 \cdot h \rightarrow 944 = 144h \rightarrow h = \frac{944}{144} \rightarrow \boxed{h = 6,55 \text{ cm}}$$

Obs.: Pessoal, eu sei que alguns alunos podem ter ficado com uma pulga atrás da orelha por não termos usado as informações sobre o cubo menor. Elas não foram necessárias. A altura da segunda situação só depende da quantidade de água e **essa quantidade já foi informada na própria questão**. Cuidado que muitas vezes o enunciado pode fazer isso (dar informações a mais) para confundir o aluno!

**Gabarito:** LETRA C.

# QUESTÕES COMENTADAS

## Pirâmide

### CEBRASPE

#### 1. (CESPE/FUB/2022) Julgue o item que se segue, relacionados a geometria plana e espacial.

Uma pirâmide de altura  $h = 2\sqrt{3}$  cm com base dada por um hexágono regular de lado  $l = 3$  cm tem volume  $V = \sqrt{3}$  cm<sup>3</sup>.

#### Comentários:

Vamos lá, moçada! É hora de calcular o volume de uma pirâmide de base hexagonal regular.

Lembre-se que **o volume de qualquer pirâmide** é dado por:

$$V = \frac{A_b H}{3}$$

Como **a base é um hexágono regular**, então sua área é dada por:

$$A_b = \frac{3L^2\sqrt{3}}{2}$$

O enunciado passou o valor do lado:  **$L = 3$  cm**. Assim,

$$A_b = \frac{3 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \rightarrow A_b = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$

Com **o valor da área da base e da altura**, usamos agora a fórmula do volume.

$$V = \frac{\left(\frac{27\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 2\sqrt{3}}{3} \rightarrow \boxed{V = 27 \text{ cm}^3}$$

**Gabarito:** ERRADO.

#### 2. (CESPE/CBM-AL/2021) Julgue o seguinte item, relativos a geometria espacial.

Para cobrir um tetraedro regular de aresta igual a  $\sqrt[4]{3}$  m com um material adesivo que custa R\$ 5,50/m<sup>2</sup>, deve-se gastar R\$ 16,50.

#### Comentários:

Primeiramente, precisamos encontrar a área superficial do tetraedro regular. Lembre-se que um tetraedro regular tem **4 faces e cada uma delas é um triângulo equilátero**. Sendo assim, a área superficial do tetraedro é igual a:

$$A_s = 4 \cdot \left( \frac{L^2 \sqrt{3}}{4} \right) \rightarrow A_s = L^2 \sqrt{3}$$

De acordo com o enunciado, a aresta desse tetraedro é igual a  $\sqrt[4]{3}$  m.

$$A_s = (\sqrt[4]{3})^2 \sqrt{3} \rightarrow A_s = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \rightarrow A_s = 3 \text{ m}^2$$

Como **o custo de material adesivo é de R\$ 5,50 /m<sup>2</sup>**. Sendo assim, o total que se deve gastar é:

$$C_t = 3 \cdot 5,50 \rightarrow \boxed{C_t = 16,50}$$

**Gabarito:** CERTO.

**3. (CESPE/PM-AL/2021) Com relação às geometrias plana, espacial e analítica, julgue o item que se segue.**

A área superficial de uma pirâmide de base quadrada regular em que todas as arestas são iguais a 2 é  $S = 4 + 4\sqrt{3}$ .

**Comentários:**

Pessoal, se **todas as arestas são iguais a 2**, então as faces laterais dessa pirâmide são **triângulos equiláteros** de lados iguais a 2.

A área de um triângulo equilátero é igual a:

$$A_e = \frac{L^2 \sqrt{3}}{4}$$

Como a base dessa pirâmide é um quadrado, vamos ter **4 triângulos equiláteros nas laterais**.

Sendo assim, a areal lateral é 4 vezes a área acima.

$$A_l = 4A_e \rightarrow A_l = L^2 \sqrt{3}$$

**A aresta é igual a 2**, com isso, podemos substituir:

$$A_l = 2^2 \sqrt{3} \rightarrow A_l = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Essa é a área lateral, falta ainda contabilizarmos a área da base, para obtermos a área superficial.

Como **a base é um quadrado**:

$$A_b = L^2 \rightarrow A_b = 2^2 \rightarrow A_b = 4 \text{ cm}^2$$

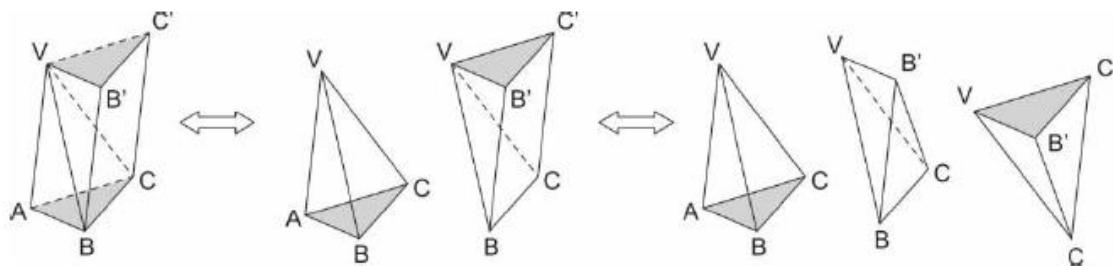
Pronto! A área superficial é a soma da área lateral com a área da base.

$$A_s = A_b + A_l \rightarrow \boxed{A_s = 4 + 4\sqrt{3} \text{ cm}^2}$$

**Gabarito:** CERTO.

## FCC

4. (FCC/SEC-BA/2018) Observe a sequência de imagens indicadas abaixo.



A sequência de imagens está sendo usada para ilustrar o fato de que

- A) a soma de cinco pirâmides resulta em um prisma.
- B) o volume de uma pirâmide é igual a dois terços do volume de um prisma.
- C) o volume de um prisma é igual ao de duas pirâmides acrescido ao de um prisma.
- D) a área total de um prisma é igual a área total das três pirâmides que o compõem.
- E) o volume de uma pirâmide é a terça parte do volume de um prisma.

### Comentários:

Galera, temos um **prisma que está sendo dividido em três objetos**. Além disso, para essa questão, é interessante lembrar as fórmulas do volume do prisma e da pirâmide:

$$V_{\text{prisma}} = A_b H \quad V_{\text{pirâmide}} = \frac{A_b H}{3}$$

Note que **o volume da pirâmide é a terça parte do volume do prisma**, assim como indica a alternativa E.

**Gabarito:** LETRA E.

5. (FCC/SEDU-ES/2018) Uma pirâmide quadrangular regular reta teve sua aresta da base reduzida em 50% e sua altura aumentada em x% de tal forma que seu volume não se alterou. Nas condições descritas, x é igual a

- A) 250.
- B) 350.
- C) 100.

- D) 200.  
E) 300.

**Comentários:**

Lembre-se que o volume de uma pirâmide é dado por:

$$V_p = \frac{A_b H}{3}$$

Como estamos lidando com uma pirâmide quadrangular regular, então **a base é um quadrado**. Considere que esse quadrado tenha aresta "a". Assim,

$$A_b = a^2$$

Se **a aresta da base é reduzida em 50%**, então a nova área da base é dada por:

$$A'_b = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \rightarrow A'_b = \frac{a^2}{4}$$

Se **a altura aumenta "x%"**, então a nova altura pode ser escrita assim:

$$h = H + \frac{x}{100}H \rightarrow h = H \left(1 + \frac{x}{100}\right)$$

Ok! Agora, sabemos que **o volume não se alterou** depois de todas essas mudanças. Então, podemos igualar os dois volumes.

$$\frac{a^2 H}{3} = \frac{\left(\frac{a^2}{4}\right) H \left(1 + \frac{x}{100}\right)}{3} \rightarrow 1 = \left(\frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{x}{100}\right) \rightarrow 1 + \frac{x}{100} = 4 \rightarrow x = 300$$

**Gabarito:** LETRA E.

**6. (FCC/SEDU-ES/2018)** Seja a pirâmide reta  $P_1$ , de base quadrada, com 1 m de aresta da base e 2 metros de altura, e seja a pirâmide reta  $P_2$ , de base quadrada, com 3 m de aresta da base e 4 metros de altura. O volume de  $P_2$  é igual ao de  $P_1$  multiplicado por

- A) 15.  
B) 9.  
C) 12.  
D) 6.  
E) 18.

**Comentários:**

Temos duas pirâmides, as duas com bases quadradas, e precisamos encontrar seus volumes.

- Pirâmide  $P_1$ : **aresta da base igual a 1 metro e 2 metros de altura.**

Primeiramente, vamos calcular a área da base. Como a base é quadrada,

$$A_b = 1^2 \rightarrow \mathbf{A_b = 1 \text{ m}^2}$$

Agora, lembre-se do volume de uma pirâmide.

$$V_p = \frac{A_b H}{3}$$

**A altura é 2 metros.** Logo,

$$V_{P_1} = \frac{1 \cdot 2}{3} \rightarrow V_{P_1} = \frac{2}{3} \text{ m}^3$$

- Pirâmide  $P_2$ : **aresta da base igual a 3 metros e 4 metros de altura.**

Novamente, vamos começar pela área da base. Como ela também é quadrada,

$$A_b = 3^2 \rightarrow \mathbf{A_b = 9 \text{ m}^2}$$

Por fim, o volume de uma pirâmide fica, sabendo que **a altura é 4 metros**,

$$V_{P_2} = \frac{9 \cdot 4}{3} \rightarrow V_{P_2} = 12 \text{ m}^3$$

Veja que:

$$V_{P_2} = k \cdot V_{P_1}$$

Queremos encontrar o valor de "k". Para isso, basta substituirmos os volumes que encontramos.

$$12 = k \cdot \frac{2}{3} \rightarrow k = 18$$

**Gabarito:** LETRA E.

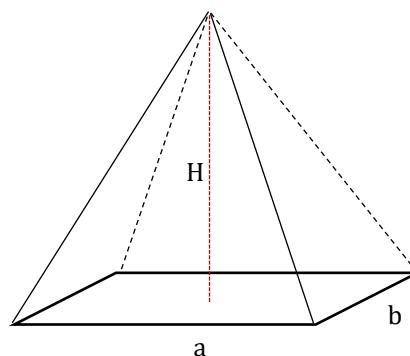
## FGV

**7. (FGV/SSP-AM/2022) Uma pirâmide de base retangular tem volume igual a 36. As arestas da base da pirâmide são então duplicadas e a altura, triplicada. O volume da nova pirâmide é**

- A) 108.
- B) 216.
- C) 324.
- D) 396.
- E) 432.

**Comentários:**

Vamos desenhar uma pirâmide de altura "H" e arestas da base "a" e "b".



O volume dessa pirâmide é igual a 36. Sendo assim, podemos escrever que:

$$V = \frac{A_b H}{3} \rightarrow \frac{abH}{3} = 36 \rightarrow abH = 108 \quad (1)$$

Quando as arestas são duplicadas e a altura triplicada, a nova pirâmide passa a ter o seguinte volume:

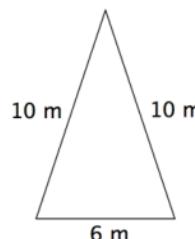
$$V' = \frac{(2a)(2b)(3H)}{3} \rightarrow V' = 4abH \quad (2)$$

Usando (1) em (2), conseguimos obter o volume da nova pirâmide.

$$V' = 4 \cdot 108 \rightarrow \boxed{V' = 432}$$

**Gabarito:** LETRA E.

**8. (FGV/IBGE/2016)** Uma pirâmide regular é construída com um quadrado de 6 m de lado e quatro triângulos iguais ao da figura abaixo.

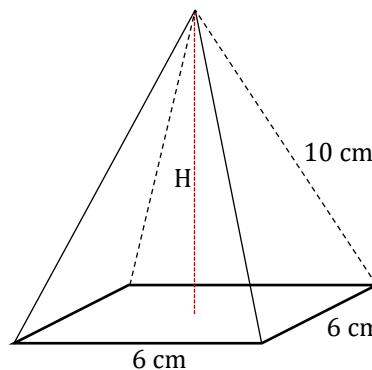


O volume dessa pirâmide em m<sup>3</sup> é aproximadamente:

- A) 84.
- B) 90.
- C) 96.
- D) 108.
- E) 144.

**Comentários:**

Vamos fazer um desenho, tendo em mente que **a base da pirâmide é um quadrado** e o triângulo mostrado acima é a sua face lateral.



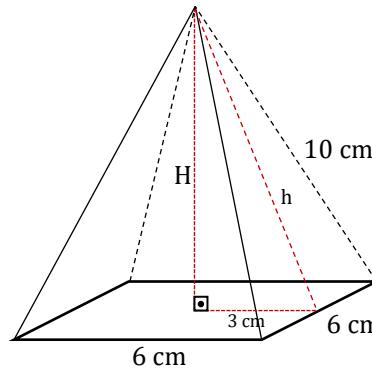
Sabemos que o volume de uma pirâmide é dado por:

$$V = \frac{A_b H}{3}$$

Como **a base é um quadrado de lado igual a 6 m**, podemos achar a sua área.

$$A_b = a^2 \rightarrow A_b = 6^2 \rightarrow A_b = 36 \text{ m}^2$$

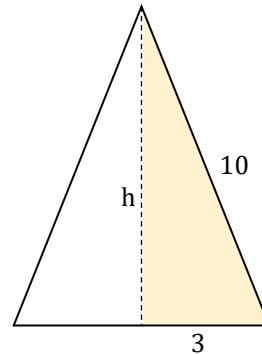
No entanto, **não sabemos a altura H**. Para determiná-lo, visualize comigo o seguinte triângulo retângulo:



Note que **a altura da pirâmide é um dos catetos** do triângulo destacado em vermelho. Assim, usando o Teorema de Pitágoras, podemos escrever que:

$$h^2 = H^2 + 3^2 \quad (1)$$

O "h" nada mais é do que **a altura do triângulo da face lateral**.



Usando o Teorema de Pitágoras, dessa vez no triângulo retângulo destacado da face lateral, ficamos com:

$$h^2 + 3^2 = 10^2 \rightarrow h^2 = 100 - 9 \rightarrow h^2 = 91 \quad (2)$$

Podemos substituir (2) em (1):

$$91 = H^2 + 9 \rightarrow H^2 = 82 \rightarrow H = \sqrt{82}$$

**A raiz quadrada de 82 não é exata, no entanto, a raiz de 81 é.** As alternativas trazem resultados aproximados, portanto, podemos fazer:

$$H \cong \sqrt{81} \rightarrow H \cong 9 \text{ m}$$

Substituindo a área da base e a altura na fórmula do volume, ficamos com:

$$V = \frac{9 \cdot 36}{3} \rightarrow \mathbf{V = 108 \text{ cm}^3}$$

**Gabarito:** LETRA D

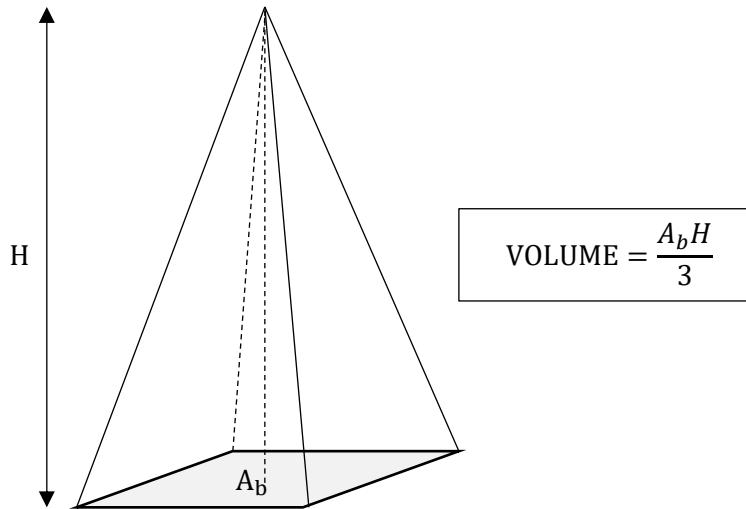
## VUNESP

9. (VUNESP/Prefeitura Municipal da Estância Balneária de Peruíbe (SP)/2019) Uma pirâmide de base retangular e altura 12 cm tem volume de 100 cm<sup>3</sup>. A área da base dessa pirâmide, em cm<sup>2</sup>, é

- A) 25
- B) 26
- C) 30
- D) 36
- E) 50

### Comentários:

Opa, agora temos uma **pirâmide de base retangular**! Lembre-se:



O enunciado forneceu a altura e o volume, podemos calcular a área da base substituindo na fórmula acima.

$$V = \frac{A_b \cdot H}{3} \rightarrow 100 = \frac{A_b \cdot 12}{3} \rightarrow A_b = \frac{300}{12} \rightarrow A_b = 25 \text{ cm}^2$$

Pronto! Podemos marcar que **a área da base é 25 cm<sup>2</sup>**.

**Gabarito:** LETRA A.

**10. (VUNESP/PREF. MORRO AGUDO/2020)** Uma peça em madeira maciça, com formato de pirâmide reta de base quadrada, tem volume de 484 cm<sup>3</sup> e altura de 12 cm. Logo, a aresta da base dessa peça mede

- A) 14 cm.
- B) 13 cm.
- C) 12 cm.
- D) 11 cm.
- E) 10 cm.

**Comentários:**

O volume de uma pirâmide é dado por:

$$V = \frac{A_b h}{3}$$

O enunciado disse que  $V = 484 \text{ cm}^3$  e  $h = 12 \text{ cm}$ . **Vamos substituir esses valores na fórmula** acima para obtermos a área da base.

$$484 = \frac{12 \cdot A_b}{3} \rightarrow 4 \cdot A_b = 484 \rightarrow A_b = 121 \text{ cm}^2$$

**A base da pirâmide é quadrada!** Logo, sabemos que a área da base é o valor da aresta elevado a 2!

$$A_b = a^2 \rightarrow a^2 = 121 \rightarrow a = 11 \text{ cm}$$

Assim, a aresta da base dessa pirâmide mede 11 cm.

**Gabarito:** LETRA D.

**11. (VUNESP/PREF. PERUÍBE/2019)** Uma pirâmide de base retangular e altura 12 cm tem volume de 100 cm<sup>3</sup>. A área da base dessa pirâmide, em cm<sup>2</sup>, é

- A) 25.
- B) 26.
- C) 30.
- D) 36.
- E) 50.

**Comentários:**

O volume de uma pirâmide é dado por:

$$V = \frac{A_b h}{3}$$

O enunciado disse que  $V = 100$  cm<sup>3</sup> e  $h = 12$  cm. **Vamos substituir esses valores na fórmula** acima para obtermos a área da base.

$$100 = \frac{12 \cdot A_b}{3} \quad \rightarrow \quad 4 \cdot A_b = 100 \quad \rightarrow \quad A_b = 25 \text{ cm}^2$$

**Gabarito:** LETRA A.

## Outras Bancas

**12. (FUNDATÉC/PREF. CANDELÁRIA/2021)** O volume de uma pirâmide quadrangular regular de lado  $L$  e altura sendo o dobro do lado é dado por:

- A)  $L^3/3$
- B)  $L^3/2$
- C)  $2L^3/3$
- D)  $2L^3$
- E)  $3L^3$

**Comentários:**

Na teoria, vimos que **o volume de uma pirâmide** é dado por:

$$V = \frac{A_b H}{3}$$

Em que  $H$  é a sua altura e  $A_b$  é a área da base. De acordo com o enunciado, a base da pirâmide em questão é quadrangular regular (ou seja, um quadrado). Com isso, sua **área da base** é dada por:  $A_b = L^2$ .

Como a altura dessa pirâmide é e igual ao **dobro do lado do quadrado**, então:

$$H = 2L$$

Usando essas duas informações na fórmula do volume, obtemos:

$$V = \frac{L^2 \cdot (2L)}{3} \quad \rightarrow \quad \boxed{V = \frac{2L^3}{3}}$$

**Gabarito:** LETRA C.

**13. (QUADRIX/CRMV AP/2021)** O museu do Louvre, em Paris, tem como entrada uma estrutura piramidal de base quadrada, com 34 m de largura e 21 m de altura. Essa pirâmide principal é rodeada por 3 pirâmides quadradas menores, cujas dimensões serão assumidas como 8 m de largura e 5 m de altura, e  $\pi$  é igual a 3. Com base nesse caso hipotético, julgue o item.

A capacidade total das 3 pirâmides menores juntas é de 320 L.

**Comentários:**

Lembre-se que o volume de uma pirâmide é dado por:

$$V = \frac{A_b H}{3}$$

Em que  $H$  é a sua altura e  $A_b$  é a área da base. De acordo com o enunciado, a pirâmide maior tem altura igual a 5 metros. Além disso, a aresta de sua base é igual a 8 m. Como a **base é quadrada**, podemos calcular sua área.

$$A_b = 8^2 \quad \rightarrow \quad A_b = 64 \text{ m}^2$$

Com o valor da área da base e a altura da pirâmide, podemos calcular seu volume.

$$V = \frac{64 \cdot 5}{3} \quad \rightarrow \quad V = \frac{320}{3} \text{ m}^3$$

Esse é o volume de uma pirâmide! São três! Sendo assim:

$$V_t = 3V = 320 \text{ m}^3$$

Cuidado, pessoal. Esse volume está em metros cúbicos ( $\text{m}^3$ ), não litros (L), como consta no item. Para obter o resultado em litros, devemos multiplicá-lo por 1000, pois **1 m<sup>3</sup> = 1.000 L**.

$$V_t = 320 \cdot 1.000 = 320.000 \text{ L}$$

**Gabarito:** ERRADO.

# QUESTÕES COMENTADAS

## Cilindro

### CEBRASPE

1. (CESPE/CBM-TO/2021) Considere um caminhão-pipa cujo tanque é cilíndrico com comprimento igual a 4 metros e diâmetro igual a 2 metros. Usando-se  $\pi = 3,14$ , é correto estimar que o volume desse tanque é igual a

- A) 6.280 litros.
- B) 12.560 litros.
- C) 25.120 litros.
- D) 50.240 litros.

#### Comentários:

Questão bem direta para aplicarmos a fórmula do volume de um cilindro. Lembre-se da teoria que:

$$V = \pi R^2 H$$

De acordo com o enunciado, **temos  $H = 4$  m e  $R = 1$  m**. O raio é metade do diâmetro.

Como o enunciado pediu para usar  $\pi = 3,14$ , ficamos com:

$$V = 3,14 \cdot 1^2 \cdot 4$$

$$V = 12,56 \text{ m}^3$$

O resultado está em **metros cúbicos ( $\text{m}^3$ )** mas todas as alternativas estão em **litros**.

Para transformar  $\text{m}^3$  em litros, devemos multiplicar o resultado por mil.

$$V = 12,56 \cdot 1000$$

$$\boxed{V = 12560 \text{ L}}$$

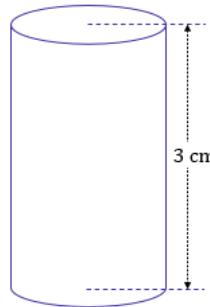
**Gabarito:** LETRA B.

2. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) Julgue o item seguinte, referente a geometria analítica, geometria plana e geometria espacial.

Se a área total de um cilindro circular reto de 3 cm de altura for igual ao triplo de sua área lateral, então o volume desse cilindro será inferior a 400  $\text{cm}^3$ .

#### Comentários:

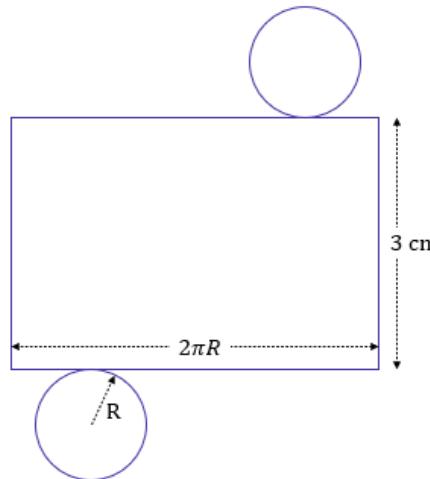
Temos um **cilindro circular reto de 3 cm de altura**. Vamos desenhá-lo.



Além disso, o enunciado informa que **a área total é o triplo da área lateral**. Lembre-se que **a área total é o somatório da área lateral com duas vezes a área da base**. Assim,

$$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lat} = 3 \cdot A_{lat} \quad \rightarrow \quad 2 \cdot A_{base} = 2 \cdot A_{lat} \quad \rightarrow \quad A_{base} = A_{lat}$$

Observe que, para a condição do enunciado ser satisfeita, a área da base deve ser igual a área lateral. **Na base temos um círculo**, logo,  $A_{base} = \pi R^2$ . **A lateral do cilindro é um retângulo** com um dos lados medindo a própria altura do cilindro e o outro lado medindo o comprimento da circunferência. Lembre-se:



Assim,  $A_{lat} = (2\pi R) \cdot 3 = 6\pi R$ . Logo, podemos encontrar o valor do raio usando  $A_{base} = A_{lat}$ .

$$\pi R^2 = 6\pi R \quad \rightarrow \quad R = 6 \text{ cm}$$

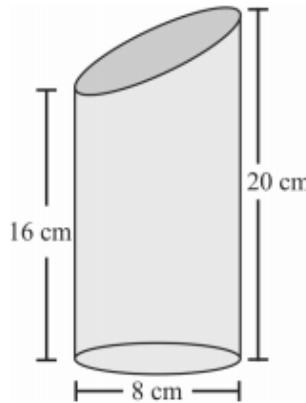
Com o raio em mãos, podemos determinar o volume do cilindro.

$$V = A_{base} \cdot H \quad \rightarrow \quad V = \pi \cdot 6^2 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad V = 108\pi \text{ cm}^3$$

Usando que  $\pi \cong 3,14$ , ficamos com  $V = 108 \cdot 3,14 \rightarrow V = 339,12 \text{ cm}^3$ . O **resultado é inferior a 400 cm}^3**, logo, o item está correto.

**Gabarito: CERTO.**

**3. (CESPE/IFF/2018)**



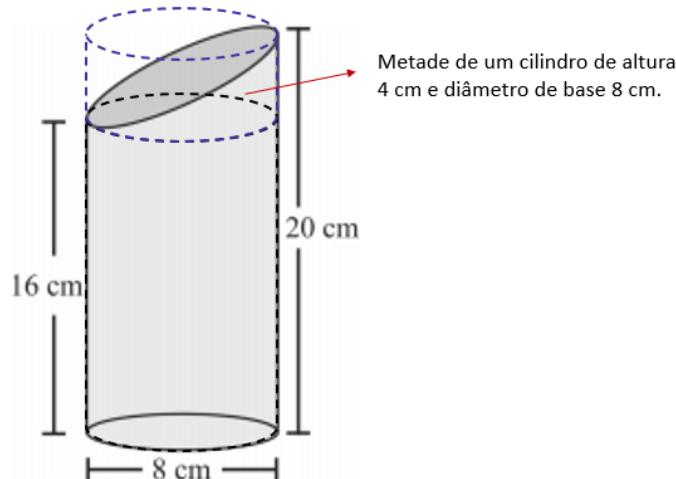
Um cilindro circular reto, cuja base tem diâmetro de 8 cm, foi cortado por um plano inclinado em relação à base, dando origem ao tronco de cone apresentado. A altura maior do tronco de cone mede 20 cm e a menor, 16 cm. Nesse caso, o volume do tronco de cone é igual a

- A)  $256\pi \text{ cm}^3$ .
- B)  $288\pi \text{ cm}^3$ .
- C)  $320\pi \text{ cm}^3$ .
- D)  $576\pi \text{ cm}^3$ .
- E)  $1.152\pi \text{ cm}^3$ .

#### Comentários:

O primeiro comentário importante que deve ser feito é sobre o enunciado chamar o sólido resultante de tronco de cone. O que temos é um **tronco de cilindro**. Tudo bem?!

Existe mais de uma maneira de resolver essa questão, vou explicar a que julgo mais simples, pois não precisaremos saber de outras fórmulas ou princípios além do que já estudamos.



Veja que temos um cilindro grandão e que foi tirado um pedaço dele. Esse pedaço retirado é exatamente **metade de um cilindro menor**, que destacamos na figura acima. Portanto, para calcular o volume do sólido, seguiremos exatamente essa linha de raciocínio:

- Calcularemos o volume do cilindro maior, **como se completo fosse**.
- Descontaremos **metade do volume do cilindro menor**, que está destacado na figura.

Na teoria, mostramos que o volume do cilindro é dado **produto da área da base pela altura**.

$$V = A_b \cdot H$$

Para o cilindro maior, temos  $R = 4 \text{ cm}$  e  $H = 20 \text{ cm}$ :

$$A_b = \pi R^2 \quad \rightarrow \quad A_b = \pi \cdot 4^2 \quad \rightarrow \quad A_b = 16\pi \text{ cm}^2$$

$$V = 16\pi \cdot 20 \quad \rightarrow \quad V = 320\pi \text{ cm}^3$$

Agora, devemos descontar o volume arrancado. Observe que **a área da base do cilindro menor é a mesma**. Temos apenas uma mudança na altura que passa a ser  $H = 4 \text{ cm}$ .

$$V_{menor} = 16\pi \cdot 4 \quad \rightarrow \quad V_{menor} = 64\pi$$

Esse é o volume do cilindro menor. Como, depois do corte, **ainda sobrou metade desse cilindro**, devemos **subtrair** do cilindro maior apenas a metade desse volume. Tudo bem?!

$$V_{sólido} = V - \frac{V_{menor}}{2} \quad \rightarrow \quad V_{sólido} = 320\pi - 32\pi \quad \rightarrow \quad V_{sólido} = 288\pi \text{ cm}^3$$

**Gabarito:** LETRA B.

## CESGRANRIO

**4. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2018)** Uma jarra cilíndrica está completamente cheia de água. Seu diâmetro interno é  $2d$ , e sua altura,  $3H$ . A água contida nessa jarra é suficiente para encher completamente  $n$  copos cilíndricos de diâmetro interno  $d$  e altura  $H$ . O maior valor de  $n$  é

- A) 4
- B) 6
- C) 8
- D) 10
- E) 12

### Comentários:

Temos um cilindro de diâmetro "2d" (então o raio é igual a "d") e altura "3H". O volume de um cilindro é:

$$V_{cilindro} = \pi R^2 h$$

Substituindo  $r = d$  e  $h = 3H$ , ficamos com

$$V_{jarra} = \pi d^2 3H \rightarrow V_{jarra} = 3\pi d^2 H$$

Por sua vez, o copo também é um cilindro de diâmetro "d" (então o raio é igual a "d/2") e altura H. Logo,

$$V_{copo} = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 H \rightarrow V_{copo} = \frac{\pi d^2 H}{4}$$

Para determinar quantos copos podemos encher com essa jarra, basta fazermos,

$$n = \frac{V_{jarra}}{V_{copo}} \rightarrow n = \frac{3\pi d^2 H}{\frac{\pi d^2 H}{4}} \rightarrow n = 12$$

**Gabarito:** LETRA E.

**5. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2014)** Para embalar cada um dos sabonetes artesanais que produz, Sofia utiliza um pedaço de papel cuja área corresponde a  $4/3$  da superfície total do sabonete, que tem a forma de um paralelepípedo retângulo de 6 cm de comprimento, 4,5 cm de largura e 2 cm de altura. Qual é, em  $\text{cm}^2$ , a área do pedaço de papel?

- A) 32
- B) 64
- C) 72
- D) 88
- E) 128

**Comentários:**

Note que temos um paralelepípedo de dimensões 6 cm x 4,5 cm x 2 cm. Para calcular a área total desse sólido, usamos a seguinte expressão:

$$A_{sup} = 2 \cdot (ab + bc + ca)$$

Substituindo **a = 6, b = 4,5 e c = 2**, ficamos com,

$$A_{sup} = 2 \cdot (6 \cdot 4,5 + 4,5 \cdot 2 + 6 \cdot 2) \\ A_{sup} = 2 \cdot (27 + 9 + 12) \rightarrow A_{sup} = 96 \text{ cm}^2$$

Com a área do papel é **4/3 da área da superfície total** do sabonete,

$$A_{papel} = \frac{4}{3} A_{sup} \rightarrow A_{papel} = \frac{4 \cdot 96}{3} \rightarrow A_{papel} = 128 \text{ cm}^2$$

**Gabarito:** LETRA E.

**6. (CESGRANRIO/DECEA/2012)** Um reservatório de água com a forma de um cilindro reto de 1,5 m de altura e 1,2 m de raio interno precisa ser impermeabilizado. Para tal, seu fundo (uma das bases do cilindro) e sua superfície lateral interna serão totalmente cobertos por um produto impermeabilizante que é

vendido em embalagens com um litro. Se o rendimento desse produto é de  $9 \text{ m}^2$  por litro, quantas embalagens, no mínimo, devem ser compradas para que essa impermeabilização seja realizada?

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5

**Comentários:**

Ok! Esse tipo de questão é bem comum em Geometria Espacial. O primeiro passo é calcularmos **a área superficial do cilindro**. Note que vamos impermeabilizar apenas a lateral e a **base inferior** do cilindro. Sendo assim, **a área total** para ser impermeabilizada pode ser calculada como:

$$A_i = A_{lateral} + A_{base} \rightarrow A_i = 2\pi Rh + \pi R^2$$

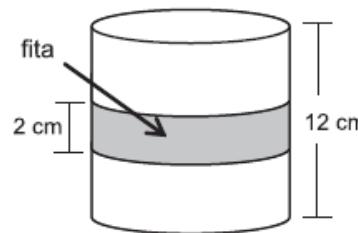
De acordo com o enunciado, temos  $R = 1,2 \text{ m}$  e  $h = 1,5 \text{ m}$ . Para realizar as contas, consideraremos  $\pi \cong 3,1$ .

$$A_i = 2 \cdot 3,1 \cdot 1,2 \cdot 1,5 + 3,14 \cdot 1,2^2 \rightarrow A_i = 11,16 + 4,5216 \rightarrow A_i = 15,68 \text{ m}^2$$

Como **a embalagem cobre  $9 \text{ m}^2$  por litro**, precisaremos de **2 embalagens** para cobrir os  $15,68 \text{ m}^2$ .

**Gabarito:** LETRA B.

7. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2012) Uma fita retangular de 2 cm de largura foi colocada em torno de uma pequena lata cilíndrica de 12 cm de altura e  $192\pi \text{ cm}^3$  de volume, dando uma volta completa em torno da lata, como ilustra o modelo abaixo.

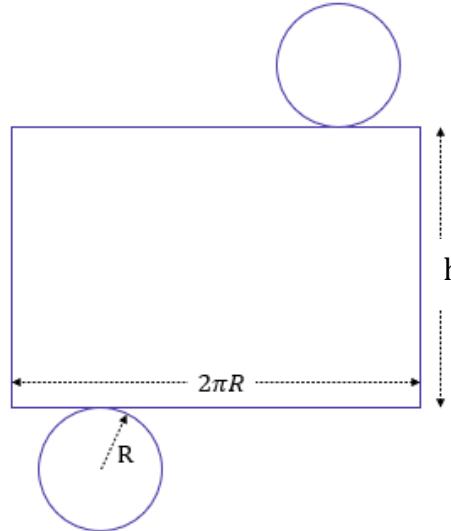


**A área da região da superfície da lata ocupada pela fita é, em  $\text{cm}^2$ , igual a**

- A)  $8\pi$
- B)  $12\pi$
- C)  $16\pi$
- D)  $24\pi$
- E)  $32\pi$

**Comentários:**

Pessoal, quando planificamos um cilindro ficamos com a seguinte situação:



Sabemos a altura do cilindro, mas **não sabemos o raio da base**. Para determiná-lo, usaremos a fórmula do volume do cilindro e as informações dadas na questão.

$$V_{cilindro} = \pi R^2 h$$

Do enunciado,  **$V_{cilindro} = 192\pi$  e  $h = 12$** . Substituindo na expressão acima, podemos determinar R.

$$192\pi = \pi R^2 \cdot 12 \quad \rightarrow \quad R^2 = 16 \quad \rightarrow \quad R = 4 \text{ cm}$$

A área lateral de um cilindro é dada por:

$$A_{lateral} = 2\pi R h$$

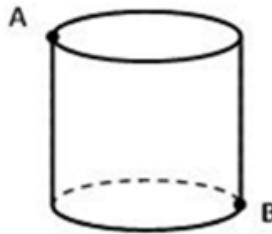
No entanto, como estamos querendo saber **apenas a área ocupada pela fita**, a altura h que usaremos será a largura da fita, isto é, 2 cm.

$$A_{fita} = 2\pi \cdot 4 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad \mathbf{A_{fita} = 16\pi \text{ cm}^2}$$

**Gabarito:** LETRA C.

**FCC**

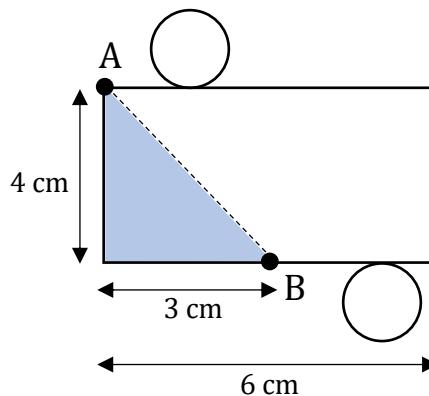
**8. (FCC/SABESP/2019)** A figura apresenta um cilindro circular reto de 4 cm de altura, as bordas inferior e superior são circunferências, cujo perímetro de cada uma mede 6 cm. Os pontos A e B são diametralmente opostos. A menor distância que deve ser percorrida sobre a superfície do cilindro para sair do ponto A e chegar ao ponto B é:



- A) 4 cm
- B)  $4\sqrt{2}$  cm
- C) 10 cm
- D)  $5\sqrt{2}$  cm
- E) 5 cm

**Comentários:**

A melhor maneira de visualizarmos esse problema é fazendo a planificação do cilindro.



Observe que a distância entre os pontos A e B é exatamente **a hipotenusa do triângulo retângulo** destacado em azul. Com isso, podemos determiná-la por meio do Teorema de Pitágoras.

$$AB^2 = 4^2 + 3^2 \rightarrow AB^2 = 16 + 9 \rightarrow AB^2 = 25 \rightarrow AB = 5 \text{ cm}$$

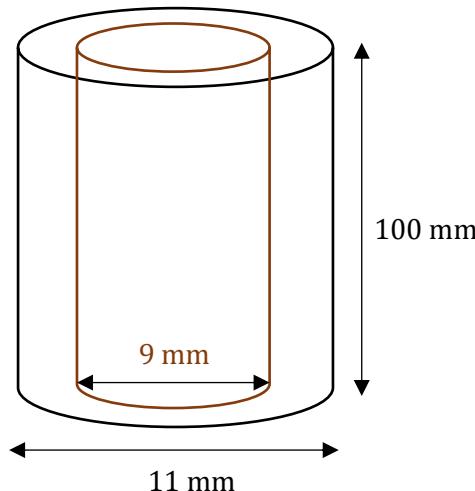
**Gabarito:** LETRA E.

**9. (FCC/SABESP/2018)** Um cilindro reto tem altura de 100 mm, diâmetro externo 11 mm e diâmetro interno 9 mm. A área da chapa para construir este cilindro é

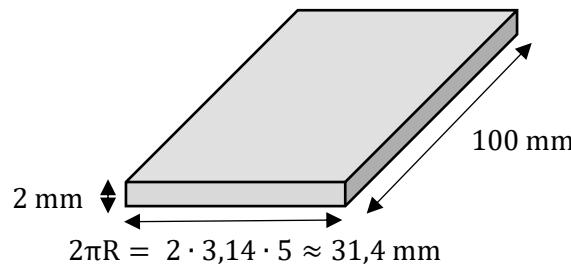
- A) 1.000 mm<sup>2</sup>
- B) 900 mm<sup>2</sup>
- C) 3.000 mm<sup>2</sup>
- D) 3.140 mm<sup>2</sup>
- E) 1.100 mm<sup>2</sup>

**Comentários:**

Vamos entender esse cilindro com um desenho.



Ou seja, **ele não é totalmente preenchido no meio!** É como se pegássemos uma folha de ofício A4 e **únissemos os lados para formar um cilindro** (só que com uma espessura mais considerável, de forma que, na questão, dobramos uma chapa e não uma folha, rsrs). Considere que a chapa que dá origem ao cilindro da figura é algo como:



Observe que **a espessura da chapa é igual a 2 mm** (a diferença entre os diâmetros). Por sua vez, para encontrarmos a largura da placa, **precisamos considerar o diâmetro médio** (média entre o diâmetro interno e externo, que dá 10 mm). Sendo assim, a área da chapa fica:

$$A = 100 \cdot 3,14 \rightarrow A = 3.140 \text{ mm}^2$$

**Gabarito:** LETRA D.

**10. (FCC/SABESP/2017)** Um reservatório cilíndrico de altura  $h$  e raio  $R$  foi substituído por um novo reservatório também cilíndrico de altura  $h/2$  e raio  $2R$ . Sendo desprezíveis as espessuras das paredes dos dois reservatórios, é correto afirmar que a capacidade do novo reservatório é

- A) quatro vezes maior que a capacidade do reservatório antigo.
- B) igual à capacidade do reservatório antigo.
- C) o dobro da capacidade do reservatório antigo.
- D) oito vezes maior que a capacidade do reservatório antigo.
- E) metade da capacidade do reservatório antigo.

**Comentários:**

Se o primeiro cilindro **tem altura  $h$  e raio  $R$** , então seu volume é dado por:

$$V_1 = \pi R^2 h$$

Por sua vez, se a **altura do novo cilindro é  $h/2$  e o raio é  $2R$** , então seu volume é dado por:

$$V_2 = \frac{\pi(2R)^2 h}{2} \rightarrow V_2 = 2\pi R^2 h$$

Perceba que:

$$V_2 = 2V_1$$

Ou seja, o novo reservatório tem capacidade **igual ao dobro** da capacidade do reservatório antigo.

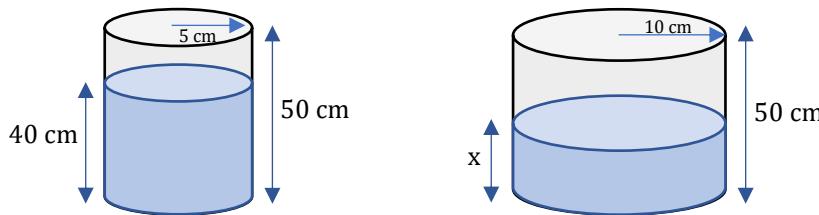
**Gabarito:** LETRA C.

**11. (FCC/SEE-MG/2012)** Numa cozinha há dois recipientes cilíndricos de mesma altura medindo 50 cm, ambos vazios. Os raios de suas bases são iguais a 5 cm e 10 cm. A cozinheira despeja um líquido no cilindro mais fino e observa que atinge uma altura de 40 cm. Ao trocar esse conteúdo para o cilindro mais largo, o líquido ocupará, nesse recipiente,

- A) 1/2 da capacidade total.
- B) 1/4 da capacidade total.
- C) 1/5 da capacidade total.
- D) 1/3 da capacidade total.

**Comentários:**

É bom desenhamos essa situação.



O primeiro passo é calcular o **volume de líquido dentro do recipiente mais fino**. Como temos um cilindro,

$$V_{líquido} = \pi r^2 h$$

Com os dados do enunciado, ficamos

$$V_{líquido} = \pi \cdot 5^2 \cdot 40 \rightarrow V_{líquido} = 1000\pi \text{ cm}^3$$

Agora, repare que temos esse **mesmo volume de líquido dentro do recipiente mais largo**. Queremos determinar "x". Para isso, utilizaremos mais uma vez a fórmula do volume.

$$V_{líquido} = \pi R^2 x$$

Usando as informações que temos,

$$\pi \cdot 10^2 \cdot x = 1000\pi \rightarrow x = 10 \text{ cm}$$

Observe que a mesma quantidade de líquido **fará uma altura de 10 cm no recipiente mais largo**. Como o **recipiente tem 50 cm**, o volume ocupado será apenas de

$$\frac{10}{50} = \frac{1}{5} \text{ da capacidade total}$$

**Gabarito:** LETRA C.

## FGV

**12. (FGV/PM-SP/2021) Para abastecer os carros da corporação, há um tanque cilíndrico de combustível, com 2 m de diâmetro e 1,5 m de altura. A capacidade desse tanque é de, aproximadamente,**

- A) 4.100 litros.
- B) 4.400 litros.
- C) 4.700 litros.
- D) 5.000 litros.
- E) 5.300 litros.

### Comentários:

Questão bem direta para aplicarmos a fórmula do **volume de um cilindro**. Lembre-se da teoria que:

$$V = \pi R^2 H$$

O enunciado  **$H = 1,5 \text{ m}$  e  $R = 1 \text{ m}$** . O raio é metade do diâmetro. Por fim, vamos usar  $\pi = 3,14$ .

$$V = 3,14 \cdot 1^2 \cdot 1,5$$

$$V = 4,71 \text{ m}^3$$

O resultado está em **metros cúbicos (m<sup>3</sup>)** mas todas as alternativas estão em **litros**.

Para transformar m<sup>3</sup> em litros, devemos multiplicar o resultado por mil.

$$V = 4,71 \cdot 1000$$

$$\boxed{V = 4710 \text{ L}}$$

Note que a alternativa mais próxima do resultado acima é a alternativa C.

**Gabarito:** LETRA C.

13. (FGV/PREF. SALVADOR/2019) O caldeirão da figura abaixo tem 40 cm de diâmetro e 36 cm de altura.



**A capacidade desse caldeirão é de, aproximadamente,**

- A) 25 litros.
- B) 30 litros.
- C) 36 litros.
- D) 40 litros.
- E) 45 litros.

**Comentários:**

O caldeirão tem um formato cilíndrico. Lembre-se que o volume de um cilindro é dado por:

$$V = \pi r^2 H$$

O enunciado disse que **o diâmetro da base é 40 cm**. Logo,

$$r = \frac{40}{2} \rightarrow r = 20 \text{ cm}$$

Ademais, **temos que H = 36 cm**. Vamos substituir essas informações na fórmula.

$$V = \pi \cdot 20^2 \cdot 36 \rightarrow V = \pi \cdot 400 \cdot 36 \rightarrow V = 14400\pi$$

Usando  $\pi \cong 3,14$

$$V = 14400 \cdot 3,14 \rightarrow V = 45216 \text{ cm}^3$$

Ora, lembre-se que **1 cm<sup>3</sup> = 1 mL**.

$$V = 45216 \text{ mL} \rightarrow V \cong 45,2 \text{ L}$$

A alternativa que traz o valor mais próximo é a E.

**Gabarito:** LETRA E.

14. (FGV/BANESTES/2018) Certos tambores para coleta de resíduos não recicláveis são cilindros com 40 cm de diâmetro e 60 cm de altura.



O volume de um desses recipientes, em litros, é de, aproximadamente:

- A) 75.
- B) 90.
- C) 120.
- D) 150.
- E) 180.

**Comentários:**

O tambor tem um formato cilíndrico. Lembre-se que o volume de um cilindro é dado por:

$$V = \pi r^2 H$$

O enunciado disse que **o diâmetro da base é 40 cm**. Logo,

$$r = \frac{40}{2} \rightarrow r = 20 \text{ cm}$$

Ademais, **temos que H = 60 cm**. Vamos substituir essas informações na fórmula.

$$V = \pi \cdot 20^2 \cdot 60 \rightarrow V = \pi \cdot 400 \cdot 60 \rightarrow V = 24000\pi$$

Usando  $\pi \approx 3,14$

$$V = 24000 \cdot 3,14 \rightarrow V = 75360 \text{ cm}^3$$

Ora, lembre-se que **1 cm<sup>3</sup> = 1 mL**.

$$V = 75360 \text{ mL} \rightarrow V \approx 75,3 \text{ L}$$

A alternativa que traz o valor mais próximo é a A.

**Gabarito:** LETRA A.

15. (FGV/ALE-RO/2018) Um barril com a forma de um cilindro circular reto com 60 cm de diâmetro e 1 m de altura tem, aproximadamente, a capacidade de

- A) 210 litros.
- B) 280 litros.
- C) 320 litros.
- D) 400 litros.
- E) 520 litros.

**Comentários:**

O barril tem um formato cilíndrico. Lembre-se que o volume de um cilindro é dado por:

$$V = \pi r^2 H$$

O enunciado disse que **o diâmetro da base é 60 cm**. Logo,

$$r = \frac{60}{2} \rightarrow r = 30 \text{ cm}$$

Ademais, **temos que H = 1 m = 100 cm**. Vamos substituir essas informações na fórmula.

$$V = \pi \cdot 30^2 \cdot 100 \rightarrow V = \pi \cdot 900 \cdot 100 \rightarrow V = 90000\pi$$

Usando  $\pi \cong 3,14$

$$V = 90000 \cdot 3,14 \rightarrow V = 282600 \text{ cm}^3$$

Ora, lembre-se que **1 cm<sup>3</sup> = 1 mL**.

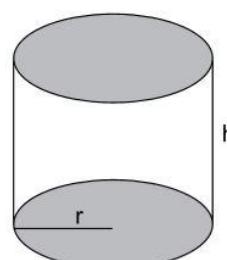
$$V = 282600 \text{ mL} \rightarrow V \cong 282,6 \text{ L}$$

A alternativa que traz o valor mais próximo é a B.

**Gabarito:** LETRA B.

## VUNESP

16. (VUNESP/Prefeitura Municipal de Campinas (SP)/2019) Analise o sólido geométrico da figura

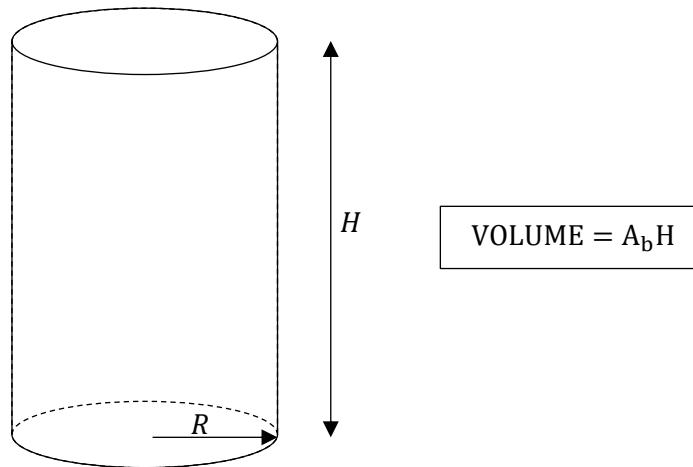


Se  $h = 48$  cm e  $r = 17$  cm, esse sólido tem um volume de:

- A) 0,082 m<sup>3</sup>
- B) 0,068 m<sup>3</sup>
- C) 0,123 m<sup>3</sup>
- D) 0,044 m<sup>3</sup>
- E) 0,246 m<sup>3</sup>

**Comentários:**

A figura acima representa um cilindro! Seu volume é calculado pelo **produto da área da base pela altura**.



No cilindro, temos uma base circular. **A área a ser calculada é a da circunferência**. Assim,

$$A_b = \pi R^2$$

O enunciado disse que **o raio é 17 cm (0,17 m)**, então

$$A_b = \pi \cdot (0,17)^2 \rightarrow A_b = 0,0289\pi \text{ m}^2$$

Vamos usar  $\pi = 3,14$

$$A_b = 0,0289 \cdot 3,14 \rightarrow A_b = 0,090746 \text{ m}^2$$

Como a altura é **48 cm (0,48 m)**, podemos substituir tudo na fórmula do volume do cilindro:

$$V = A_b \cdot H \rightarrow V = 0,090746 \cdot 0,48 \rightarrow V = 0,04355 \text{ m}^3$$

**Podemos aproximar o resultado encontrado para 0,044 m<sup>3</sup>**, conforme consta em D.

**Obs.:** Essa questão realmente tem umas continhas chatas de se trabalhar. Uma dica para resolver é a seguinte: operar com todas as unidades em centímetros (cm). Com isso, você obterá um resultado em cm<sup>3</sup>. Depois, precisamos converter para m<sup>3</sup> (pois o enunciado pede a resposta nessa unidade).

Conversão de Unidades mais Comuns		
De:	Para:	Ação:
<b>cm<sup>3</sup></b>	mL	São equivalentes. $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$ .
<b>dm<sup>3</sup></b>	L	São equivalentes. $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$ .
<b>m<sup>3</sup></b>	L	Multiplicamos por mil. $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$
<b>mL</b>	L	Dividimos por mil. $1000 \text{ mL} = 1 \text{ L}$
<b>cm<sup>3</sup></b>	m <sup>3</sup>	Dividimos por 1 milhão. $1000000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ m}^3$

Que tal praticar refazendo o exercício dessa forma? Fica o exercício!

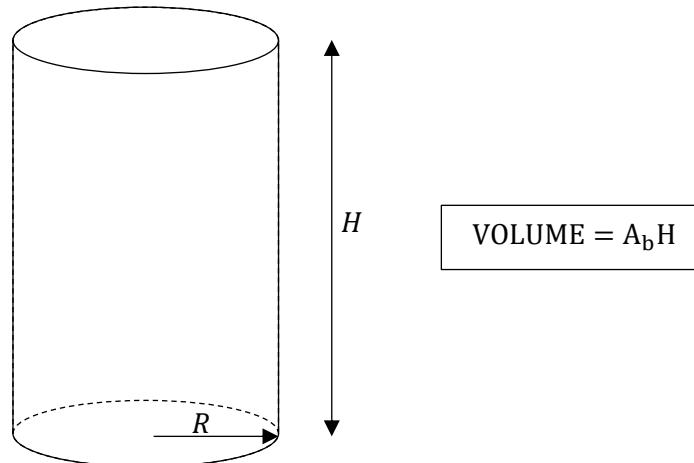
**Gabarito:** LETRA D.

**17. (VUNESP/Prefeitura Municipal de Ibaté (SP)/2019)** A caixa d'água de um prédio público tem a forma de um cilindro reto de diâmetro  $d = 3,2 \text{ m}$  e altura  $h = 4 \text{ m}$ . Então, assumindo-se a aproximação  $\pi = 3$ , a capacidade dessa caixa d'água será de

- A) 3 072 L.
- B) 12 288 L.
- C) 30 720 L.
- D) 48 080 L.
- E) 122 880 L.

**Comentários:**

A questão quer a **capacidade (volume)** da caixa d'água (que é um cilindro reto). Logo, lembre-se da aula:



- Em um cilindro reto, **a base é uma circunferência** e, portanto,

$$A_b = \pi R^2$$

O enunciado forneceu o diâmetro! Sabemos que **o diâmetro é o dobro do raio**.

$$D = 2R \rightarrow 3,2 = 2R \rightarrow R = 1,6 \text{ m}$$

Podemos calcular a área da base:

$$A_b = 3 \cdot 1,6^2 \rightarrow A_b = 3 \cdot 2,56 \rightarrow A_b = 7,68 \text{ m}^2$$

Além disso, **temos a altura ( $h = 4 \text{ m}$ )**. Podemos substituir todas essas informações na fórmula do volume de um cilindro.

$$V = A_b \cdot H \rightarrow V = 7,68 \cdot 4 \rightarrow V = 30,72 \text{ m}^3$$

Agora, perceba que **as respostas estão em litros**. Lembre-se da nossa tabela de conversão:

Assim, de  **$\text{m}^3$  para litros**, **multiplicamos por 1.000**.

$$V = 30,72 \cdot 1000 \rightarrow V = 30.720 \text{ L}$$

**Gabarito:** LETRA C.

## Outras Bancas

**18. (QUADRIX/CRP 10/2022)** Jonathan é um excelente cervejeiro e prepara sua cerveja artesanal de uma maneira peculiar. Ele sempre faz a mesma quantidade de cerveja por vez, o suficiente para encher completamente um de seus recipientes cilíndricos, os quais têm 1,5 metro de altura e 50 centímetros de raio, sendo que todo o volume dos recipientes é útil. Com base nesse caso hipotético, julgue o item.

Jonathan sempre faz  $0,375\pi$  litros de cerveja por vez.

### Comentários:

Opa! Basicamente temos que calcular **o volume do cilindro**. Lembre-se da teoria:

$$V = \pi R^2 H$$

De acordo com o renunciado, o cilindro tem **1,5 metros de altura (H)** e **0,5 metros (50 cm) de raio (R)**.

Com isso,

$$V = \pi \cdot 0,5^2 \cdot 1,5 \rightarrow V = \pi \cdot 0,25 \cdot 1,5 \rightarrow V = 0,375\pi \text{ m}^3$$

Cuidado, pessoal. O resultado que obtemos está em metros cúbicos ( $\text{m}^3$ ). **O item fala em LITROS**. Logo, o erro do item está na unidade. Para transformar de  $\text{m}^3$  para litros, devemos multiplicar o volume por mil.

$$V = 0,375\pi \cdot 1000 \rightarrow \mathbf{V = 375\pi \text{ litros}}$$

**Gabarito:** ERRADO.

**19. (FUNDATEC/CRA RS/2021)** Maria adquiriu uma piscina no formato de um cilindro reto com 1,20 metros de profundidade e 6 metros de diâmetro. Sabe-se que para encher 1 m<sup>3</sup> são necessários 1.000 litros de água, sendo assim, quantos litros de água serão necessários para encher 75% da capacidade total dessa piscina? (Considere  $\pi = 3$ )

- A) 8.100 litros.
- B) 12.600 litros.
- C) 16.200 litros.
- D) 24.300 litros.
- E) 32.400 litros.

**Comentários:**

Vamos calcular **volume do cilindro** mais uma vez. Lembre-se da teoria:

$$V = \pi R^2 H$$

De acordo com o renunciado, o cilindro tem **1,2 metros de altura/profundidade (H)** e **3 metros de raio (R)**. Lembre-se que o raio é metade do diâmetro.

Com essas informações e lembrando que o enunciado pede para considerarmos a  $\pi = 3$ , vamos usar a fórmula do volume.

$$V = 3 \cdot 3^2 \cdot 1,2 \quad \rightarrow \quad V = 27 \cdot 1,2 \quad \rightarrow \quad V = 32,4 \text{ m}^3$$

Note que o volume que obtivemos está em **metros cúbicos (m<sup>3</sup>)**, mas temos que trabalhar com litros. Para transformar, devemos multiplicar esse volume por 1000, afinal, **1 m<sup>3</sup> = 1.000 L**.

$$V = 32,4 \cdot 1000 \quad \rightarrow \quad V = 32400 \text{ L}$$

Cuidado aqui! A questão não quer o volume total da piscina. Ela quer **75%** dele.

$$V_p = 75\% \cdot 32.400 \quad \rightarrow \quad \boxed{V_p = 24300 \text{ L}}$$

**Gabarito:** LETRA D.

# QUESTÕES COMENTADAS

## Cone

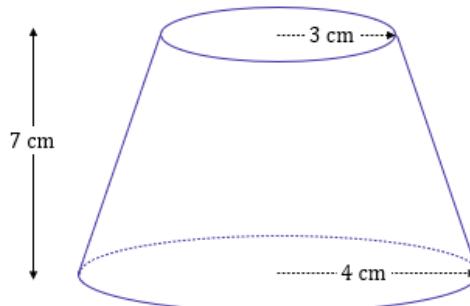
### CEBRASPE

1. (CESPE/PC-ES/2010) Os policiais da delegacia de defesa do consumidor apreenderam, em um supermercado, 19,5 kg de mercadorias impróprias para o consumo: potes de 150 g de queijo e peças de 160 g de salaminho. Com base nessa situação, julgue o item a seguir.

Suponha que os potes de queijo tenham a forma de um tronco de cone de 7 cm de altura, em que o raio da base maior meça 4 cm e o da base menor, 3 cm. Nesse caso, tomando 3,14 como valor aproximado para  $\pi$ , é correto afirmar que essas embalagens têm capacidade para, no máximo, 250 mL.

#### Comentários:

Essa é uma excelente questão para **treinarmos um pouco** sobre tronco de cone. Vamos resolver a questão de duas maneiras: uma aplicando a fórmula direta (caso você lembre) e outra sem ter que lembrar de fórmulas difíceis.



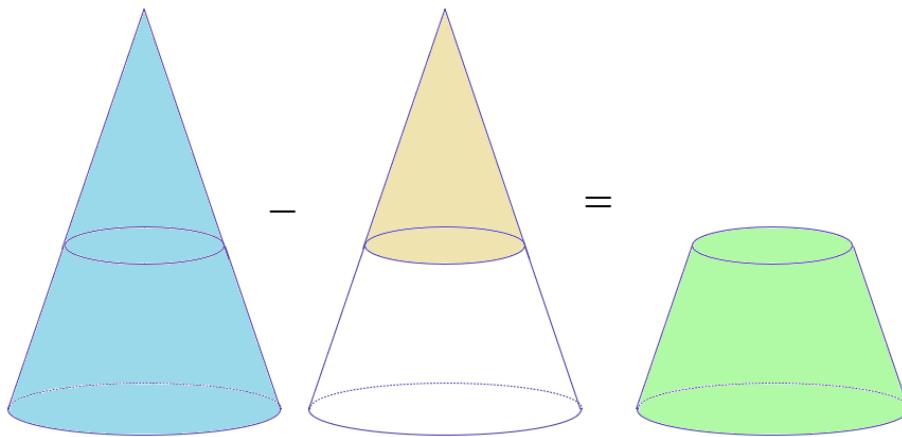
Com as informações passadas pelo enunciado, conseguimos desenhar o sólido acima. Na nossa teoria, demonstramos que o volume do tronco de cone é dado pela seguinte fórmula:

$$V = \frac{\pi h}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2)$$

Portanto, para encontrarmos o volume, basta substituirmos os valores.

$$V = \frac{3,14 \cdot 7}{3} \cdot (4^2 + 4 \cdot 3 + 3^2) \quad \rightarrow \quad V \cong 271,08 \text{ cm}^3$$

Galera, eu sei que a **fórmula do tronco de cone não é nada intuitiva**. Ela é horrível de decorar. Por sorte, algumas vezes, usá-la não será necessário. Para resolver uma questão de tronco de cone sem usar a fórmula, precisaremos fazer a **subtração de dois volumes**: o volume do cone maior e o volume do cone menor. *Mas que cones são esses?* Veja o desenho abaixo:



Note que o volume do tronco (em verde) é a diferença entre o volume do cone (em azul) pelo volume do cone (em marrom). Tudo bem? O volume de um cone nós lembramos:

$$V_{cone} = \frac{A_b \cdot H}{3}$$

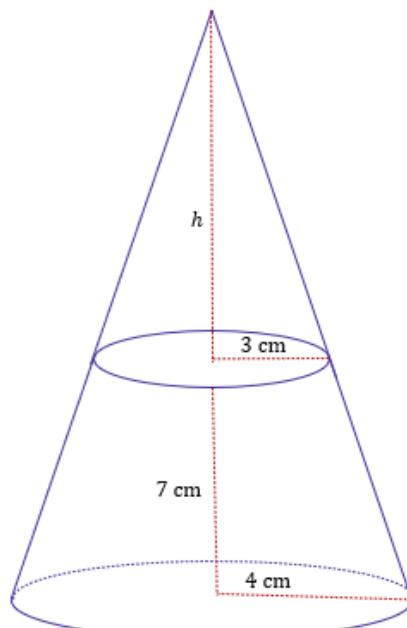
O raio da base do cone azul é **4 cm**. Assim,

$$A_{b,azul} = \pi \cdot 4^2 \quad \rightarrow \quad A_{b,azul} = 16\pi \text{ cm}^2$$

O raio da base do cone marrom é **3 cm**. Assim,

$$A_{b,marrom} = \pi \cdot 3^2 \quad \rightarrow \quad A_{b,marrom} = 9\pi \text{ cm}^2$$

Agora, **falta determinarmos as alturas do cones**. Para isso, precisamos atentar para a seguinte figura:



Observe que **o cone menor tem a altura  $h$** . Por sua vez, **a altura do cone maior será  $h + 7$** . Para determinar  $h$ , nós precisamos fazer uma semelhança de triângulos.

$$\frac{h}{h+7} = \frac{3}{4} \rightarrow 4h = 3h + 21 \rightarrow h = 21 \text{ cm}$$

Agora, podemos calcular os volumes.

$$V_{azul} = \frac{A_{b,azul} \cdot (h + 7)}{3} \rightarrow V_{azul} = \frac{16\pi \cdot 28}{3} \rightarrow V_{azul} = \frac{448\pi}{3} \text{ cm}^3$$

$$V_{marrom} = \frac{A_{b,marrom} \cdot h}{3} \rightarrow V_{marrom} = \frac{9\pi \cdot 21}{3} \rightarrow V_{marrom} = \frac{189\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Vimos que **o volume do tronco será a diferença desses dois volumes**.

$$V_{tronco} = V_{azul} - V_{marrom} = \frac{448\pi}{3} - \frac{189\pi}{3} = \frac{259 \cdot 3,14}{3} = 271,08 \text{ cm}^3$$

Esse é o mesmo resultado que encontramos usando a fórmula (ainda bem! rsrs). Veja que deu um pouco mais de trabalho (pois foi além de apenas uma aplicação de fórmula). Cada uma das resoluções apresenta suas vantagens e desvantagens.

A primeira vai te fazer economizar tempo. Por sua vez, a segunda evita que tenha que decorar mais uma fórmula (bem grande por sinal, rsrs). A melhor maneira é você que decide!

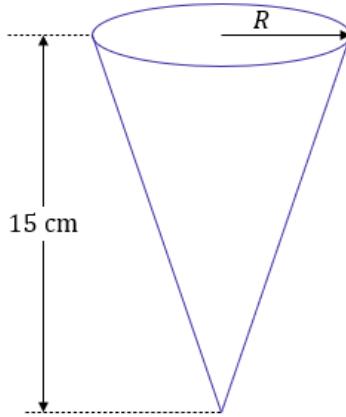
**Gabarito:** ERRADO.

**2. (CESPE/PETROBRÁS/2008)** Considere que casquinhas de sorvete têm a forma de um cone circular reto e capacidade para  $45\pi \text{ cm}^3$  de sorvete em seu interior. Nesse caso, se as casquinhas têm 15 cm de altura, então o raio da base do cone deve medir

- A)  $\sqrt{45/\pi}$  cm.
- B)  $\sqrt{18}$  cm.
- C)  $3/\sqrt{\pi}$  cm.
- D)  $3\pi$  cm.
- E) 3 cm.

**Comentários:**

Pessoal, temos um **cone circular reto**. O enunciado nos forneceu seu **volume e a sua altura**. Precisamos **descobrir o raio da base**. Para ajudar na visualização, considere o cone abaixo:



Na nossa teoria, mostramos que o volume do cone é dado pela seguinte expressão:

$$V_{cone} = \frac{A_b \cdot H}{3}$$

As informações do enunciado foram:  $V_{cone} = 45\pi \text{ cm}^3$  e  $H = 15 \text{ cm}$ . Vamos substituir.

$$45\pi = \frac{A_b \cdot 15}{3} \quad \rightarrow \quad A_b = 9\pi \text{ cm}^2$$

Como a **base é um círculo**, sabemos calcular sua área e, portanto, o seu raio.

$$\pi R^2 = 9\pi \quad \rightarrow \quad R^2 = 9 \quad \rightarrow \quad \mathbf{R = 3 \text{ cm}}$$

**Gabarito:** LETRA E.

**FGV**

**3. (FGV/PREF. PAULÍNIA/2021)** Um recipiente cônico invertido, com altura 27cm e raio da base 24cm, está cheio de água. A água é, então, totalmente transferida para um recipiente cilíndrico com raio da base 18cm e altura suficiente para conter, com sobras, toda a água. A altura, em centímetros, que a água atinge no cilindro é

- A) 9.
- B) 12.
- C) 16.
- D) 18.
- E) 24.

**Comentários:**

Opa! O primeiro passo aqui é **calcular o volume do cone**. Temos a altura ( $H = 27 \text{ cm}$ ) e o raio ( $R = 24 \text{ cm}$ ).

Lembre-se da fórmula:

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3}$$

Vamos substituir os valores.

$$V = \frac{\pi \cdot 24^2 \cdot 27}{3} \rightarrow V = 5.184\pi \text{ cm}^3$$

Esse volume vai totalmente para o cilindro! O volume de um cilindro é dado por:

$$V = \pi R^2 H$$

Dessa vez, temos o volume (V) e o raio da base ( $R = 18 \text{ cm}$ ). Com isso, conseguimos determinar H.

$$5.184\pi = \pi \cdot 18^2 \cdot H \rightarrow H = \frac{5.184}{324} \rightarrow \boxed{H = 16 \text{ cm}}$$

**Gabarito:** LETRA C.

**4. (FGV/PREF. SALVADOR/2019)** Em um cone de revolução, cada geratriz mede 12 cm e faz  $30^\circ$  com o eixo do cone. A área lateral desse cone em  $\text{cm}^2$  é

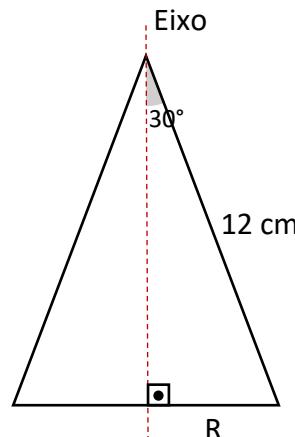
- A)  $24\pi$ .
- B)  $36\pi$ .
- C)  $48\pi$ .
- D)  $60\pi$ .
- E)  $72\pi$ .

**Comentários:**

Lembre-se que a área lateral de um cone é dada por:

$$A_{lateral} = \pi R g$$

Temos o valor da geratriz, mas **não temos o valor do raio (R)**. Para encontrá-lo, vamos esquematizar a situação descrita no enunciado.



Note que olhando para o "interior" do cone, temos uma triângulo retângulo em **que a geratriz é a hipotenusa e o raio é cateto oposto ao ângulo de  $30^\circ$** . Assim,

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{R}{g} \quad \rightarrow \quad R = g \cdot \operatorname{sen} 30^\circ$$

Substituindo  $g = 12$  e  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ :

$$R = 12 \cdot \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad R = 6 \text{ cm}$$

Com o valor da geratriz e do raio, podemos usar a fórmula da área lateral do cone.

$$A_{\text{lateral}} = \pi \cdot 12 \cdot 6 \quad \rightarrow \quad A_{\text{lateral}} = 72\pi \text{ cm}^2$$

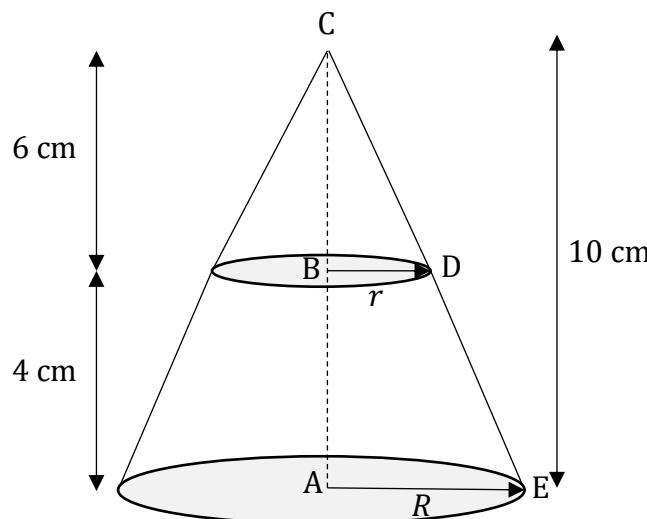
## Gabarito: IFTRA F.

5. (FGV/ALERO/2018) Um cone tem 10 cm de altura e base de área igual a  $75 \text{ cm}^2$ . Um plano paralelo à base do cone e distando 4 cm dela determinou uma secção de área  $S$ . O valor de  $S$ , em  $\text{cm}^2$ , é

- A) 27.
  - B) 32.
  - C) 36.
  - D) 40.
  - E) 45.

## Comentários:

Vamos esquematizar a situação.



**Os triângulos ACE e BCD são semelhantes entre si.** Ora, se são semelhantes, podemos escrever que:

$$\frac{r}{R} = \frac{6}{10} \quad \rightarrow \quad \frac{r}{R} = 0,6 \quad \rightarrow \quad r = 0,6 \cdot R$$

A área  $S$  é dada por:

$$S = \pi r^2$$

Usando  $r = 0,6 \cdot R$ :

$$S = \pi \cdot (0,6R)^2 \rightarrow S = 0,36 \cdot \pi R^2$$

Note que  $\pi R^2$  é a área da base do cone (o enunciado informou que ela é igual a **75 cm<sup>2</sup>**). Logo,

$$S = 0,36 \cdot 75 \rightarrow S = 27 \text{ cm}^2$$

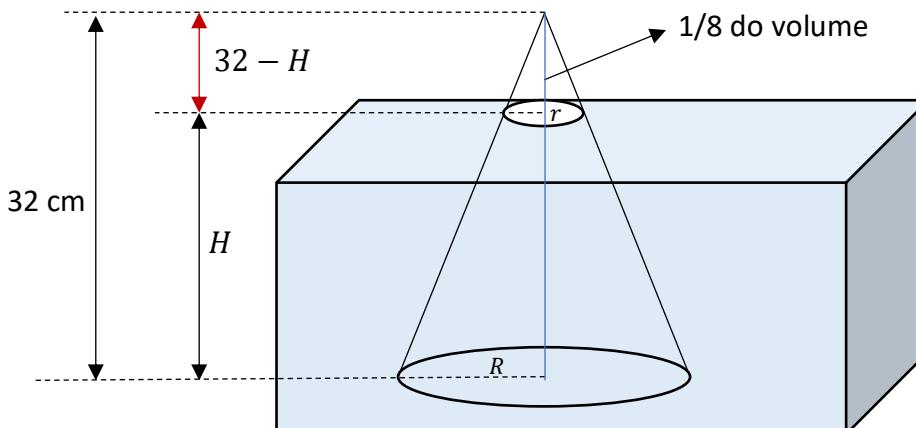
**Gabarito:** LETRA A.

**6. (FGV/AL-MT/2013)** Um cone circular reto de ferro, com 32 cm de altura, é colocado com a base no fundo de um aquário, de tal modo que a parte do cone que fica acima do nível da água corresponde a 1/8 do volume total do cone. A altura da parte submersa do cone é

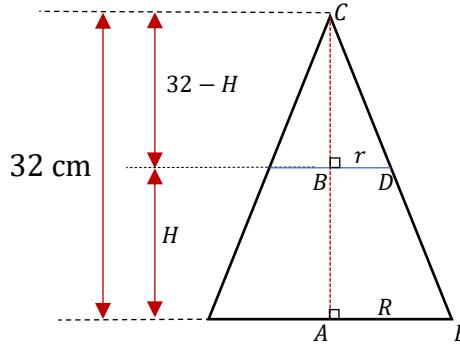
- A) 4 cm.
- B) 8 cm.
- C) 16 cm.
- D) 24 cm.
- E) 28 cm.

**Comentários:**

Vamos desenhar.



Queremos determinar a altura da parte submersa, ou seja,  $H$ . Para determiná-la, primeiro vamos encontrar uma relação entre o raio da base do cone maior ( $R$ ) e o raio da base do cone menor ( $r$ ). Considere o seguinte esquema:



Note que o triângulo CBD é semelhante ao triângulo ACE. Sendo assim,

$$\frac{r}{R} = \frac{32 - H}{32} \rightarrow r = \left( \frac{32 - H}{32} \right) \cdot R \quad (1)$$

Vamos guardar esse resultado. sabemos que o volume do cone menor é 1/8 do cone maior. Assim,

$$V_{cone\ menor} = \frac{V_{cone\ maior}}{8} \rightarrow \frac{\cancel{\pi} r^2 (32 - H)}{\cancel{3}} = \frac{\cancel{\pi} R^2 \cdot 32}{\cancel{3} \cdot 8} \rightarrow r^2 \cdot (32 - H) = 4R^2 \quad (2)$$

Usando (1) em (2):

$$\frac{(32 - H)^2}{32^2} \cdot R^2 \cdot (32 - H) \cancel{=} 4R^2 \rightarrow (32 - H)^3 = 4 \cdot 32^2 \rightarrow (32 - H)^3 = 4096$$

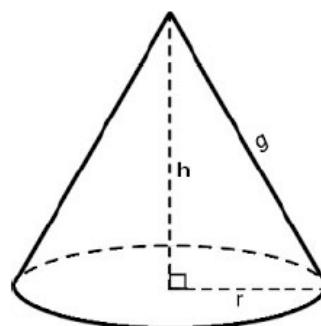
Tirando a raiz cúbica em ambos os lados da equação:

$$32 - H = 16 \rightarrow H = 16 \text{ cm}$$

**Gabarito: LETRA C**

## Outras Bancas

1. (IDIB/CREMERJ/2021)



O cone é um sólido geométrico obtido pela rotação de um triângulo. Com base na figura acima, é correto deduzir que a fórmula do seu volume (V) é dada por

- A)  $V = \pi r^2 h$
- B)  $V = \pi r^2 h/3$
- C)  $V = \pi r^2 g/3$
- D)  $V = \pi r^2 g$

**Comentários:**

Pessoal, questão bem rápida! É bater o olho para lembrarmos da fórmula! Anote ela aí com você.

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

**Gabarito:** LETRA B.

**2. (LEGALLE/PREF. VALE DO SOL/2021)** Uma empresa a produz velas em formato cônico. Sabendo que a altura de determinada vela produzida é de 12 cm e que o raio da base é de 9 cm, qual é a área lateral desta vela? (Considere  $\pi = 3,14$ )

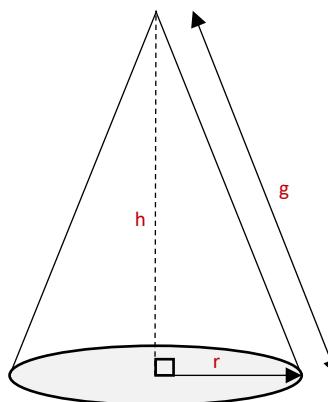
- A) 269,3  $\text{cm}^2$ .
- B) 423,9  $\text{cm}^2$ .
- C) 593,4  $\text{cm}^2$ .
- D) 339,12  $\text{cm}^2$ .
- E) 732,5  $\text{cm}^2$ .

**Comentários:**

Vimos na teoria que a área lateral de um cone é dada pela seguinte fórmula:

$$A_l = \pi R g$$

Precisamos da geratriz do cone! Sabemos que para encontrá-lo, podemos usar o **Teorema do Pitágoras**, em que **a geratriz é a hipotenusa** do triângulo retângulo destacado abaixo:



$$g^2 = h^2 + r^2 \rightarrow g^2 = 12^2 + 9^2 \rightarrow g = 15 \text{ cm}$$

Agora é só aplicarmos na fórmula, considerando  $\pi = 3,14$ :

$$A_l = 3,14 \cdot 9 \cdot 15 \rightarrow \boxed{A_l = 423,9 \text{ cm}^2}$$

**Gabarito:** LETRA B.

# QUESTÕES COMENTADAS

## Esfera

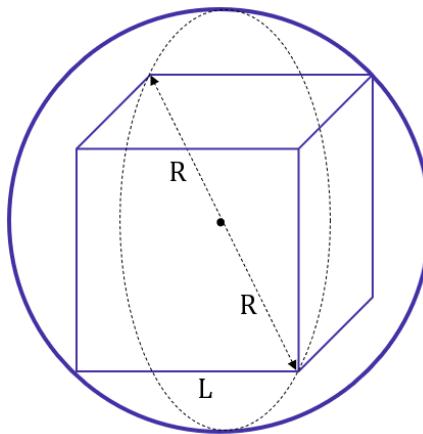
### CEBRASPE

1. (CESPE/IFF/2018) O volume de um cubo que tem seus vértices sobre uma superfície esférica de raio igual a  $5\sqrt{3}$  centímetros é igual a

- A)  $75 \text{ cm}^3$ .
- B)  $125 \text{ cm}^3$ .
- C)  $375\sqrt{3} \text{ cm}^3$
- D)  $1.000 \text{ cm}^3$ .
- E)  $3.000\sqrt{3} \text{ cm}^3$ .

#### Comentários:

Temos um **cubo dentro de uma esfera**. Imagine algo como a figura abaixo.



Sei que não é a melhor das figuras, mas minha intenção é fazer você perceber que **o diâmetro da esfera coincide com a diagonal do cubo**. Na teoria, vimos que a diagonal de um cubo é dada por:

$$d = L\sqrt{3}$$

$L$  representa **o valor da aresta do cubo**. Como o diâmetro é igual a essa diagonal, podemos igualar as duas quantidades.

$$L\sqrt{3} = 2R \quad \rightarrow \quad L = \frac{2R}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad L = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$$

Esse o valor da aresta em **função do raio da esfera**. O enunciado forneceu que  $R = 5\sqrt{3} \text{ cm}$ , substitua na fórmula para obter o  $L$ .

$$L = \frac{2\sqrt{3} \cdot (5\sqrt{3})}{3} \rightarrow L = 10 \text{ cm}$$

Com a aresta do cubo determinada, vamos encontrar o volume.

$$V = L^3 \rightarrow V = 10^3 \rightarrow V = 1000 \text{ cm}^3$$

**Gabarito:** LETRA D.

**(SEPLAG-DF/2008) Texto para as próximas questões**

Julgue os itens a seguir, acerca de um reservatório de gás que tem a forma de uma esfera de 10 m de raio.

**2. (CESPE/SEPLAG-DF/2008) Se for construído um novo reservatório esférico, com raio igual à metade do raio do reservatório original, então o volume desse novo reservatório será igual à metade do volume do outro reservatório.**

**Comentários:**

Nós vimos na teoria que o volume de uma esfera é dado pela seguinte fórmula:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Se o raio da esfera **for reduzido pela metade**, então ficamos com o volume:

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 \rightarrow V_2 = \underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3}_{V_1} \cdot \left(\frac{1}{8}\right) \rightarrow V_2 = \frac{1}{8} \cdot V_1$$

Veja que se reduzirmos o raio na metade, o volume do reservatório **diminuirá numa proporção bem maior**, resultando em um volume igual a um oitavo do original (12,5%). Logo, o item está incorreto.

**Gabarito:** ERRADO.

**3. (CESPE/SEPLAG-DF/2008) O volume desse reservatório é igual a  $4.000\pi \text{ m}^3$ .**

**Comentários:**

Nós vimos na teoria que o volume de uma esfera é dado pela seguinte fórmula:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Se o raio do reservatório é  **$R = 10\text{m}$** , então, devemos substituir:

$$V = \frac{4}{3}\pi 10^3 \rightarrow V = \frac{4}{3}\pi \cdot 1000 \rightarrow V = \frac{4000\pi}{3} \text{ m}^3$$

O item "esqueceu" de dividir por 3. Logo, encontra-se errado.

**Gabarito:** ERRADO.

4. (CESPE/SEPLAG-DF/2008) A área de superfície do reservatório é igual a  $400\pi \text{ m}^2$ .

**Comentários:**

Questão para treinarmos a aplicação da fórmula da **área de uma superfície esférica**. Lembre-se:

$$A_s = 4\pi R^2$$

Como o raio de reservatório é  **$R = 10 \text{ m}$** , devemos substituir o valor:

$$A_s = 4\pi \cdot 10^2 \quad \rightarrow \quad A_s = 400\pi \text{ cm}^2$$

O resultado que encontramos **bate com o trazido pelo item**. Portanto, correto.

**Gabarito:** CERTO.

## CESGRANRIO

5. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2018) Uma esfera maciça e homogênea é composta de um único material, e tem massa igual a 400 g. Outra esfera, também maciça e homogênea, e de mesmo material, tem raio 50% maior do que o da primeira esfera. Assim, o valor mais próximo da massa da esfera maior, em quilogramas, é igual a

- A) 0,6
- B) 1,0
- C) 1,3
- D) 1,5
- E) 1,7

**Comentários:**

Pessoal, algumas questões de geometria espacial podem envolver massa também. Isso acontece pois **volume e massa estão intrinsecamente ligados por uma propriedade chamada de densidade**. Matematicamente,

$$d = \frac{m}{V}$$

Portanto, note que **a densidade de determinado objeto homogêneo é a razão de sua massa pelo volume**. Como as duas esferas da questão são do mesmo material, **elas possuem a mesma densidade** e podemos escrever o seguinte:

$$d_1 = d_2 \quad \rightarrow \quad \frac{m_1}{V_1} = \frac{m_2}{V_2}$$

Por fim, lembre-se que **o volume de uma esfera** pode ser calculado por:

$$V_{esfera} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Substituindo na expressão que encontramos anteriormente,

$$\frac{\frac{m_1}{4\pi R_1^3}}{3} = \frac{\frac{m_2}{4\pi R_2^3}}{3}$$

**Podemos simplificar** cortando o que aparece igual em cada lado.

$$\frac{m_1}{R_1^3} = \frac{m_2}{R_2^3}$$

Pronto!! Essa é a expressão que queremos para conseguir resolver o problema.

Se a **segunda esfera tem raio 50% maior que a primeira**, podemos escrever que:

$$R_2 = 1,5R_1$$

Substituindo também que  $m_1 = 400\text{ g}$ , ficamos com:

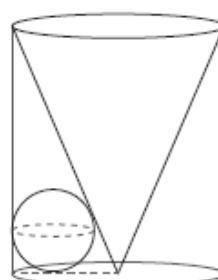
$$\frac{400}{R_1^3} = \frac{m_2}{(1,5R_1)^3} \rightarrow m_2 = \frac{400 \cdot 3,375R_1^3}{R_1^3} \rightarrow m_2 = 1.350\text{ g}$$

O enunciado pede **o valor da massa em quilogramas**, portanto, devemos dividi-la por mil.

$$m_2 = \frac{1.350}{1000} \rightarrow \mathbf{m_2 = 1,35\text{ kg}}$$

**Gabarito:** LETRA C.

6. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2017) A Figura a seguir mostra um cilindro reto, um cone reto e uma esfera que tangencia a base do cilindro e as geratrizas do cilindro e do cone. O cone e o cilindro têm como base um círculo de raio 7 cm e a mesma altura que mede 24 cm.



**Qual o volume, em centímetros cúbicos, da região interior ao cilindro e exterior à esfera e ao cone?**

- A)  $800\pi$
- B)  $784\pi$
- C)  $748\pi$
- D)  $684\pi$
- E)  $648\pi$

**Comentários:**

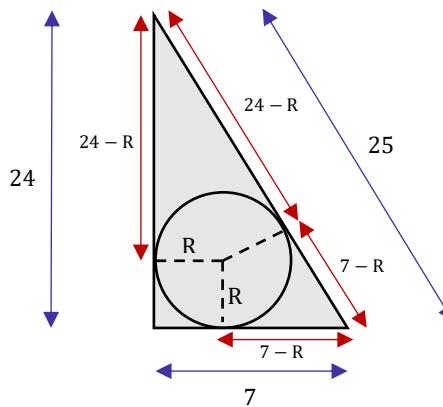
Ok! Temos **muitos volumes para calcular**. Começaremos pelo cilindro.

$$V_{cilindro} = \pi R^2 h \rightarrow V_{cilindro} = \pi \cdot 7^2 \cdot 24 \rightarrow V_{cilindro} = 1.176\pi \text{ cm}^3$$

Agora, o volume do cone.

$$V_{cone} = \frac{\pi R^2 h}{3} \rightarrow V_{cone} = \frac{1.176\pi}{3} \rightarrow V_{cone} = 392\pi$$

Beleza! Agora o mistério: **o volume da esfera!** Para calcularmos, precisamos do raio e não o sabemos. Para encontrá-lo, veja o desenho abaixo.



Primeiramente, note que a geratriz do cone é **a hipotenusa do triângulo retângulo que tem como catetos a altura do cone e o raio da base**. Assim,

$$g^2 = 24^2 + 7^2 \rightarrow g^2 = 576 + 49 \rightarrow g^2 = 625 \rightarrow g = 25$$

Pelo desenho, conseguimos dizer que:

$$(24 - R) + (7 - R) = 25 \rightarrow 31 - 2R = 25 \rightarrow R = 3$$

Com **o raio da esfera**, finalmente conseguimos encontrar o seu volume.

$$V_{esfera} = \frac{4\pi R^3}{3} \rightarrow V_{esfera} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^3}{3} \rightarrow V_{esfera} = 36\pi \text{ cm}^3$$

A região dentro do cilindro e fora do cone e da esfera tem volume de:

$$V_{regiao} = V_{cilindro} - V_{cone} - V_{esfera}$$

$$V_{regiao} = 1.176\pi - 392\pi - 36\pi \rightarrow V_{regiao} = 748 \text{ cm}^3$$

**Gabarito:** LETRA C.

## FGV

**7. (FGV/PM-CE/2021)** O raio de uma esfera aumentou  $1/3$  de seu valor. Sendo  $V$  o volume inicial da esfera, é correto afirmar que o novo volume

- A) é menor do que  $V$ .
- B) está entre  $V$  e  $(4/3)V$ .
- C) está entre  $(4/3)V$  e  $2V$ .
- D) está entre  $2V$  e  $3V$ .
- E) é maior que  $3V$ .

### Comentários:

Considere uma esfera de raio  $R$ . O volume dessa esfera é dado por:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Se o raio dessa esfera aumenta de  $1/3$ , então seu novo raio é:

$$R' = R + \frac{R}{3} \rightarrow R' = \frac{4R}{3}$$

O volume dessa nova esfera é dado por:

$$V' = \frac{4\pi R'^3}{3}$$

Substituindo  $R'$ :

$$V' = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{4R}{3}\right)^3 \rightarrow V' = \left(\frac{64}{27}\right) \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \rightarrow \boxed{V' = 2,37 \cdot V}$$

Note então que o novo volume está entre  $2V$  e  $3V$ .

**Gabarito:** LETRA D

## Outras Bancas

**8. (IDIB/CRF MS/2021)** Seja uma esfera de raio  $r$ . É correto afirmar que seu volume é dado por

- A)  $V = r^3$
- B)  $V = 2\pi r$
- C)  $V = (4/3)\pi r^3$
- D)  $V = 4\pi r^2$

### Comentários:

Questão recente que exigiu do candidato apenas o conhecimento da fórmula do volume de uma esfera!

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

**Gabarito:** LETRA C.

**9. (QUADRIX/CRF AP/2021)** Sabendo que o sistema solar é composto por 8 planetas (Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno), julgue o item.

Se Netuno tem um raio aproximadamente 4 vezes maior que o da Terra, é correto estimar que seu volume é 16 vezes maior que o da Terra.

**Comentários:**

Considere que o raio da Terra seja  $R_t$  e o raio de Netuno seja  $R_n$ .

Considerando os planetas como **esferas perfeitas**, podemos dizer que seu volume é dado por:

$$V_t = \frac{4\pi R_t^3}{3}$$

$$V_n = \frac{4\pi R_n^3}{3}$$

Como **o raio de Netuno é 4 vezes o da Terra**, então:  $R_n = 4R_t$

Podemos usar essa informação em  $V_n$ .

$$V_n = \frac{4\pi(4R_t)^3}{3} \rightarrow V_n = 64 \cdot \frac{4\pi R_t^3}{3} \rightarrow V_n = 64V_t$$

Note, portanto, que **o volume de Netuno é 64 vezes maior que o da Terra!**

**Gabarito:** ERRADO.

# LISTA DE QUESTÕES

## Introdução

1. (DECEx/ESA/2021 - adaptada) Em relação à geometria espacial métrica, analise as sentenças abaixo assinalando V para verdadeiro ou F para falso.

( ) Um poliedro é convexo quando o segmento que liga dois dos seus pontos está sempre contido nele.

( ) Cada vértice de um poliedro é um ponto comum a três ou mais arestas.

( ) Um poliedro convexo é dito regular quando todas as suas faces são polígonos regulares e congruentes e em todos os vértices concorre o mesmo número de arestas.

A sequência correta relativa às afirmações acima é;

- A) VVF.
- B) FFF.
- C) VFV.
- D) VVV.
- E) FFV.

2. (Inst. Excelência/PREF. TREMEMBÉ/2019) A Geometria Espacial é o nome usual para geometria no espaço tridimensional, em que os sólidos estão inseridos. Um sólido é limitado por um ou mais planos ou superfícies, assim como as superfícies são limitadas por uma ou mais linhas. Sobre os sólidos geométricos, é CORRETO afirmar:

- A) Um cuboctaedro é um sólido geométrico irregular, composto de dois tipos de polígonos regulares: o quadrado e o triângulo.
- B) Pelo Teorema de Euler, sabe-se que o número de vértices somado ao número de faces é igual ao número de arestas subtraído de 2, para qualquer poliedro.
- C) A famosa pirâmide de Gizé, no Egito, não é um exemplo de poliedro.
- D) Poliedros regulares são muito conhecidos por sua simetria. No total, existem 6 poliedros regulares.

3. (PRÓ-MUNICÍPIO/PREF. MASSAPÊ/2019) O que é um poliedro de Platão? Os poliedros de Platão são aqueles que possuem as seguintes propriedades:

I. Todas as faces apresentam o mesmo número de \_\_\_\_\_;

II. Todos os vértices possuem o mesmo número de arestas, isto é, se um vértice é a extremidade de três arestas, por exemplo, então todos serão também;

III. É \_\_\_\_\_;

IV. Seja o número de faces igual a  $F$ , de arestas igual a  $A$  e de vértices igual a  $V$ , então vale a seguinte relação, chamada de relação de \_\_\_\_\_ :  $V - A + F = 2$ .

A sequência correta para o preenchimento de lacunas está em:

- A) Faces, côncavo, Euler;
- B) Faces, côncavo, Platão;
- C) Arestas, bidimensional, Platão;
- D) Arestas, convexo, Euler.

**4. (DIRENS/EEAR/2021)** Um poliedro convexo possui 20 faces, das quais 7 são pentagonais e 13 triangulares. Dessa forma, é correto afirmar que

- A) o número de arestas é 39.
- B) o número de arestas é 74.
- C) o número de vértices é 19.
- D) o número de vértices é 23.

**5. (QUADRIX/SEDF/2021)** Um cuboctaedro é um poliedro convexo composto por oito faces triangulares regulares e seis faces quadradas. Considerando essa informação, julgue o item.

O número de vértices do cuboctaedro é igual a 12.

**6. (GUALIMP/PREF. CONC. MACABU/2020)** Os alunos do curso de Licenciatura em Matemática construíram durante a aula de Geometria, um poliedro de isopor. Ao analisarem melhor a figura, uma aluna verificou que o número de vértices é o quádruplo do número de faces acrescido de dois. Um outro aluno verificou que número de arestas é igual ao triplo do número de faces acrescido de doze. Com essas duas observações feitas pelos alunos, esse poliedro possui quantos vértices?

- A) 6.
- B) 26.
- C) 30.
- D) 32.

**7. (LEGALLE/PREF. GRAVATAÍ/2019)** Um poliedro convexo possui 20 faces e 12 vértices. O número de arestas desse poliedro é:

- A) 26.
- B) 28.
- C) 30.
- D) 32.
- E) 34.

## GABARITO

1. LETRA D
2. LETRA A
3. LETRA D
4. LETRA C
5. CERTO
6. LETRA B
7. LETRA C

## LISTA DE QUESTÕES

### Prisma

#### CEBRASPE

**1. (CESPE/SEDUC-AL/2021) Julgue o item subsequente, relativos a geometria.**

Suponha que o volume (em  $\text{cm}^3$ ) de um cubo seja numericamente menor do que a área (em  $\text{cm}^2$ ) de sua superfície, isto é, a soma das áreas de suas faces. Nessa situação, o comprimento da aresta desse cubo é inferior a 6 cm.

**2. (CESPE/TJ-PR/2019) Mesmo com a informatização dos processos, ainda é grande o volume de papéis consumidos nas instituições públicas, o que demanda grandes espaços para seu armazenamento. Por exemplo, uma caixa na forma de um paralelepípedo retângulo medindo 31 cm de largura, 25 cm de altura e 42 cm de comprimento armazena 10 resmas de papel A4. Nesse caso, para armazenar 1.000 dessas caixas em um contêiner, é necessário que a capacidade desse contêiner seja de**

- A)  $32,55 \text{ m}^3$ .
- B)  $39,20 \text{ m}^3$ .
- C)  $77,50 \text{ m}^3$ .
- D)  $98 \text{ m}^3$ .
- E)  $105 \text{ m}^3$ .

**3. (CESPE/FUB/2018) Paulo, Maria e João, servidores lotados em uma biblioteca pública, trabalham na catalogação dos livros recém-adquiridos. Independentemente da quantidade de livros a serem catalogados em cada dia, Paulo cataloga  $1/4$ , Maria cataloga  $1/3$  e João,  $5/12$ . A respeito da catalogação de livros por esses servidores, julgue o item a seguir.**

**Situação hipotética:** Cada um dos livros que serão catalogados em três dias de trabalho constitui um sólido que tem a forma de um paralelepípedo retângulo de  $2.000 \text{ cm}^3$  de volume. **Assertiva:** Nessa situação, se, nesse período, João catalogar 375 desses livros, então, nesse período, os três servidores juntos catalogarão uma quantidade de livros cuja soma dos volumes será superior a  $2 \text{ m}^3$ .

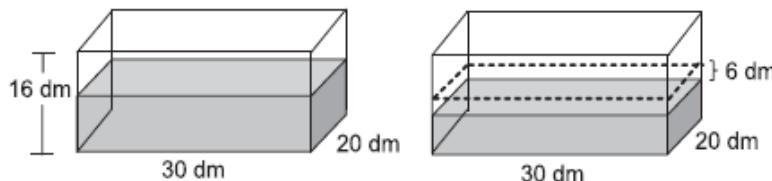
#### CESGRANRIO

**4. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2014) Para embalar cada um dos sabonetes artesanais que produz, Sofia utiliza um pedaço de papel cuja área corresponde a  $4/3$  da superfície total do sabonete, que tem a forma de um paralelepípedo retângulo de 6 cm de comprimento, 4,5 cm de largura e 2 cm de altura. Qual é, em  $\text{cm}^2$ , a área do pedaço de papel?**

- A) 32
- B) 64
- C) 72
- D) 88

E) 128

5. (CESGRANRIO/BR/2013) Um reservatório em forma de paralelepípedo, com 16 dm de altura, 30 dm de comprimento e 20 dm de largura, estava apoiado sobre uma base horizontal e continha água até a metade de sua capacidade. Parte da água foi consumida e, assim, o nível da água baixou 6 dm, como mostra a Figura a seguir.



Quantos litros de água foram consumidos?

- A) 1800
- B) 2400
- C) 3600
- D) 5400
- E) 7200

6. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2012) Para montar um cubo, dispõe-se de uma folha de cartolina retangular, de 30 cm de comprimento e 20 cm de largura. As faces do cubo, uma vez recortadas, serão unidas com fita adesiva. Qual é, em centímetros, a medida máxima da aresta desse cubo?

- A) 7
- B) 8
- C) 9
- D) 10
- E) 11

## FCC

7. (FCC/SABESP/2019) Um reservatório, inicialmente cheio de água, tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo cuja base é um quadrado de lado 2 m. Em um primeiro momento, é retirado 1 m<sup>3</sup> de água desse reservatório e, depois, é retirada mais uma determinada quantidade de água, de maneira que essa segunda retirada faz o nível da água no reservatório descer 80 cm. Finalmente, é retirado um terço da água que ainda se encontra no reservatório, sobrando 2,8 m<sup>3</sup> de água em seu interior. A altura desse reservatório, em metros, mede

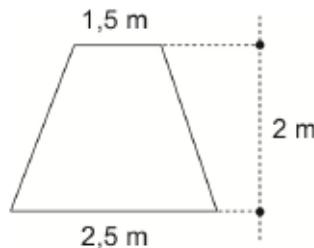
- A) 1
- B) 2,1
- C) 2,8
- D) 2,5
- E) 3

8. (FCC/PREF. SJRP/2019) Uma caixa, na forma de paralelepípedo reto-retângulo, tem 25 cm de comprimento, 12 cm de largura e 12 cm de altura. Essa caixa será usada para armazenar pequenos blocos

maciços, também na forma de paralelepípedos reto-retângulos, em que uma das faces é um quadrado de lado 2 cm. Sabendo que no máximo 180 desses blocos cabem totalmente no interior da caixa, a área total de cada bloco, em  $\text{cm}^2$ , é:

- A) 36
- B) 40
- C) 48
- D) 52
- E) 64

9. (FCC/METRO-SP/2019) Numa indústria alimentícia, construiu-se um reservatório de seção trapezoidal constante para o armazenamento de água potável. As medidas internas da seção do reservatório estão indicadas na figura.

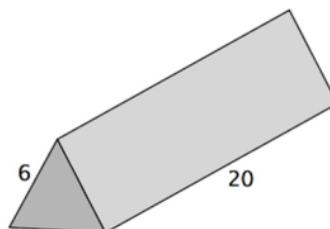


Num determinado dia em que o reservatório apresentava-se completamente vazio, com o objetivo de enchê-lo até 80% de sua capacidade, um registro de alimentação, de vazão 25,4 litros por minuto, foi aberto. O encarregado do setor não percebeu, no entanto, que um ralo de escoamento do reservatório, cuja vazão era de 6,2 litros por minuto, também estava aberto. Sabendo que o tempo transcorrido do início do processo até a obtenção do objetivo exposto foi de 3 horas e 20 minutos, é correto concluir que a profundidade do reservatório, em metros, é de:

- A) 1,6.
- B) 1,2.
- C) 1,0.
- D) 0,8.
- E) 1,4.

**FGV**

10. (FGV/PREF. ANGRA/2019) Certa embalagem tem a forma de um prisma triangular regular como o representado na figura a seguir.



O comprimento da embalagem é de 20 cm e cada lado do triângulo mede 6cm. O volume dessa embalagem, em  $\text{cm}^3$ , é de, aproximadamente,

**Obs.:** utilize  $\sqrt{3} = 1,73$ .

- A) 250.
- B) 270.
- C) 290.
- D) 310.
- E) 330.

**11. (FGV/BANESTES/2018)** Uma torneira aberta esvazia um tanque cúbico, completamente cheio, de 1,5 m de aresta em 8 horas. Com a mesma vazão, para esvaziar outro tanque cúbico, completamente cheio, com 3 m de aresta, uma torneira igual à primeira levaria:

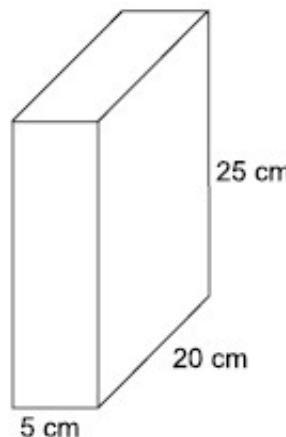
- A) 16 horas.
- B) 24 horas.
- C) 32 horas.
- D) 48 horas.
- E) 64 horas.

**12. (FGV/CODEBA/2016)** Um contêiner possui, aproximadamente, 6,0 m de comprimento, 2,4 m de largura e 2,3 m de altura. A capacidade cúbica desse contêiner é de, aproximadamente,

- A)  $31 \text{ m}^3$ .
- B)  $33 \text{ m}^3$ .
- C)  $35 \text{ m}^3$ .
- D)  $37 \text{ m}^3$ .
- E)  $39 \text{ m}^3$ .

## VUNESP

**13. (VUNESP/PREF. OSASCO/2022)** Uma caixa de papelão, na forma de um prisma reto de base retangular, tem suas medidas indicadas na figura.



*Figura fora de escala*

Essa caixa está com  $\frac{3}{5}$  de sua capacidade total preenchida com sabão em pó. Se todo esse sabão for dividido em porções de  $125 \text{ cm}^3$  cada uma, o número de porções obtidas será

- A) 8
- B) 12
- C) 15
- D) 18
- E) 20

14. (VUNESP/PM-SP/2022) Um paralelepípedo reto-retângulo tem uma de suas faces de maior área apoiada sobre o chão, e, dessa maneira, sua área lateral é  $200 \text{ cm}^2$ . Se esse paralelepípedo tivesse uma das faces de menor área apoiada sobre o chão, a área lateral seria  $312 \text{ cm}^2$ . Sabendo que a área total do paralelepípedo é  $392 \text{ cm}^2$ , sua maior aresta mede

- A) 21 cm.
- B) 20 cm.
- C) 15 cm.
- D) 14 cm.
- E) 12 cm.

## Outras Bancas

15. (RBO/PREF. NAVEGANTES/2022) Um reservatório de água em formato de um paralelepípedo tem dimensões  $3 \text{ m} \times 2 \text{ m} \times 5,5 \text{ m}$  e está com 72% de sua capacidade utilizada. Sabendo que  $1 \text{ m}^3$  equivale a 1.000 litros, a quantidade de água que está neste reservatório é de:

- A) 33.000 L.
- B) 29.620 L.
- C) 25.540 L.
- D) 23.760 L.
- E) 23.120 L.

16. (IFBC/IBGE/2022) Num posto de coleta, um agente censitário verificou que haviam chegado 12 notebooks idênticos e estavam todos fora da embalagem e empilhados numa única pilha. Se cada notebook tem espessura de 5 cm, comprimento de 24 cm e largura de 18 cm, então o volume total dessa pilha é, em  $\text{dm}^3$ , igual a:

- A) 259,2
- B) 2592
- C) 25,92
- D) 2,592
- E) 25920

17. (FUNPAR/PM PR/2021) Um recipiente possui formato de um cubo de aresta 12 cm. Há no recipiente 0,944 L de água e, no fundo, um dado também de formato cúbico, com aresta medindo 2 cm. Se o dado for retirado do recipiente, a altura do líquido nesse recipiente será de aproximadamente:

- A) 11,4 cm.
- B) 7,0 cm.
- C) 6,5 cm.

- D) 6,0 cm.
- E) 5,7 cm.

## GABARITO

- |                   |                    |                    |
|-------------------|--------------------|--------------------|
| <b>1.</b> CERTO   | <b>7.</b> LETRA B  | <b>13.</b> LETRA B |
| <b>2.</b> LETRA A | <b>8.</b> LETRA C  | <b>14.</b> LETRA E |
| <b>3.</b> ERRADO  | <b>9.</b> LETRA B  | <b>15.</b> LETRA D |
| <b>4.</b> LETRA E | <b>10.</b> LETRA D | <b>16.</b> LETRA C |
| <b>5.</b> LETRA C | <b>11.</b> LETRA E | <b>17.</b> LETRA C |
| <b>6.</b> LETRA D | <b>12.</b> LETRA B |                    |

# LISTA DE QUESTÕES

## Pirâmide

### CEBRASPE

**1. (CESPE/FUB/2022) Julgue o item que se segue, relacionados a geometria plana e espacial.**

Uma pirâmide de altura  $h = 2\sqrt{3}$  cm com base dada por um hexágono regular de lado  $l = 3$  cm tem volume  $V = \sqrt{3}$  cm<sup>3</sup>.

**2. (CESPE/CBM-AL/2021) Julgue o seguinte item, relativos a geometria espacial.**

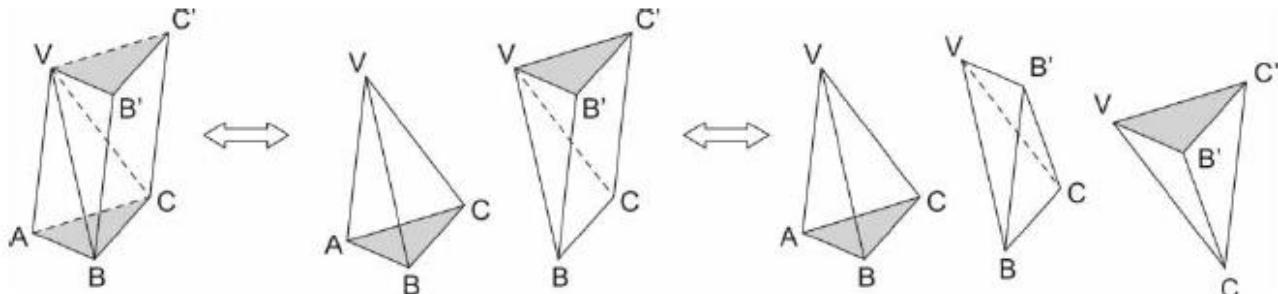
Para cobrir um tetraedro regular de aresta igual a  $\sqrt[4]{3}$  m com um material adesivo que custa R\$ 5,50/m<sup>2</sup>, deve-se gastar R\$ 16,50.

**3. (CESPE/PM-AL/2021) Com relação às geometrias plana, espacial e analítica, julgue o item que se segue.**

A área superficial de uma pirâmide de base quadrada regular em que todas as arestas são iguais a 2 é  $S = 4 + 4\sqrt{3}$ .

### FCC

**4. (FCC/SEC-BA/2018) Observe a sequência de imagens indicadas abaixo.**



**A sequência de imagens está sendo usada para ilustrar o fato de que**

- A) a soma de cinco pirâmides resulta em um prisma.
- B) o volume de uma pirâmide é igual a dois terços do volume de um prisma.
- C) o volume de um prisma é igual ao de duas pirâmides acrescido ao de um prisma.
- D) a área total de um prisma é igual a área total das três pirâmides que o compõem.
- E) o volume de uma pirâmide é a terça parte do volume de um prisma.

5. (FCC/SEDU-ES/2018) Uma pirâmide quadrangular regular reta teve sua aresta da base reduzida em 50% e sua altura aumentada em  $x\%$  de tal forma que seu volume não se alterou. Nas condições descritas,  $x$  é igual a

- A) 250.
- B) 350.
- C) 100.
- D) 200.
- E) 300.

6. (FCC/SEDU-ES/2018) Seja a pirâmide reta  $P_1$ , de base quadrada, com 1 m de aresta da base e 2 metros de altura, e seja a pirâmide reta  $P_2$ , de base quadrada, com 3 m de aresta da base e 4 metros de altura. O volume de  $P_2$  é igual ao de  $P_1$  multiplicado por

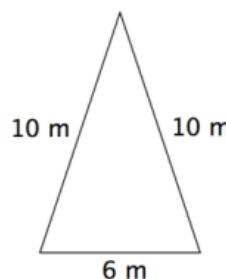
- A) 15.
- B) 9.
- C) 12.
- D) 6.
- E) 18.

## FGV

7. (FGV/SSP-AM/2022) Uma pirâmide de base retangular tem volume igual a 36. As arestas da base da pirâmide são então duplicadas e a altura, triplicada. O volume da nova pirâmide é

- A) 108.
- B) 216.
- C) 324.
- D) 396.
- E) 432.

8. (FGV/IBGE/2016) Uma pirâmide regular é construída com um quadrado de 6 m de lado e quatro triângulos iguais ao da figura abaixo.



O volume dessa pirâmide em  $\text{m}^3$  é aproximadamente:

- A) 84.
- B) 90.
- C) 96.
- D) 108.
- E) 144.

## VUNESP

**9. (VUNESP/Prefeitura Municipal da Estânciia Balneária de Peruíbe (SP)/2019)** Uma pirâmide de base retangular e altura 12 cm tem volume de  $100 \text{ cm}^3$ . A área da base dessa pirâmide, em  $\text{cm}^2$ , é

- A) 25
- B) 26
- C) 30
- D) 36
- E) 50

**10. (VUNESP/PREF. MORRO AGUDO/2020)** Uma peça em madeira maciça, com formato de pirâmide reta de base quadrada, tem volume de  $484 \text{ cm}^3$  e altura de 12 cm. Logo, a aresta da base dessa peça mede

- A) 14 cm.
- B) 13 cm.
- C) 12 cm.
- D) 11 cm.
- E) 10 cm.

**11. (VUNESP/PREF. PERUÍBE/2019)** Uma pirâmide de base retangular e altura 12 cm tem volume de  $100 \text{ cm}^3$ . A área da base dessa pirâmide, em  $\text{cm}^2$ , é

- A) 25.
- B) 26.
- C) 30.
- D) 36.
- E) 50.

## Outras Bancas

**12. (FUNDATÉC/PREF. CANDELÁRIA/2021)** O volume de uma pirâmide quadrangular regular de lado  $L$  e altura sendo o dobro do lado é dado por:

- A)  $L^3/3$
- B)  $L^3/2$
- C)  $2L^3/3$
- D)  $2L^3$
- E)  $3L^3$

**13. (QUADRIX/CRMV AP/2021)** O museu do Louvre, em Paris, tem como entrada uma estrutura piramidal de base quadrada, com 34 m de largura e 21 m de altura. Essa pirâmide principal é rodeada por 3 pirâmides quadradas menores, cujas dimensões serão assumidas como 8 m de largura e 5 m de altura, e  $\pi$  é igual a 3. Com base nesse caso hipotético, julgue o item.

A capacidade total das 3 pirâmides menores juntas é de 320 L.

## GABARITO

- |            |             |
|------------|-------------|
| 1. LETRA C | 8. LETRA D  |
| 2. CERTO   | 9. LETRA A  |
| 3. ERRADO  | 10. LETRA D |
| 4. LETRA E | 11. LETRA A |
| 5. LETRA E | 12. LETRA C |
| 6. LETRA E | 13. ERRADO  |
| 7. LETRA E |             |

## LISTA DE QUESTÕES

### Cilindro

#### CEBRASPE

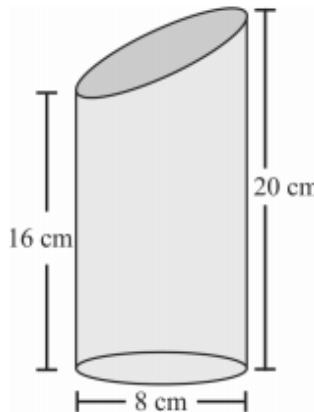
**1. (CESPE/CBM-TO/2021)** Considere um caminhão-pipa cujo tanque é cilíndrico com comprimento igual a 4 metros e diâmetro igual a 2 metros. Usando-se  $\pi = 3,14$ , é correto estimar que o volume desse tanque é igual a

- A) 6.280 litros.
- B) 12.560 litros.
- C) 25.120 litros.
- D) 50.240 litros.

**2. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019)** Julgue o item seguinte, referente a geometria analítica, geometria plana e geometria espacial.

Se a área total de um cilindro circular reto de 3 cm de altura for igual ao triplo de sua área lateral, então o volume desse cilindro será inferior a  $400 \text{ cm}^3$ .

**3. (CESPE/IFF/2018)**



Um cilindro circular reto, cuja base tem diâmetro de 8 cm, foi cortado por um plano inclinado em relação à base, dando origem ao tronco de cone apresentado. A altura maior do tronco de cone mede 20 cm e a menor, 16 cm. Nesse caso, o volume do tronco de cone é igual a

- A)  $256\pi \text{ cm}^3$ .
- B)  $288\pi \text{ cm}^3$ .
- C)  $320\pi \text{ cm}^3$ .
- D)  $576\pi \text{ cm}^3$ .
- E)  $1.152\pi \text{ cm}^3$ .

## CESGRANRIO

4. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2018) Uma jarra cilíndrica está completamente cheia de água. Seu diâmetro interno é  $2d$ , e sua altura,  $3H$ . A água contida nessa jarra é suficiente para encher completamente  $n$  copos cilíndricos de diâmetro interno  $d$  e altura  $H$ . O maior valor de  $n$  é

- A) 4
- B) 6
- C) 8
- D) 10
- E) 12

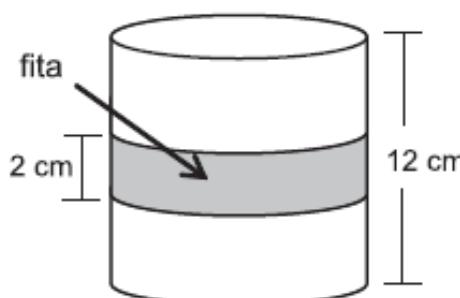
5. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2014) Para embalar cada um dos sabonetes artesanais que produz, Sofia utiliza um pedaço de papel cuja área corresponde a  $4/3$  da superfície total do sabonete, que tem a forma de um paralelepípedo retângulo de 6 cm de comprimento, 4,5 cm de largura e 2 cm de altura. Qual é, em  $\text{cm}^2$ , a área do pedaço de papel?

- A) 32
- B) 64
- C) 72
- D) 88
- E) 128

6. (CESGRANRIO/DECEA/2012) Um reservatório de água com a forma de um cilindro reto de 1,5 m de altura e 1,2 m de raio interno precisa ser impermeabilizado. Para tal, seu fundo (uma das bases do cilindro) e sua superfície lateral interna serão totalmente cobertos por um produto impermeabilizante que é vendido em embalagens com um litro. Se o rendimento desse produto é de  $9 \text{ m}^2$  por litro, quantas embalagens, no mínimo, devem ser compradas para que essa impermeabilização seja realizada?

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5

7. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2012) Uma fita retangular de 2 cm de largura foi colocada em torno de uma pequena lata cilíndrica de 12 cm de altura e  $192\pi \text{ cm}^3$  de volume, dando uma volta completa em torno da lata, como ilustra o modelo abaixo.

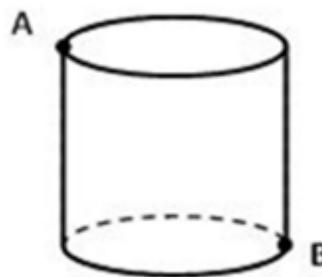


A área da região da superfície da lata ocupada pela fita é, em  $\text{cm}^2$ , igual a

- A)  $8\pi$
- B)  $12\pi$
- C)  $16\pi$
- D)  $24\pi$
- E)  $32\pi$

FCC

8. (FCC/SABESP/2019) A figura apresenta um cilindro circular reto de 4 cm de altura, as bordas inferior e superior são circunferências, cujo perímetro de cada uma mede 6 cm. Os pontos A e B são diametralmente opostos. A menor distância que deve ser percorrida sobre a superfície do cilindro para sair do ponto A e chegar ao ponto B é:



- A) 4 cm
- B)  $4\sqrt{2}$  cm
- C) 10 cm
- D)  $5\sqrt{2}$  cm
- E) 5 cm

9. (FCC/SABESP/2018) Um cilindro reto tem altura de 100 mm, diâmetro externo 11 mm e diâmetro interno 9 mm. A área da chapa para construir este cilindro é

- A) 1.000  $\text{mm}^2$
- B) 900  $\text{mm}^2$
- C) 3.000  $\text{mm}^2$
- D) 3.140  $\text{mm}^2$
- E) 1.100  $\text{mm}^2$

10. (FCC/SABESP/2017) Um reservatório cilíndrico de altura  $h$  e raio  $R$  foi substituído por um novo reservatório também cilíndrico de altura  $h/2$  e raio  $2R$ . Sendo desprezíveis as espessuras das paredes dos dois reservatórios, é correto afirmar que a capacidade do novo reservatório é

- A) quatro vezes maior que a capacidade do reservatório antigo.
- B) igual à capacidade do reservatório antigo.
- C) o dobro da capacidade do reservatório antigo.
- D) oito vezes maior que a capacidade do reservatório antigo.
- E) metade da capacidade do reservatório antigo.

**11. (FCC/SEE-MG/2012)** Numa cozinha há dois recipientes cilíndricos de mesma altura medindo 50 cm, ambos vazios. Os raios de suas bases são iguais a 5 cm e 10 cm. A cozinheira despeja um líquido no cilindro mais fino e observa que atinge uma altura de 40 cm. Ao trocar esse conteúdo para o cilindro mais largo, o líquido ocupará, nesse recipiente,

- A) 1/2 da capacidade total.
- B) 1/4 da capacidade total.
- C) 1/5 da capacidade total.
- D) 1/3 da capacidade total.

## FGV

**12. (FGV/PM-SP/2021)** Para abastecer os carros da corporação, há um tanque cilíndrico de combustível, com 2 m de diâmetro e 1,5 m de altura. A capacidade desse tanque é de, aproximadamente,

- A) 4.100 litros.
- B) 4.400 litros.
- C) 4.700 litros.
- D) 5.000 litros.
- E) 5.300 litros.

**13. (FGV/PREF. SALVADOR/2019)** O caldeirão da figura abaixo tem 40 cm de diâmetro e 36 cm de altura.



**A capacidade desse caldeirão é de, aproximadamente,**

- A) 25 litros.
- B) 30 litros.
- C) 36 litros.
- D) 40 litros.
- E) 45 litros.

**14. (FGV/BANESTES/2018)** Certos tambores para coleta de resíduos não recicláveis são cilindros com 40 cm de diâmetro e 60 cm de altura.



O volume de um desses recipientes, em litros, é de, aproximadamente:

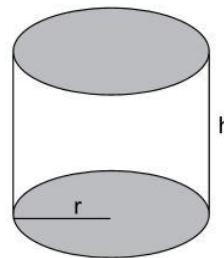
- A) 75.
- B) 90.
- C) 120.
- D) 150.
- E) 180.

15. (FGV/ALE-RO/2018) Um barril com a forma de um cilindro circular reto com 60 cm de diâmetro e 1 m de altura tem, aproximadamente, a capacidade de

- A) 210 litros.
- B) 280 litros.
- C) 320 litros.
- D) 400 litros.
- E) 520 litros.

**VUNESP**

16. (VUNESP/Prefeitura Municipal de Campinas (SP)/2019) Analise o sólido geométrico da figura



Se  $h = 48$  cm e  $r = 17$  cm, esse sólido tem um volume de:

- A)  $0,082 \text{ m}^3$
- B)  $0,068 \text{ m}^3$
- C)  $0,123 \text{ m}^3$
- D)  $0,044 \text{ m}^3$
- E)  $0,246 \text{ m}^3$

17. (VUNESP/Prefeitura Municipal de Ibaté (SP)/2019) A caixa d'água de um prédio público tem a forma de um cilindro reto de diâmetro  $d = 3,2$  m e altura  $h = 4$  m. Então, assumindo-se a aproximação  $\pi = 3$ , a capacidade dessa caixa d'água será de

- A) 3 072 L.
- B) 12 288 L.
- C) 30 720 L.
- D) 48 080 L.
- E) 122 880 L.

## Outras Bancas

**18. (QUADRIX/CRP 10/2022)** Jonathan é um excelente cervejeiro e prepara sua cerveja artesanal de uma maneira peculiar. Ele sempre faz a mesma quantidade de cerveja por vez, o suficiente para encher completamente um de seus recipientes cilíndricos, os quais têm 1,5 metro de altura e 50 centímetros de raio, sendo que todo o volume dos recipientes é útil. Com base nesse caso hipotético, julgue o item.

Jonathan sempre faz  $0,375\pi$  litros de cerveja por vez.

**19. (FUNDATÉC/CRA RS/2021)** Maria adquiriu uma piscina no formato de um cilindro reto com 1,20 metros de profundidade e 6 metros de diâmetro. Sabe-se que para encher  $1m^3$  são necessários 1.000 litros de água, sendo assim, quantos litros de água serão necessários para encher 75% da capacidade total dessa piscina? (Considere  $\pi = 3$ )

- A) 8.100 litros.
- B) 12.600 litros.
- C) 16.200 litros.
- D) 24.300 litros.
- E) 32.400 litros.

## GABARITO

- |             |             |
|-------------|-------------|
| 1. LETRA B  | 11. LETRA C |
| 2. CERTO    | 12. LETRA C |
| 3. LETRA B  | 13. LETRA E |
| 4. LETRA E  | 14. LETRA A |
| 5. LETRA E  | 15. LETRA B |
| 6. LETRA B  | 16. LETRA D |
| 7. LETRA C  | 17. LETRA C |
| 8. LETRA E  | 18. ERRADO  |
| 9. LETRA D  | 19. LETRA D |
| 10. LETRA C |             |

# LISTA DE QUESTÕES

## Cone

### CEBRASPE

**1. (CESPE/PC-ES/2010)** Os policiais da delegacia de defesa do consumidor apreenderam, em um supermercado, 19,5 kg de mercadorias impróprias para o consumo: potes de 150 g de queijo e peças de 160 g de salaminho. Com base nessa situação, julgue o item a seguir.

Suponha que os potes de queijo tenham a forma de um tronco de cone de 7 cm de altura, em que o raio da base maior meça 4 cm e o da base menor, 3 cm. Nesse caso, tomando 3,14 como valor aproximado para  $\pi$ , é correto afirmar que essas embalagens têm capacidade para, no máximo, 250 mL.

**2. (CESPE/PETROBRÁS/2008)** Considere que casquinhas de sorvete têm a forma de um cone circular reto e capacidade para  $45\pi \text{ cm}^3$  de sorvete em seu interior. Nesse caso, se as casquinhas têm 15 cm de altura, então o raio da base do cone deve medir

- A)  $\sqrt{45/\pi}$  cm.
- B)  $\sqrt{18}$  cm.
- C)  $3/\sqrt{\pi}$  cm.
- D)  $3\pi$  cm.
- E) 3 cm.

### FGV

**3. (FGV/PREF. PAULÍNIA/2021)** Um recipiente cônico invertido, com altura 27cm e raio da base 24cm, está cheio de água. A água é, então, totalmente transferida para um recipiente cilíndrico com raio da base 18cm e altura suficiente para conter, com sobras, toda a água. A altura, em centímetros, que a água atinge no cilindro é

- A) 9.
- B) 12.
- C) 16.
- D) 18.
- E) 24.

**4. (FGV/PREF. SALVADOR/2019)** Em um cone de revolução, cada geratriz mede 12 cm e faz  $30^\circ$  com o eixo do cone. A área lateral desse cone em  $\text{cm}^2$  é

- A)  $24\pi$ .
- B)  $36\pi$ .
- C)  $48\pi$ .
- D)  $60\pi$ .
- E)  $72\pi$ .

5. (FGV/ALERO/2018) Um cone tem 10 cm de altura e base de área igual a  $75 \text{ cm}^2$ . Um plano paralelo à base do cone e distando 4 cm dela determinou uma seção de área S. O valor de S, em  $\text{cm}^2$ , é

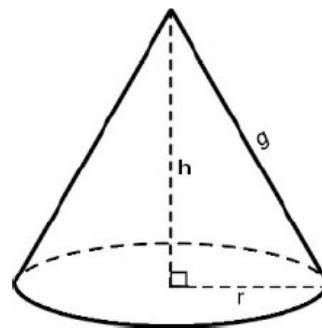
- A) 27.
- B) 32.
- C) 36.
- D) 40.
- E) 45.

6. (FGV/AL-MT/2013) Um cone circular reto de ferro, com 32 cm de altura, é colocado com a base no fundo de um aquário, de tal modo que a parte do cone que fica acima do nível da água corresponde a  $1/8$  do volume total do cone. A altura da parte submersa do cone é

- A) 4 cm.
- B) 8 cm.
- C) 16 cm.
- D) 24 cm.
- E) 28 cm.

## Outras Bancas

7. (IDIB/CREMERJ/2021)



O cone é um sólido geométrico obtido pela rotação de um triângulo. Com base na figura acima, é correto deduzir que a fórmula do seu volume (V) é dada por

- A)  $V = \pi r^2 h$
- B)  $V = \pi r^2 h/3$
- C)  $V = \pi r^2 g/3$
- D)  $V = \pi r^2 g$

8. (LEGALLE/PREF. VALE DO SOL/2021) Uma empresa a produz velas em formato cônico. Sabendo que a altura de determinada vela produzida é de 12 cm e que o raio da base é de 9 cm, qual é a área lateral desta vela? (Considere  $\pi = 3,14$ )

- A)  $269,3 \text{ cm}^2$ .
- B)  $423,9 \text{ cm}^2$ .
- C)  $593,4 \text{ cm}^2$ .
- D)  $339,12 \text{ cm}^2$ .
- E)  $732,5 \text{ cm}^2$ .

## GABARITO

- |                   |                   |                   |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| <b>1.</b> ERRADO  | <b>4.</b> LETRA E | <b>7.</b> LETRA B |
| <b>2.</b> LETRA E | <b>5.</b> LETRA A | <b>8.</b> LETRA B |
| <b>3.</b> LETRA C | <b>6.</b> LETRA C |                   |

## LISTA DE QUESTÕES

### Esfera

#### CEBRASPE

**1. (CESPE/IFF/2018)** O volume de um cubo que tem seus vértices sobre uma superfície esférica de raio igual a  $5\sqrt{3}$  centímetros é igual a

- A)  $75 \text{ cm}^3$ .
- B)  $125 \text{ cm}^3$ .
- C)  $375\sqrt{3} \text{ cm}^3$
- D)  $1.000 \text{ cm}^3$ .
- E)  $3.000\sqrt{3} \text{ cm}^3$ .

**(SEPLAG-DF/2008) Texto para as próximas questões**

Julgue os itens a seguir, acerca de um reservatório de gás que tem a forma de uma esfera de 10 m de raio.

**2. (CESPE/SEPLAG-DF/2008)** Se for construído um novo reservatório esférico, com raio igual à metade do raio do reservatório original, então o volume desse novo reservatório será igual à metade do volume do outro reservatório.

**3. (CESPE/SEPLAG-DF/2008)** O volume desse reservatório é igual a  $4.000\pi \text{ m}^3$ .

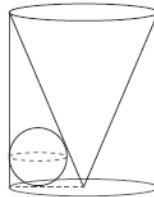
**4. (CESPE/SEPLAG-DF/2008)** A área de superfície do reservatório é igual a  $400\pi \text{ m}^2$ .

#### CESGRANRIO

**5. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2018)** Uma esfera maciça e homogênea é composta de um único material, e tem massa igual a 400 g. Outra esfera, também maciça e homogênea, e de mesmo material, tem raio 50% maior do que o da primeira esfera. Assim, o valor mais próximo da massa da esfera maior, em quilogramas, é igual a

- A) 0,6
- B) 1,0
- C) 1,3
- D) 1,5
- E) 1,7

**6. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2017)** A Figura a seguir mostra um cilindro reto, um cone reto e uma esfera que tangencia a base do cilindro e as geratrizess do cilindro e do cone. O cone e o cilindro têm como base um círculo de raio 7 cm e a mesma altura que mede 24 cm.



**Qual o volume, em centímetros cúbicos, da região interior ao cilindro e exterior à esfera e ao cone?**

- A)  $800\pi$
- B)  $784\pi$
- C)  $748\pi$
- D)  $684\pi$
- E)  $648\pi$

## FGV

**7. (FGV/PM-CE/2021) O raio de uma esfera aumentou  $1/3$  de seu valor. Sendo  $V$  o volume inicial da esfera, é correto afirmar que o novo volume**

- A) é menor do que  $V$ .
- B) está entre  $V$  e  $(4/3)V$ .
- C) está entre  $(4/3)V$  e  $2V$ .
- D) está entre  $2V$  e  $3V$ .
- E) é maior que  $3V$ .

## Outras Bancas

**8. (IDIB/CRF MS/2021) Seja uma esfera de raio  $r$ . É correto afirmar que seu volume é dado por**

- A)  $V = r^3$
- B)  $V = 2\pi r$
- C)  $V = (4/3)\pi r^3$
- D)  $V = 4\pi r^2$

**9. (QUADRIX/CRF AP/2021) Sabendo que o sistema solar é composto por 8 planetas (Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno), julgue o item.**

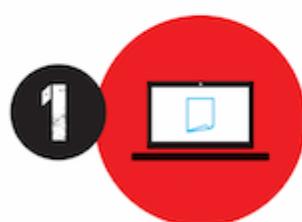
Se Netuno tem um raio aproximadamente 4 vezes maior que o da Terra, é correto estimar que seu volume é 16 vezes maior que o da Terra.

## GABARITO

1. LETRA D
2. ERRADO
3. ERRADO
4. CERTO
5. LETRA C
6. LETRA C
7. LETRA D
8. LETRA C
9. ERRADO

# ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE: PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.



Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.



Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).



Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).



Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).



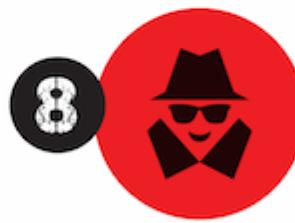
Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).



Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).



Concursado(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.



O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.