EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

i) $\log_9 (x-3)^2 = 2 \cdot \log_3 (x-1) - \log_3 x$

ii) $\log_2 x + \log_5 (x-1) = 0$

ESTRATÉGIA: colocar na mesma base

$$\log_c x = \log_c y \longleftrightarrow x = y$$

EXEMPLO 01

Resolva a equação:

$$\log_9 (x-3)^2 = 2\cdot\log_3 (x-1) - \log_3 x$$

R:

i) Condições de existência $\begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \rightarrow \boxed{x > 1}$

ii) $$\log_9 (x-3)^2 = 2\cdot\log_3 (x-1) - \log_3 x$$

$$2\cdot\log_9 (x-3) = \log_3 (x-1)^2 - \log_3 x$$

$$\log_{9^{1/2}} (x-3) = \log_3 \left[\frac{(x-1)^2}{x}\right] \therefore \log_3 (x-3) = \log_3 \left[\frac{(x-1)^2}{x}\right]$$

$$(x-3) = \frac{(x-1)^2}{x} \therefore \cancel{x^2} - 3x = \cancel{x^2} - 2x + 1$$

$$-x = 1 \therefore \cancel{\boxed{x = -1}}$$

R: não tem solução

UNIVERSO NARRADO

EXEMPLO 02

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 1 \\ \log_3 x - 3\log_3 y = -\log_3 32 \end{cases}$$

R:

i) $\log_2(x \cdot y) = 1 \therefore 2^1 = x \cdot y \therefore \boxed{x = 2/y}$

ii) $\log_3 x - \log_3 y^3 = \log_3 32^{-1}$

$\log_3(x/y^3) = \log_3 32^{-1} \therefore \boxed{\dfrac{x}{y^3} = \dfrac{1}{32}}$

$32x = y^3 \therefore 32 \cdot \dfrac{2}{y} = y^3 \therefore y^4 = 2^6$

$y = (2^6)^{1/4} = 2^{3/2}$

$x = 2/2^{3/2} = 2^{-1/2}$

R: $x = \sqrt{2}/2$ e $y = \sqrt{8}$

INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

i) $\log_9 (x-3)^2 > 2 \cdot \log_5 (x-1)$

ii) $\log_2 x \leq \log_7 (x-2)$

ESTRATÉGIA: colocar na mesma base

$a > 1$

$a^x > a^y \longleftrightarrow x > y$	$\log_a x > \log_a y \longleftrightarrow x > y$
$a^x < a^y \longleftrightarrow x < y$	$\log_a x < \log_a y \longleftrightarrow x < y$

$0 < a < 1$

$a^x > a^y \longleftrightarrow x < y$	$\log_a x > \log_a y \longleftrightarrow x < y$
$a^x < a^y \longleftrightarrow x > y$	$\log_a x < \log_a y \longleftrightarrow x > y$

EXEMPLO 01

Resolva a inequação: $\log_3 (x-1) + \log_3 (x-2) \leq 1$

R:

i) $x-1 > 0 \therefore x > 1$

$x-2 > 0 \therefore x > 2$ } $\boxed{x > 2}$

ii) $\log_3 (x-1) + \log_3 (x-2) \leq 1$

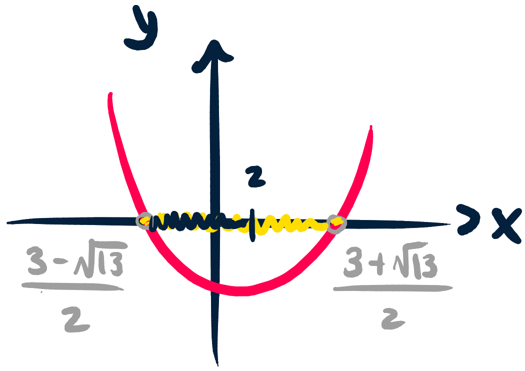
$$\log_3 [(x-1)(x-2)] \leq \log_3 3$$

$(x-1)(x-2) \leq 3 \therefore x^2 - 2x - x + 2 \leq 3$

$x^2 - 3x - 1 \leq 0$

$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 13$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$



$S: x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

EXEMPLO 02

Resolva a inequação: $\log_{1/2}(10-2x) \geq 2$

R:

i) $10-2x > 0 \therefore 2x < 10 \therefore \boxed{x < 5}$

ii) $\log_{1/2}(10-2x) \geq \log_{1/2}(1/4)$

$$10-2x \leq 1/4 \therefore 10 - 1/4 \leq 2x$$

$$x \geq 5 - 1/8 \therefore x \geq 39/8$$

$$S: x \in \mathbb{R} \mid 39/8 \leq x < 5$$