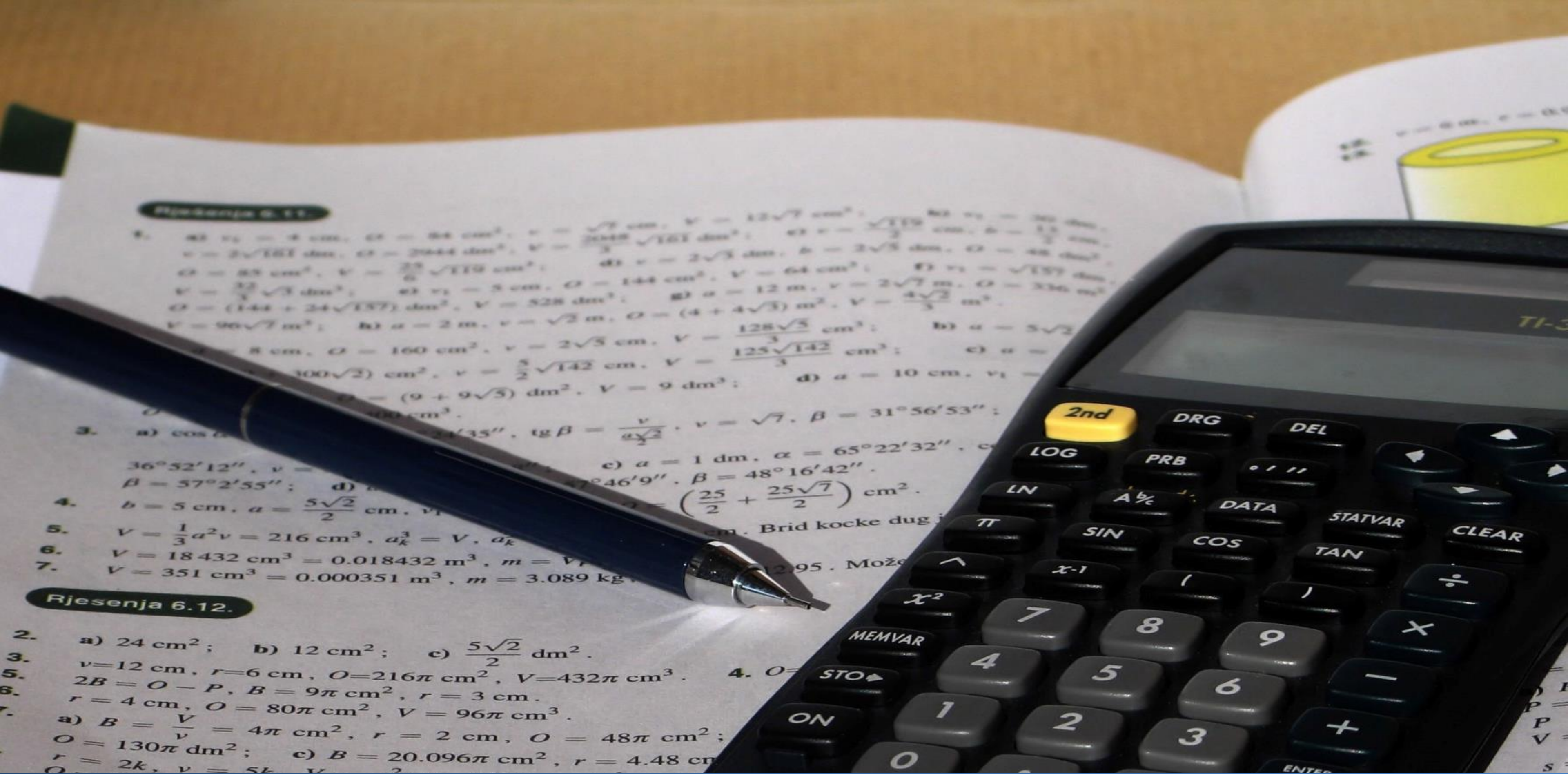


MÓDULO (M1): Fundamentos de Finanças

Conceito

A **MATEMÁTICA FINANCEIRA** é uma área da matemática para calcular o valor do dinheiro no tempo, ou seja, quanto um valor hoje deverá valer no futuro ou quanto um valor futuro deveria valer hoje. A partir de diferentes fórmulas é possível mensurar este valor e ter uma melhor compreensão sobre finanças e com isso, utilizar melhor o dinheiro para realizar investimentos, como por exemplo, decidir se é melhor comprar um veículo a vista ou tomar uma empréstimo; quanto necessito acumular todos os meses para atingir meu objetivo ou até mesmo, qual o valor de uma empresa hoje baseado nos lucros futuros.

A fórmula básica desta compreensão da matemática é que o montante acumulado (valor futuro) será o principal (valor de hoje) mais os juros gerados deste principal, ou seja, a matemática financeira se resume a esta fórmula:

Valor Futuro (Montante) = Valor Presente (Principal) + JUROS

Definições

As principais definições para este início são:

- **CAPITAL (C):** Também chamado de Valor Presente (PV), representa o valor do dinheiro hoje. Este valor pode ser de um investimento, dívida ou empréstimo.
- **JUROS (J):** Representam os valores gerados pela remuneração do capital inicial. Podemos dizer que eles são o custo do dinheiro, podendo ser gerados por uma aplicação (ou empréstimo) ou ainda pela diferença entre o valor à vista e o valor pago prazo de uma compra, ou até mesmo de um pagamento de um tributo. Aqui entrará os **TIPOS DE JUROS** (Juros Simples ou Juros Compostos).
- **TAXA DE JUROS (i):** É o percentual aplicado sobre os fluxos de caixa, também chamado de custo ou remuneração do dinheiro. Ela sempre será associada a um certo prazo (n), podendo ser ao dia, ao mês, ao bimestre, ao ano...
- **PRAZO (n):** é o tempo do "problema" apresentado. Vale ressaltar que no momento do cálculo, o prazo (n) e a taxa de juros (i) devem estar no mesmo período. Por exemplo, 2% ao mês aplicados por 24 meses (e não em 2 anos).
- **MONTANTE (M):** Também chamado de Valor Futuro (FV), representa o capital inicial, mais os juros acrescidos.

HP 12C – Valor Presente (PV)

Conceito

Valor Presente (PV) é o valor da soma de uma série de fluxos de caixa futuros, descontados pela taxa de juros durante um período, ou seja, o quanto valeria esse fluxo na data de hoje.

❑ **<u>Exemplo</u>: Qual o valor a ser aplicado hoje, para que em 48 meses, a uma taxa de 10% ao ano, eu tenha R$ 146.410,00?**

- (1) Zerar os registros da HP 12C! Pressione [f][CLX]
- (2) Digite [146.410] e pressione [FV]
- (3) Digite [10] e pressione [i]
- (4) Digite [48] e [ENTER], digite [12], pressione [÷] e pressione [n]
- (5) Aperte [PV]
- **Resposta: -100.000,00**

Precisamos aplicar (saída de caixa) R$ 100.000,00 para podermos RECEBER (entrada de caixa) de R$ 146.410,00

HP 12C – Valor Futuro (FV)

Conceito

Valor Futuro (FV) é o valor da soma de uma série de fluxos de caixa futuros, **acrescidos** por uma taxa de juros durante um período, ou seja, o quanto valeria esse fluxo no vencimento desse fluxo (último dia).

- **Exemplo: Qual o total de um empréstimo de R$ 100.000,00 hoje, a uma taxa de juros de 10% a.a, após 4 anos?**
  - (1) Zerar os registros da HP 12C! Pressione [f][CLX]
  - (2) Digite [100.000] e pressione [PV]
  - (3) Digite [10] e pressione [i]
  - (4) Digite [4] e pressione [n]
  - (5) Aperte [FV]
  - **Resposta: -146.410,00**

- **OBS:** A resposta desta vez está negativa, pois o valor inserido no PV foi positivo (entrou R$ 100 mil na nossa conta do banco) e precisamos pagar (saída de caixa) de R$ 146.410,00.

Fluxo de Caixa (Cash Flow)

Conceito

É o conjunto de entradas e saídas de capital dispostas ao longo do tempo. Por exemplo, Rafael tem um capital de R$ 1.000,00 e irá aplicar por 5 meses a uma taxa de 1% a.m. Após esse período, resgatará R$ 1.051,00. Assim, temos que no período zero (hoje) há uma saída de R$ 1.000,00 (aplicação) e no período 5 há uma entrada de recursos (vencimento) de R$ 1.051,00. Nos demais períodos (1, 2 , 3 e 4), não há entradas e nem saídas, apenas correção do valor do dinheiro.

CONVENÇÃO:

- **Seta para cima: Entrada** de recursos, ou seja, resgates de aplicações e tomadas de empréstimos);
- **Seta para baixo: Saída** de recursos, ou seja, aplicações financeiras e pagamentos de dívidas.

Os números 0, 1, 2, 3, 4 e 5 representam os períodos de tempo, sendo **saída em 0** (seta para baixo) e **entrada dos recursos em 5** (seta para cima).

Regimes de Capitalização: Juros Simples

Conceito

No Regime de Capitalização Simples, também conhecido como Regime de Juros Simples, os juros incidem somente sobre o capital inicial. Desta forma, os cálculos só podem ser executados se o tempo de aplicação n for expresso na mesma unidade de tempo a que se refere a taxa i, ou seja, considerando o prazo em ano, a taxa deve ser ao ano; prazo em mês, taxa ao mês, etc. As suas fórmulas são:

- $FV\ (M) = C + J$
- $J = C \times i \times n$
- $FV\ (M) = C + (C \times i \times n)$ ou
- $FV\ (M) = C \times (1 + i \times n)$

Sendo que:

- J = Juros;
- C = Capital ou Valor Presente (PV)
- FV (M) = Montante ou Valor Futuro
- i = taxa de juros
- n = prazo ou período

Regimes de Capitalização: Juros Simples

Exemplo

❑ **PERGUNTA: Qual o valor ano após ano (durante 4 anos), se aplicarmos R$ 100.000,00 a uma taxa de juros simples de 10% ao ano?**

Para facilitar o entendimento, vamos demonstrar o crescimento do valor aplicado, ano após ano, através da seguinte tabela:

PERÍODO	JUROS SIMPLES
Principal	**R$ 100.000,00**
Após 1 ano	100.000 + (1 × 0,10) × 100.000 = 110.000
Após 2 anos	100.000 + (2 × 0,10) × 100.000 = 120.000
Após 3 anos	100.000 + (3 × 0,10) × 100.000 = 130.000
Após 4 anos	100.000 + (4 × 0,10) × 100.000 = 140.000

Exemplo

Qual a taxa anual que devemos ter para obter R$ 40.000,00 de juros após 4 anos , se aplicarmos R$ 100.000,00 no Regime de Capitalização Simples?

Para calcularmos os Juros Simples, devemos utilizar a fórmula:

$$\boxed{J = C \times i \times n}$$

- **SOLUÇÃO DO PROBLEMA:**
  - (1) J = C x i x n
  - (2) R$ 40.000,00 = R$ 100.000,00 × i × 4 anos
  - (3) $i = \frac{\text{R\$ } 40.000{,}00}{\text{R\$ } 100.000{,}00 \times 4 \text{ ANOS}}$
  - (4) i = 0,10 = 10% a.a

Proporcionalidade de Taxas

Em **JUROS SIMPLES**, usamos **TAXA PROPORCIONAL**. Isso significa que, duas taxas são proporcionais quando os seus valores guardam uma proporção com o tempo a que elas se referem, portanto, é preciso reduzir o tempo a uma mesma unidade. Estes problemas envolvendo taxas proporcionais podem ser resolvidos por meio de “Regra de Três”.

- **EXEMPLO: Calcular a taxa mensal proporcional a 30% ao ano?**
  - Primeiro passo é reduzir o tempo a uma mesma unidade (1 ano = 12 meses).
  - Depois, fazemos a “Regra de Três”:
    - 30% está para 12 meses, assim como X está para 1 mês, ou seja:

$$\boxed{\frac{30\%}{12} = \frac{x}{1} \longrightarrow \mathrm{x} = 2,5\% \text{ ao mês}}$$

Regimes de Capitalização: Juros Compostos

Conceito

No Regime de Capitalização Composta, também conhecido como Regime de Juros Composto, os Juros incidem sobre o capital acrescido dos juros do período anterior e é por este motivo, que falamos que são “juros sobre juros”. Da mesma forma como nos juros simples, os cálculos só podem ser executados se o tempo de aplicação n for expresso na mesma unidade de tempo a que se refere a taxa i, ou seja, considerando o prazo em ano, a taxa deve ser ao ano; prazo em mês, taxa ao mês, etc.

A fórmula deste regime é:

$$\boxed{FV = PV(1 + i)^n}$$

Sendo que:

- PV = Valor Presente
- FV = Valor Futuro
- i = taxa de juros
- n = prazo ou período

Regimes de Capitalização: Juros Compostos

Exemplo

❑ **PERGUNTA: Qual o valor ano após ano (durante 4 anos), se aplicarmos R$ 100.000,00 a uma taxa de juros compostos de 10% ao ano?**

Para facilitar o entendimento, vamos demonstrar o crescimento do valor aplicado, ano após ano, através da seguinte tabela:

PERÍODO	JUROS COMPOSTOS
Principal	**R$ 100.000,00**
Após 1 ano	100.000 + (0,10) × 100.000 = 110.000
Após 2 anos	110.000 + (0,10) × 110.000 = 121.000
Após 3 anos	121.000 + (0,10) × 121.000 = 133.100
Após 4 anos	133.100 + (0,10) × 133.100 = 146.410

Regimes de Capitalização: Juros Compostos

Exemplo: HP 12C

Qual a taxa de juros compostos de uma aplicação de R$ 100.000,00 para que se tenha R$ 500.000,00 em um prazo de 5 anos?

- (1) Zerar os registros da HP 12C! Pressione [f][CLX]
- (2) Digite [100.000] [CHS] e pressione [PV] → aplicação = saída de caixa
- (3) Digite [500.000] e pressione [FV] → recebimento = entrada de caixa
- (4) Digite [5] e pressione [n]
- (5) Aperte [i]
- **RESPOSTA: 37,97% ao ano**

- **OBS:** sabemos que a taxa está em ano, pois o prazo (n) foi inserido em anos: 5 anos. O prazo e a taxa **SEMPRE** devem estar no mesmo período (taxa em ano, prazo em ano; prazo em dias, taxa em dias).

Equivalência de Taxas: Juros Compostos

Fórmula

Em **JUROS COMPOSTOS**, usamos **TAXA EQUIVALENTE**. Isso significa que as taxas de juros não são proporcionais, ou seja, uma taxa de 12% ao ano é não é equivalente a 1% ao mês. Teoricamente, taxa equivalentes significa que, aplicadas ao mesmo capital **P** durante o mesmo período de tempo, através de diferentes períodos de capitalização, produzem o mesmo montante final. Diante disso, necessitamos usar conceitos exponenciais para fazermos a conversão de taxas equivalentes e sua fórmula é:

$$\boxed{i_Q = [(1 + i_T)^{q/t} - 1] \times 100}$$

- **Regra do QUERO/TENHO:**
  - i_Q = taxa de juros que desejamos encontrar (taxa que "eu quero").
  - i_T = taxa de juros que já sabemos (taxa que "eu tenho").
  - q = período em que está expressa a taxa que pretendemos encontrar (prazo que "eu quero").
  - t = período em que está expressa a taxa que já sabemos (prazo que "eu tenho").

Equivalência de Taxas: Juros Compostos

Modelo 1: Fórmula

Qual a taxa equivalente ao mês de 12% ao ano?

- (1) Zerar os registros da HP 12C! Pressione [f][CLX]
- (2) Digite [1] e pressione [ENTER]
- (3) Digite [0.12] e pressione [+]
- (4) Digite [12], aperte 

e pressione 

- (5) Digite [1] e pressione [-]
- (6) Digite [100] e aperte [x]
- **Resposta: 0,948879**

Modelo 2: Programação da HP-12

Qual a taxa anual equivalente ao mês de 12% ao ano?

PRESSIONAR		OBJETIVO	VISOR
12	**i**	Introduzir a taxa que desejo converter no [i]	**12,000**
360	**n**	Introduzir o prazo em dias, correspondente do [i]	**360,000**
30		**Prazo desejado** (dias que você quer 30). Caso seja em dias úteis, 1 mês =21 dias; e 1 ano = 252 dias)	**30**
R/S		Executa o programa	**0,948879**

- **Resposta: 0,948879% ao mês.**

Este método é sendo pela programação inserida (LIVRO APRESENTAÇÃO). Caso "limpe" a programação (f PRGM) ou haja algum outro problema, será necessário inserir o passo-a-passo novamente.

Equivalência de Taxas: Juros Compostos

Modelo 2: Programação da HP-12

PRESSIONAR		OBJETIVO	VISOR
F	R/S	P/R: Entrar no modo de programação	00-
F	R↓	PRGM: Limpar memória de programas anteriores	00-
STO	0	Guardar o prazo desejado na memória "0"	01- 44 0
RCL	i	Busca o valor digitado na taxa	02- 45 12
1	%	Divide a taxa por 100	04- 25
1	+	Soma 1 com a taxa unitária	06- 40
RCL	0	Busca o valor do prazo que quero	07- 45 0
RCL	n	Busca o valor do prazo que tenho	08- 45 11
÷		Divide os dois prazos	09- 10
Y^x		Eleva a taxa unitária somado 1, a razão das taxas	10- 21
1	-	Subtrai 1 do resultado obtido	12- 30
1		Multiplica o resultado por 100, a fim de transformar a taxa unitária em percentual	13- 1
0			14- 0
0			15- 0
X			16- 20
G	R↓	GTO: Retorna a primeira linha de programação. Observação: usar "00" para HP (dourada) e "000" para HP Platinum.	17-43.33.00 (GOLD) 017.43.33.000 (PLAT)
00 ou 000			
F	R/S	P/R: Finaliza o modo de programação	0,00000000

Taxa de Juros Nominal e Taxa de Juros Real

Conceito

De modo geral, a **TAXA NOMINAL** é aquela divulgada pelas instituições financeiras, ou seja, a taxa contratada ou declarada em uma operação financeira.
Exemplo: a rentabilidade do fundo de investimentos nos últimos 12 meses foi de 12%; ou o CDB contratado irá render 8% por ano.

Já a **TAXA REAL** é dada pela diferença entre a **TAXA NOMINAL** e a **INFLAÇÃO**. Ela será a taxa que realmente terá gerado de riqueza para o investidor. Como o dinheiro somente é um meio troca, uma forma de pagamento, o que importa de verdade é o quanto ele está comprando de bens e de serviços e não o seu valor nominal, mas sim o seu valor real.

Por exemplo, imagine que você tenha R$ 100, uma maçã custe R$ 1,00 e haja uma aplicação financeira no banco que renda **15% por 1 ano**. Hoje você poderia comprar 100 maçãs, mas caso você aplique no banco, no próximo ano terá R$ 115,00. Porém, se a fruta estiver R$ 1,10 (**aumentou seu preço em 10%**), você comprará 104,5 maçãs, ou seja, o seu ganho REAL por ter investido no banco, será de **4,5 maçãs (4,5%)**. Perceba que por se tratar de **juros compostos, não foi feito uma subtração da inflação pela da taxa nominal (15% menos 10%), mas sim, uma divisão de taxas que te ensinaremos a seguir.**

Fórmula

Para calcularmos a taxa real, utilizamos a fórmula de Fischer:

$$\text{Taxa Real} = \left[\left(\frac{1 + \text{Taxa Nominal}}{1 + \text{Inflação}}\right) - 1\right] \times 100$$

Importante dizer que, o retorno nominal é o retorno total do investimento. Ressaltamos isso, pois vamos ver adiante, produtos que rendem um “fixo MAIS inflação”, como na NTN-B. No entanto, este “MAIS” não deverá ser utilizado como soma, mas sim, como MULTIPLICAÇÃO. Provamos isso, reorganizando a fórmula de Fischer, no qual a **Taxa Nominal** de um investimento, será dada pela **Taxa Real** e pela **Inflação**:

$$\text{Taxa Nominal} = \left[(1 + \text{Taxa Real}) \times (1 + \text{Inflação}) - 1\right] \times 100$$

Mas não se preocupe, te ensinaremos de uma forma fácil como calcular pra prova!

Taxa de Juros Nominal e Taxa de Juros Real

Cálculo da Taxa Real: Modelo 1

EXEMPLO: Qual a taxa real de uma aplicação que rendeu 15% e a inflação foi 10%?

Cálculo da Taxa Real:

1. $$\text{Tx Real} = \left(\left[\frac{(1+15\%)}{(1+10\%)}\right] - 1\right) \times 100$$

2. $$\text{Tx Real} = \left(\left[\frac{(1{,}15)}{(1{,}10)}\right] - 1\right) \times 100$$

3. $$\text{Tx Real} = ([1{,}0455] - 1) \times 100$$

4. $$\text{Tx Real} = (0{,}0455) \times 100$$

R. $$\text{Tx Real} = 4{,}55\%$$

PASSO A PASSO NA HP-12C

- (1) Pressione [f][CLx], para zerar a HP
- (2) Digite [15] e pressione [ENTER]
- (3) Digite [100] [÷]
- (4) Digite [1] [+]
- (5) Digite [10] e pressione [ENTER]
- (6) Digite [100] [÷]
- (7) Digite [1] [+]
- (8) Pressione [÷]
- (9) Digite [1] [–]
- (10) Digite [100] [×]
- **Taxa Real: 4,55% ao ano**

Taxa de Juros Nominal e Taxa de Juros Real

Cálculo da Taxa Real: Modelo 2

Neste modelo, vamos calcular através das teclas [n], [i], [PV] e [FV], da seguinte forma:

- **n:** sempre receberá o valor [1]
- **PV:** aqui será inserido o valor da inflação, adicionado o valor 100. Este valor deverá ser inserido como sendo negativo, ou seja, clicando em [CHS]
- **FV:** aqui será inserido o valor da taxa nominal, adicionado o valor 100
- **PMT:** não precisa inserir nada, já que sempre iremos zerar a HP antes do cálculo
- **i:** nossa resposta

❑ **EXEMPLO:** Qual a taxa real de uma aplicação que rendeu 15% e a inflação foi 10%?

- **[f] [CLx]** → zerar a hp-12c
- **100 [ENTER] 10 [+] [CHS] [PV]** → Lançar o número "- 110", entrada negativa
- **100 [ENTER] 15 [+] [FV]** → Lançar o número "115", entrada positiva
- **1 [n]** → Prazo sempre será 1
- **[i]** → Esta será a nossa resposta: **4,55%**

❑ **OBS: Esta maneira de calcular serve para toda vez que for necessária "descontar taxas" (divisão de taxas) em juros compostos.**

Taxa de Juros Nominal e Taxa de Juros Real

Calculando a Taxa Nominal

Para calcularmos a taxa nominal, simplesmente vamos somar as taxas, mas utilizando uma base inicial: o número 100!

❑ **EXEMPLO:** Qual foi o retorno de uma NTN-B que está remunerando 4,55% + IPCA, sabendo que a inflação do período foi de 10%?

Perceba que estes são os números que utilizamos até agora nos nossos exemplos: 10% sendo a inflação e 4,55% a taxa real. Desta forma:

- **100 [ENTER]** → numero que utilizaremos para a nossa base
- **4,55 [%] [+]**→ estamos somando a taxa real na nossa base
- **10 [%] [+]** → estamos crescendo 10% o número anterior
- **100 [-]** → estamos descontando a nossa base
- **Resposta: 15% é a nossa taxa nominal**

Estrutura a Termo da Taxa de Juros

Conceito

A estrutura a termo de taxas de juros (ETTJ), também chamada de curva de juros, representa a expectativa de retornos nas aplicações de renda fixa, levando em consideração a relação entre tempo e taxa. A ideia é conseguir compreender que cada período de tempo possui uma certa taxa e que os retornos não são sempre os mesmos em todo o período (mesmo que a gente acredite nisso).

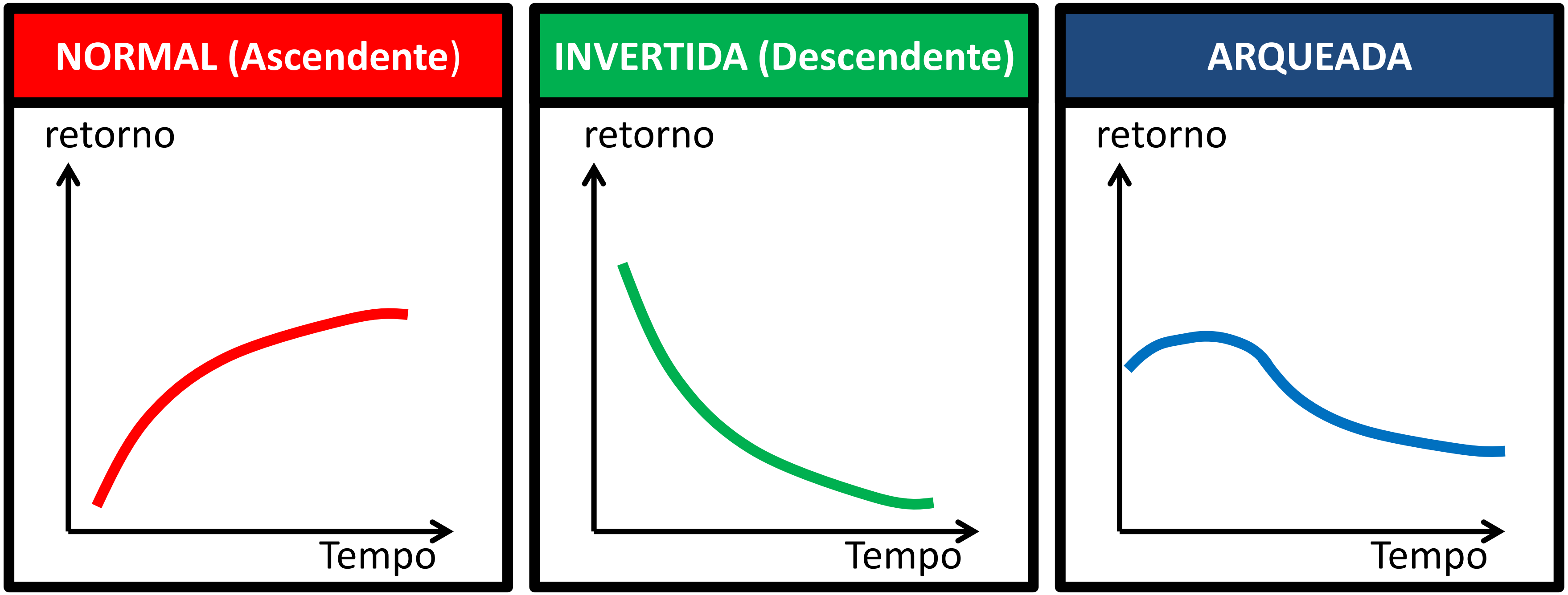
Por exemplo, imagine que estamos no início de 2021 e que a expectativa de juros para Brasil no ano de **2021 seja de 2%** e a que a expectativa de juros para o **ano de 2022 seja de 3%**. Se você aplicar hoje R$ 100,00 e tiver esses retornos, ao final do ano de 2021 terá R$ 102,00 e ao final de 2022, terá R$ 105,06 (3% sobre os R$ 102,00), ou seja, terá um retorno total de 5,06% para todo o período (ou **2,498780% por ano** → conversão de taxa).

Tecnicamente a **taxa SPOT do ano 1 é de 2%**, que a **taxa a TERMO entre os anos 1 e 2 é de 3%** e que a **taxa SPOT dos dois primeiros anos é de 2,498780% por ano**. Diante disso, podemos compreender que **taxa SPOT** é uma taxa que **inicia HOJE** e que **taxa a termo** é uma taxa que **NÃO inicia hoje**. Outro ponto relevante é que mesmo a gente dizendo que a taxa spot de 2 anos é de 2,498780% ao ano, isso não quer dizer que rendeu essa taxa TODOS os anos, pois ela foi uma composição de taxas (2% ano 1 e 3% no ano 2).

Estrutura a Termo da Taxa de Juros

Gráfico

As taxas juros podem ter diversos gráficos para o longo prazo. O normal é quanto mais longo for o empréstimo, maior o retorno por ano **(ASCENDENTE)**. No entanto, podemos ter fases em que as taxas de juros de um país estão decrescentes **(INVERTIDA)**, quando temos uma política monetária expansionista. Mas o relevante em se analisar estas curvas no mercado financeiro é que elas demonstram as expectativas futuras de taxas de juros de longo prazo.



Fórmula

Como a ETTJ é uma curva de juros (juros compostos), a sua fórmula se baseia na multiplicação de cada fator de retorno para se encontrar o retorno total do período. Após isso, apresentamos o retorno total do período ao ano.

Sabemos que a grande maioria, quando olha a fórmula apresentada abaixo, sente calafrios. Mas não se preocupe, pois podemos transformar todos os cálculos exigidos na fórmula em "*soma*" e "*subtração*". Ou seja, será mais importante a compreensão do conteúdo e saber montar os gráficos, do que decorar a devida fórmula.

- **FÓRMULA:**

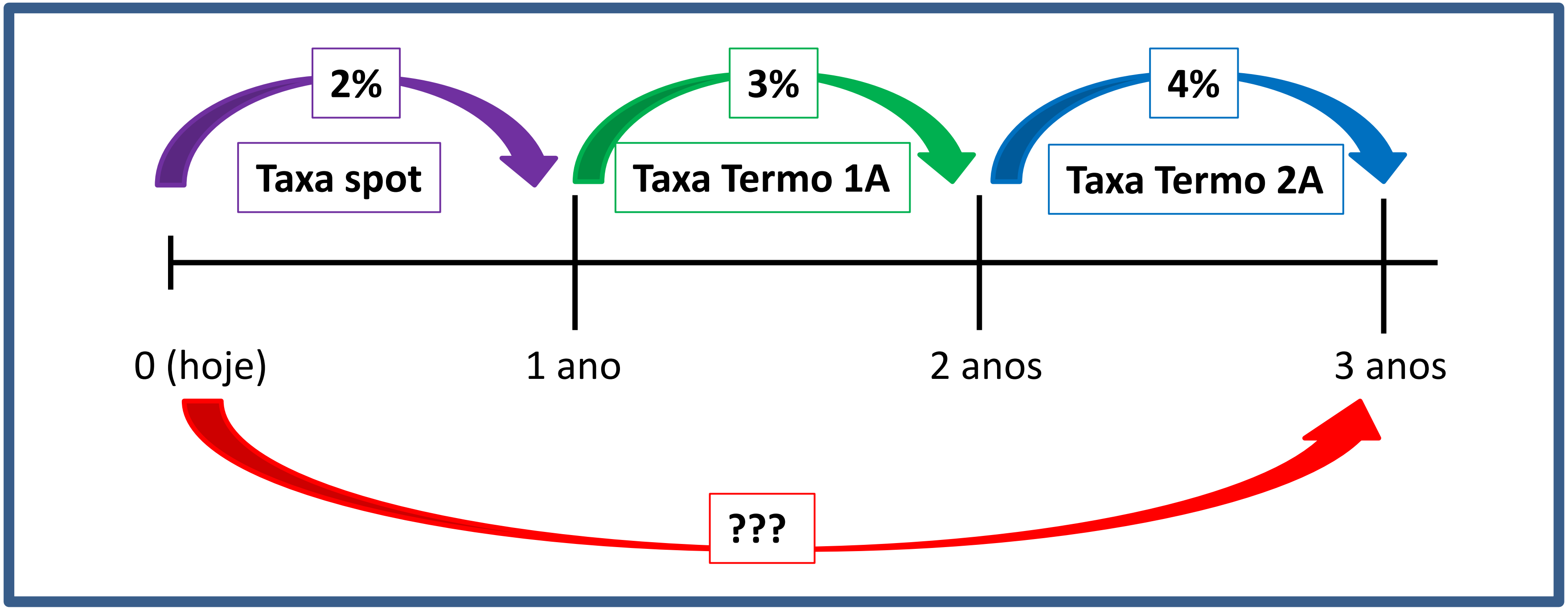
$$\boxed{(1+Z_n)^n = (1+Z_1)\times(1+f_2)\times\cdots\times(1+f_n)}$$

- Z_n: taxa spot anualizado do período total
- Z_1: é a taxa spot para 1 ano
- f_1: é a taxa a termo de um ano
- f_n: taxa a termo para n períodos

Estrutura a Termo da Taxa de Juros

Exemplo 1

Se a taxa spot atual de um ano é 2%, a taxa a termo de 1 ano (entre o primeiro e o segundo ano) é 3% e a taxa a termo de 2 anos (entre o segundo e o terceiro ano) é de 4%, qual a taxa spot de 3 anos?



Estrutura a Termo da Taxa de Juros

Exemplo 1: Resposta

Para encontrarmos a **TAXA SPOT 0-3**, vamos encontrar o retorno total e depois anualizar:

(1) RETORNO TOTAL DO PERÍODO DE 0 A 3:

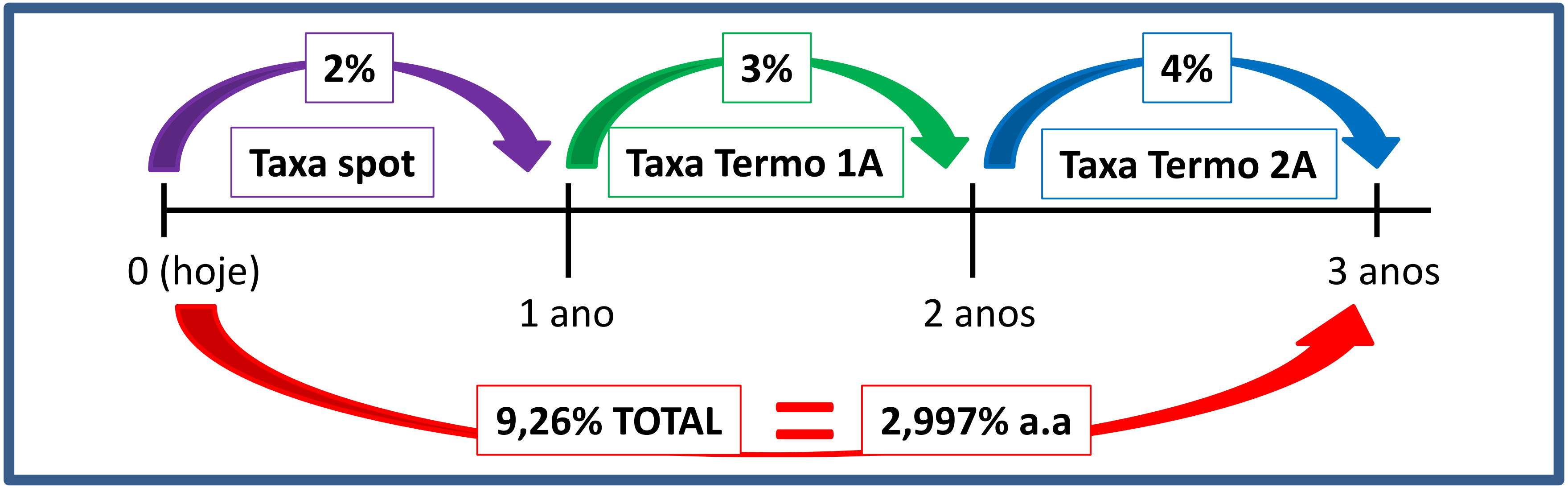
- 100 [ENTER]
- 2 [%] [+]
- 3 [%] [+]
- 4 [%] [+]
- 100 [-]

R: 9,26%

(2) TAXA SPOT 0-3:

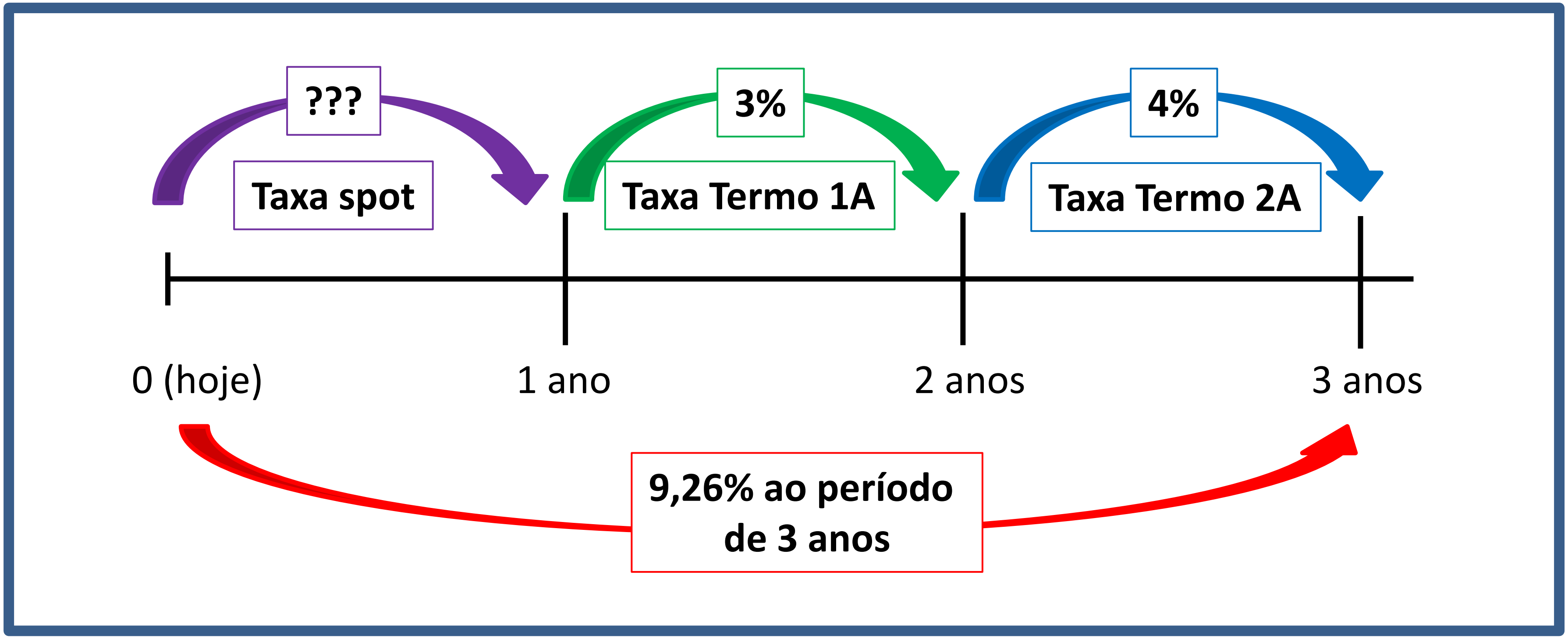
- 9,26 [i]
- 3 [n]
- 1
- [R/S]

R: 2,997% ao ano



Exemplo 2

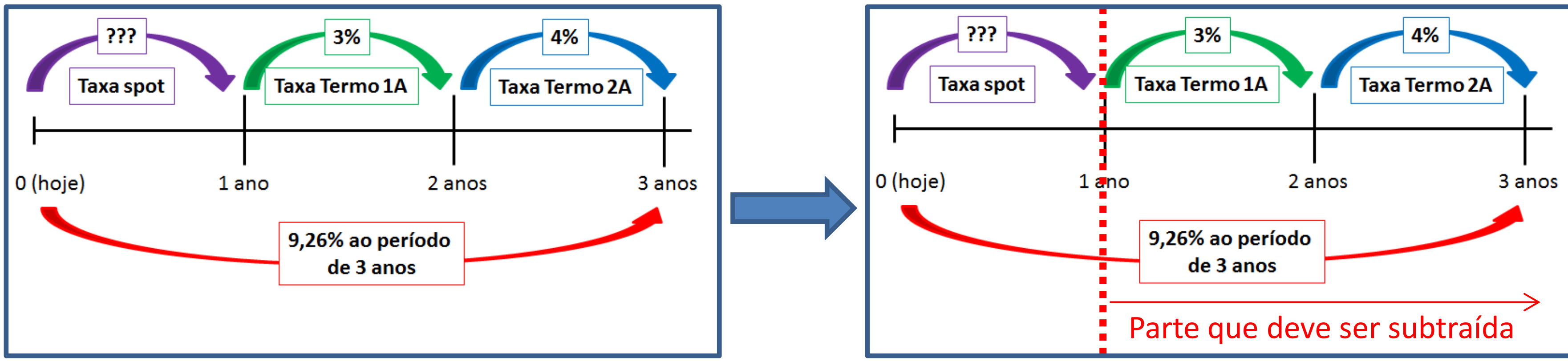
Sabendo que uma LTN com prazo de 3 anos rende 9,26% no período, a taxa a termo de 1 ano é de 3% (entre o primeiro e o segundo ano) e a taxa termo de 2 é 4% anos (entre o segundo e o terceiro ano), qual a taxa spot de 1 ano?



Estrutura a Termo da Taxa de Juros

Exemplo 2: Cálculo HP12C

Como percebemos, **(1) a taxa total de um período é o somatório das taxas intermediárias**, e **(2) um "pedaço" dessa taxa é a taxa total subtraída das taxas que não queremos,** lembrando que em juros compostos, "subtração" significa "divisão".



HP 12C: Parte que deve ser subtraída:

1

- 100 [ENTER]
- 3 [%] [+]
- 4 [%] [+]
- 100 [-]
- **Resposta: 7,12%**

HP 12C: Taxa Spot desejada

2

- **109,26** [FV]
- **107,12** [CHS] [PV]
- 1 [n]
- clicar em i
- **Resposta final: 2% a.a**

Desconto Bancário e Comercial (ou por fora)

Conceito

O desconto comercial simples, também chamado de desconto bancário ou por fora, é a modalidade de desconto mais utilizada pelas instituições financeiras. O desconto se baseia nos juros simples, produzidos pelo valor nominal do título (valor de resgate final). Desta forma, representamos o Desconto (D) da seguinte maneira:

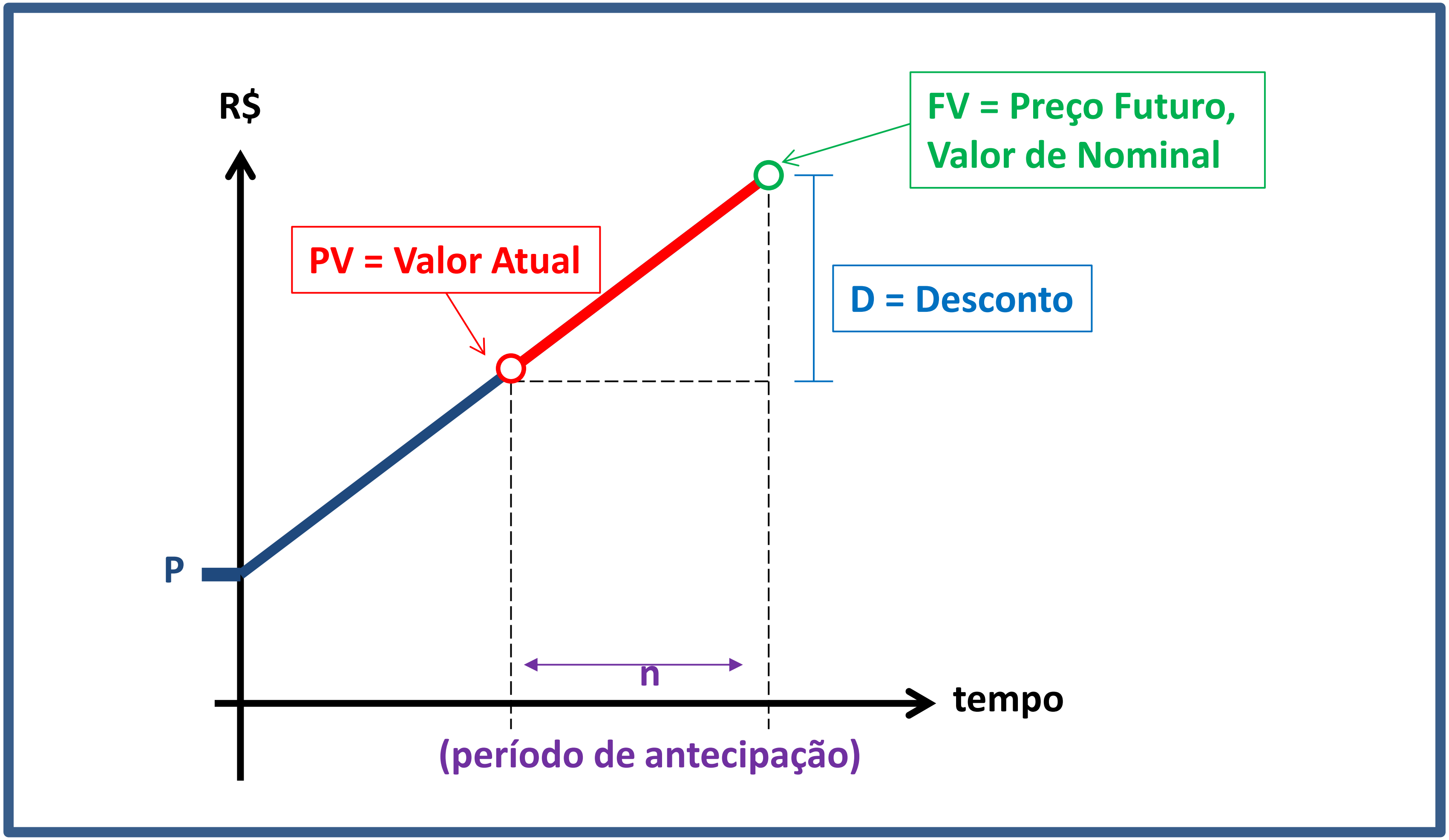
$$\boxed{\textbf{Desconto} = \textbf{(Valor Nominal)} \times \textbf{(Taxa de juros)} \times \textbf{(Prazo)}}$$

Para saber o valor que o cliente está antecipando, basta agora subtrair o “Desconto” do valor nominal (valor futuro):

$$\boxed{\textbf{Valor Presente} = \textbf{(Valor Nominal)} - \textbf{Desconto}}$$

Desconto Bancário e Comercial (ou por fora)

Gráfico



Desconto Bancário e Comercial (ou por fora)

Exemplo

Um cheque de R$ 3.000,00 é descontado por fora, 6 meses antes do seu vencimento, a uma taxa de 2% ao mês. Considerando o regime de capitalização de juros simples, qual o valor do desconto e o valor atual do título?

- **RESPOSTA:**
  - Primeiramente, devemos calcular o desconto
    - Desconto = (Valor Nominal) × (Taxa de juros) × (Prazo)
    - Desconto = (R$ 3.000,00) × (2% ao mês) × (6 meses)
    - Desconto = R$ 360,00
  - A partir do desconto, subtraímos este resultado do valor nominal
    - Valor Presente = (Valor nominal) – (Desconto)
    - Valor Presente = 3.000,00 – R$ 360,00
    - **Valor Presente = R$ 2.640,00**

Série de Pagamentos (PMT)

Conceito

Séries de pagamentos, também chamadas de renda certa ou **ANUIDADE**, são nomes dados à sequência de pagamentos, que tem por objetivo a quitação de empréstimos (amortização) de forma parcelada, ou a formação de um montante (capitalização) para utilização futura. Elas podem ser:

- **Finitas**: no caso de existir uma última prestação;
- Infinitas **(Perpetuidade):** quando NÃO existir uma última prestação.

Em relação ao vencimento de seus termos, possuímos também dois casos:

- **ANTECIPADAS:** quando os termos posicionam-se no **INÍCIO** de cada período. Para utilizarmos os cálculos desta forma, devemos clicar nas teclas [g][7], o que fará surgir no visor da HP-12C a sigla “BEG” de begin (início);
- **POSTECIPADAS**: quando os termos posicionam-se no **FINAL** de cada período. Para utilizarmos os cálculos desta forma, devemos clicar nas teclas [g][8]. Importante notar que não surgirá nenhuma informação no visor, ou seja, se não estiver mostrando no visor a palavra “BEG”, significa que os cálculos estarão sendo feitos de forma postecipada.

Série de Pagamentos (PMT)

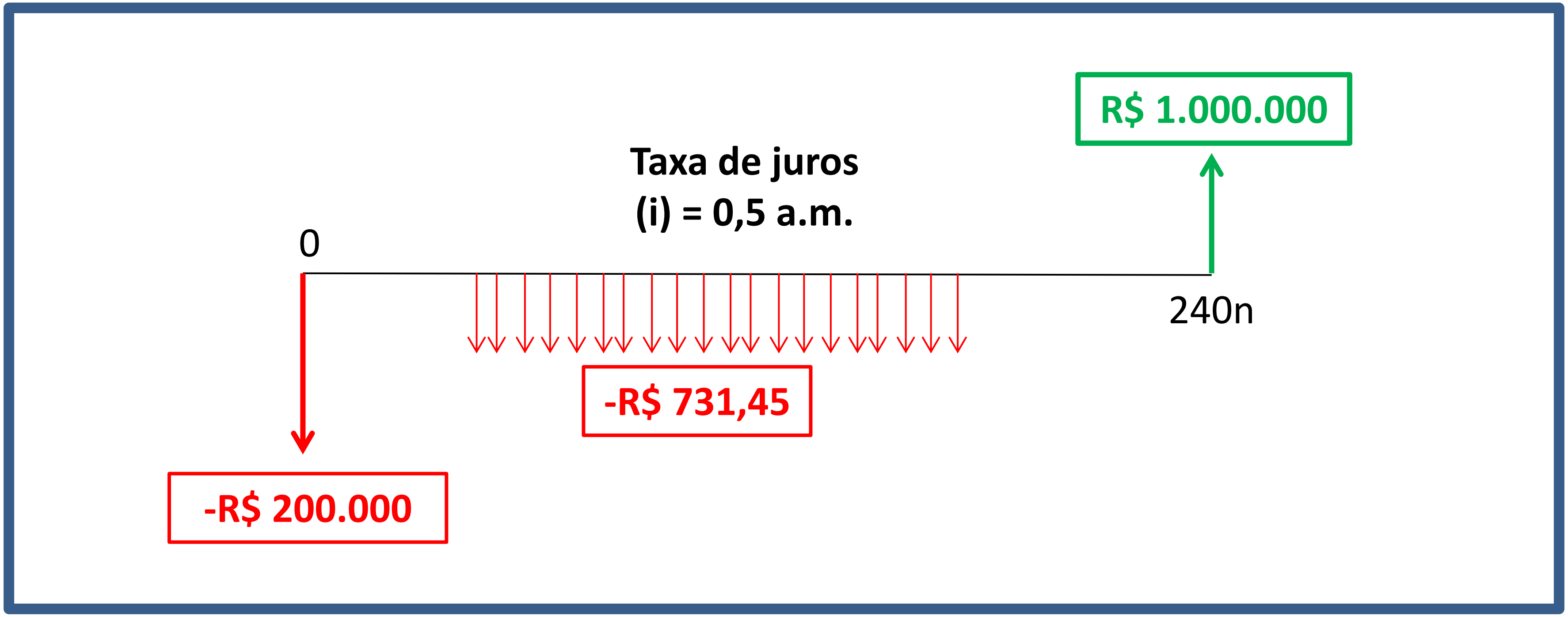
Exemplo 1

Rafael tem 30 anos e deseja se aposentar daqui 20 anos com um patrimônio financeiro de R$ 1.000.000,00. Atualmente ele possui R$ 200.000,00 em um fundo de previdência aplicados no banco com você a uma taxa de 0,5% ao mês. Qual deverá ser o aporte mensal que Rafael necessitará fazer para atingir seu objetivo?

- **RESPOSTA:**
  - Zerar os registros da HP 12C! Pressione [f][CLX]
  - Digite [200.000][CHS] e pressione [PV]
  - Digite [0,5] e pressione [i]
  - Digite [20] e [ENTER], digite [12], pressione [x] e pressione [n]
  - Digite [1.000.000] e pressione [FV]
  - Aperte [PMT]
  - Resposta: -R$ 731,45

Observações Importantes 1

Normalmente, em casos de acumulação para retirada futura, Valor Presente (PV) e Pagamentos (PMT) têm o mesmo sinal. Consequentemente, o Valor Futuro (FV) terá sinal contrário.



Série de Pagamentos (PMT)

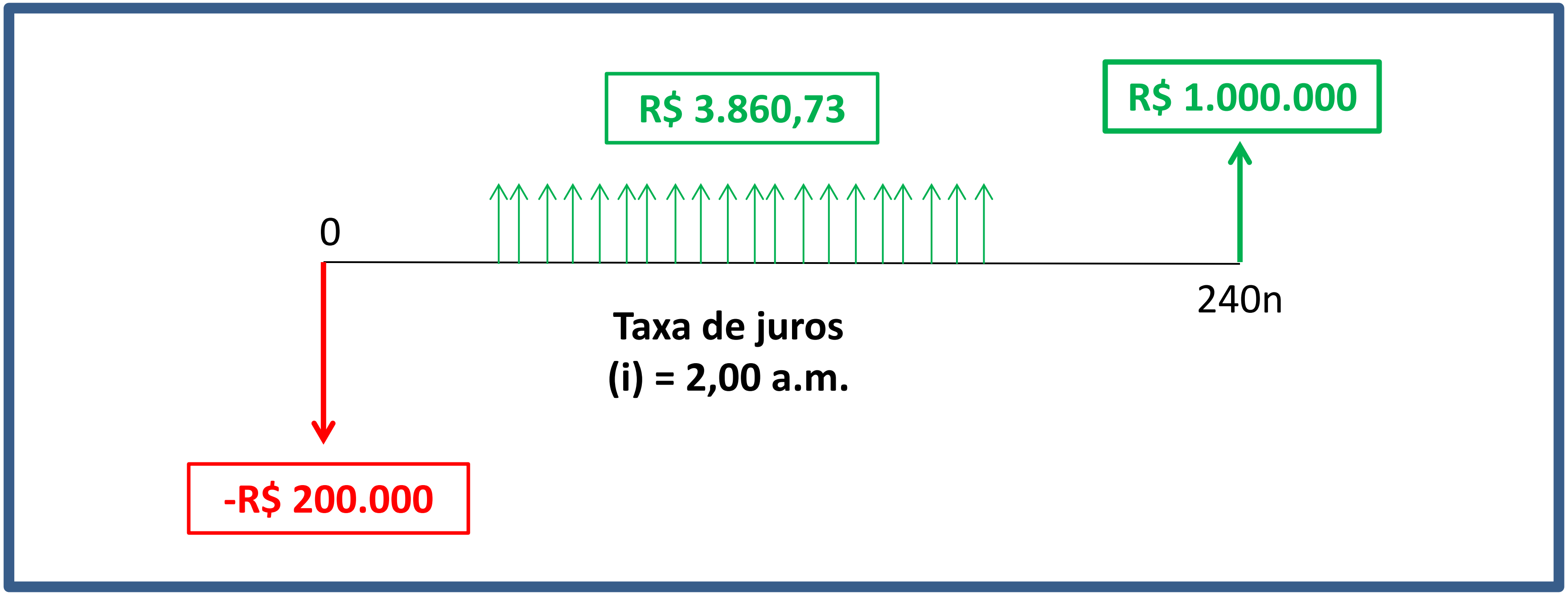
Exemplo 2

Levando em consideração as mesmas condições do exemplo anterior, porém agora o banco irá fornecer uma rentabilidade de 2% a.m. Qual deverá ser o aporte mensal que Rafael necessitará fazer para atingir seu objetivo?

- **RESPOSTA:**
  - Zerar os registros da HP 12C! Pressione [f][CLX]
  - Digite [200.000][CHS] e pressione [PV]
  - Digite [2] e pressione [i]
  - Digite [20] e [ENTER], digite [12], pressione [x] e pressione [n]
  - Digite [1.000.000] e pressione [FV]
  - Aperte [PMT]
  - Resposta: + R$ 3.860,73

Observações Importantes 2

Neste caso, ao invés de Rafael necessitar aportar, ele poderá resgatar todos os meses R$ 3.860,73 e mesmo assim chegará no objetivo de R$ 1.000.000,00 em 20 anos. Este é um exemplo claro de que devemos **SEMPRE** fazer o fluxo de caixa, já que normalmente o PV e o PMT possuem o mesmo sinal, o que poderia nos levar ao equívoco da questão, já que desta vez não o possuem!



Série de Pagamentos (PMT)

Exemplo 3

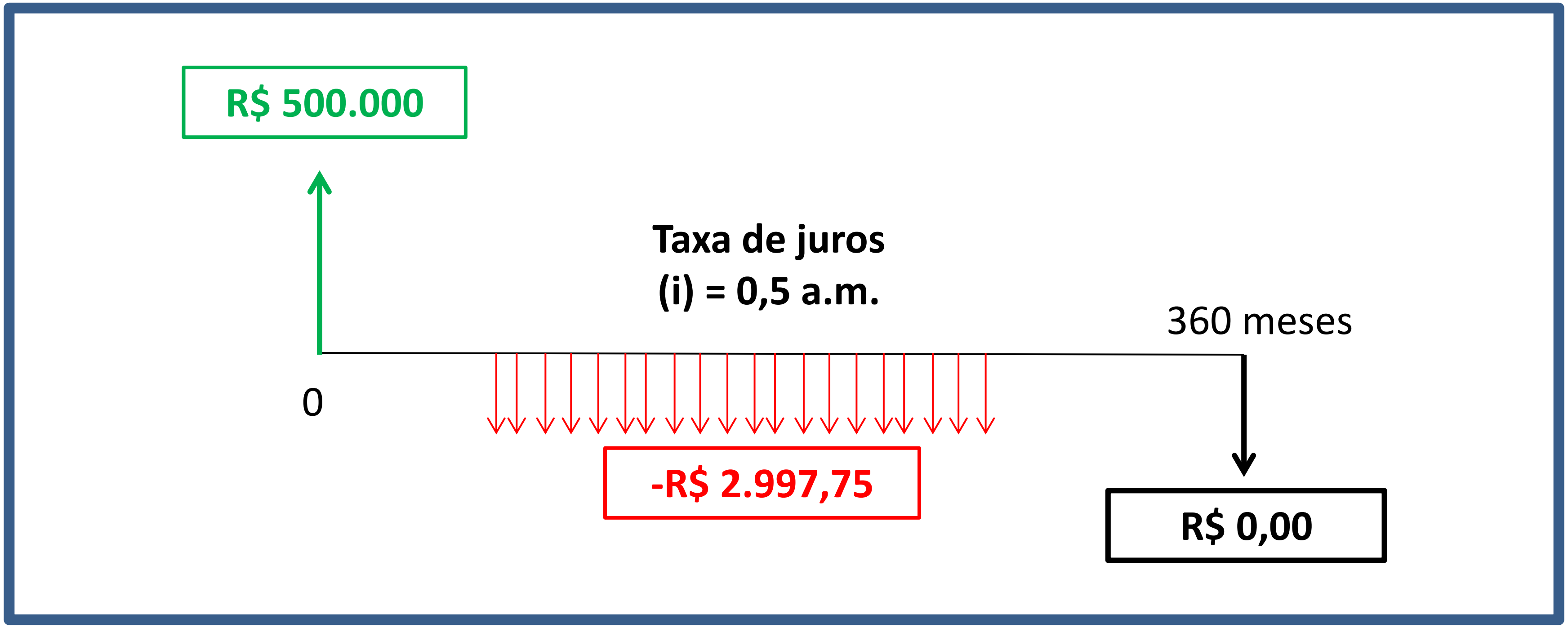
Você irá adquirir um imóvel no valor de R$ 500.000,00. Se o financiamento prevê pagamentos iguais mensais durante 30 anos, à taxa de 0,5% ao mês, qual será o valor das prestações?

- Zerar os registros da HP 12C! Pressione [f][CLX]
- Digite [500.000] e pressione [PV]
- Digite [0,5] e pressione [i]
- Digite [30] e [ENTER], digite [12], pressione [x] e pressione [n]
- Digite [0] e pressione [FV]
- Aperte [PMT]
- **Resposta: -R$ 2.997,75**

❑ **OBSERVAÇÃO:** quando uma das variáveis for zero, não é necessário inseri-la. No entanto, sempre teremos as 5 variáveis: [n],[i],[PV],[PMT] e [FV]

Observações Importantes 3

Quando uma pessoa toma uma empréstimo, este recurso entra na conta corrente (ou seja, um valor positivo). Assim, as parcelas pagas serão negativas. Outro ponto importante é: o final de toda é zero, portanto o FV será igual a zero (salve exceções).



Exemplo: Antecipado

Uma empresa realizou 6 depósitos trimestrais antecipados de R$ 405,74 e obteve o montante de R$ 3.000,00. Qual foi a taxa de juros?

- **RESPOSTA:**
  - Zerar os registros da HP 12C! Pressione [f][CLX]
  - Informa a função Begin (depósitos antecipados)
  - Pressione [g] e depois [7]
  - Digite [405,74][CHS] e pressione [PMT]
  - Digite [3.000] e pressione [FV]
  - Digite [6] e pressione [n]
  - Aperte [i]
  - **Resposta: 6% ao trimestre**

- **OBSERVAÇÃO:** Após realizar algum exercício que necessite utilizar a função Begin, volte para a função END [g][8]. Raramente teremos duas questões seguidas com Begin.

Perpetuidade do Valor Presente

Conceito

O termo perpetuidade (ou série infinita) sugere fluxos de duração infinita sem limite, ou seja, seria a “utilização dos juros gerados da aplicação financeira (imóvel, ação, cdb, ...)”. Como os juros gerados de uma aplicação é: PMT = PV × i, para encontrarmos a perpetuidade de um valor presente, precisamos reorganizar a fórmula do juros, ou seja:

$$\boxed{PV_{(per)} = \frac{PMT}{i}}$$

- **EXEMPLO: Qual valor Rafael precisa investir para ter uma renda perpétua de R$ 5.000,00 por mês, sabendo que a taxa de investimento é de 0,5% a.m?**
  - **Fórmula:** PV_{PER} = 5.000 /0,005 = R$ 1.000.000,00
  - **Calculando pela HP-12C:**
    - 0,5 [ENTER] → inserir taxa em %
    - 5.000 → inserir renda TOTAL deseja
    - [%T] → tecla para calcular renda perpétua
    - Resposta: R$ 1.000.000,00

Conceito

Em um financiamento ou empréstimo para aquisição de um bem, é esperada a devolução do capital acrescido de juros.

As maneiras mais comuns de pagamentos de uma dívida são os sistemas de amortização, que se distinguem pela maneira de pagamento das prestações (constantes, variáveis ou únicas):

- **Tabela Price,** também chamado de sistema francês;
- **Tabela SAC** (Sistema de Amortização Constante); e
- **Tabela SAA** (Sistema de Amortização Americano).

As prestações (P) são sempre compostas de: juros (J) e amortização (A)

Prestação = Juros + Amortização

Tabela Price

Conceito

No sistema pela tabela Price, o empréstimo será pago em prestações iguais e, com isso, o cálculo para descobrir o valor da parcela, será através da tecla "PMT" da HP-12C. Comparando com o sistema SAC, as prestações iniciais serão menores, fazendo com que gera uma possibilidade maior de alavancagem ao cliente.

- **EXEMPLO:** Empréstimo de R$ 5.000,00, a um juros de 5% ao ano, com pagamento anual através da tabela Price.

- **Cálculo:**
  - PV = + 5.000
  - n = 5
  - i = 5%
  - FV = 0 (dívida)
  - **PMT = ? = - R$ 1.154,87**

- **OBS:** o FV final de toda dívida é zero.

Período	Prestação (J + A)	Juros (J)	Amortização (A)	Saldo Devedor
0				5.000
1	1.154,87	250,00	904,87	4.095,13
2	1.154,87	204,76	950,11	3.145,02
3	1.154,87	157,25	997,62	2.147,40
4	1.154,87	107,37	1.047,50	1.099,90
5	1.154,87	55,00	1.099,87	0

Exemplo: Juros

Como já sabemos o valor da prestação, podemos calcular qual o valor de juros cobrado em cada parcela. Para isso, precisamos sempre calcular o saldo devedor anterior a parcela que desejamos descobrir. Por exemplo, se desejarmos saber o juros da parcela 3 (três), precisamos encontrar o saldo devedor após o pagamento de 2 (duas) prestações. Com este valor, basta aplicarmos a taxa de juros sobre este valor, vide demonstração abaixo.

- **Cálculo:**
  - PV = + 5.000
  - n = 2
  - i = 5%
  - PMT = - 1.154,87
  - **FV_2 = ? = - R$ 3.145,02**
  - **J = FV_2 x 5%**
  - **Resposta: 157,25**

Período	Prestação (J + A)	Juros (J)	Amortização (A)	Saldo Devedor
0				5.000
1	1.154,87	250,00	904,87	4.095,13
2	1.154,87	204,76	950,11	3.145,02
3	1.154,87	157,25	997,62	2.147,40
4	1.154,87	107,37	1.047,50	1.099,90
5	1.154,87	55,00	1.099,87	0

Exemplo: Amortização

Sabendo o valor da prestação e o valor do juros da parcela (demonstrado anteriormente), podemos descobrir agora o valor da amortização de cada parcela, pois a amortização será a diferença entre o valor da prestação e o juros cobrado daquela parcela, conforme fórmula abaixo:

- Amortização = (Prestação) – (Juros)

Cálculo:

- P(3) = 1.154,87
- J(3) = 157,25
- A(3) = ?

- **A = 1.154,87 – 157,25**
- **A = 997,62**

Período	Prestação (J + A)	Juros (J)	Amortização (A)	Saldo Devedor
0				5.000
1	1.154,87	250,00	904,87	4.095,13
2	1.154,87	204,76	950,11	3.145,02
3	1.154,87	157,25	997,62	2.147,40
4	1.154,87	107,37	1.047,50	1.099,90
5	1.154,87	55,00	1.099,87	0

Exemplo: Repactuação do Saldo Devedor

Uma pergunta cotidiana de clientes é: “caso eu deseja pagar um valor maior durante o pagamento da minha dívida, o que irá ocorrer? Irei manter o prazo e pagar menos em cada prestação, ou irei diminuir o prazo e manter a prestação? Qual é a melhor escolha”?

Primeiramente, não há “melhor escolha”, devemos analisar as condições e explicar as diferenças ao cliente. Mas, para isso, precisamos compreender essas diferenças. Dentre o nosso exemplo, vamos supor uma amortização extraordinária de R$ 1.000,00 em conjunto a segunda parcela. Analisando a tabela anterior, se o cliente não tivesse essa amortização extraordinária, Saldo Devedor seria de R$ 3.145,02. Com estes R$ 1.000,00, seu novo saldo devedor será de R$ 2.145,02 (R$ 3.145,02 menos R$ 1.000,00).

Para resolvermos esta dúvida do cliente, basta calcularmos tudo de novo, imaginando que ele “quitou” a dívida anterior e tomou um novo empréstimo de R$ 2.145,02, simples assim, conforme cálculo a seguir.

Exemplo: Repactuação do Saldo Devedor

- **Mantendo o valor da prestação (descobrir qual o novo prazo):**
  - PV = + 2.145,02 (novo saldo devedor)
  - PMT = R$ 1.154,87 [CHS] (manteve o valor da prestação
  - FV = 0 (valor da dívida que será quitada no final do prazo)
  - i = 5%
  - n = ? = 2, a dívida será quitada em mais duas parcelas e não em três.

- **Mantendo o prazo (descobrir qual o novo valor da prestação):**
  - PV = + 2.145,02
  - FV = 0 (valor da dívida que será quitada no final do prazo)
  - n = 5 – 2 = 3 (quantidade de parcelas restantes)
  - i = 5%
  - PMT = ? = – R$ 787,67, a prestação reduziu de R$ 1.154,87, para R$ 787,67.

Sistema de Amortização Constante (SAC)

Conceito

Neste sistema, o devedor também paga o empréstimo em prestações periódicas, englobando juros e amortização. No entanto, a diferença é que agora a **AMORTIZAÇÃO É CONSTANTE** em todos os períodos, fazendo com que as parcelas sejam sempre diferentes e sempre decrescentes, já que o saldo devedor diminui ao longo do tempo Assim, a amortização será obtida pelo quociente do valor da dívida pelo número de períodos em que deve ser quitado o financiamento. Sua fórmula é:

$$\boxed{\text{Amortização (A)} = \frac{\text{Dívida (D)}}{\text{Número de Parcelas (n)}}}$$

Este sistema é o que se paga menos juros comparado com os demais sistemas. Não confunda “pagar menos juros” com “taxa de juros menor”. Se paga menos juros na SAC, pois possui parcelas maiores no seu início, amortizando a dívida mais rapidamente.

Sistema de Amortização Constante (SAC)

Exemplo

No sistema pela tabela SAC, o cálculo para descobrir o valor da parcela, deverá ser feito em duas etapas. A primeira é descobrir o valor da amortização, e para isso, basta pensar "qual o valor das prestações caso não houvesse juros?". Após encontrar a Amortização, necessitamos calcular o juros de cada prestação e somar a Amortização.

- **EXEMPLO:** Empréstimo de R$ 5.000,00, a um juros de 5% ao ano, com pagamento anual através da tabela SAC.

- **CÁLCULO:**
  - D = 5.000
  - n = 5
  - A = D / n = 1.000

Período	Prestação (J + A)	Juros (J)	Amortização (A)	Saldo Devedor
0				5.000
1	1.250	250	1.000	4.000
2	1.200	200	1.000	3.000
3	1.150	150	1.000	2.000
4	1.100	100	1.000	1.000
5	1.050	50	1.000	0

Exemplo: Saldo Devedor

Como já sabemos o valor da amortização, podemos calcular qual o valor do saldo devedor de qualquer período. Para isso, basta multiplicarmos número de parcelas pagas pelo cliente e descontar do valor da dívida. Perceba que não importa o valor do juros para esta análise, pois em toda prestação, ele sempre paga todo o juros devido. Por exemplo, se desejarmos saber o saldo devedor após 2 (duas) prestações, basta multiplicarmos a amortização por 2 e diminuir da dívida inicial.

- **CÁLCULO:**
  - Dívida Inicial = 5.000
  - Amortizações Pagas: 2
  - Valor amortizado:
    2 x R$ 1.000 = 2.000
  - Saldo Devedor:
    5.000 – 2.000 = 3.000

Período	Prestação (J + A)	Juros (J)	Amortização (A)	Saldo Devedor
0				5.000
1	1.250	250	1.000	4.000
2	1.200	200	1.000	3.000
3	1.150	150	1.000	2.000
4	1.100	100	1.000	1.000
5	1.050	50	1.000	0

Sistema de Amortização Constante (SAC)

Exemplo: Juros

Como já sabemos o valor do saldo devedor, podemos calcular qual o valor de juros cobrado em cada parcela, lembrando que precisamos sempre calcular o saldo devedor anterior a parcela que desejamos descobrir. Por exemplo, se desejarmos saber o juros da parcela 3 (três), precisamos encontrar o saldo devedor após o pagamento de 2 (duas) prestações. Com este valor, basta aplicarmos a taxa de juros sobre este valor, vide demonstração abaixo.

- **Cálculo:**
  - Dívida Inicial = 5.000
  - Amortizações Pagas: 2 x 1.000 = 2.000
  - Saldo Devedor (FV_2): 5.000 – 2.000 = 3.000
  - Juros = $FV_2 \times 5\%$
  - Juros = 3.000 × 5%
  - **Juros = R$ 150,00**

Período	Prestação (J + A)	Juros (J)	Amortização (A)	Saldo Devedor
0				5.000
1	1.250	250	1.000	4.000
2	1.200	200	1.000	3.000
3	1.150	150	1.000	2.000
4	1.100	100	1.000	1.000
5	1.050	50	1.000	0

Exemplo: Repactuação do Saldo Devedor

Da mesma forma que trouxemos o problema do cliente em querer realizar uma amortização extraordinária durante um financiamento através da tabela Price, esta dúvida também pode ocorrer pelo financiamento pela tabela SAC.

Nosso exemplo anterior, supomos que houve uma amortização extraordinária durante a segunda parcela no valor de R$ 1.000,00. Com isso, utilizaremos o mesmo exemplo. Assim, analisando a tabela anterior, se o cliente não tivesse essa amortização extraordinária, Saldo Devedor seria de R$ 3.000,00. Com estes R$ 1.000,00, seu novo saldo devedor será de R$ 2.000,00 (R$ 3.000,00 menos R$ 1.000,00).

Para resolvermos esta dúvida do cliente, basta calcularmos tudo de novo, imaginando que ele "quitou" a dívida anterior e tomou um novo empréstimo de R$ 2.000,00, simples assim, conforme cálculo a seguir.

Sistema de Amortização Constante (SAC)

Exemplo: Repactuação do Saldo Devedor

- **Mantendo o valor da prestação (descobrir qual o novo prazo):**
  - Amortização = Dívida / número de parcelas
  - Dívida = R$ 2.00,00
  - Amortização = R$ 1.000,00
  - n = ? = R$ 2.000,00 / R$ 1.000,00 = 2, a dívida será quitada em mais duas parcelas e não em três.

- **Mantendo o prazo (descobrir qual o novo valor da amortização):**
  - Amortização = Dívida / número de parcelas
  - Dívida = R$ 2.000,00
  - n = 3
  - Amortização = ? = R$ 2.000,00 / 3 = R$ 666,67, a amortização reduziu de R$ 2.000,00, para R$ 666,67

Sistema de Amortização Americano (SAA)

Conceito

No Sistema de Amortização Americano (SAA), a amortização da dívida ocorre apenas no final. Já os juros da operação, são pagos periodicamente. Em alguns casos, quando descrito em contrato, os juros podem ser capitalizados e todo o valor ser quitado no final, como ocorre em um CDB (no mercado financeiro, quando toda a dívida é quitada no final, chamamos de Bullet ou Ballon).

- **EXEMPLO:** Empréstimo de R$ 5.000,00, a um juros de 5% ao ano, com pagamento anual através do sistema SAA.

PERÍODO	PRESTAÇÃO	JUROS	AMORTIZAÇÃO	SALDO DEVEDOR
0				5.000
1	250	250	0	5.000
2	250	250	0	5.000
3	250	250	0	5.000
4	250	250	0	5.000
5	5.250	250	5.000	0

Resumo: SAC x Price x SAA

O sistema americano (SAA) é o mais custoso (maior pagamento de juros), já que o saldo devedor não é reduzido ao longo do tempo, somente na última prestação. Em relação entre a SAC e a PRICE, pelo motivo da amortização ser maior no início pela SAC, a mesma implica um menor pagamento de juros. Porém, trazendo a valor presente os fluxos de caixa de ambas, as tabelas acabando sendo **EQUIVALENTES**.

TABELA PRICE				
n	PMT	J	A	FV
0				5.000
1	1.154	250	904	4.095
2	1.154	204	950	3.145
3	1.154	157	997	2.147
4	1.154	107	1.047	1.099
5	1.154	55	1.099	0

TABELA SAC				
n	PMT	J	A	FV
0				5.000
1	1.250	250	1.000	4.000
2	1.200	200	1.000	3.000
3	1.150	150	1.000	2.000
4	1.100	100	1.000	1.000
5	1.050	50	1.000	0

TABELA SAA				
n	PMT	J	A	FV
0				5.000
1	250	250	0	5.000
2	250	250	0	5.000
3	250	250	0	5.000
4	250	250	0	5.000
5	5.250	250	5.000	0

Lembretes

Os Principais lembretes para você fazer os cálculos são:

- Nunca se esqueça de zerar a calculadora, pois pode haver dados guardados que influenciarão seu cálculo, levando a respostas equivocadas na prova!
- Taxa de juros(i), períodos (n) e parcelas (PMT) devem estar sempre na mesma base (mês com mês, ano com ano, etc), sendo que quando:
  - Houver PMT, o prazo “n” e a taxa “i” devem ficar na SEMPRE na base do PMT;
  - Não houver PMT, você pode escolher qual deve transformar. Porém, é mais fácil converter a base do prazo (n) para a mesma base da taxa (ou seja, se a taxa está em ano e o prazo em mês, é mais fácil converter tudo para ano);
- Convenção de sinais:
  - **Entrada de caixa: sinal positivo**
  - **Saída de caixa: sinal negativo (CHS)**
- Preste muita atenção no enunciado da questão para não passar desapercebido quando indicarem que o fluxo é antecipado (ativar o modo BEGIN – “g7”)
- Sempre deixe a calculadora no modo END (“g8”), pois raramente teremos duas questões em sequência que sejam de fluxo antecipado;
- E por último, **FAÇA SEMPRE O FLUXO DE CAIXA!**