Aula 08

Banco do Brasil (Escriturário - Agente de Tecnologia) Probabilidade e Estatística - 2023 (Pós-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

01 de Janeiro de 2023

Índice

Olá, concurseiro(a)! Estão aproveitando o curso?

Agora, vamos estudar **Distribuições Discretas**: aquelas distribuições especiais, como a distribuição binomial, que caem bastante em prova. Os conceitos envolvidos são aqueles que vimos na aula de variáveis discretas, mas aqui eles são utilizados de maneira diferente. Então, mesmo que você não esteja muito seguro com a aula passada, vem comigo, para aprender a resolver questões de distribuições discretas

Até já!

Luana Brandão

Posso te falar um pouquinho sobre mim? Sou Doutora em Engenharia de Produção, pela Universidade Federal Fluminense, e Auditora Fiscal da SEFAZ-RJ. Sou professora de Estatística do Estratégia, porque quero muito ajudá-lo(a) em sua trajetória rumo à aprovação!

Se tiver alguma dúvida, entre em **contato** comigo!

professoraluanabrandao@gmail.com

@professoraluanabrandao

"Quando pensar em desistir, lembre-se da causa pela qual você começou."

Elias Lima da Silva

DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS DE PROBABILIDADE

Nesta aula, veremos algumas distribuições **específicas** de probabilidade, chamadas de **Distribuições Teóricas** ou **Distribuições Especiais**, que, por serem muito comuns, merecem atenção especial.

Distribuições Uniformes

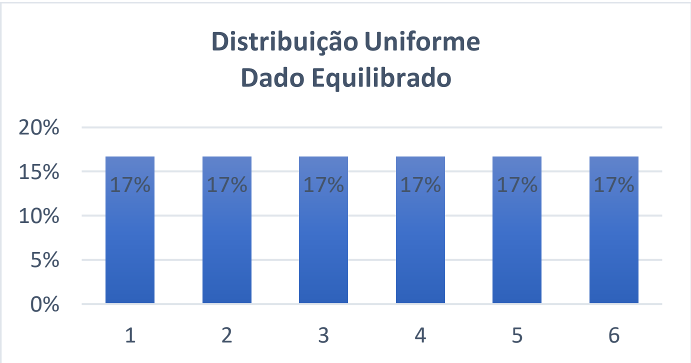
Distribuições uniformes são aquelas cujos possíveis resultados são **equiprováveis**, como o lançamento de uma moeda equilibrada ou de um dado equilibrado; ou o sorteio de um elemento quando as probabilidades de todos os elementos serem sorteados forem iguais.

Para distribuições uniformes, havendo um **total de N elementos**, a probabilidade de cada valor x é dada por:

$$P(x) = \frac{1}{N}$$

Por exemplo, a probabilidade de cada face da moeda é $P = \frac{1}{2}$ e do dado é $P = \frac{1}{6}$.

Visualmente, no gráfico de uma distribuição uniforme, as barras apresentam o **mesmo tamanho**, como representado abaixo, para o exemplo do dado:



Vamos calcular a **esperança** dessa distribuição. A fórmula geral da esperança é:

$$E(X) = \sum x.P(x)$$

Como $P(X = x) = \frac{1}{N}$ para uma distribuição uniforme, então a esperança dessa distribuição é:

$$E(X) = \sum x.\frac{1}{N}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E(X) = \frac{\sum x}{N}}}$$

Ou seja, a **esperança** da distribuição **uniforme** corresponde à **média aritmética** dos valores da variável. Para o exemplo do dado, a esperança é:

$$E(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

O próximo passo é calcular a **variância** dessa distribuição. A fórmula da variância é:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Sabemos calcular E(X), então basta elevá-la ao quadrado para calcular $[E(X)]^2$. Já o valor de $E(X^2)$ é definido como:

$$E(X^2) = \sum x^2 . P(x)$$

Como $P(x) = \frac{1}{N}$ para uma distribuição uniforme, então, para essa distribuição, temos:

$$E(X^2) = \sum x^2 . \frac{1}{N} = \frac{\sum x^2}{N}$$

Ou seja, $E(X^2)$ é a **média aritmética** dos valores da variável elevados ao **quadrado**.

Para o exemplo do dado, o valor de $E(X^2)$ é:

$$E(X^2) = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6} = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}$$

Logo, a variância será a diferença:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182-147}{12} = \frac{35}{12}$$

A maioria das distribuições teóricas conhecidas fazem parte da chamada **família exponencial** (ex.: binomial, geométrica, hipergeométrica, de Poisson; exponencial, Normal). Uma família é um conjunto de distribuições que apresentam características semelhantes. Para a família exponencial, a função de probabilidade pode ser descrita de forma similar.

A **distribuição uniforme** é uma distribuição discreta importante que **não** pertence à família exponencial.

HORA DE PRATICAR!

(2008 – TJ/RO) Uma urna contém dez bolas, cada uma gravada com um número diferente, de 1 a 10. Uma bola é retirada da urna aleatoriamente e X é o número marcado nesta bola. X é uma variável aleatória cujo(a)

a) desvio padrão é 10.

b) primeiro quartil é 0,25.

c) média é 5.

d) distribuição de probabilidades é uniforme.

e) distribuição de probabilidades é assimétrica.

Comentários:

Sabendo que todas as bolas possuem a **mesma probabilidade** de serem sorteadas, então elas seguem distribuição **uniforme**. Com isso, já sabemos a resposta da questão (D), mas vejamos as demais alternativas.

Em relação à alternativa C, a média é:

$$\mu = E(X) = \frac{\sum x}{N}$$

$$\mu = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}{10} = \frac{55}{10} = 5{,}5$$

Portanto, a alternativa C está incorreta.

Em relação à alternativa A, o desvio padrão é a raiz da variância, dada por:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Para distribuições uniformes, o valor de $E(X^2)$ é dado por:

$$E(X^2) = \frac{\sum x^2}{N}$$

$$E(X^2) = \frac{1+4+9+16+25+36+49+64+81+100}{10} = \frac{385}{10} = 38{,}5$$

Sabendo que $[E(X)]^2 = (5{,}5)^2 = 30{,}25$, a variância é:

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = 38{,}5 - 30{,}25 = 8{,}25$$

E o desvio padrão é a raiz quadrada:

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{8{,}25} \cong 2{,}87$$

Assim, a alternativa A está incorreta.

Em relação à alternativa B, sabemos que a probabilidade associada a cada valor é:

$$P = \frac{1}{N} = \frac{1}{10} = 10\%$$

Assim, a função de distribuição acumulada aumenta em 10% para cada unidade:

x	$P(x)$	$F(x)$
1	10%	10%
2	10%	20%
3	10%	30%
4	10%	40%
5	10%	50%
6	10%	60%
7	10%	70%
8	10%	80%
9	10%	90%
10	10%	100%

Observamos que não existe um valor de X = x que corresponda a F(x) = 25% exatamente. O valor superior a 25% mais próximo é F(x) = 30%, associado a X = 3. Portanto, o primeiro quartil é X = 3.

Assim, a alternativa B está incorreta.

Em relação à alternativa D, no gráfico de uma distribuição uniforme, todas as barras apresentam o mesmo tamanho. Logo, a distribuição não é assimétrica.

Gabarito: D

DISTRIBUIÇÃO DE BERNOULLI

Uma variável aleatória discreta X com Distribuição de Bernoulli assume apenas **2 valores possíveis**, **0** ou **1**, em um experimento realizado uma **única vez**. Esse experimento é chamado de **Ensaio de Bernoulli** ou **Experimento de Bernoulli**.

Um exemplo clássico dessa distribuição é o **lançamento** de uma **moeda**.

Chamamos os resultados possíveis de **sucesso** (em que a variável assume o valor **X = 1**) ou **fracasso** (em que a variável assume o valor **X = 0**). Se estivermos interessados na face CARA, esta representaria o **sucesso** e COROA representaria o **fracasso** (ou o contrário, se estivéssemos interessados na outra face).

Nesse exemplo, não faz muita diferença qual face corresponde ao sucesso ou ao fracasso, porque a probabilidade de ambas é a mesma: 50%.

Agora, vamos considerar que estamos torcendo para que o resultado do lançamento de um dado seja um **múltiplo de 3**. Nesse caso, os resultados 3 e 6 correspondem ao **sucesso** e os **demais** resultados correspondem ao **fracasso**.

Assim, teríamos **2 resultados de sucesso** (em que X = 1) e **4 resultados de fracasso** (em que X = 0). Logo, as probabilidades seriam as seguintes:

$$P(X = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 0) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Normalmente, indicamos a probabilidade de **sucesso** como $\boldsymbol{p}$ e a probabilidade de **fracasso** como $\boldsymbol{q}$.

$$\boldsymbol{p} = P(X = 1)$$

$$\boldsymbol{q} = P(X = 0)$$

Para esse exemplo, temos $\boldsymbol{p} = \frac{1}{3}$ e $\boldsymbol{q} = \frac{2}{3}$.

Outro exemplo de uma distribuição de Bernoulli é associar o sucesso a apenas **uma das faces** do dado, por exemplo, a face 3. Nesse caso, temos **1 resultado de sucesso** (X = 1) e **5 resultados de fracasso** (X = 0):

$$\boldsymbol{p} = P(X = 1) = \frac{1}{6}$$

$$\boldsymbol{q} = P(X = 0) = \frac{5}{6}$$

Como há apenas **2 resultados possíveis**, as probabilidades de sucesso e de fracasso são **complementares**, isto é, a **soma** dessas 2 probabilidades é igual a **1**:

$$\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} = \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{q} = \mathbf{1} - \boldsymbol{p}$$

A **probabilidade de sucesso** $\boldsymbol{p}$ é a **única** informação necessária para **caracterizar** uma distribuição de Bernoulli, uma vez que a probabilidade de fracasso é calculada a partir dela. Por isso, podemos indicar que uma variável X segue distribuição de Bernoulli como $X \sim Ber(\boldsymbol{p})$.

Esse dado que **caracteriza** uma distribuição de probabilidade é chamado de **parâmetro**.

Um **mesmo experimento** pode estar associado a variáveis aleatórias com distribuições **distintas** de probabilidade, dependendo de como você o analisa.

O lançamento de um dado, por exemplo, pode estar associado a uma variável **uniforme**, com 6 valores equiprováveis; ou a distribuições de **Bernoulli** com parâmetros distintos; dentre outras distribuições possíveis.

Agora, vamos calcular a **esperança** da distribuição de Bernoulli. A fórmula geral da esperança é:

$$E(X) = \sum x . P(X = x)$$

$$E(X) = 0 \times q + 1 \times p$$

$$\boldsymbol{E(X) = p}$$

Para calcular a **variância**, primeiro calculamos $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \sum x^2 . P(X = x)$$

$$E(X^2) = 0^2 \times q + 1^2 \times p$$

$$E(X^2) = \boldsymbol{p}$$

Logo, a variância é:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$V(X) = p - p^2 = p(1-p)$$

$$\boxed{\boldsymbol{V(X) = p.q}}$$

Para o exemplo do dado, em que o sucesso corresponde a uma face múltipla de 3, vimos que $\boldsymbol{p} = \frac{1}{3}$ e $\boldsymbol{q} = \frac{2}{3}$. Nesse caso, a esperança e a variância são:

$$E(X) = \boldsymbol{p} = \frac{1}{3}$$

$$V(X) = \boldsymbol{p}.\boldsymbol{q} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

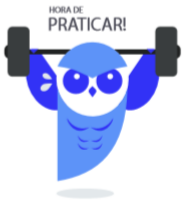
Para o exemplo em que o sucesso corresponde a uma face específica do dado, vimos que $\boldsymbol{p} = \frac{1}{6}$ e $\boldsymbol{q} = \frac{5}{6}$. Nesse caso, a esperança e a variância são:

$$E(X) = \boldsymbol{p} = \frac{1}{6}$$

$$V(X) = \boldsymbol{p}.\boldsymbol{q} = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

ESQUEMATIZANDO

Distribuição de Bernoulli (p)
1 experimento: **Ensaio de Bernoulli**
2 resultados possíveis: sucesso ($X = 1$) ou fracasso ($X = 0$)
Probabilidade de sucesso: $P[X = 1] = \boldsymbol{p}$
Probabilidade de fracasso: $P[X = 0] = \boldsymbol{q} = \mathbf{1} - \boldsymbol{p}$
Esperança: $E(X) = \boldsymbol{p}$; Variância: $V(X) = \boldsymbol{p}.\boldsymbol{q}$



(2017 – SES/DF) Considere o lançamento de um dado cúbico honesto cujas faces são numeradas de 1 a 6, após o qual é observado se o número da face voltada para cima é múltiplo de 3. Tendo em vista que um experimento como esse pode apresentar apenas dois resultados possíveis (sucesso ou falha), é correto afirmar que tal experiência denomina-se distribuição

a) de Bernoulli.

b) hipergeométrica.

c) de Poisson.

d) normal.

e) qui-quadrado.

Comentários:

A distribuição que trabalha com apenas 2 resultados possíveis (sucesso ou fracasso) para 1 ensaio (no caso, 1 lançamento do dado) é a distribuição de Bernoulli.

Gabarito: A.

(CESPE/2016 – TCE/PA) Se as variáveis aleatórias X e Y seguem distribuições de Bernoulli, tais que:

$$P[X = 1] = P[Y = 0] = 0{,}9$$

Então a média de Y é superior a 0,5.

Comentários:

A questão indaga sobre a **média (esperança) de Y**.

O enunciado informa que Y segue distribuição de Bernoulli, com probabilidade de **fracasso** de:

$$P(Y = 0) = q = 0{,}9$$

Logo, a probabilidade de **sucesso** é **complementar**:

$$p + q = 1$$

$$p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$$

Assim, a esperança de Y é:

$$E(Y) = p = 0{,}1$$

Que é **inferior** a 0,5.

Gabarito: Errado.

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Quando **repetimos** um **mesmo** Ensaio de **Bernoulli** (isto é, o experimento com **2 resultados possíveis**), damos origem à **Distribuição Binomial**.

Para termos uma distribuição binomial, é necessário que a **probabilidade de sucesso** de cada repetição seja a **mesma** (afinal, estamos repetindo um **mesmo** Ensaio de Bernoulli).

Além disso, as repetições precisam ser **independentes**, isto é, o resultado de um experimento **não** pode afetar o resultado de outro.

Os **parâmetros** dessa distribuição (os dados que a caracterizam) são o número $\boldsymbol{n}$ de repetições e a probabilidade de sucesso $\boldsymbol{p}$**.** Por isso, podemos indicar que uma variável X segue distribuição binomial como $X \sim B(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p})$.

A **Distribuição Binomial** pode ser considerada a **soma** de n variáveis com **Distribuição de Bernoulli** independentes, com **mesmo parâmetro** p.

Também é possível formar uma distribuição binomial pela **soma** de outras **distribuições binomiais**, com **mesmo parâmetro** p.

Por exemplo, sendo $n_X = 3$ o número de repetições da variável X e $n_Y = 4$ o número de repetições da variável Y, então a soma das variáveis $S = X + Y$ terá **distribuição binomial** com o seguinte número de repetições:

$$n_S = n_X + n_Y = 4 + 3 = 7$$

Um exemplo de distribuição binomial é o lançamento de um dado **n** = **3** vezes, em que o sucesso, corresponde à face 6 e o fracasso corresponde às demais faces.

Cada um desses lançamentos corresponde a um **Ensaio de Bernoulli**, em que podemos obter, em cada um deles, sucesso (X_{Ber} = 1) ou fracasso (X_{Ber} = 0), ou seja, **2** resultados possíveis.

Assim, o número de possíveis resultados para os 3 lançamentos é (princípio multiplicativo de combinatória):

2 x 2 x 2 = 8

As 8 possibilidades são:

{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)}

A variável X com distribuição binomial representa o **número de sucessos** obtidos em todos os n lançamentos.

Sabendo que cada sucesso terá valor **1** e que cada fracasso terá valor **0**, então o número de sucessos pode ser calculado pela **soma** dos resultados dos Ensaios.

Para o nosso exemplo dos 3 lançamentos, a variável binomial pode assumir os seguintes valores:

- X = 0 (nenhum sucesso): {(0,0,0)}
- X = 1 (1 sucesso): {0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)}
- X = 2 (2 sucessos): {(0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)}
- X = 3 (3 sucessos): {(1,1,1)}

De maneira geral, a variável binomial pode assumir qualquer valor entre **0 e $\boldsymbol{n}$**.

Agora, vamos calcular a **probabilidade** de cada valor dessa variável binomial.

A probabilidade de obter a face 6 (**sucesso**) em um **único lançamento** é:

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{6}$$

E a probabilidade de não obter a face 6 (**fracasso**) em um **único lançamento** é complementar:

$$\boldsymbol{q} = 1 - p = \frac{5}{6}$$

Logo, a probabilidade de ter **fracasso** nos $\boldsymbol{n}$ = 3 lançamentos (0 sucesso: X = 0) corresponde à **interseção** de $n = 3$ fracassos. Por serem eventos **independentes**, a interseção é o **produto** das probabilidades:

$$P(X = 0) = \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{q} = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

Generalizando, para $\boldsymbol{n}$ **repetições**, a probabilidade de ter **0 sucesso** ($\boldsymbol{n}$ **fracassos**) é:

$$P(X = 0) = \underbrace{\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{q} \times \ldots \times \boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{n} \text{ vezes}} = \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{n}}$$

Similarmente, a probabilidade de obter somente **sucessos** (nenhum fracasso) nos $\boldsymbol{n}$ = 3 lançamentos (X = 3) corresponde à **interseção** desses eventos **independentes**, dada pelo **produto**:

$$P(X = 3) = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{p} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

Generalizando, para $\boldsymbol{n}$ **repetições**, a probabilidade de ter $\boldsymbol{n}$ **sucessos** (0 fracassos) é:

$$P(X=n) = \underbrace{\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{p} \times \ldots \times \boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{n} \text{ vezes}} = \boldsymbol{p^n}$$

Já, a probabilidade de obter exatamente 1 sucesso (2 fracassos) é igual à probabilidade de obter 1 sucesso no **primeiro experimento** **OU** 1 sucesso no **segundo experimento** **OU** 1 sucesso no **terceiro experimento**:

$$P(X=1) = P(\{1{,}0{,}0\} \cup \{0{,}1{,}0\} \cup \{0{,}0{,}1\})$$

Como são eventos **mutuamente excludentes**, a probabilidade da união desses eventos é a **soma** dessas probabilidades:

$$P(X=1) = P(\{1{,}0{,}0\} \cup \{0{,}1{,}0\} \cup \{0{,}0{,}1\}) = P(\{1{,}0{,}0\}) + P(\{0{,}1{,}0\}) + P(\{0{,}0{,}1\})$$

Agora, vamos calcular essas probabilidades para o nosso exemplo:

$$P(\{1{,}0{,}0\}) = p \times q \times q = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$$

$$P(\{0{,}1{,}0\}) = q \times p \times q = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$$

$$P(\{0{,}0{,}1\}) = q \times q \times p = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$$

Como as probabilidades são todas **iguais**, em vez de somá-las, basta **MULTIPLICAR** o resultado por 3:

$$P(X=1) = 3 \times p \times q \times q = 3 \times \frac{25}{216} = \frac{75}{216}$$

E a probabilidade de obter exatamente 2 sucessos (1 fracasso) é igual à probabilidade de obter 1 fracasso no primeiro **OU** no segundo **OU** no terceiro experimento:

$$P(\{0{,}1{,}1\}) = q \times p \times p = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$$

$$P(\{1{,}0{,}1\}) = p \times q \times p = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$$

$$P(\{1{,}1{,}0\}) = p \times p \times q = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{216}$$

Esses eventos também são mutuamente excludentes, então a probabilidade da união também corresponde à **soma** das probabilidades. Como elas são iguais, podemos **multiplicar** o resultado por 3:

$$P(X = 2) = 3 \times p \times p \times q = 3 \times \frac{5}{216} = \frac{15}{216}$$

Generalizando, para $\boldsymbol{n}$ **repetições**, vamos calcular a probabilidade de obter $\boldsymbol{k}$ **sucessos**, digamos, **nas primeiras $\boldsymbol{k}$ tentativas** e, portanto, $\boldsymbol{n-k}$ **fracassos** nas demais tentativas:

$$\underbrace{p \times p \times \ldots \times p}_{\boldsymbol{k} \text{ vezes}} \times \underbrace{q \times q \times \ldots \times q}_{\boldsymbol{n-k} \text{ vezes}} = p^{\boldsymbol{k}} \times q^{\boldsymbol{n-k}}$$

Porém, a ordem não precisa ser exatamente essa. Podemos obter k sucessos em **quaisquer** k tentativas. Por isso, devemos **multiplicar** esse resultado pelo número de maneiras de **reorganizar** os resultados de sucesso e fracasso.

Para isso, podemos simplesmente "escolher" quais serão as tentativas que resultarão em $\boldsymbol{k}$ **sucessos**, pois as outras $\boldsymbol{n-k}$ tentativas serão, necessariamente, **fracassos**.

O número de maneiras de "escolher" $\boldsymbol{k}$ tentativas, dentre $\boldsymbol{n}$ tentativas no total, corresponde à combinação de $\boldsymbol{k}$ elementos, dentre $\boldsymbol{n}$:

$$\boxed{C_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{k}} = \frac{n!}{(n-k)! \times k!}}$$

Logo, a probabilidade de ter exatamente k sucessos (e, portanto, $n-k$ fracassos) é o produto da probabilidade $p^{k} \times q^{n-k}$ com a combinação $C_{n,k}$.

$$\boxed{\boldsymbol{P(X = k) = C_{n,k} \times p^{k} \times q^{n-k}}}$$

A combinação $\boldsymbol{C_{n,k}}$ também pode ser indicado por $\boldsymbol{C_n^k}$ ou por $\boldsymbol{\binom{n}{k}}$.

Podemos calcular também a probabilidade de um **intervalo** ou de múltiplos valores da variável binomial.

Por exemplo, vamos primeiro calcular a probabilidade de obter 1 **OU** 2 sucessos, em 3 lançamentos de uma moeda (com p = q = 0,5). Como são eventos mutuamente exclusivos, devemos **somar** as probabilidades:

$$P(X = 1 \cup X = 2) = P(X = 1) + P(X = 2)$$

A probabilidade de obter 1 sucesso é:

$$P(X = 1) = C_{3,1} \times 0{,}5^1 \times 0{,}5^2 = 3 \times 0{,}5 \times 0{,}25 = 0{,}375$$

A probabilidade de obter 2 sucessos é:

$$P(X = 2) = C_{3,2} \times 0{,}5^2 \times 0{,}5^1 = 3 \times 0{,}25 \times 0{,}5 = 0{,}375$$

Então, a probabilidade de obter 1 OU 2 sucessos é:

$$P(X = 1 \cup X = 2) = 0{,}375 + 0{,}375 = 0{,}75$$

Agora, vamos calcular a probabilidade de obter **pelo menos um** sucesso.

Em geral, para calcular a probabilidade de "pelo menos um", é mais fácil calcular a probabilidade **complementar**, isto é, a probabilidade de **nenhum**:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

A probabilidade de obter 0 sucesso é:

$$P(X = 0) = C_{3,0} \times 0{,}5^3 \times 0{,}5^0 = 1 \times 0{,}125 \times 1 = 0{,}125$$

Logo, a probabilidade de obter **pelo menos um** sucesso é o complemento:

$$P(X \geq 1) = 1 - 0{,}125 = 0{,}875$$

Também podemos nos referir a uma distribuição binomial como uma **amostra de tamanho n** de uma **população** que segue uma **Distribuição de Bernoulli**.

Por exemplo, vamos supor uma população de peças, das quais 20% delas são **defeituosas**. Nesse caso, a seleção de uma **única peça** corresponde a um Ensaio de Bernoulli, pois há 2 resultados possíveis: **sucesso** (peça defeituosa) ou **fracasso** (peça não defeituosa).

A **probabilidade de sucesso** desse experimento equivale à **proporção de peças defeituosas** na população:

$$p = 20\% = 0{,}2$$

E a probabilidade de fracasso é complementar: $q = 1 - p = 0{,}8$

Suponha que vamos selecionar uma **amostra de $n = 5$** peças ao acaso. O número de peças defeituosas encontradas na amostra segue uma **distribuição binomial** com parâmetros $n = 5$ e $p = 0{,}2$.

Assim, a probabilidade de obter $k = 3$ peças defeituosas (portanto, $n - k = 2$ peças não defeituosas) é:

$$P(X = k) = C_{n,k} \times p^k \times q^{n-k}$$

$$P(X = 3) = C_{5,3} \times 0{,}2^3 \times 0{,}8^2$$

A combinação de 3 elementos, dentre 5, é:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

Logo, a probabilidade de obter 3 é igual a:

$$P(X = 3) = 10 \times 0{,}008 \times 0{,}64 = 0{,}0512$$

Para que as seleções sejam **independentes** (condição necessária para termos uma **distribuição binomial**), isto é, para que o resultado de uma **não influencie** no resultado da outra, a **proporção** de peças defeituosas **não** pode ser alterada a cada extração.

Para que essa condição seja satisfeita, temos duas alternativas:

- A seleção das peças é feita **com reposição**, isto é, a peça selecionada é **devolvida**; ou
- A população é **infinita** (ou **grande o suficiente**, em comparação com o tamanho da amostra, para permitir tal aproximação).

(2020 – Universidade do Estado do Pará – *Adaptada*) Julgue as seguintes afirmações:

I. As distribuições de Bernoulli e Binomial apresentam as mesmas características e, portanto, os mesmos parâmetros.

II. Repetições independentes de um ensaio de Bernoulli, com a mesma probabilidade de ocorrência de "sucesso", dão origem ao modelo Binomial;

Comentários:

Em relação à afirmativa I, o parâmetro de uma distribuição de Bernoulli é a probabilidade de sucesso p; e os parâmetros de uma distribuição binomial são a probabilidade de sucesso p e o número de repetições n.

Portanto, a afirmativa I está errada.

Em relação à afirmativa II, o modelo Binomial realmente consiste em repetições independentes de um ensaio de Bernoulli, com a mesma probabilidade de sucesso p. Logo, a afirmativa II está certa.

Gabarito: I – Errado; II – Certo.

(CESPE/2016 – Auditor de Controle Externo TCE/PA) Considere um processo de amostragem de uma população finita cuja variável de interesse seja binária e assuma valor 0 ou 1, sendo a proporção de indivíduos com valor 1 igual a p = 0,3.

Considere, ainda, que a probabilidade de cada indivíduo ser sorteado seja a mesma para todos os indivíduos da amostragem e que, após cada sorteio, haja reposição do indivíduo selecionado na amostragem.

A partir dessas informações, julgue o item subsequente.

Se for coletada uma amostra de tamanho n = 20, o número total de observações sorteadas com valor 1 terá distribuição binomial com parâmetros n e p.

Comentários:

A variável binária corresponde a uma distribuição de Bernoulli.

Coletando uma amostra de tamanho n, então o número de observações com o atributo sucesso corresponde a uma variável binomial, com parâmetros n e p.

Gabarito: Certo.

(CESPE/2016 – TCE/PA) Se as variáveis aleatórias X e Y seguem distribuições de Bernoulli, tais que

$$P[X = 1] = P[Y = 0] = 0,9$$

então X + Y segue uma distribuição binomial com parâmetros n = 2 e p = 0,3, se X e Y forem variáveis aleatórias independentes.

Comentários:

A distribuição binomial é caracterizada por repetições **independentes** de Ensaios de Bernoulli, com o **mesmo parâmetro p**.

O enunciado informa que:

- $P[X = 1] = 0,9$, ou seja, a probabilidade de sucesso de X é $p_X = 0,9$.
- $P[Y = 0] = 0,9$, ou seja, a probabilidade de fracasso de Y é $q_Y = 0,9$. Portanto, a probabilidade de sucesso de Y é: $p_Y = 1 - 0,9 = 0,1$

Como $p_X \neq p_Y$, então X + Y **não** segue uma distribuição binomial.

Gabarito: Errado.

(2018 – Câmara de Goiânia) Considere uma variável aleatória X com distribuição binomial e parâmetros p = 1/3 e n = 4. Qual é a probabilidade de X = 2?

a) 4/81

b) 1/9

c) 2/9

d) 8/27

Comentários:

A probabilidade P(X = k) de uma distribuição binomial é dada por:

$$P(X = k) = C_{n,k}.p^k.(1-p)^{n-k}$$

Para p = 1/3, n = 4 e k = 2, temos:

$$P(X = 2) = \frac{4!}{2!.2!}.\left(\frac{1}{3}\right)^2.\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4 \times 3}{2}.\frac{1}{9}.\frac{4}{9} = \frac{8}{27}$$

Gabarito: D

(2016 – ANAC) Em um determinado município, 70% da população é favorável a um certo projeto. Se uma amostra aleatória de cinco pessoas dessa população for selecionada, então a probabilidade de exatamente três pessoas serem favoráveis ao projeto é igual a

a) 40,58%

b) 35,79%

c) 42,37%

d) 30,87%

e) 37,46%

Comentários:

Considerando que a pessoa pode ser favorável ou não (não há outra possibilidade) e que o resultado da seleção de uma pessoa **não** afeta o de outra, então temos uma distribuição **binomial**.

Sabemos que:

- a proporção de pessoas favoráveis é p = 70% = 0,7 (logo, q = 1 – p = 0,3); e
- serão selecionadas n = 5 pessoas.

Então, a probabilidade de selecionar k = 3 pessoas favoráveis, P(X = 3), é dada por:

$$P(X=k)=C_{n,k}\times p^k\times q^{n-k}$$

$$P(X=3)=C_{5,3}\times(0{,}7)^3\times(0{,}3)^2$$

A combinação de 3 elementos, dentre 5, é:

$$C_{5,3}=\frac{5!}{(5-3)!\times 3!}=\frac{5\times 4\times 3!}{2!\times 3!}=\frac{5\times 4}{2}=10$$

Assim, P(X = 3) é:

$$P(X=3)=10\times 0{,}343\times 0{,}09=0{,}3087=30{,}87\%$$

Gabarito: D

(FGV/2018 – ALE/RO) Uma moeda é lançada quatro vezes. A probabilidade de saírem mais caras do que coroas é de

a) $\frac{4}{16}$

b) $\frac{5}{16}$

c) $\frac{6}{16}$

d) $\frac{7}{16}$

e) $\frac{8}{16}$

Comentários:

Para saírem **mais caras** do que coroas em 4 lançamentos de uma moeda, é necessário que saiam 3 **OU** 4 caras. Assim, temos uma distribuição binomial com n = 4 e p = ½ (e também q = ½).

A probabilidade de saírem k = 4 caras (4 sucessos e 0 fracasso) é:

$$P(X=k)=C_{n,k}\times p^k\times q^{n-k}$$

$$P(X=4)=C_{4,4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\left(\frac{1}{2}\right)^0=1\times\frac{1}{16}\times 1=\frac{1}{16}$$

A probabilidade de saírem k = 3 caras (3 sucessos e 1 fracasso) é:

$$P(X=3)=C_{4,3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^1=4\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{16}$$

Portanto, a probabilidade de obter 3 OU 4 caras, sabendo que são eventos mutuamente exclusivos, é:

$$P(X = 4) + P(X = 3) = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} = \frac{5}{16}$$

Gabarito: B.

(VUNESP/2019 – TJ/SP) Em uma eleição, sabe-se que 40% dos eleitores são favoráveis ao candidato X e o restante ao candidato Y. Extraindo uma amostra aleatória, com reposição, de tamanho 3 da população de eleitores, obtém-se que a probabilidade de que no máximo 1 eleitor da amostra seja favorável ao candidato X é igual a

a) 35,2%

b) 64,8%

c) 36,0%

d) 43,2%.

e) 78,4%

Comentários:

O enunciado informa que 40% dos eleitores são favoráveis a X (sucesso) e que os demais são favoráveis a Y (fracasso), ou seja, a seleção de uma pessoa ao acaso segue distribuição de Bernoulli.

Logo, a seleção de 3 pessoas **com reposição** (seleções independentes) configura uma **distribuição binomial** com n = 3 e p = 0,4 (q = 1 – p = 0,6).

Nessa distribuição, a probabilidade de encontrar k sucessos é dada por:

$$\boldsymbol{P(X = k) = C_{n,k} \times p^k \times q^{n-k}}$$

A probabilidade de obter **no máximo 1** eleitor favorável corresponde a obter 0 ou 1 sucesso:

$$\boldsymbol{P = P(X = 0) + P(X = 1)}$$

Para k = 0, temos:

$$P(X = 0) = C_{3,0} \times 0{,}4^0 \times 0{,}6^3 = 1 \times 1 \times 0{,}36 = 0{,}216$$

Para k = 1, temos:

$$P(X = 1) = C_{3,1} \times 0{,}4^1 \times 0{,}6^2 = 3 \times 0{,}4 \times 0{,}36 = 0{,}432$$

Assim, a probabilidade desejada é:

$$\boldsymbol{P(X = 0 \cup X = 1) = 0,216 + 0,432 = 0,648 = 64,8\%}$$

Gabarito: B

Esperança e Variância

E quanto à **esperança** dessa distribuição?

Vamos considerar o experimento de lançar uma moeda 100 vezes. Quantos resultados "CARA" você espera? 50, certo? Qual é a intuição por trás desse valor?

Se a probabilidade de sucesso é $\boldsymbol{p}$ e se estamos realizando esse experimento $\boldsymbol{n}$ vezes, espera-se que o número de sucessos obtidos mantenha essa **proporção**. Ou seja, o valor esperado é:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p}$$

Para o exemplo dos 3 lançamentos de uma moeda, temos $\boldsymbol{p} = \frac{1}{2}$ e $\boldsymbol{n} = 3$. Então, o número de vezes que **esperamos** obter a face CARA é:

$$E(X) = n \times p = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Mas esse valor não é inteiro!

Tudo bem! Algumas vezes obteremos mais CARAS, outras vezes menos, de modo que, **em média**, obteremos 1,5 CARA.

E a **variância** da distribuição binomial? A sua fórmula é:

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}$$

Para esse mesmo exemplo, com $\boldsymbol{q} = \frac{1}{2}$, a variância é:

$$V(X) = n \times p \times q = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

E o **desvio padrão** é a **raiz quadrada da variância**:

$$\boldsymbol{DP}(\boldsymbol{X}) = \sqrt{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}}$$

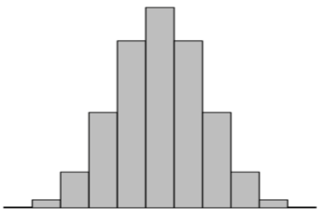
INDO MAIS FUNDO!

A combinação de k elementos, dentre n, é igual à combinação de $n - k$ elementos, dentre n: $C_{n,k} = C_{n,n-k}$.

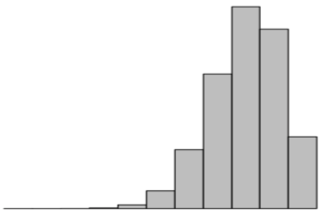
Ou seja, o **número de maneiras** de obter 0 sucesso é igual ao de obter n sucessos; o **número de maneiras** de obter 1 sucesso é igual ao de obter $n - 1$ sucessos; etc.

Assim, se tivermos $\boldsymbol{p = q}$, a **probabilidade** de obter 0 sucesso será igual à **probabilidade** de obter n sucessos; a probabilidade de obter 1 sucesso será igual à de $n - 1$ sucessos etc.

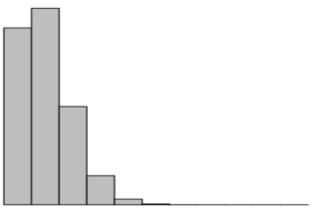
Portanto, temos uma distribuição **simétrica** se $\boldsymbol{p = q}$, isto é, se $\boldsymbol{p = q = 0,5}$, conforme ilustrado a seguir.



Quando a probabilidade de sucesso for maior $\boldsymbol{p > 0,5}$, teremos uma distribuição **assimétrica negativa**, conforme ilustrado a seguir.



Analogamente, quando a probabilidade de sucesso for menor $\boldsymbol{p < 0,5}$, teremos uma distribuição **assimétrica positiva**, conforme ilustrado a seguir.



Apesar de a distribuição binomial ser assimétrica sempre que $p \neq 0{,}5$, sempre que o produto $n \times p$ for um número **inteiro**, esse será o valor da **média,** da **mediana** e da **moda**!

Distribuição Binomial (n, p)

n Ensaios de Bernoulli **independentes**, com probabilidade de sucesso p

$$P(X = k) = C_{n,k} . p^k . q^{n-k}$$

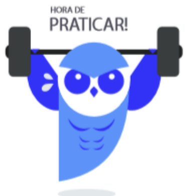
Esperança: $E(X) = n.p$; Variância: $V(X) = n.p.q$

Observe que:

- A **esperança da binomial** é igual a n **vezes a esperança da Bernoulli**; e
- A **variância da binomial** é igual a n **vezes a variância da Bernoulli**.

$$E(X_{Binomial}) = n.E(X_{Bernoulli})$$

$$V(X_{Binomial}) = n.V(X_{Bernoulli})$$



(2019 – Universidade Federal do Acre) Seja X uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros n e p. Então, pode-se dizer que a variância de X é dado por.

a) n

b) n.p

c) n.p(1 – p).

d) $n.p^2$

e) $n.p^2(1 – p)$

Comentários:

A variância de uma variável com distribuição binomial é dada por:

$$V(X) = n.p.q = n.p.(1-p)$$

Gabarito: C

(CESPE/2013 – TRT 17ª Região) Em toda distribuição binomial, a média será menor que a variância.

Comentários:

Em uma distribuição binomial, a média é E(X) = n.p e a variância V(X) = n.p.q.

Como q < 1 (por ser uma probabilidade), então:

$$V(X) = n.p.q < n.p.1 = E(X)$$

Portanto, a média é sempre **maior** que a variância.

Gabarito: Errado.

(2016 – IBGE) Quando um pesquisador vai a campo e aborda pessoas na rua para serem entrevistadas, o número de pessoas que aceita responder à pesquisa segue uma distribuição binomial.

Se o valor esperado dessa distribuição é 8, e sua variância é 1,6, então a probabilidade de uma pessoa aceitar responder à pesquisa é de

a) 1,6%

b) 16%

c) 20%

d) 50%

e) 80%

Comentários:

O enunciado informa que o valor esperado de uma variável com distribuição binomial é E(X) = 8.

Sabendo que, para uma distribuição binomial, temos E(X) = n.p, então:

$$E(X) = n.p = 8$$

$$n = \frac{8}{p}$$

O enunciado informa, ainda, que a variância é V(X) = 1,6.

Sabemos que:

$$V(X) = n.p.q = n.p.(1-p) = n.p - n.p^2$$

Então:

$$V(X) = n.p - n.p^2 = 1{,}6$$

Considerando que $n = \frac{8}{p}$, temos:

$$V(X) = \frac{8}{p}.p - \frac{8}{p}.p^2 = 1{,}6$$

$$8 - 8.p = 1{,}6$$

$$8.p = 6{,}4$$

$$p = 0{,}8 = 80\%$$

Gabarito: E.

(FCC/2014 – Auditor Fiscal da SEFAZ/RJ) Sabe-se que:

I. X é uma variável aleatória com distribuição binomial com média 2p e variância (2p-2p2).

II. Y é uma variável aleatória com distribuição binomial com média 5p e variância (5p-5p2).

III. A probabilidade de X ser inferior a 2 é igual a 15/16.

Nessas condições, a probabilidade de Y ser superior a 3 é igual a

a) 3/1.024

b) 1/64

c) 5/512

d) 15/1.024

e) 7/512

Comentários:

Sendo X uma variável com distribuição binomial, com média 2p, então:

$$E(X) = n_X.p = 2p$$

$$n_X = 2$$

O enunciado informa que a probabilidade de X ser inferior a 2 é P(X < 2) = 15/16, isto é:

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 15/16$$

Sabendo que a probabilidade da distribuição binomial é $P(X = k) = C_{n,k}.p^k.q^{n-k}$, então para n = 2, temos:

$$P(X = 0) = C_{2,0}.p^0.q^2 = 1 \times 1 \times q^2 = q^2 = (1-p)^2$$

$$P(X = 1) = C_{2,1}.p^1.q^1 = 2.p.q = 2.p.(1-p)$$

Sabendo que a soma dessas probabilidades é igual a 15/16, então:

$$(1-p)^2 + 2.p.(1-p) = \frac{15}{16}$$

$$1 - 2p + p^2 + 2.p - 2p^2 = \frac{15}{16}$$

$$1 - p^2 = \frac{15}{16}$$

$$p^2 = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16}$$

Extraindo a raiz de ambos os lados da equação, sabendo que $p \geq 0$, temos:

$$p = \frac{1}{4}$$

Sabendo que, para Y, temos E(Y) = 5.p, então o número n de repetições de Y é:

$$E(Y) = n_Y.p = 5p$$

$$n_Y = 5$$

A probabilidade de Y ser superior a 3 corresponde à probabilidade de Y ser igual 4 OU igual a 5:

$$P(Y > 3) = P(Y = 4) + P(Y = 5)$$

Sabendo que p = ¼ (logo q = 1 – p = ¾) e n_Y = 5, temos:

$$P(Y = 4) = C_{5,4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1 = 5 \times \frac{1}{4^4} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{1024}$$

$$P(Y = 5) = C_{5,5} \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1 \times \frac{1}{4^5} \times 1 = \frac{1}{1024}$$

Assim, a probabilidade de Y ser superior a 3 é:

$$P(Y > 3) = \frac{15}{1024} + \frac{1}{1024} = \frac{16}{1.024} = \frac{1}{64}$$

Gabarito: B

(FGV/2022 – TCU) A média e a variância de uma distribuição binomial são, respectivamente, 20 e 4. O número de ensaios (n) dessa distribuição é:

a) 20

b) 22

c) 25

d) 50

e) 100

Comentários:

Segundo o enunciado, a média de uma distribuição binomial é igual a 20 e a variância é igual a 4:

$$E(X) = n \times p = 20$$

$$V(X) = n \times p \times q = 4$$

A fórmula da variância é igual à da esperança, multiplicada por q:

$$V(X) = \underbrace{n \times p}_{E(X)} \times q = E(X) \times q$$

Sabendo que E(X) = 20 e que V(X) = 4, podemos calcular a probabilidade de fracasso:

$$V(X) = 20 \times q = 4$$

$$q = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

A probabilidade de sucesso é complementar:

$$p = 1 - q = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Sabendo que $E(X) = n \times p = 20$, podemos calcular o número n de ensaios:

$$E(X) = n \times \frac{4}{5} = 20$$

$$n = \frac{20}{\frac{4}{5}} = 20 \times \frac{5}{4} = \frac{100}{4} = 25$$

Gabarito: C

DISTRIBUIÇÃO GEOMÉTRICA

Assim como a distribuição binomial, a distribuição geométrica também se baseia em **Ensaios de Bernoulli independentes** com a **mesma probabilidade de sucesso p**.

Porém, a variável com distribuição geométrica corresponde ao **número de ensaios até o primeiro sucesso**.

Por exemplo, suponha que iremos lançar um dado **até obter a face 6**, que será o nosso **sucesso**. Essa distribuição estuda, nesse caso, **o número de lançamentos** que teremos que efetuar até obtermos essa face **pela primeira vez**.

Assim, se o valor da variável for $X = 1$, teremos realizado 1 **ensaio** (ou **tentativa**) até a obtenção do primeiro sucesso; se o valor for $X = 2$, teremos realizado 2 ensaios até a obtenção do primeiro sucesso, ...

De maneira geral, $X = k$ corresponde à realização de $\boldsymbol{k}$ **ensaios até o primeiro sucesso**.

Portanto, a probabilidade $P(X = k)$, equivale à probabilidade de se obter, **nesta ordem**, $\boldsymbol{k-1}$ **fracassos** e, na k-ésima tentativa, **1 sucesso**. Ou seja, temos a **interseção** desses eventos **independentes**.

Assim, considerando que a probabilidade de cada **fracasso** é $\boldsymbol{q}$ e a probabilidade do **sucesso** é $\boldsymbol{p}$, então a probabilidade $P(X = k)$ é o produto das probabilidades:

$$P(X = k) = \underbrace{\boldsymbol{q.q.q.q.\dots.q}}_{\boldsymbol{k-1}\text{ fracassos}}.\boldsymbol{p}$$

TOME NOTA!

$$\boxed{\boldsymbol{P(X = k) = q^{k-1}.p}}$$

Por exemplo, sabendo que a probabilidade de obtermos uma determinada face do dado (sucesso) é $\boldsymbol{p = \frac{1}{6}}$, e que a probabilidade de não a obter (fracasso) é $\boldsymbol{q = \frac{5}{6}}$, então a probabilidade de efetuarmos $\boldsymbol{k = 3}$ lançamentos do dado até obtermos o primeiro sucesso (ou seja, obtermos fracasso nas 2 primeiras tentativas e sucesso na 3ª) é:

$$P(X = 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$$

Observe que, conhecendo p (e, portanto, $q = 1 - p$), podemos calcular a **probabilidade** de qualquer valor de **X**, isto é, toda a distribuição de probabilidade da variável. Portanto, o **único parâmetro** da **distribuição geométrica** é a probabilidade de sucesso $\boldsymbol{p}$ e, assim, representamos essa distribuição por $X \sim Geo(p)$.

É importante pontuar que é sempre possível ter que realizar o experimento **mais uma vez** até obter o primeiro sucesso. Por exemplo, no lançamento de um dado, com $p = {}^{1}/_{6}$, seria **possível** termos que lançar o dado 10 vezes até obter a face desejada? Sim! A probabilidade dessa situação seria:

$$P(X = 10) = \left(\frac{5}{6}\right)^9 \times \frac{1}{6} \cong 3{,}2\%$$

E 50 vezes? Seria possível? Pode ser improvável, mas possível é, com a seguinte probabilidade:

$$P(X = 50) = q^{49}.p \cong 0{,}0018\%$$

Ou seja, **não há limite** para a variável com distribuição geométrica – ela é uma variável discreta, mas **infinita**. A variável pode assumir qualquer valor no intervalo $[1, \infty)$ – ela não pode ser menor que um, pois, no mínimo, faremos 1 lançamento para obter 1 sucesso.

Para calcular a probabilidade de a variável assumir um número **maior ou igual a k**, pela probabilidade complementar:

$$P(X \geq k) = 1 - P(X < k)$$

A probabilidade $P(X < k)$ pode ser calculada pela soma:

$$P(X < k) = P(X = 1) + P(X = 2) + \cdots + P(X = k - 1)$$

Por exemplo, a probabilidade de precisar de pelo menos 3 tentativas até obter determinada face do dado (sucesso) pode ser calculada como:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2)$$

A probabilidade de obter sucesso na 1ª tentativa é:

$$P(X = 1) = \left(\frac{5}{6}\right)^0 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

A probabilidade de obter sucesso na 2ª tentativa é:

$$P(X = 2) = \left(\frac{5}{6}\right)^1 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$

Assim, a probabilidade de precisar de pelo menos 3 tentativas é:

$$P(X \geq 3) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{5}{36} = \frac{36-6-5}{36} = \frac{25}{36}$$

Esperança e Variância

Vamos deixar a nossa imaginação fluir! No caso da moeda, sabendo que há 50% de chance de o resultado ser CARA, quantas vezes você espera lançar a moeda até obter a face CARA? ***2****, certo? (Se a sua intuição não concorda comigo, não se preocupe!)*

De modo geral, para uma variável geométrica com probabilidade de sucesso p, temos:

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{\boldsymbol{p}}}$$

E a variância é:

$$\boxed{V(X) = \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{p}^2}}$$

Para o exemplo do dado, o número esperado de lançamentos até obter determinada face, com $p = \frac{1}{6}$ é:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$E(X) = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 1 \times \frac{6}{1} = 6$$

E a variância, sabendo que $q = 1 - p = \frac{5}{6}$, é:

$$V(X) = \frac{q}{p^2}$$

$$V(X) = \frac{\frac{5}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{5}{6} \times \left(\frac{6}{1}\right)^2 = 5 \times 6 = 30$$

INDO MAIS FUNDO!

É possível **parametrizar** a variável geométrica de uma outra maneira: a variável Y pode corresponder ao **número de fracassos até o primeiro sucesso**.

Ou seja, sendo **Y = 3** temos **3 fracassos** até o primeiro sucesso (obtido na **4ª** tentativa).

Com essa parametrização a variável pode assumir os valores $Y = \{0,1,2,3,\dots\}$, incluindo o valor **zero**, uma vez que é possível obter sucesso na 1ª tentativa.

Nessa situação, a probabilidade de $Y = k$ é calculada como:

$$P(Y = k) = q^k . p$$

Ou seja, elevamos a probabilidade de fracasso a k, e não a $k - 1$, como antes.

Com essa parametrização, a **variância é a mesma**!

$$V(Y) = \frac{q}{p^2}$$

Mas a **esperança** é um pouco diferente:

$$E(Y) = \frac{q}{p}$$

Como as probabilidades dessa parametrização são q vezes as probabilidades da outra, a esperança dessa parametrização corresponde à esperança da outra parametrização, **multiplicada por q**.

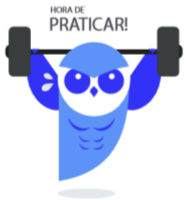
ESQUEMATIZANDO

Distribuição Geométrica (p)

Número de **Ensaios de Bernoulli até o primeiro sucesso**

$$P(X = k) = q^{k-1} . p$$

Esperança: $E(X) = \frac{1}{p}$; Variância: $V(X) = \frac{q}{p^2}$



(2018 – IPM) Marque a alternativa correta em relação ao modelo probabilístico que mais se adequa ao seguinte caso: lançamento de uma moeda honesta, contando o número de casos até a realização da primeira coroa:

a) Poisson.

b) Geométrica.

c) Hipergeométrica.

d) Uniforme Discreta.

e) Pareto.

Comentários:

Ensaios sucessivos e independentes de Bernoulli até o primeiro sucesso caracterizam a distribuição geométrica.

Gabarito: B

(2018 – IPM) Sabe-se que a distribuição geométrica pode ser interpretada como uma sequência de ensaios de Bernoulli, independentes, até a ocorrência do primeiro sucesso. Assinale a alternativa que indica corretamente a média e a variância, respectivamente, de uma distribuição geométrica cujo parâmetro é p = 0,64 e tendo como parametrização o número de ensaios de Bernoulli até se obter um sucesso.

a) 1,56; 0,78

b) 1,56; 0,88

c) 0,56; 0,88

d) 0,56; 0,78

e) 1,56; 0,68

Comentários:

A média de uma distribuição geométrica, com p = 0,64, é dada por:

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}64} \cong 1{,}56$$

E, sabendo que q = 1 – 0,64= 0,36, a variância é:

$$\sigma^2 = \frac{q}{p^2} = \frac{0{,}36}{(0{,}64)^2} \cong 0{,}88$$

Gabarito: B

(FGV/2017 – Prefeitura de Salvador) Abel tem uma moeda que dá "cara" com probabilidade 1/2 e Breno tem uma moeda que dá "cara" com probabilidade 1/3. Abel e Breno lançam suas respectivas moedas, alternadamente. O primeiro que obtiver "cara", ganha. Abel é o primeiro a lançar, e os lançamentos são todos independentes.

A probabilidade de Abel ganhar no seu terceiro lançamento é de:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{8}$

e) $\frac{1}{18}$

Comentários:

A probabilidade de Abel, que é o primeiro a lançar, ganhar em seu 3º lançamento corresponde a ele obter CARA exatamente em seu 3º lançamento E Breno obter COROA em seus 1º e 2º lançamentos.

O enunciado informou que a probabilidade de **Abel** obter CARA (sucesso) é $p = \frac{1}{2}$, logo a probabilidade de obter COROA (fracasso) é complementar $q = 1 - p = \frac{1}{2}$.

Assim, a probabilidade de **Abel** obter CARA (sucesso) exatamente no 3º lançamento corresponde a uma distribuição geométrica com $k = 3$:

$$P(X = k) = q^{k-1}.p$$

$$P(A) = P(X = 3) = q^2.p = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

O enunciado informou que a probabilidade de **Breno** obter CARA (sucesso) é $p = \frac{1}{3}$, logo a probabilidade de obter COROA (fracasso) é complementar $q = 1 - p = \frac{2}{3}$.

Assim, a probabilidade de **Breno** obter COROA no 1º **E** 2º lançamentos é:

$$P(B) = q.q = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

Portanto, a probabilidade de Abel ganhar no 3º lançamento corresponde à **interseção** desses 2 eventos (**produto** das probabilidades):

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{8} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{2 \times 9} = \frac{1}{18}$$

Gabarito: E

(CESPE/2016 – TCE/PA) Considere que Y seja uma variável aleatória geométrica que representa o número de erros cometidos por um atendente no preenchimento de formulários e que a função de probabilidade de Y seja definida por $P(Y = k) = 0,9 \times (0,1)^k$, em que k = 0, 1, 2, ... A partir dessas informações, julgue o item que se segue.

O desvio padrão da variável Y é inferior a 1.

Comentários:

Observa-se que a questão apresenta a segunda forma de parametrização da distribuição geométrica, da forma: $P(Y = k) = q^k.p$, com k = 0, 1, 2,..., sendo q = 0,1 e p = 0,9.

A variância (que não se altera com o tipo de parametrização) é dada por:

$$V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{0{,}1}{(0{,}9)^2} = \frac{0{,}1}{0{,}81} = \frac{10}{81}$$

O desvio padrão, raiz quadrada da variância, é dado por:

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{10}}{9} \cong 0{,}35$$

Gabarito: Certo.

(CESPE/2019 – TJ-AM/Analista Judiciário) É igual a 3/4 a probabilidade de determinado advogado conseguir decisão favorável a si em cada petição protocolada por ele na vara cível de certo tribunal. O plano desse advogado é protocolar, sequencialmente, 12 petições nessa vara cível durante o ano de 2020. Favoráveis ou não, as decisões do tribunal para petições são emitidas na mesma ordem cronológica em que são protocoladas e são sempre independentes entre si.

A partir dessa situação hipotética, julgue os próximos itens, considerando as variáveis aleatórias X e Y, em que X = quantidade de decisões emitidas pelo tribunal até que ocorra a primeira decisão não favorável ao advogado, e Y = quantidade de decisões emitidas pelo tribunal favoráveis ao advogado.

Espera-se que a primeira decisão desfavorável ao advogado ocorra somente depois de, pelo menos, quatro decisões favoráveis a ele.

Comentários:

Note que a questão pede o número de decisões favoráveis (fracasso) até a primeira decisão desfavorável (sucesso). Para essa parametrização, o valor esperado da distribuição geométrica é:

$$\boldsymbol{E(X) = \frac{q}{p}}$$

A probabilidade de fracasso (decisão favorável) é q = ¾, conforme enunciado.

Assim, a probabilidade de sucesso (decisão desfavorável) é complementar: p = 1 – q = ¼.

Logo, a esperança é:

$$\boldsymbol{E(X) = \frac{3/4}{1/4} = 3}$$

Ou seja, espera-se que haja 3 decisões favoráveis até a primeira decisão desfavorável.

Gabarito: Errado.

Propriedades

Existem 2 propriedades da distribuição geométrica que são moderadamente cobradas nas provas:

i) $\boldsymbol{P(X > t + s | X \geq s) = P(X > t)}$

Essa propriedade afirma que, **sabendo** que já houve $\boldsymbol{s}$ ou mais tentativas, então a probabilidade de haver mais que $\boldsymbol{t}$ tentativas **a mais**, até o primeiro sucesso, é igual à probabilidade de haver mais que $\boldsymbol{t}$ tentativas, até o primeiro sucesso, **independentemente** das tentativas anteriores.

Por exemplo, sabendo que eu já lancei a moeda mais que $\boldsymbol{s = 10}$ vezes e não obtive CARA (sucesso), então qual é a probabilidade de eu precisar lançar a moeda mais que $\boldsymbol{t = 4}$ vezes **a mais** até obter CARA? É igual à probabilidade de eu ter que lançar a moeda mais que $\boldsymbol{t = 4}$ vezes até obter CARA!

Essa propriedade está associada à "falta de memória" ou "falta de desgaste" da distribuição geométrica. Ela afirma que não importa quantas tentativas já foram feitas, as **probabilidades** dos **próximos** resultados se mantêm as **mesmas**.

ii) $\boldsymbol{\frac{P(X=k)}{P(X \geq k)} = p}$

Essa propriedade também decorre de uma probabilidade condicional, mas "disfarçada".

Considerando que $X = k$ pode ser considerado o resultado da **interseção** entre $X = k$ e $X \geq k$, então a fração à esquerda da igualdade pode ser escrita como:

$$\frac{P(X = k)}{P(X \geq k)} = \frac{P(X = k \cap X \geq k)}{P(X \geq k)} = P(X = k | X \geq k)$$

Ou seja, podemos reescrever essa propriedade da seguinte forma:

$$P(X = k | X \geq k) = p$$

Essa expressão significa o seguinte: **sabendo** que eu vou precisar de **pelo menos** $\boldsymbol{k}$ tentativas até o primeiro sucesso (isso porque já foram feitas $k - 1$ tentativas sem sucesso), então a probabilidade de obter sucesso na $\boldsymbol{k}$**-ésima tentativa** é igual a $\boldsymbol{p}$.

Ora, p é a probabilidade de obter sucesso em uma **tentativa qualquer**! Inclusive, na k-ésima tentativa! Ou seja, temos mais uma propriedade associada à falta de memória (ou de desgaste) da distribuição geométrica.

Mas, reorganizando a expressão original dessa segunda propriedade, temos:

$$\boxed{\boldsymbol{P(X \geq k) = \frac{P(X=k)}{p}}}$$

Com isso, podemos calcular $P(X \geq k)$ facilmente, em vez de fazer $P(X \geq k) = 1 - P(X < k)$, o que pode ser trabalhoso, dependendo do valor de k.

Por exemplo, para calcular a probabilidade de serem necessárias **pelo menos 3** tentativas até obter determinada face do dado pela primeira vez, sendo $p = \frac{1}{6}$ e $q = \frac{5}{6}$, **primeiro** calculamos a probabilidade de precisar de **k = 3 tentativas**:

$$P(X = 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 . \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{25}{216}$$

Assim, a probabilidade de precisar de **pelo menos** 3 tentativas é obtida dividindo esse resultado por $p = \frac{1}{6}$:

$$P(X \geq 3) = \frac{P(X = 3)}{p}$$

$$P(X \geq 3) = \frac{\frac{25}{216}}{\frac{1}{6}} = \frac{25}{216} \times 6 = \frac{25}{36}$$

Este é exatamente o resultado que obtivemos calculando $P(X \geq 3) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2)$!

De maneira **geral**, sabendo que $P(X = k) = q^{k-1}.p$, então podemos escrever a fórmula como:

$$P(X \geq k) = \frac{P(X = k)}{p} = \frac{q^{k-1}.p}{p}$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(X \geq k) = q^{k-1}}}$$

(FGV/2019 – DPE/RJ) Para que as pessoas que aguardam atendimento em uma repartição pública fiquem acomodadas com relativo conforto, é necessário que o recinto seja dimensionado à razão de um metro quadrado de espaço para cada cidadão em espera.

Se o número de pessoas que comparece, por dia, tem distribuição geométrica, com parâmetro p = 0,2, é correto afirmar que:

a) em função da distribuição do número de pessoas, o tamanho médio ideal do recinto deve ser de 16 metros quadrados;

b) a probabilidade de que uma sala de espera com 4 metros quadrados não seja confortável em certo dia é $(0,2).(0,8)^4$;

c) a probabilidade de que uma sala com 3 metros quadrados fique subutilizada em certo dia é igual a 0,448;

d) considerando uma sala de espera que tem 20 metros quadrados e o fato de que 18 pessoas já estão aguardando, a probabilidade de que atinja sua lotação exata é igual a 0,16;

e) a distribuição de probabilidade do tamanho (A) de sala ideal, a cada dia, é dada por P(A = x) = $(0,2)^2.(0,8)^{2x}$ para X = 1,2,3,....

Comentários:

Sabendo que X é uma variável que segue uma distribuição geométrica com parâmetro **p = 0,2** e que o recinto deve ter $1m^2$ para cada cidadão, então:

Em relação à alternativa A, o tamanho médio ideal corresponde à média E(X):

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,2} = 5$$

Sabendo que uma sala de 5 m^2 atende, em média, esse é o tamanho ideal. Logo, alternativa A está incorreta.

Em relação à alternativa B, a probabilidade de uma sala com $4m^2$ **não** ser adequada é igual à probabilidade de chegarem mais que 4 pessoas, ou seja, X $\geq$ 5:

$$P(X \geq k) = \frac{P(X = k)}{p} = q^{k-1}$$

$$P(X \geq 5) = (0,8)^4$$

A alternativa forneceu a resposta para $P(X = 5) = (0,8)^4.0,2$. Entretanto, essa é apenas uma das possibilidades de a sala não ser adequada. Portanto, a alternativa B está incorreta.

Em relação à alternativa C, para que uma sala de $3m^2$ fique **subutilizada**, é necessário ter X < 3:

$$P(X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = p + q.p = 0,2 + 0,8 \times 0,2 = 0,2 + 0,16 = 0,36$$

Em relação à alternativa D, sabendo que há 18 pessoas aguardando, então a probabilidade de atingir a lotação de $20m^2$ é igual à probabilidade de chegarem **2 pessoas a mais**, que é igual à probabilidade de chegarem X = 2 pessoas (propriedade da **falta de memória**):

$$P(X = 2) = 0,8 \times 0,2 = 0,16$$

A distribuição de probabilidade do tamanho da sala é igual à distribuição de probabilidade das pessoas que chegam, dada por:

$$P(X = k) = (0,8)^{k-1} \times 0,2 \; para \; k = \{1,2,3, \ldots\}$$

Gabarito: D.

DISTRIBUIÇÃO HIPERGEOMÉTRICA

A **Distribuição Hipergeométrica** considera uma população de elementos com dois possíveis atributos (**sucesso ou fracasso**), isto é, uma população com distribuição de **Bernoulli**, da qual será selecionada uma **amostra** de alguns elementos, assim como a **distribuição binomial**.

Porém, diferentemente desta, na distribuição hipergeométrica, a população é **finita** e a amostra é extraída **sem reposição**, ou seja, as extrações **não são independentes**.

Vamos chamar o tamanho da **amostra** de $\boldsymbol{n}$ e o tamanho da **população** de $\boldsymbol{N}$. Dessa população, $\boldsymbol{S}$ elementos possuem o atributo **sucesso** e, consequentemente, $\boldsymbol{N-S}$ elementos possuem o atributo **fracasso**.

Esses três parâmetros $\boldsymbol{N}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{n}$ caracterizam a distribuição geométrica e, assim, podemos representá-la como $X \sim Hgeo(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{n})$.

Por exemplo, vamos supor que haja $\boldsymbol{N = 10}$ peças, no total, das quais $\boldsymbol{S = 4}$ peças sejam defeituosas (sucesso), logo, haverá $\boldsymbol{N - S = 10 - 4 = 6}$ peças não defeituosas (fracasso).

Se formos extrair $\boldsymbol{n = 3}$ peças **sem reposição**, então o número de peças defeituosas (sucesso) encontradas na amostra seguirá uma **Distribuição Hipergeométrica**.

A probabilidade de haver $\boldsymbol{k}$ **elementos** com o atributo **sucesso** na amostra (e, consequentemente $\boldsymbol{n - k}$ com o atributo **fracasso**) é dada por:

$$\boxed{\boldsymbol{P(X = k) = \frac{\binom{S}{k}\binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}}}}$$

Vamos entender essa fórmula. Pela definição clássica de probabilidade, temos:

$$P(A) = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ total\ de\ casos} = \frac{n(A)}{n(U)}$$

No **denominador**, constam **todas** as maneiras de selecionarmos $\boldsymbol{n}$ **elementos**, dentre $\boldsymbol{N}$ (sem importância de ordem), ou seja, temos a combinação de $\boldsymbol{n}$ elementos, dentre $\boldsymbol{N}$:

$$n(U) = \binom{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{n}}$$

No **numerador**, temos, de um lado, a quantidade de maneiras de selecionar $\boldsymbol{k}$ **elementos** com o atributo **sucesso**, dentre $\boldsymbol{S}$ **elementos**, no total.

$$\binom{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{k}}$$

Ademais, temos a quantidade de maneiras de selecionar $\boldsymbol{n-k}$ **elementos** com o atributo **fracasso**, dentre $\boldsymbol{N-S}$, no total.

$$\binom{\boldsymbol{N-S}}{\boldsymbol{n-k}}$$

Em seguida, multiplicamos esses dois resultados para obter o número de casos **favoráveis** (princípio multiplicativo):

$$n(A) = \binom{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{k}} \times \binom{\boldsymbol{N-S}}{\boldsymbol{n-k}}$$

EXEMPLIFICANDO

Suponha que haja $\boldsymbol{N = 10}$ peças, no total, das quais $\boldsymbol{S = 4}$ peças sejam defeituosas. Se retirarmos $\boldsymbol{n = 3}$ peças sem reposição, a probabilidade de encontrar $\boldsymbol{k = 2}$ defeituosas é:

$$P(X = k) = \frac{\binom{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{k}}\binom{\boldsymbol{N-S}}{\boldsymbol{n-k}}}{\binom{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{n}}}$$

Vamos calcular cada combinação separadamente. No denominador, temos todas as maneiras de escolher $\boldsymbol{n = 3}$ peças, dentre $\boldsymbol{N = 10}$ peças, no total:

$$\binom{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{n}} = \binom{\boldsymbol{10}}{\boldsymbol{3}} = \frac{10!}{(10-3)!3!} = \frac{10\times9\times8\times7!}{7!\times3!} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 10 \times 3 \times 4 = 120$$

No numerador, temos, de um lado, a quantidade de maneiras de escolher $\boldsymbol{k = 2}$ defeituosas, dentre $\boldsymbol{S = 4}$ **defeituosas**, no total:

$$\binom{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{k}} = \binom{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{2}} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{4\times3\times2!}{2!\times2!} = \frac{4\times3}{2} = 2 \times 3 = 6$$

Ademais, temos a quantidade de maneiras de escolher $\boldsymbol{n - k = 3 - 2 = 1}$ peça **não** defeituosa, dentre $\boldsymbol{N - S = 10 - 4 = 6}$ **não defeituosas**, na população:

$$\binom{\boldsymbol{N-S}}{\boldsymbol{n-k}} = \binom{\boldsymbol{6}}{\boldsymbol{1}} = \frac{6!}{(6-1)!1!} = \frac{6\times5!}{5!\times1!} = 6$$

Pelo princípio multiplicativo, o numerador é:

$$\binom{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{k}}\binom{\boldsymbol{N-S}}{\boldsymbol{n-k}} = \boldsymbol{6 \times 6 = 36}$$

Assim, a probabilidade de retirar $\boldsymbol{k = 2}$ defeituosas é:

$$P(X = 2) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10} = 30\%$$

Em vez de aplicarmos essa fórmula, podemos calcular as probabilidades a cada extração. Para o nosso exemplo, podemos calcular a probabilidade de encontrar $\boldsymbol{k = 2}$ peças defeituosas, em uma amostra de tamanho $\boldsymbol{n = 3}$, da seguinte forma:

i) P_i: Probabilidade de retirarmos a **primeira** peça **não defeituosa**. Sabendo que há $\boldsymbol{N - S}$ = 6 peças não defeituosas dentre $\boldsymbol{N = 10}$ peças no total, então:

$$P_i = \frac{6}{10}$$

ii) P_{ii}: Probabilidade de retirarmos a **segunda** peça **defeituosa**, **dado** que a primeira peça foi **não defeituosa**. Sabendo que há $\boldsymbol{S = 4}$ peças **defeituosas** dentre **9 peças no total**, então:

$$P_{ii} = \frac{4}{9}$$

iii) P_{iii}: Probabilidade de retirarmos a **terceira** peça **defeituosa**, **dado** que foi retirada uma peça **não defeituosa** e outra **defeituosa**. Sabendo que restam **3** peças **defeituosas** dentre **8 peças no total**, então:

$$P_{iii} = \frac{3}{8}$$

Como todos os 3 eventos ocorrem (interseção), então pela Teoria da Probabilidade, **multiplicamos** as 3 probabilidades.

Porém, considerando que a ordem das extrações não precisa ser essa, devemos multiplicar o resultado pela quantidade de maneiras de "escolher" qual será a extração da peça defeituosa[1]. Como há 3 peças, no total, das quais 1 é não defeituosa, temos 3 possibilidades:

$$C_{3,1} = \frac{3!}{(3-1)! \times 1!} = \frac{3 \times 2!}{2! \times 1!} = 3$$

Assim, a probabilidade de encontrar $\boldsymbol{k = 2}$ peças defeituosas, é:

$$P(X = 2) = 3 \times \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{6}{10 \times 2} = \frac{3}{10} = 30\%$$

[1] Se preferir, você pode raciocinar que devemos multiplicar as probabilidades pelo número de maneiras de **reordenar** as extrações, o que corresponde à permutação das 3 peças, com repetição de 2 peças defeituosas:

$$P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$$

Esse raciocínio pode ser aplicado para qualquer valor de X, porém, é necessário se atentar ao fato de que a **ordem** das extrações **não importa** e, por isso, as probabilidades calculadas devem ser **multiplicadas** pela **combinação** correspondente. Além disso, para uma amostra grande, essa segunda maneira de calcular pode se tornar bastante trabalhosa.

INDO MAIS FUNDO!

Agora, vamos ver quais são os **limites mínimos** e **máximos** da variável hipergeométrica.

Limite Superior: maior número possível de sucessos na amostra

Se o número **total** de **sucessos** existentes $\boldsymbol{S}$ for **maior** que o tamanho da amostra $\boldsymbol{n}$, ou seja, se $\boldsymbol{n} < \boldsymbol{S}$, então o valor **máximo** que X pode assumir é $\boldsymbol{n}$.

Por exemplo, se houver $\boldsymbol{S = 4}$ peças defeituosas (sucesso) e o tamanho da amostra for de $\boldsymbol{n = 3}$, então o valor máximo de peças defeituosas selecionadas será $\boldsymbol{n = 3}$.

Caso contrário, ou seja, se o tamanho da amostra $\boldsymbol{n}$ for **maior** do que o número total de sucessos $\boldsymbol{S}$, então o valor **máximo** que X pode assumir é $\boldsymbol{S}$.

Por exemplo, havendo $\boldsymbol{S = 4}$ peças defeituosas e o tamanho da amostra for $\boldsymbol{n = 8}$ então o valor máximo de peças defeituosas que podem ser selecionadas será $\boldsymbol{S = 4}$.

Logo, o limite **superior** da variável é o **menor** valor entre $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{k \leq \min\{n, S\}}$$

Limite Inferior: menor número possível de sucessos na amostra

Se o número **total** de **fracassos** existentes, $\boldsymbol{N - S}$, foi **maior** que o tamanho da amostra $\boldsymbol{n}$, ou seja, se $\boldsymbol{n < N - S}$, então **todas** as peças selecionadas podem ter o atributo **fracasso** e, portanto, o número **mínimo** que X pode assumir é $\boldsymbol{0}$.

Por exemplo, vamos supor que haja $N = 10$ peças e $S = 4$ peças defeituosas (sucesso), logo, $N - S = 6$ peças não defeituosas (fracasso). Se o tamanho da amostra for de $n = 3$ peças, então **todas** as peças selecionadas podem ser não defeituosas (fracasso), ou seja, é possível obter $X = 0$ sucessos.

Caso contrário, ou seja, se o tamanho da amostra $\boldsymbol{n}$ for **maior** que o número **total** de **fracassos** existentes, então o número **máximo de fracassos** será o **total de fracassos existentes**, $\boldsymbol{N - S}$. Assim, o número **mínimo de sucessos** será a diferença entre o tamanho da amostra $\boldsymbol{n}$ e o máximo de fracassos $\boldsymbol{N - S}$:

$$\boldsymbol{n - (N - S)}$$

Por exemplo, supondo as mesmas $N - S = 6$ peças não defeituosas (fracasso), mas uma amostra de tamanho $n = 8$ peças, então o número máximo de peças não defeituosas (fracasso) que podem ser selecionadas é o número **total** existente, isto é, $N - S = 6$.

Assim, o número mínimo de peças defeituosas (sucesso) que podem ser selecionadas é a diferença entre o tamanho da amostra e esse limite:

$$n - (N - S) = 8 - 6 = 2$$

Pontue-se que essa diferença será **negativa** na **primeira** situação, em que há mais fracassos existentes do que elementos na amostra. Para o nosso exemplo com a amostra de tamanho $n = 3$ peças, essa diferença será:

$$n - (N - S) = 3 - 6 = -3$$

Dessa forma, o **limite inferior** da variável é o **maior valor** entre **0** e $\boldsymbol{n - (N - S)}$.

$$\boldsymbol{k \geq \max\{0, n - (N - S)\}}$$

Portanto, os **limites da variável** são:

$$\boldsymbol{\max\{0, n - (N - S)\} \leq k \leq \min\{n, S\}}$$

Esperança e Variância

Em relação ao valor esperado, vamos voltar ao nosso exemplo, em que $\boldsymbol{S = 4}$ peças são defeituosas, de um total de $\boldsymbol{N = 10}$ peças. Ou seja, a proporção de peças defeituosas é:

$$p = \frac{4}{10}$$

*Então, se eu selecionar 5 peças (metade da população), espero que 2 sejam defeituosas (metade da amostra), certo? Ou seja, espero que a proporção de defeito (sucesso) na amostra seja a **mesma** de toda a população.*

Isso significa que a esperança é dada pela seguinte fórmula:

$$\boxed{\boldsymbol{E(X) = n.p}}$$

Em que $\boldsymbol{p}$ é a proporção de sucessos na população:

$$\boldsymbol{p = \frac{S}{N}}$$

Para o nosso exemplo com $N = 10$ peças no total, das quais $S = 4$ peças são defeituosas, a proporção de sucessos na população é:

$$p = \frac{S}{N} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

Considerando que vamos retirar uma amostra de $n = 3$ peças, o valor esperado é:

$$E(X) = n.p = 3 \times 0{,}4 = 1{,}2$$

Observe que a esperança da distribuição hipergeométrica é a **mesma** da distribuição **binomial** (associada a seleções **independentes**)!

A **variância**, entretanto, fica um pouco diferente:

$$\boxed{V(X) = n.p.q.\frac{N-n}{N-1}}$$

Em que $q = 1 - p$.

Para o nosso exemplo, com $N = 10$ e $S = 4$, a proporção de fracassos na amostra é:

$$q = 1 - p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$

Então, sendo $n = 3$, a variância da variável é:

$$V(X) = n.p.q.\frac{N-n}{N-1} = 3 \times 0{,}4 \times 0{,}6 \times \frac{10-3}{10-1} = 3 \times 0{,}24 \times \frac{7}{9} = 0{,}08 \times 7 = 0{,}56$$

Observe que a variância da distribuição hipergeométrica é igual à da distribuição binomial, $n.p.q$, "corrigida" pelo fator $\frac{N-n}{N-1}$. Esse fator é chamado **fator de correção para população finita**.

Esse fator é sempre **menor que 1** (pois $N - n < N - 1$), logo, o fator de correção **diminui** a variância da distribuição.

Ele se **aproxima de 1** quando o tamanho da população N é **muito maior** que o tamanho da amostra n. Nessa situação, a distribuição **hipergeométrica** pode ser **aproximada** à distribuição **binomial**.

É por esse motivo que podemos utilizar a distribuição binomial, mesmo para amostras extraídas **com reposição**, quando a população é **suficientemente grande**.

Distribuição Hipergeométrica (N, S, n)

Extrações **sem reposição** de elementos com 2 atributos

$$P(X = k) = \frac{\binom{S}{k}\binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Esperança: $E(X) = n.p;$ Variância: $V(X) = n.p.q\frac{N-n}{N-1}$

Em que $\boldsymbol{p} = \frac{S}{N}$

(FCC/2015 – DPE/SP – *Adaptada*) Julgue o item a seguir:

A distribuição hipergeométrica é adequada quando consideramos extrações casuais feitas sem reposição de uma população dividida segundo dois extratos.

Comentários:

A distribuição hipergeométrica estuda as extrações, **sem** reposição, de uma população com 2 atributos (sucesso ou fracasso).

Resposta: Certo.

(FCC/2015 – TRT 3ª Região – *Adaptada*) Julgue o item a seguir:

A distribuição hipergeométrica é uma distribuição de probabilidade discreta que depende de 3 parâmetros.

Comentários:

A distribuição hipergeométrica depende dos parâmetros $\boldsymbol{N}$ (total da população), $\boldsymbol{S}$ (total de elementos com o atributo sucesso) e $\boldsymbol{n}$ (número de extrações).

Resposta: Certo.

(FGV/2022 – TJDFT) A Vara Cível de determinada comarca realiza 200 audiências por mês. No mês passado, em 120 audiências o autor era assistido pela Defensoria Pública e, nas outras 80 audiências restantes, o demandante esteve representado por advogado particular.

Sorteiam-se, aleatoriamente e sem reposição, 80 audiências desse último mês. O número mais provável de audiências em que atuam os defensores públicos é de:

a) 48

b) 49

c) 50

d) 51

e) 52

Comentários:

Nessa questão, a população de 200 audiências é segregada em assistência por Defensoria Pública (sucesso) e por advogado particular (fracasso).

Considerando que uma amostra de 80 audiências é extraída **sem** reposição, concluímos que as extrações são **dependentes**, o que caracteriza uma distribuição **hipergeométrica**.

A média (ou esperança) dessa distribuição é dada por:

$$E(X) = n \times p$$

A probabilidade de sucesso é a razão entre o número de audiências em que o autor é assistido pela Defensoria Pública (120) e o número total de audiências no mês (200):

$$p = \frac{120}{200} = 0{,}6$$

Sabendo que o tamanho da amostra é n = 80, a esperança é:

$$E(X) = 80 \times 0{,}6 = 48$$

Gabarito: A

(2013 – TRE/MG) Em uma população finita de tamanho N, onde existem k indivíduos com uma característica de interesse, ao se selecionar uma amostra aleatória de tamanho n sem reposição, o número de indivíduos com a característica na amostra (R) é uma variável aleatória com distribuição hipergeométrica. A probabilidade de se ter exatamente r indivíduos na amostra com a característica de interesse é dada por

$p_r = \frac{\binom{k}{r}\binom{N-k}{n-r}}{\binom{N}{n}}$, onde max (0, n – N + k) = r = min (k, n).

Analise:
I. Para N = 100, k = 20, n = 10 e r = 3, E(R) = 2 e Var(R) = 144/99.

II. Para N = 100, k = 20, n = 5 e r = 3, E(R) = 1 e Var(R) = 8/10.

III. Para N = 10000, k = 2000, n = 100 e r = 3, E(R) = 20 e Var(R) = 15,84.

IV. Para N = 10000, k = 1000, n = 100 e r = 3, E(R) = 10 e Var(R) ≈ 9.

V. Para N = 10000, k = 2000, n = 10 e r = 0, P(R = 0) ≈ 0,1074.

Estão corretas apenas as alternativas

a) I e II.

b) II e IV.

c) I, III e IV.

d) I, III, IV e V.

e) II, III, IV e V

Comentários:

Em relação à afirmativa I, o total de elementos da população é $\boldsymbol{N = 100}$, o número de sucessos da população (que chamamos de $\boldsymbol{S}$) é $\boldsymbol{k = 20}$, então a **proporção** de sucessos é:

$$p = \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{100}} = 0,2$$

Sendo $\boldsymbol{n = 10}$ o tamanho da amostra, então a esperança é:

$$E(X) = n.p = 10 \times 0,2 = 2$$

Sabendo que a proporção de fracassos é q = 1 – p = 0,8, então a variância é:

$$V(X) = n.p.q.\frac{N-n}{N-1} = 10 \times 0,2 \times 0,8 \times \frac{90}{99} = \frac{144}{99}$$

Portanto, a afirmativa I está **correta**.

Em relação à afirmativa II, o total de elementos e o número de sucessos da população são os mesmos, assim $p = \frac{20}{100} = 0,2$ e q = 1 – p = 0,8.

Agora, a amostra tem tamanho $\boldsymbol{n = 5}$, então a esperança é:

$$E(X) = n.p = 5 \times 0,2 = 1$$

E a variância é:

$$V(X) = n.p.q.\frac{N-n}{N-1} = 5 \times 0,2 \times 0,8 \times \frac{95}{99} = \frac{76}{99} = 0,7676\ldots$$

Portanto, a afirmativa II está **errada**.

Em relação à afirmativa III, o total de elementos da população é $\boldsymbol{N = 10.000}$ e o número de sucessos da população é $\boldsymbol{k\ (ou\ S) = 2.000}$. Assim, a proporção de sucessos é:

$$p = \frac{\mathbf{2.000}}{\mathbf{10.000}} = 0,2$$

E a proporção de fracassos é q = 1 – p = 0,8. Sendo o tamanho da amostra $\boldsymbol{n = 100}$, então, a esperança é:

$$E(X) = n.p = 100 \times 0,2 = 20$$

E a variância é:

$$V(X) = n.p.q.\frac{N-n}{N-1} = 100 \times 0,2 \times 0,8 \times \frac{9900}{9999} = \frac{16 \times 1100}{1111} \cong 15,84$$

Portanto, a afirmativa III está **correta**.

Em relação à afirmativa IV, o total de elementos é $\boldsymbol{N = 10.000}$ e o número de sucessos da população é $\boldsymbol{k\ (ou\ S) = 1.000}$. Assim, a proporção de sucessos é:

$$p = \frac{\mathbf{1.000}}{\mathbf{10.000}} = 0{,}1$$

E q = 1 – p = 0,9. Sendo o tamanho da amostra $\boldsymbol{n = 100}$, a esperança é:

$$E(X) = n.p = 100 \times 0{,}1 = 10$$

E a variância é:

$$V(X) = n.p.q.\frac{N-n}{N-1} = 100 \times 0{,}1 \times 0{,}9 \times \frac{9900}{9999} = \frac{9 \times 1100}{1111} \cong 8{,}91 \cong 9$$

Portanto, a afirmativa IV está **correta**.

Em relação à afirmativa V, temos $\boldsymbol{N = 10.000}$, $\boldsymbol{k\ (ou\ S) = 2.000}$ e $\boldsymbol{n = 10}$.

Para calcular o valor **exato** da probabilidade de **não** obter sucesso na amostra P(R = 0), faríamos:

$$P(X = r) = \frac{\binom{k}{r}\binom{N-k}{n-r}}{\binom{N}{n}}$$

▪

$$P(X = 0) = \frac{\binom{2.000}{0}\binom{8.000}{10}}{\binom{10.000}{10}} = \frac{\binom{8.000}{10}}{\binom{10.000}{10}}$$

O que é bastante trabalhoso. Porém, como o tamanho da amostra n = 10 é **muito menor** que o tamanho da população N = 10.000, podemos **aproximar** essa distribuição a uma **binomial**. A proporção de sucessos na amostra é:

$$p = \frac{2.000}{10.000} = 0{,}2$$

E de fracassos é q = 1 – p = 0,8. Assim, a probabilidade de não obter sucessos na amostra é aproximadamente:

$$P(X=0) = q^{10} = (0{,}8)^{10} \cong 0{,}1074$$

Portanto, a afirmativa V está correta.

Gabarito: D.

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

A **Distribuição de Poisson** descreve a probabilidade de **ocorrências** aleatórias em determinado **intervalo**, como o **tempo**, mas com uma **taxa média constante**.

O número de ligações recebidas **por hora** ou o número de clientes que comparecem **diariamente** em um estabelecimento são exemplos em que podemos aplicar a distribuição de Poisson.

Nessas situações, a probabilidade de o evento ocorrer em um instante específico (determinado segundo, por exemplo) é **tão baixa**, que **não** é possível ocorrer **mais de um** evento ao **mesmo tempo**. Por isso, dizemos que a probabilidade de ocorrência $\boldsymbol{p}$ em uma distribuição de Poisson é muito **pequena** (tende a zero).

Por outro lado, o tamanho da amostra $\boldsymbol{n}$, que corresponde ao "número de instantes" no intervalo desejado, como uma hora ou um dia, é muito **grande** (tende a infinito). Essa é outra característica importante da distribuição de Poisson.

Além disso, as ocorrências devem ser **independentes** uma das outras e devem assumir apenas números **inteiros** (não é possível receber meia ligação ou chegar meio cliente), assim como na **distribuição binomial**. Na verdade, a distribuição de Poisson é desenvolvida a partir da distribuição binomial, considerando que o tamanho da amostra $\boldsymbol{n}$ tende ao **infinito** e a probabilidade de sucesso $\boldsymbol{p}$ tende a **zero**.

A Distribuição de Poisson também pode ser utilizada como uma **aproximação** da distribuição binomial, quando o tamanho da amostra $\boldsymbol{n}$ for **muito grande** e probabilidade de sucesso $\boldsymbol{p}$ for **muito pequena**. Nesses casos, o cálculo das probabilidades pela distribuição binomial pode se tornar muito trabalhoso.

Vamos supor que uma indústria farmacêutica apresenta defeito em $\boldsymbol{p} = \mathbf{1}\%$ dos medicamentos e que a amostra a ser verificada contém **n = 400** medicamentos.

Como calcularíamos a probabilidade de encontrar 5 medicamentos defeituosos, utilizando a distribuição binomial?

$$P(X = 100) = C_{400,5} \times 0{,}01^5 \times 0{,}99^{395}$$

Que seria extremamente trabalhoso.

Em uma **distribuição binomial**, a média (ou esperança) é:

$$E(X_{Bi}) = n.p$$

Na distribuição de Poisson, denotamos essa média por $\boldsymbol{\lambda}$ (chamamos essa letra de **lambda**), que é o único **parâmetro** da distribuição. Assim, nos referimos à distribuição de Poisson como $X \sim Po(\lambda)$.

$$\boldsymbol{\lambda = n.p}$$

Para o nosso exemplo, em que a probabilidade de defeito é p = 1% = 0,01 e a amostra contém n = 400 medicamentos, o valor de $\boldsymbol{\lambda}$ é:

$$\lambda = n.p = 400 \times 0{,}01 = 4$$

Dessa forma, a média (ou esperança) da distribuição de Poisson é igual ao parâmetro $\boldsymbol{\lambda}$, que representa o número médio de ocorrências (**taxa de ocorrência**) em determinado intervalo:

$$\boldsymbol{E(X) = \lambda}$$

Essa taxa de ocorrência deve ser **constante** no intervalo considerado (assim como a probabilidade de sucesso da distribuição binomial deve ser a mesma para todos os ensaios).

Na **distribuição binomial**, a média (ou esperança) é:

$$V(X_B) = n.p.q$$

Considerando que p tende a 0, então $\boldsymbol{q} = 1 - p$ **tende a 1**.

Desse modo, a variância da distribuição de Poisson é dada por:

$$V(X) = n.p$$

Como definimos $\lambda = n.p$, a variância também é igual ao parâmetro:

$$\boldsymbol{V(X) = \lambda}$$

A probabilidade de ocorrerem $\boldsymbol{k}$ **eventos** no intervalo determinado, na distribuição de Poisson, é dada por:

$$\boldsymbol{P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!}}$$

Em que $\boldsymbol{e} \cong \mathbf{2,718}$ (número neperiano).

EXEMPLIFICANDO

Vamos supor o exemplo inicial da indústria farmacêutica, que produz $p = 1\%$ de medicamentos defeituosos e que será extraída uma amostra com $n = 400$ peças.

Vimos que o parâmetro da distribuição de Poisson é $\lambda = 400 \times 1\% = 4$, que equivale à sua média e variância.

Com base no parâmetro, podemos calcular a probabilidade de haver, por exemplo, $k = 1$ medicamento com defeito na amostra:

$$\boldsymbol{P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{k}}{k!}}$$

$$P(X = 1) = \frac{e^{-4}.4^{1}}{1!} = 4.e^{-4}$$

Se essa fosse uma questão de prova, a banca poderia apresentar a resposta dessa forma, ou então informar que $e^{-4} \cong 0{,}018$. Assim, seria possível calcular:

$$P(X = 1) \cong 4 \times 0{,}018 = 0{,}072.$$

Poderíamos calcular, ainda, a probabilidade de encontrar **mais de 1** medicamento com defeito, que pode ser calculada pelo seu complemento:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

Como já temos $P(X = 1)$, precisamos calcular $P(X = 0)$:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-4}.4^{0}}{0!} = \frac{e^{-4}.1}{1} = e^{-4}$$

Logo:

$$P(X > 1) = 1 - e^{-4} - 4.e^{-4} = 1 - 5.e^{-4} \cong 1 - 5 \times 0{,}018 = 1 - 0{,}09 = 0{,}91$$

Sim, você precisa memorizar a fórmula da probabilidade de Poisson, mas eu vou tentar te ajudar. Você precisa preencher os 5 espaços indicados abaixo:

$$\boldsymbol{P(X=k)=\frac{\square^{\square}.\square^{\square}}{\square}}$$

No 1º espaço, você preenche o ***e***:

$$\boldsymbol{P(X=k)=\frac{e^{\square}.\square^{\square}}{\square}}$$

Agora, você vai preencher o lambda $\boldsymbol{\lambda}$ (para lembrar, chame-o de **L**) no 2º e 3º espaços. No 2º espaço (acima do ***e***), acrescente um sinal de menos (**–**):

$$\boldsymbol{P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{\square}}{\square}}$$

Nos últimos espaços, preencha o ***k*.** No último espaço (denominador), acrescente o fatorial (**!**):

$$\boldsymbol{P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{k}}{k!}}$$

Pronto! Então, não se esqueça da sequência **ELK**, de colocar um "**–**" no expoente e um "**!**" no denominador.

Assim como para a distribuição binomial, o valor de $X=k$, varia entre 0 e o tamanho da amostra $n\to\infty$.

Ressalte-se, ainda, que o coeficiente de assimetria b_1 e de curtose b_2 para essa distribuição são:

$$b_1=b_2=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

Sabendo que $\lambda>0$, então esses coeficientes são **positivos**.

ESQUEMATIZANDO

Distribuição de Poisson (λ)

Aproximação da Distribuição Binomial para $n \to \infty$ e $p \to 0$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{k}}{k!}$$

Esperança: $E(X) = \lambda$; Variância: $V(X) = \lambda$

HORA DE PRATICAR!

(2011 – Transpetro) Uma distribuição discreta de probabilidade que fornece a frequência de ocorrência de certos tipos de eventos aleatórios, podendo ser usada como aproximação da distribuição binomial, corresponde à distribuição

a) geométrica

b) hipergeométrica

c) normal

d) uniforme

e) de Poisson

Comentários:

A distribuição que se aproxima à distribuição binomial, para n muito grande, com parâmetro λ, isto é, a taxa (ou frequência) de ocorrência é a distribuição de Poisson.

Gabarito: E

(2019 – IDAM) Sobre a distribuição de Poisson P(X=k; λ) que representa a distribuição de frequências da variável aleatória X, analise as afirmativas abaixo, dê valores Verdadeiro (V) ou Falso (F).

( ) $P(X = k; \lambda) = \lim_{N \to \infty} Binomial\ (X = k; N, p = \frac{\lambda}{N})$

( ) A distribuição de Poisson é útil na modelagem de processos de natureza binomial onde o evento tem probabilidade de ocorrência (binomial), p, pequena (ou seja, tendendo a zero), porém o valor esperado da variável aleatória fica finito devido a ser grande a quantidade da amostragem (testes).

( ) O parâmetro λ corresponde ao mesmo tempo ao valor esperado e à variância da distribuição de Poisson, P(X=k; λ).

Assinale a alternativa que apresenta a sequência correta de cima para baixo.

a) F, F, F

b) F, V, V

c) V, F, V

d) V, V, V

Comentários:

Em relação à primeira afirmativa, sabemos que a distribuição de Poisson corresponde à distribuição binomial para $n \to \infty$. Sabemos, ainda, que $\lambda = n.p$, logo:

$$p = \frac{\lambda}{N}$$

Portanto, a primeira afirmativa é verdadeira.

Em relação à segunda afirmativa, sabemos que a distribuição de Poisson é utilizada como aproximação da distribuição binomial para amostras grandes (n) e probabilidade pequena (p), tal que o produto n.p, isto é, a esperança da distribuição, é um valor finito. Portanto, a segunda afirmativa é verdadeira.

Na distribuição de Poisson, temos E(X) = Var(X) = λ. Portanto, a terceira afirmativa é verdadeira.

Gabarito: D

(2019 – IF-PA – *Adaptada*) Se uma variável X tem distribuição de Poisson com parâmetro Θ, tal que X~Poisson(Θ), pode-se afirmar que:

a) E(X) = Θ e Var(X) = 1/Θ

b) E(X)= 1 – Θ e Var(X)= Θ

c) E(X) = Θ e Var(X)= Θ

d) E(X) = Θ/2 e Var(X) = Θ^2/12

e) E(X) = Θ e Var(X) = Θ^2/12

Comentários:

Na distribuição de Poisson, sabemos que E(X) = Var(X) = λ. O enunciado chamou o parâmetro de $\lambda = \Theta$, então:

$$E(X) = Var(X) = \Theta$$

Gabarito: C

(CESPE/2018 – ABIN/Oficial Técnico) A quantidade diária de emails indesejados recebidos por um atendente é uma variável aleatória X que segue distribuição de Poisson com média e variância desconhecidas. Para estimá-las, retirou-se dessa distribuição uma amostra aleatória simples de tamanho quatro, cujos valores observados foram 10, 4, 2 e 4. Com relação a essa situação hipotética, julgue o seguinte item.

Se P (X = 0) representa a probabilidade de esse atendente não receber emails indesejados em determinado dia, estima-se que tal probabilidade seja nula.

Comentários:

Para a distribuição de Poisson, a probabilidade P(X = 0) é dada por:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!}$$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^0}{0!} = \frac{e^{-\lambda}.1}{1} = e^{-\lambda} \neq 0$$

Gabarito: Errado.

(FCC/2014 – TRT 13ª Região) Suponha que o número de processos trabalhistas que chegam, por dia, a um determinado tribunal regional do trabalho seja uma variável aleatória com distribuição de Poisson com média igual a λ. Sabe-se que a probabilidade de chegarem 2 processos por dia é igual a oito vezes a probabilidade de não chegar nenhum. Nessas condições, a probabilidade de, em um determinado dia, chegarem pelo menos 2 processos é igual a

Dados: $e^{-2} = 0{,}135$; $e^{-4} = 0{,}018$

a) 0,91

b) 0,36

c) 0,93

d) 0,46

e) 0,85

Comentários:

O enunciado informa que a probabilidade de chegar 2 processos é 8 vezes a probabilidade de não chegar processo algum:

P(X = 2) = 8.P(X = 0)

Considerando $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, então:

$$P(X = 2) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^2}{2!} = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^2}{2}$$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^0}{0!} = \frac{e^{-\lambda}.1}{1} = e^{-\lambda}$$

Substituindo esses resultados na equação, temos:

$$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2} = 8 \times e^{-\lambda}$$

Dividindo ambos os lados da equação por $e^{-\lambda}$, temos:

$$\lambda^2 = 16$$

Sabendo que λ é positivo (pois, $\lambda = n.p$, com $n \geq 0$ e $p \geq 0$), então:

$$\lambda = 4$$

Nessas condições, a probabilidade de chegarem **pelo menos 2** processos é (com as aproximações fornecidas pelo enunciado):

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$P(X = 0) = e^{-\lambda} = e^{-4} \cong 0{,}018$$

$$P(X = 1) = \frac{e^{-4}.4^1}{1!} = 4.e^{-4} \cong 0{,}072$$

Portanto:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - 0{,}018 - 0{,}072 = 1 - 0{,}09 = 0{,}91$$

Gabarito: A.

Algumas questões informam a taxa de ocorrência λ para determinado intervalo (por dia, por exemplo), e pedem a probabilidade associada a um intervalo **diferente** (por semana, por exemplo). Nessa situação, é necessário calcular a taxa de ocorrência para o intervalo desejado, mantendo-se a **proporção constante**:

$$\lambda_1 = n_1 \times p \rightarrow p = \frac{\lambda_1}{n_1}$$

$$\lambda_2 = n_2 \times p = n_2 \times \frac{\lambda_1}{n_1}$$

$$\boxed{\lambda_2 = \lambda_1 \times \frac{n_2}{n_1}}$$

Em outras palavras, multiplicamos a taxa de ocorrência λ_1 fornecida pela razão entre o intervalo desejado e o intervalo fornecido $\frac{n_2}{n_1}$.

Vamos supor que o número de clientes que chegam em um estabelecimento siga uma distribuição de Poisson com média $\lambda_1 = 10$ clientes por **dia**. Para calcular a probabilidade de chegarem 100 clientes em uma **semana**, por exemplo, precisamos primeiro calcular o número médio de clientes que chegam em 1 semana λ_2, considerando que 1 semana = 5 dias úteis:

$$\lambda_2 = 10 \times \frac{5}{1} = 50$$

Para calcular a probabilidade de chegar 1 cliente em uma hora, primeiro calculamos o número médio de clientes que chegam em 1 hora, considerando que 1 dia = 8 horas úteis:

$$\lambda_3 = 10 \times \frac{1}{8} = 1{,}25$$

Podemos, ainda, calcular o **tempo médio entre as ocorrências**, dividindo o **intervalo** pela **taxa de ocorrência**:

$$t = \frac{n}{\lambda}$$

Por exemplo, considerando que chegam em média $\lambda = 10$ clientes ao longo de 8 horas, o tempo médio **entre** um cliente e outro é:

$$t = \frac{8}{10} = 0{,}8\ hora$$

Por fim, é importante ressaltar que é possível **somar** variáveis com distribuição de Poisson.

Sendo λ_X o parâmetro da distribuição da variável X e λ_Y o parâmetro da distribuição da variável Y, então a variável $S = X + Y$ terá **distribuição de Poisson** com parâmetro:

$$\lambda_S = \lambda_X + \lambda_Y$$

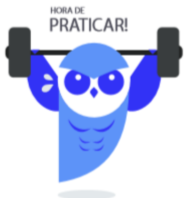
Por exemplo, suponha que a empresa X receba, em média, $\lambda_X = 5$ novos clientes por mês e que a empresa Y receba, em média, $\lambda_Y = 3$ novos clientes por mês, de modo que ambos sigam distribuições de Poisson. Se essas empresas se juntarem, formando a empresa S, então, se as taxas de novos clientes permanecerem as mesmas, a nova empresa receberá a seguinte taxa de novos clientes por mês, que também seguirá uma distribuição de Poisson:

$$\lambda_S = \lambda_X + \lambda_Y = 5 + 3 = 8$$

Também podemos **multiplicar** esses parâmetros por **constantes**, que o resultado também seguirá uma **distribuição de Poisson**.

No nosso exemplo, havendo uma empresa Z que receba $\lambda_Z = 10$ novos clientes por mês, sendo que metade dela se juntará às demais empresas, então a nova empresa N formada receberá a seguinte taxa de novos clientes por mês, que também seguirá uma distribuição de Poisson:

$$\lambda_N = \lambda_X + \lambda_Y + 0{,}5.\lambda_Z = 5 + 3 + 0{,}5 \times 10 = 13$$



(CESPE/2010 – MPU/Analista) Uma empresa possui um serviço de atendimento ao consumidor (SAC). Diariamente, um atendente registra, em uma folha de papel, as chamadas recebidas. Cada folha de registro do atendente do SAC permite o registro de até 20 chamadas. O atendente efetua os registros de forma sequencial, anotando, para cada chamada, se houve reclamação.

De acordo com os dados históricos, sabe-se que, a cada 20 chamadas, a probabilidade de se registrar exatamente uma reclamação é constante e igual a 0,05. Sabe-se também que o número médio diário de reclamações registradas pelo SAC é igual a 1.

Com base nessas informações e considerando 2,71 como valor aproximado para o número e, base do logaritmo natural, julgue o seguinte item.

Considere que o número de reclamações registradas pelo SAC, X(t), em um intervalo de tempo t, siga um processo de Poisson e que X(5) represente o número de reclamações registradas em um intervalo de 5 dias úteis. Nesse caso, a probabilidade de não haver reclamações registradas em um intervalo de 5 dias úteis é igual a e^{-5}.

Comentários:

O enunciado informa que a média é de $\lambda_1 = 1$ reclamação por dia. Assim, para um intervalo de 5 dias, a taxa de ocorrência é:

$$\lambda_2 = \lambda_1 \times \frac{n_2}{n_1} = 1 \times \frac{5}{1} = 5$$

Para a distribuição de Poisson, a probabilidade P(X = 0), com $\lambda = 5$, é dada por:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!}$$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-5}.5^0}{0!} = \frac{e^{-5}.1}{1} = e^{-5}$$

Gabarito: Certo.

▪

(FGV/2022 – SEFAZ/AM) Suponha que o número de carros que chega a uma praça de pedágio siga uma distribuição Poisson, com uma média de 2 carros por minuto.

A probabilidade de que, num intervalo de 2 minutos, passe no máximo um carro é aproximadamente igual a

[use e^{-4} = 0,0183]

a) 0,09

b) 0,12

c) 0,17

d) 0,20

e) 0,22

Comentários:

O enunciado informa que a média é de 2 carros por minuto e pede a probabilidade associada a um tempo de 2 minutos. O primeiro passo é calcular a média de carros **a cada 2 minutos**:

$$\lambda_2 = \lambda_1 \times \frac{n_2}{n_1} = 2 \times \frac{2}{1} = 4$$

A probabilidade de passar no máximo um carro, ou seja, 0 ou 1 carro é a soma:

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

A probabilidade da distribuição de Poisson é dada por:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^k}{k!}$$

Para k = 0, sendo $\lambda = 4$, temos:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-4} \times 4^0}{0!} = \frac{e^{-4} \times 1}{1} = e^{-4}$$

Para k = 1, temos:

$$P(X = 1) = \frac{e^{-4} \times 4^1}{1!} = \frac{e^{-4} \times 4}{1} = 4.e^{-4}$$

E a soma é:

$$P(X \leq 1) = e^{-4} + 4.e^{-4} = 5.e^{-4}$$

Sendo $e^{-4} = 0{,}0183$, temos:

$$P(X \leq 1) = 5 \times 0{,}0183 = 0{,}0915 \cong 0{,}09$$

Gabarito: A

(FCC/2015 – TRT 3ª Região) A comissão de erradicação do trabalho infantil de um determinado Tribunal Regional do Trabalho analisa, por meio de seu canal de denúncias, casos de desrespeito à legislação que regula o trabalho de menores de 18 anos. Suponha que a variável X, que representa o número de denúncias mensais que são recebidas, tem distribuição de Poisson com média 9. Nessas condições, a probabilidade de serem recebidas 2 ou 3 denúncias em um período de 10 dias é igual a

Dados:
$e^{-1} = 0{,}37$
$e^{-2} = 0{,}14$
$e^{-3} = 0{,}05$

a) 0,450

b) 0,472

c) 0,230

d) 0,375

e) 0,250

Comentários:

Sabendo que a variável tem distribuição de Poisson, com média de 9 denúncias por mês, ou seja, em um período n_1 = 30 dias, temos $\lambda_1 = 9$, em um período de n_2 = 10 dias, temos:

$$\lambda_2 = \lambda_1 \times \frac{n_2}{n_1} = 9 \times \frac{10}{30} = 3$$

Ademais, a probabilidade de receber X = 2 **ou** X = 3 denúncias corresponde a **união** dessas probabilidades. Como são eventos mutuamente exclusivos, a probabilidade da união corresponde à **soma** das probabilidades:

P(X = 2 OU X = 3) = P(X = 2) + P(X = 3)

Pela fórmula de Poisson, temos:

$$P(X=2)=\frac{e^{-3}.3^2}{2!}=4{,}5\times 0{,}05=0{,}225$$

$$P(X=3)=\frac{e^{-3}.3^3}{3!}=4{,}5\times 0{,}05=0{,}225$$

Logo:

P(X = 2 OU X = 3) = 0,225 + 0,225 = 0,45

Gabarito: A.

(CESPE/2018 – TCE-PA/Auditor de Controle Externo) O número de acidentes de trabalho em determinada obra pública no mês k segue uma distribuição de Poisson W_k com média igual a 1 acidente por mês. Considerando uma amostra aleatória simples W_1, W_2, ..., W_n, julgue o item a seguir, acerca da soma $W_1 + W_2 + ... + W_n$.

O total de acidentes segue distribuição de Poisson com média igual a n.

Comentários:

A soma de variáveis com distribuição de Poisson também segue uma distribuição de Poisson. A média (esperança) da distribuição $W_1 + W_2 + ... + W_n$ pode ser calculada pela propriedade aditiva da esperança:

$$E(W_1+W_2+\dots+W_n)=E(W_1)+E(W_2)+\dots+E(W_n)$$

O enunciado informa que as médias são todas iguais a 1. Sabendo que há n variáveis W_i, temos:

$$E(W_1+W_2+\dots+W_n)=\underbrace{1+1+\dots+1}_{n\text{ vezes}}=1\times n=n$$

Gabarito: Certo.

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL NEGATIVA

A **distribuição binomial negativa** ou **distribuição de Pascal** estuda o **número de ensaios** de Bernoulli necessários para se obter $\boldsymbol{k}$ **sucessos**.

Enquanto a **binomial** (original) estuda o número de **sucessos** $(X = k)$ obtidos em $\boldsymbol{n}$ **ensaios** de Bernoulli, com $\boldsymbol{n}$ **fixo**; a **binomial negativa** estuda o número de **ensaios** $(X = x)$ necessários para se obter $\boldsymbol{k}$ **sucessos**, com $\boldsymbol{k}$ **fixo**.

Vamos utilizar um exemplo para ilustrar melhor essa diferença. Vamos supor que o ensaio de Bernoulli seja o lançamento de uma moeda, e que o sucesso corresponda à face CARA.

Se definirmos que vamos jogar a moeda **10 vezes** para estudar **quantos sucessos** obtemos, temos uma distribuição **binomial** (original); se definirmos que vamos jogar a moeda até obtermos **5 sucessos**, temos uma distribuição **binomial negativa**.

A probabilidade de realizarmos $X = n$ ensaios para obter k sucessos é dada por:

$$P(X = x) = \binom{\boldsymbol{x} - \mathbf{1}}{\boldsymbol{k} - \mathbf{1}} p^{\boldsymbol{k}}.q^{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k}}$$

Para o nosso exemplo de lançamento da moeda, a probabilidade de obter CARA (sucesso) em **um único** lançamento é $p = 0{,}5$ e de obter COROA é $q = 1 - p = 0{,}5$. Assim, a probabilidade de obtermos $\boldsymbol{k = 5}$ **sucessos** em $\boldsymbol{x = 8}$ lançamentos é:

$$P(X = 8) = \binom{8 - 1}{5 - 1} 0{,}5^5.0{,}5^{8-5} = \binom{7}{4} 0{,}5^5.0{,}5^3 = \binom{7}{4} 0{,}5^8$$

A combinação $\binom{7}{4}$ é igual a:

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 7 \times 5 = 35$$

Então, a probabilidade $P(X = 8)$ é:

$$P(X = 8) = 35 \times 0{,}5^8 \cong 0{,}137$$

O que muda, em relação à fórmula da binomial (original), são os parâmetros da **combinação**: enquanto na binomial (original) a combinação é de $\binom{n}{k}$, na binomial negativa, a combinação é de $\binom{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}$.

Para o nosso exemplo, em vez de termos a combinação $\binom{n}{k} = \binom{8}{5}$, como seria o caso para a distribuição **binomial**, temos a combinação $\binom{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}} = \binom{7}{4}$.

Essa diferença ocorre porque, na distribuição binomial negativa, a **última tentativa** será necessariamente o **$\boldsymbol{k}$-ésimo sucesso** (para o nosso exemplo, a 8ª tentativa será o 5º sucesso); caso contrário teríamos parado com as tentativas antes.

Por isso, precisamos escolher, dentre as **demais $\boldsymbol{x}-\mathbf{1}=7$ tentativas**, quais serão os $\boldsymbol{k}-\mathbf{1}=4$ **sucessos**.

Os parâmetros da distribuição binomial negativa são a probabilidade de sucesso p e o número de sucessos k. Assim, podemos representar essa distribuição como $X \sim BN(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{k})$.

A variável com distribuição binomial negativa assume os valores $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}+\mathbf{1}, \boldsymbol{k}+\mathbf{2}, \ldots$

Ela é no mínimo k (pois só é possível obter k sucessos, com no mínimo k tentativas) e não tem limite superior (é sempre possível ter que tentar mais uma vez até obter o k-ésimo sucesso). Para o nosso exemplo, em que $k = 5$, a variável pode assumir os valores $x = 5, 6, 7, \ldots$, sem limite superior.

Também podemos utilizar a binomial negativa para calcular a probabilidade de extrairmos uma **amostra de tamanho $\boldsymbol{x}$**, de uma população com 2 atributos (sucesso e fracasso), para encontrar $\boldsymbol{k}$ **sucessos na amostra**.

EXEMPLIFICANDO

Vamos supor que em uma fábrica, 20% das peças apresentem defeito. Para calcular a probabilidade de inspecionarmos exatamente $\boldsymbol{x}=\mathbf{4}$ peças, para encontrar $\boldsymbol{k}=\mathbf{2}$ peças defeituosas, utilizamos a **distribuição binomial negativa**, com p = 20% = 0,2 e k = 2.

A probabilidade $P(X = 4)$ é:

$$P(X = x) = \binom{x-1}{k-1} p^k . q^{x-k}$$

$$P(X = 4) = \binom{3}{1} 0{,}2^2 . 0{,}8^2 = 3 \times 0{,}04 \times 0{,}64 = 7{,}68\%$$

No entanto, para utilizar essa distribuição, é necessário que as extrações sejam **independentes** (mesma condição necessária para a aplicação da distribuição binomial). Para isso, é necessário que a **população seja infinita** (ou muito grande em relação à amostra) **ou** que as extrações sejam feitas **com reposição**.

E quanto à **esperança**? Assim como para outras distribuições, esperamos que o resultado mantenha a **proporção de sucessos**. Por exemplo, no caso do lançamento de uma moeda, com $p = 50\%$, esperamos ter que lançar 10 vezes para obter 5 caras.

Isso significa que o valor esperado é dado por:

$$\boldsymbol{E(X) = \frac{k}{p}}$$

Para o exemplo da fábrica, em que $p = 0{,}2$ e $k = 2$, **esperamos** que o número de peças inspecionadas seja:

$$E(X) = \frac{k}{p} = \frac{2}{0{,}2} = 10$$

E a **variância** é dada por:

$$\boldsymbol{V(X) = \frac{k.q}{p^2}}$$

Para o mesmo exemplo da fábrica, a proporção de peças não defeituosas (fracasso) é $q = 1 - p = 0{,}8$. A variância dessa distribuição é:

$$V(X) = \frac{k.q}{p^2} = \frac{2 \times 0{,}8}{0{,}2^2} = 40$$

Pontue-se que a **distribuição geométrica**, que estuda o número de tentativas até o **1º sucesso**, pode ser considerada um **caso particular** da **binomial negativa**, para $k = 1$.

Também podemos dizer que a binomial negativa corresponde à **soma** de $\boldsymbol{k}$ **variáveis geométricas**, com o **mesmo parâmetro** $\boldsymbol{p}$.

De fato, para $k = 1$, temos $E(X) = \frac{1}{p}$ e $V(X) = \frac{q}{p^2}$, que são as fórmulas da esperança e da variância, respectivamente, da distribuição geométrica. E a probabilidade de $X = x$ para $k = 1$ é:

$$P(X = x) = \binom{x-1}{k-1} p^k . q^{x-k} = \binom{x-1}{0} p^k . q^{x-k} = p . q^{x-k}$$

Essa é justamente a probabilidade $P(X = x)$ para a variável com **distribuição geométrica**.

INDO MAIS FUNDO!

Assim, como podemos parametrizar a distribuição geométrica pelo número de fracassos até o primeiro sucesso, também podemos parametrizar a binomial negativa como o número de **fracassos** até o k-ésimo sucesso. Nesse caso, teríamos:

$$P(Y = y) = \binom{k + y - 1}{k - 1} p^k . q^y$$

Com essa parametrização temos y fracassos e k sucessos, logo, há $y + k$ tentativas no total. Sabendo que a última tentativa será o k-ésimo sucesso, precisamos escolher, dentre as demais $y + k - 1$ tentativas quais serão os $k - 1$ sucessos.

Para o exemplo do lançamento da moeda até obter $k = 5$ sucessos, sabemos que um **total** de $x = 8$ tentativas (parametrização anterior) corresponde a $y = 3$ **fracassos** (parametrização alternativa). A probabilidade de obter $y = 3$ fracassos é dada por:

$$P(Y = 3) = \binom{5 + 3 - 1}{5 - 1} 0{,}5^5 . 0{,}5^3 = \binom{7}{4} 0{,}5^5 . 0{,}5^3$$

Como era esperado, a probabilidade de obter $y = 3$ fracassos é igual à probabilidade de lançar a moeda um total de $x = 8$ vezes (parametrização anterior).

Com essa parametrização a variável pode assumir os valores $Y = \{0,1,2,3, \dots\}$, ou seja, a partir de **zero** (afinal, é possível não obter fracasso algum).

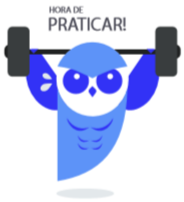
ESQUEMATIZANDO

Distribuição Binomial Negativa $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{k})$

Número de Ensaios de Bernoulli até o ***k*-ésimo sucesso**

$$\boldsymbol{P(X = k) = \binom{x - 1}{k - 1} p^k . q^{x-k}}$$

Esperança: $E(X) = \frac{k}{p}$; Variância: $V(X) = \frac{q.k}{p^2}$



(CESPE/2011 – STM) Se, em determinada fábrica, 10% das peças produzidas são defeituosas, então, para fins de controle de qualidade, uma distribuição binomial negativa deve ser usada na situação em que é retirada uma amostra aleatória simples com reposição de 10 peças para se determinar a probabilidade de ocorrer exatamente 3 peças defeituosas nessa amostra.

Comentários:

Sabendo que será retirada uma amostra aleatória, com reposição, de n = 10 peças e que a probabilidade de defeito é p = 10%, então temos uma distribuição binomial (original).

Gabarito: Errado.

(FGV/2019 – DPE/RJ – *Adaptada*) Uma amostra (X_1, X_2,... , X_n) de tamanho n, onde cada uma das variáveis X_i é de Bernoulli, tipo 0 ou 1, todas com o mesmo parâmetro p, é extraída. Considerando as distribuições exatas, é correto afirmar que:

Se a extração da amostra só é encerrada quando $X_k = 1$, pela J-ésima vez, então K tem distribuição de Binomial Negativa com parâmetros J e p.

Comentários:

Se a extração da amostra só é encerrada quando $X_k = 1$ (isto é, ocorre sucesso) pela J-ésima vez, então a variável tem distribuição binomial negativa. Os parâmetros são o número de sucessos desejados (J) e a probabilidade de sucesso de cada elemento p.

Resposta: Certo.

(CESPE/2018 – Analista Judiciário STM) A quantidade de clientes atendidos em cada minuto pelos empregados 1 e 2 em um balcão de atendimentos é expressa por $T = Y_1 + Y_2$, em que Y_1 = quantidade de clientes atendidos (por minuto) pelo empregado 1, e Y_2 = quantidade de clientes atendidos (por minuto) pelo empregado 2.

Considerando que, nessa situação hipotética, Y_1 e Y_2 sejam variáveis aleatórias independentes, seguindo uma mesma distribuição Y, cuja função de probabilidade é $P(Y = y) = 0{,}1 \times 0{,}9^y$, para $y = 0, 1, 2, ...$, julgue o seguinte item.

A soma T segue uma distribuição binomial negativa.

Comentários:

Sabendo que as variáveis Y seguem distribuições geométricas com mesmo p, então a soma de k variáveis com distribuição geométrica corresponde a uma **distribuição binomial negativa** (que estuda o número de tentativas até o k-ésimo sucesso).

Gabarito: Certo.

(CESPE/2018 – Analista Judiciário STM) A quantidade de clientes atendidos em cada minuto pelos empregados 1 e 2 em um balcão de atendimentos é expressa por $T = Y_1 + Y_2$, em que Y_1 = quantidade de clientes atendidos (por minuto) pelo empregado 1, e Y_2 = quantidade de clientes atendidos (por minuto) pelo empregado 2.

Considerando que, nessa situação hipotética, Y_1 e Y_2 sejam variáveis aleatórias independentes, seguindo uma mesma distribuição Y, cuja função de probabilidade é $P(Y = y) = 0{,}1 \times 0{,}9^y$, para $y = 0, 1, 2, ...$, julgue o seguinte item.

Se $E[T]$=quantidade média de clientes atendidos em cada minuto por esses dois empregados, então $E[T] < 17$.

Comentários:

A média de uma variável binomial negativa é dada por:

$$E(X) = \frac{k}{p}$$

Pela função de probabilidade $P(Y = y) = 0{,}1 \times 0{,}9^y$, concluímos que a probabilidade de sucesso é p = 0,1.

Ademais, sabemos que a variável T consiste na soma de k = 2 variáveis geométricas, então:

$$E(X) = \frac{2}{0{,}1} = 20$$

Gabarito: Errado.

Resumo da Aula

Distribuição Uniforme: todos os valores são **equiprováveis**

Distribuição de Bernoulli (p): 1 Experimento (Ensaio) de Bernoulli

- 2 resultados possíveis: sucesso $(X = 1)$ ou fracasso $(X = 0)$
- Probabilidade de sucesso: $P[X = 1] = p$
- Probabilidade de fracasso: $P[X = 0] = q = 1 - p$

$$E(X) = p; \qquad V(X) = p.q$$

Distribuição Binomial (n, p): Número de sucessos em n Ensaios de Bernoulli **independentes**

$$P(X = k) = C_{n,k}.p^k.q^{n-k}$$

$$E(X) = n.p; \qquad V(X) = n.p.q$$

Distribuição Geométrica (p): Número de Ensaios de Bernoulli até o **primeiro** sucesso

$$P(X = k) = q^{k-1}.p$$

$$E(X) = \frac{1}{p}; \qquad V(X) = \frac{q}{p^2}$$

Distribuição Hipergeométrica (N, S, n): Extrações **sem reposição**

$$P(X = k) = \frac{\binom{S}{k}\binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(X) = n.p; \qquad V(X) = n.p.q\frac{N-n}{N-1}$$

Distribuição de Poisson (λ): Aproximação da Binomial para $n \to \infty$ e $p \to 0$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda; \qquad V(X) = \lambda$$

Distribuição Binomial Negativa (p, k): Número de Ensaios até o **k-ésimo sucesso**

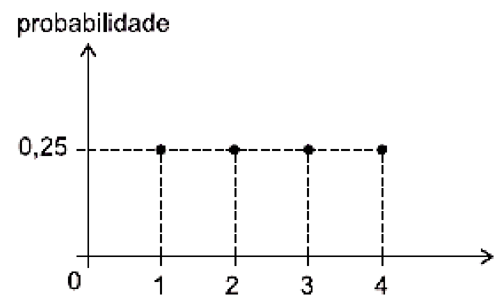
$$P(X = k) = \binom{x-1}{k-1}p^k.q^{x-k}$$

$$E(X) = \frac{k}{p}; \qquad V(X) = \frac{q.k}{p^2}$$

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Distribuição Uniforme

1. (CESGRANRIO/2011 – FINEP)



Considere a distribuição da probabilidade sobre os números 1,2,3 e 4 na figura acima.

Essa distribuição é

a) contínua

b) assimétrica

c) normal

d) uniforme

e) multivariada

Comentários:

Pela tabela, observamos que a probabilidade de todos os possíveis resultados (1, 2, 3 e 4) é a mesma (igual a 0,25). A distribuição que apresenta a mesma probabilidade para todos os valores é a distribuição uniforme.

Gabarito: D

Questões Comentadas – CESGRANRIO

Distribuição Binomial

1. (CESGRANRIO/2016 – IBGE) Uma pesquisa está interessada em estudar os eleitores de determinado candidato. Sabe-se que 50% da população alegam votar no candidato em questão.

Se 6 pessoas forem abordadas aleatoriamente, a probabilidade de que exatamente 3 pessoas sejam eleitoras do candidato em questão é aproximadamente

a) 51%

b) 50%

c) 31%

d) 21%

e) 11%

Comentários:

O enunciado informa que 50% das pessoas alegam votar em determinado candidato e que serão abordadas 6 pessoas. Considerando que há somente 2 respostas possíveis (votar ou não no candidato) para cada pessoa (ou seja, cada pessoa corresponde a um ensaio de Bernoulli) e que serão abordadas n = 6 pessoas, então temos uma distribuição binomial com n = 6 e p = 50% = 0,5 (logo, q = 1 – p = 1 – 0,5 = 0,5).

Assim, a probabilidade de encontrar exatamente k = 3 pessoas que votam no candidato é:

$$P(X = k) = C_{n,k} \times p^k \times q^{n-k}$$

$$P(X = 3) = C_{6,3} \times 0,5^3 \times 0,5^{6-3}$$

A combinação $C_{6,3}$ é:

$$C_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 5 \times 4 = 20$$

Assim, a probabilidade desejada é:

$$P(X = 3) = 20 \times 0,5^3 \times 0,5^3 = 20 \times 0,125 \times 0,125 = 0,3125 \cong 31\%$$

Gabarito: C

2. (CESGRANRIO/2018 – Liquigás) Sabe-se por estudos estatísticos que a eficiência de uma certa vacina para uma dada doença é de 80%.

Vacinando-se três indivíduos, qual a probabilidade de que apenas um deles não fique imunizado à doença?

a) 12,8%

b) 16%

c) 32%

d) 36%

e) 38,4%

Comentários:

O enunciado informa que a probabilidade de um indivíduo ser imunizado após tomar determinada vacina é p = 80%. Sabendo que há apenas 2 possibilidades para cada indivíduo (ser imunizado ou não), e que serão vacinados n = 3 indivíduos, então temos uma distribuição binomial com n = 3 e p = 80% = 0,8 (logo, q = 1 – p = 1 – 0,8 = 0,2).

Assim, a probabilidade de ter 1 indivíduo não imunizado, consequentemente, 2 indivíduos imunizados é:

$$P(X = k) = C_{n,k} \times p^k \times q^{n-k}$$

$$P(X = 2) = C_{3,2} \times 0,8^2 \times 0,2^1$$

A combinação $C_{3,2}$ é:

$$C_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)! \times 2!} = \frac{3 \times 2!}{1! \times 2!} = 3$$

Assim, a probabilidade desejada é:

$$P(X = 2) = 3 \times 0{,}64 \times 0{,}2 = 0{,}384 = 38{,}4\%$$

Gabarito: E

3. (CESGRANRIO/2012 – Petrobras) 10% dos parafusos produzidos por uma máquina são defeituosos. A probabilidade de que, entre 4 parafusos, pelo menos 3 não sejam defeituosos é de

a) 29,16%

b) 65,61%

c) 94,77%

d) 98,37%

e) 99,99%

Comentários:

O enunciado informa que 10% dos parafusos são **defeituosos** e que serão analisados 4 parafusos. Considerando que há somente 2 resultados possíveis (defeituoso ou não) para cada parafuso (ou seja, cada parafuso corresponde a um ensaio de Bernoulli) e que serão analisados n = 4 parafusos, então temos uma distribuição binomial com n = 4 e p = 10% = 0,1 (logo, q = 1 – p = 1 – 0,1 = 0,9).

A probabilidade P(X = k) para a distribuição binomial é calculada como:

$$P(X = k) = C_{n,k} \times p^k \times q^{n-k}$$

O enunciado deseja a probabilidade de encontrar pelo menos 3 **não** sejam defeituosos, ou seja, **no máximo 1 defeituoso**, isto é, 0 ou 1 parafuso defeituoso, dentre 4.

A probabilidade de não encontrar parafuso defeituoso algum é:

$$P(X = 0) = C_{4,0} \times 0,1^0 \times 0,9^4 = 1 \times 1 \times 0,6561 = 0,6561$$

A probabilidade de encontrar 1 parafuso defeituoso é:

$$P(X = 1) = C_{4,1} \times 0,1^1 \times 0,9^3 = 4 \times 0,1 \times 0,729 = 0,2916$$

Sabendo que buscamos a probabilidade de encontrar 0 **OU** 1 parafuso defeituoso, temos a **união de eventos excludentes**, dada pela **soma** das probabilidades:

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,6561 + 0,2916 = 0,9477 = 94,77\%$$

Gabarito: C

4. (CESGRANRIO/2011 – Petrobras) Uma carta tem 2/3 de chances de chegar ao destino correto. Se seis cartas são enviadas de forma independente, a probabilidade de que pelo menos duas cheguem a o destino correto é

a) 4/9

b) 68/81

c) 113/162

d) 230/243

e) 716/729

Comentários:

O enunciado informa a probabilidade de uma carta chegar ao destino correto é de 2/3 e que serão enviadas 6 cartas.

Considerando que há apenas 2 resultados possíveis para cada carta (chegar ou não ao destino correto), ou seja, cada carta representa um ensaio de Bernoulli, e que serão enviadas n = 6 cartas, então temos uma distribuição binomial com n = 6 e p = 2/3. Logo, a probabilidade de a carta **não** chegar no destino correto é:

$$q = 1 - p = 1 - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

A probabilidade P(X = k) para a distribuição binomial é calculada como:

$$P(X = k) = C_{n,k} \times p^k \times q^{n-k}$$

O enunciado deseja a probabilidade de encontrar **pelo menos 2** que cheguem ao destino correto, dentre as 6 cartas enviadas. Podemos calcular essa probabilidade como o **complementar** da probabilidade de chegar **menos de 2** cartas ao destino correto:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

Menos de 2 cartas corresponde a 0 ou 1 carta.

A probabilidade de não chegar carta alguma ao destino correto é:

$$P(X = 0) = C_{6,0} \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 1 \times 1 \times \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}$$

A probabilidade de chegar 1 carta ao destino correto é:

$$P(X = 1) = C_{6,1} \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 = 6 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3^5} = \frac{12}{3^6} = \frac{12}{729}$$

A probabilidade de chegar 0 **OU** 1 carta ao destino correto corresponde à **união de eventos excludentes**, que é dada pela **soma** das probabilidades:

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{729} + \frac{12}{729} = \frac{13}{729}$$

Portanto, a probabilidade de chegar pelo menos 2 cartas ao destino correto é complementar:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \frac{13}{729} = \frac{729}{729} - \frac{13}{729} = \frac{716}{729}$$

Gabarito: E

5. (CESGRANRIO/2008 – Petrobras) Um estudante marca, ao acaso, as respostas de um teste de 10 questões de múltipla escolha, com 4 alternativas por questão. O número mais provável de acertos é

a) 1,5

b) 2,0

c) 2,5

d) 3,0

e) 3,5

Comentários:

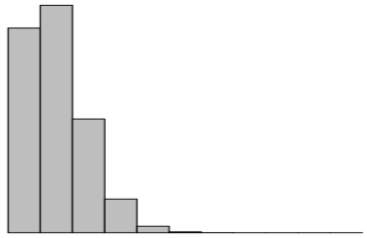
O enunciado informa que serão marcadas ao acaso 10 questões com 4 alternativas cada e pergunta pelo número mais provável de acertos, isto é, pela moda da distribuição.

Dentre alternativas, apenas duas são resultados possíveis para o número de acertos, quais sejam, 2 e 3, pois as demais não são números inteiros (e não há como acertar meia questão). Então, podemos resolver a questão, calculando as probabilidades P(X = 2) e P(X = 3), para saber qual valor é mais provável.

Os parâmetros da distribuição são n = 10 e a p = probabilidade de acertar uma questão. Sabendo que há 4 alternativas, a probabilidade de acertar uma questão ao acaso é:

$$p = \frac{1}{4}$$

Alternativamente, podemos perceber que a probabilidade p é menor que 0,5, logo, temos uma distribuição assimétrica positiva, conforme ilustrado a seguir:



Nesse tipo de distribuição, temos Moda < Média. A média da distribuição é:

$$E(X) = n \times p = 10 \times \frac{1}{4} = 2{,}5$$

Logo, a moda será necessariamente menor que a média, isto é, Moda = 2.

Gabarito: B

6. (CESGRANRIO/2009 – BNDES) Em um dado com seis faces numeradas de 1 a 6, a probabilidade de que cada um dos resultados ocorra é a mesma. Esse dado será lançado até que se obtenha o resultado 6. A probabilidade de que isso aconteça em, no máximo, 2 lançamentos é

a) 1/36

b) 5/36

c) 6/36

d) 7/36

e) 11/36

Comentários:

O dado será lançado até que seja obtida a face 6 (que podemos chamar de sucesso). Sabendo que a probabilidade de obter a face 6 é p = 1/6, temos uma distribuição geométrica com parâmetro p = 1/6. E a probabilidade de **não** obter a face 6 (fracasso) é:

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

A probabilidade de ter que lançar o dado no máximo 2 vezes é a probabilidade de obter sucesso na 1ª ou na 2ª tentativa.

A probabilidade de obter sucesso na 1ª tentativa é:

$$P(X = 1) = p = \frac{1}{6}$$

E a probabilidade de obter sucesso na 2ª tentativa corresponde à probabilidade de obter fracasso na 1ª tentativa e sucesso na 2ª:

$$P(X = 2) = q \times p = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$

Então, a probabilidade de ter que lançar o dado no máximo 2 vezes, isto é, 1 **OU** 2 vezes, corresponde à união desses eventos mutuamente excludentes, dada pela soma das probabilidades:

$$P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$$

Gabarito: E

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Distribuição Geométrica

1. (CESGRANRIO/2007 – TCE/RO) Uma experiência com 0,4 de probabilidade de sucesso é repetida até que um sucesso seja alcançado. Se o custo de cada experiência é R$ 40,00, o custo esperado dessa série de experiências, em reais, é igual a:

a) 4,00

b) 16,00

c) 40,00

d) 100,00

e) 120,00

Comentários:

Considerando que a experiência será repetida até que seja obtido sucesso, temos uma distribuição geométrica. A esperança da distribuição geométrica é:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

Sabendo que a probabilidade de obter sucesso em cada experiência é p = 0,4, o número esperado de experiências é:

$$E(X) = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5$$

Considerando que cada experiência custa R$40,00, o custo esperado total é:

$$Custo\ Esperado = 40 \times 2{,}5 = 100$$

Gabarito: D

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Distribuição de Poisson

1. (CESGRANRIO/2018 – Petrobras) O número de falhas de um equipamento em períodos de uma hora de operação tem distribuição Poisson, apresentando 1 falha para cada 10 horas de operação, em média. Um procedimento requer a operação desse equipamento por 20 horas ininterruptas.

A probabilidade de que o procedimento termine a operação sem que o equipamento produza falha é igual a:

a) exp(-0,1)

b) exp(-0,2)

c) exp(-1)

d) exp(-2)

e) 0,2exp(-0,2)

Comentários:

O enunciado informa que há, em média, 1 falha a cada 10 horas. Então, a cada 20 horas (dobro do tempo), a média de falhas é:

$$\lambda = \frac{20}{10} \times 1 = 2$$

A probabilidade para uma variável de Poisson é:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!}$$

Assim, a probabilidade de ter k = 0 falha, sendo $\lambda = 2$, é:

$$P(X = 10) = \frac{e^{-2}.2^0}{0!} = \frac{e^{-2}.1}{1} = e^{-2} = \exp{(-2)}$$

Gabarito: D

2. (CESGRANRIO/2018 – Petrobras) Suponha que os clientes de um supermercado cheguem a um dos caixas de acordo com um processo de Poisson com taxa média λ=4 clientes/hora.

Se o supermercado abre às 7h, a probabilidade de que tenha 5 clientes até as 09h 30min é

a) $\frac{4^5.e^{-4}}{4!}$

b) $\frac{4^5.e^{-4}}{5!}$

c) $\frac{5^4.e^{-4}}{5!}$

d) $\frac{10^4.e^{-10}}{5!}$

e) $\frac{10^5.e^{-10}}{5!}$

Comentários:

O enunciado informa que chegam, em média, 4 clientes a cada hora, seguindo um processo de Poisson. Então, para 2,5 horas (isto é, o tempo decorrido entre 7h e 9h30min), a média de clientes é:

$$\lambda = \frac{2{,}5}{1} \times 4 = 10$$

A probabilidade para uma variável de Poisson é:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!}$$

Assim, a probabilidade de terem chegado k = 5 clientes, sendo $\lambda = 10$, é:

$$P(X = 5) = \frac{e^{-10}.10^5}{5!}$$

Gabarito: E

3. (CESGRANRIO/2010 – Petrobras) Em um posto de gasolina entram para abastecer, em média, 60 carros por hora. Qual a probabilidade de a cada 5 minutos entrarem nesse posto, para abastecer, pelo menos 3 carros?

Considere a seguinte fórmula para o cálculo das probabilidades de Poisson:

$$\boldsymbol{Pr(X) = \frac{\mu^X.e^{-\mu}}{X!}}$$

Onde:

X = nº de sucessos desejados

μ = média da distribuição de Poisson

e = constante neperiana $\approx$ 2,71828

e^3 = 20,08554; e^5 = 148,41316

a) 0,8754

b) 0,7350

c) 0,2650

d) 0,1404

e) 0,1246

Comentários:

O enunciado informa que chegam, em média, 60 carros por hora (60 minutos), ou seja, a média é de 1 carro a cada minuto. Então, a cada 5 minutos, a média de carros é:

$$\mu = \frac{5}{1} \times 1 = 5$$

A probabilidade de chegarem pelo menos 3 carros, nesse período de 5 minutos, pode ser calculada pelo seu complementar:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$$

A probabilidade de chegarem menos de 3 carros é:

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

A probabilidade para uma variável de Poisson (conforme enunciado) é:

$$P(X) = \frac{\mu^X . e^{-\mu}}{X!}$$

Assim, para $\mu = 5$ e X = 0, temos:

$$P(X = 0) = \frac{5^0 . e^{-5}}{0!} = \frac{1 \times e^{-5}}{1} = e^{-5}$$

Assim, para $\mu = 5$ e X = 1, temos:

$$P(X = 1) = \frac{5^1 . e^{-5}}{1!} = \frac{5 \times e^{-5}}{1} = 5 . e^{-5}$$

Assim, para $\mu = 5$ e X = 2, temos:

$$P(X = 2) = \frac{5^2 . e^{-5}}{2!} = \frac{25 \times e^{-5}}{2} = 12{,}5 . e^{-5}$$

Então a probabilidade de chegarem menos de 3 carros é:

$$P(X < 3) = 1 . e^{-5} + 5 . e^{-5} + 12{,}5 . e^{-5} = 18{,}5 . e^{-5}$$

O enunciado informa que $e^5 \cong 148{,}4$. Pela propriedade da função exponencial, temos:

$$e^{-5} = \frac{1}{e^5}$$

Logo:

$$P(X < 3) = 18{,}5 . e^{-5} = 18{,}5 \times \frac{1}{e^5} \cong \frac{18{,}5}{148{,}4} \cong 0{,}1246$$

E a probabilidade de chegarem pelo menos 3 carros é complementar:

$$P(X \geq 3) \cong 1 - 0{,}1246 = 0{,}8754$$

Gabarito: A

4. (CESGRANRIO/2013 – IBGE) Um shopping possui duas entradas, A e B. Frequentadores do shopping entram pela entrada A segundo um processo de Poisson com taxa média de 10 pessoas por minuto. Pela entrada B, entram pessoas segundo outro processo de Poisson, independente do primeiro, a uma taxa média de 6 pessoas por minuto. Qual a probabilidade de que o primeiro usuário a entrar no shopping após sua abertura o faça pela entrada A?

a) $10 . e^{-16}$

b) $(1 - e^{-10})e^{-6}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{5}{8}$

e) $\frac{3}{5}$

Comentários:

O enunciado informa que o número médio de pessoas que entram pela entrada A é de 10 pessoas por minuto, e que o número médio de pessoas que entram pela entrada B é de 6 pessoas por minuto.

Ou seja, considerando todas as pessoas que entraram no shopping, 10/16 delas entraram pela entrada A e 6/16 delas entraram pela entrada B. Assim, a probabilidade de uma pessoa qualquer (inclusive a primeira pessoa) escolher a entrada A é:

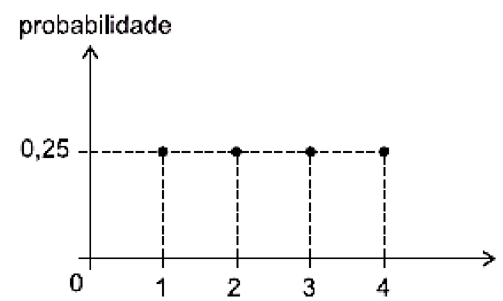
$$p_A = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

Gabarito: D

Lista de Questões – CESGRANRIO

Distribuição Uniforme

1. (CESGRANRIO/2011 – FINEP)



Considere a distribuição da probabilidade sobre os números 1,2,3 e 4 na figura acima.

Essa distribuição é

a) contínua

b) assimétrica

c) normal

d) uniforme

e) multivariada

Gabarito

1. LETRA D

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Distribuição Binomial

1. (CESGRANRIO/2016 – IBGE) Uma pesquisa está interessada em estudar os eleitores de determinado candidato. Sabe-se que 50% da população alegam votar no candidato em questão.

Se 6 pessoas forem abordadas aleatoriamente, a probabilidade de que exatamente 3 pessoas sejam eleitoras do candidato em questão é aproximadamente

a) 51%

b) 50%

c) 31%

d) 21%

e) 11%

2. (CESGRANRIO/2018 – Liquigás) Sabe-se por estudos estatísticos que a eficiência de uma certa vacina para uma dada doença é de 80%.

Vacinando-se três indivíduos, qual a probabilidade de que apenas um deles não fique imunizado à doença?

a) 12,8%

b) 16%

c) 32%

d) 36%

e) 38,4%

3. (CESGRANRIO/2012 – Petrobras) 10% dos parafusos produzidos por uma máquina são defeituosos. A probabilidade de que, entre 4 parafusos, pelo menos 3 não sejam defeituosos é de

a) 29,16%

b) 65,61%

c) 94,77%

d) 98,37%

e) 99,99%

4. (CESGRANRIO/2011 – Petrobras) Uma carta tem 2/3 de chances de chegar ao destino correto. Se seis cartas são enviadas de forma independente, a probabilidade de que pelo menos duas cheguem a o destino correto é

a) 4/9

b) 68/81

c) 113/162

d) 230/243

e) 716/729

5. (CESGRANRIO/2008 – Petrobras) Um estudante marca, ao acaso, as respostas de um teste de 10 questões de múltipla escolha, com 4 alternativas por questão. O número mais provável de acertos é

a) 1,5

b) 2,0

c) 2,5

d) 3,0

e) 3,5

6. (CESGRANRIO/2009 – BNDES) Em um dado com seis faces numeradas de 1 a 6, a probabilidade de que cada um dos resultados ocorra é a mesma. Esse dado será lançado até que se obtenha o resultado 6. A probabilidade de que isso aconteça em, no máximo, 2 lançamentos é

a) 1/36

b) 5/36

c) 6/36

d) 7/36

e) 11/36

Gabarito

1. LETRA C
2. LETRA E
3. LETRA C
4. LETRA E
5. LETRA B
6. LETRA E

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Distribuição Geométrica

1. (CESGRANRIO/2007 – TCE/RO) Uma experiência com 0,4 de probabilidade de sucesso é repetida até que um sucesso seja alcançado. Se o custo de cada experiência é R$ 40,00, o custo esperado dessa série de experiências, em reais, é igual a:

a) 4,00

b) 16,00

c) 40,00

d) 100,00

e) 120,00

GABARITO

1. LETRA D

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Distribuição de Poisson

1. (CESGRANRIO/2018 – Petrobras) O número de falhas de um equipamento em períodos de uma hora de operação tem distribuição Poisson, apresentando 1 falha para cada 10 horas de operação, em média. Um procedimento requer a operação desse equipamento por 20 horas ininterruptas.

A probabilidade de que o procedimento termine a operação sem que o equipamento produza falha é igual a:

a) exp(-0,1)

b) exp(-0,2)

c) exp(-1)

d) exp(-2)

e) 0,2exp(-0,2)

2. (CESGRANRIO/2018 – Petrobras) Suponha que os clientes de um supermercado cheguem a um dos caixas de acordo com um processo de Poisson com taxa média λ=4 clientes/hora.

Se o supermercado abre às 7h, a probabilidade de que tenha 5 clientes até as 09h 30min é

a) $\frac{4^5.e^{-4}}{4!}$

b) $\frac{4^5.e^{-4}}{5!}$

c) $\frac{5^4.e^{-4}}{5!}$

d) $\frac{10^4.e^{-10}}{5!}$

e) $\frac{10^5.e^{-10}}{5!}$

3. (CESGRANRIO/2010 – Petrobras) Em um posto de gasolina entram para abastecer, em média, 60 carros por hora. Qual a probabilidade de a cada 5 minutos entrarem nesse posto, para abastecer, pelo menos 3 carros?

Considere a seguinte fórmula para o cálculo das probabilidades de Poisson:

$$Pr(X) = \frac{\mu^X . e^{-\mu}}{X!}$$

Onde:

X = nº de sucessos desejados

μ = média da distribuição de Poisson

e = constante neperiana $\approx$ 2,71828

e^3 = 20,08554; e^5 = 148,41316

a) 0,8754

b) 0,7350

c) 0,2650

d) 0,1404

e) 0,1246

4. (CESGRANRIO/2013 – IBGE) Um shopping possui duas entradas, A e B. Frequentadores do shopping entram pela entrada A segundo um processo de Poisson com taxa média de 10 pessoas por minuto. Pela entrada B, entram pessoas segundo outro processo de Poisson, independente do primeiro, a uma taxa média de 6 pessoas por minuto. Qual a probabilidade de que o primeiro usuário a entrar no shopping após sua abertura o faça pela entrada A?

a) $10. e^{-16}$

b) $(1 - e^{-10})e^{-6}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{5}{8}$

e) $\frac{3}{5}$

Gabarito

1. LETRA D
2. LETRA E
3. LETRA A
4. LETRA D

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.