RACIOCÍNIO LÓGICO

Análise Combinatória

GRAN CURSOS ONLINE

Livro Eletrônico

Sumário

APRESENTAÇÃO

Nesta aula vamos tratar de um dos assuntos mais bonitos da Matemática: a Análise Combinatória, que está entre os temas favoritos do seu professor. Há uma probabilidade grande de que seja um dos temas favoritos do seu examinador.

Sempre que esse assunto está previsto no edital pode esperar, pelo menos, uma questão na sua prova.

As questões dependem de poucas fórmulas e muito raciocínio. Alguns alunos tendem a se identificar com a Análise Combinatória e outros tendem a ver como um tema difícil.

Na minha visão, é importante que você faça muitos exercícios. Realmente, eles podem ser muito diversificados. Quanto mais você treinar, maiores serão suas chances de acertar as questões da prova.

Ao final do material, inseri um apêndice com alguns temas mais avançados, que podem ser cobrados em questões diferenciadas. São temas opcionais, que você pode ler, caso deseje reforçar sua preparação em Análise Combinatória.

Por fim, gostaria de me colocar à sua disposição para tirar todas as suas dúvidas no Fórum.

ANÁLISE COMBINATÓRIA

1. Princípio Fundamental da Contagem

Arrisco-me a dizer que é aqui que se concentram a maior parte das questões desse assunto. Posso dizer, ainda, que absolutamente tudo pode ser derivado desse importante princípio.

É por isso que precisamos dominá-lo. Entender perfeitamente o que ele quer dizer é a chave para o seu sucesso em Análise Combinatória.

Exemplo: se um processo tem duas etapas, em que a primeira etapa pode ser feita de m formas, E a segunda etapa pode ser feita de n formas, o processo total pode ser feito de m.n formas.

O Princípio Fundamental da Contagem estabelece que, se você tem 2 calças e 3 camisas, você pode se vestir – isto é, colocar uma calça E uma camisa – de 2.3 = 6 maneiras diferentes. Daqui a pouco você vai entender porque destacamos o E.

Gostaria que você aprendesse o seguinte sistema para calcular.

2	x	3	= 6
Calças	**E**	**Camisas**	**Total**

Agora, vamos ilustrar o exemplo para que você visualize que realmente existem seis opções de vestir 2 calças e 3 camisas.

Figura 1: Seleção de 2 Calças e 3 Camisas

Como falamos, para se vestir você precisa de uma calça (2 opções) E de uma camisa (3 opções).

Figura 2: Ilustração do Princípio Fundamental da Contagem

E mais três formas de você se vestir com a segunda calça.

Outra observação importante a fazer sobre o Princípio Fundamental da Contagem é quando se tem uma sentença com OU. Vejamos um exemplo para você entender melhor.

001. (INÉDITA/2020) Bruna tem 4 camisas, 2 calças, 1 saia e 3 sapatos. De quantas formas diferentes ela pode se vestir?

Para se vestir, Bruna precisa de:
Uma camisa **E**
Uma calça **OU** uma saia... **E**
Um sapato
Como Bruna pode usar 2 calças ou 1 saia, ela tem 3 opções para essa categoria de roupas. É justamente a soma.

4	x	2+1	x	3	= 36
Camisas	**E**	**Saias ou Calças**	**E**	**Sapatos**	**Total**

Portanto, o número de formas que Bruna poderá se vestir é:

$$N = 4.(2+1).3 = 4.3.3 = 36$$

36.

Dessa maneira, podemos relacionar o Princípio Fundamental da Contagem com as conjunções E e OU. O bom uso dessas conjunções é capaz de resolver grande número de problemas.

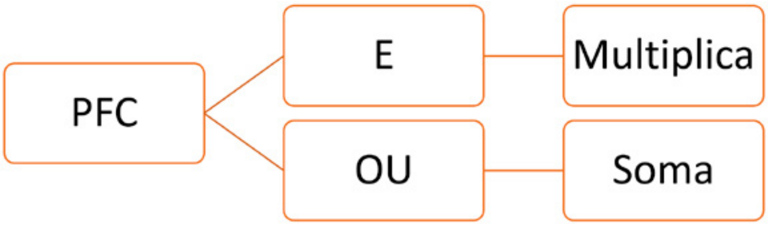


Figura 3: Princípio Fundamental da Contagem

Direto do Concurso

002. (PGE-RO/TÉCNICO DA PROCURADORIA/2015) Quatro processos, numerados de 1 a 4, deverão ser distribuídos entre três procuradores: Átila, Hércules e Ulisses. Um mesmo procurador pode receber até quatro processos, exceto o procurador Átila, que não pode receber o processo número 2.

O número de maneiras diferentes de se fazer tal distribuição é:

a) 81
b) 64
c) 54
d) 11
e) 8

Para cada um dos processos, exceto o 2, temos 3 opções de procuradores. Para o processo número 2, podemos escolher qualquer um dos outros 2 procuradores, exceto Átila.

Precisamos escolher um procurador dentre 3 para o processo 1 **E** um procurador dentre 2 para o processo 2 **E** um procurador dentre 3 para o processo 3 **E** um procurador dentre 3 para o processo 4.

3	x	2	x	3	X	3	= 54
1		**2**		**3**		**4**	**Total**

Letra c.

003. (ESAF/FUNAI/2016) Considere as quatro letras A, C, G e T formando pares de letras nos quais A só forma par com T e C só forma par com G. Indique quantas sequências distintas de três pares ordenados de letras e com repetição podem ser formadas.

a) 4
b) 8

c) 16
d) 32
e) 64

A sequência de pares ordenados a que se refere o problema, na verdade, se refere às bases nitrogenadas que compõem o DNA.
Como dito pelo enunciado, a primeira base do par já determina automaticamente a segunda. São quatro possibilidades para a primeira base de cada par (A, C, G ou T), mas, para a segunda base, só existe uma possibilidade. Se a primeira base for A, a segunda necessariamente é T; se a primeira base for C, a segunda necessariamente é G. E, assim, por diante.
Portanto, temos o seguinte diagrama:

4.1	x	4.1	x	4.1	= 4.4.4 = 64
Par 1		**Par 2**		**Par 3**	**Total**

Letra e.

---

004. (FGV/DPE-RO/TÉCNICO DA DEFENSORIA PÚBLICA/2015) Considere todas as placas de veículos desde NCD-4000 até NCD-9999. O número de placas que possuem os dígitos todos diferentes é:
a) 2.520
b) 3.024
c) 3.528
d) 3.786
e) 4.032

Questão muito inteligente. Perceba que as letras das placas já foram definidas. Elas só podem ser NCD. Portanto, não iremos nos preocupar com elas.
Para que uma placa esteja entre 4000 e 9999, o primeiro algarismo deve ser igual ou maior que 4. São, portanto, seis opções (4, 5, 6, 7, 8 e 9).

6	x	___	x	___	x	___	______
							Total

Para o segundo algarismo, podemos escolher qualquer número que ainda não foi escolhido. São, portanto, 9 opções, porque não podemos escolher o número que foi escolhido para o primeiro algarismo.

6 x 9 x ___ x ___ ______
Total

Para o terceiro algarismo, não podemos escolher nenhum dos números que já foram escolhidos para o primeiro ou para o segundo algarismo. São, portanto, duas opções a menos, restando 8 opções.

6 x 9 x 8 x ___ ______
Total

Analogamente, para o quarto algarismo, não podemos escolher nenhum dos três números que já foram escolhidos. Restam, portanto, 7 opções.

6 x 9 x 8 x 7 = 3024
Total

Letra b.

1.1. Princípio da Casa dos Pombos

Um momento nerd. Confesso que gosto muito mais do nome original desse princípio: Teorema de Dirichlet.

De qualquer modo, o Teorema de Dirichlet ou o Princípio da Casa dos Pombos estabelece que:

Obs.: Se m objetos devem ser guardados em n gavetas com m > n, então, pelo menos uma gaveta deverá ter mais de 1 objeto.

Por exemplo, se eu tenho 10 camisas e 8 gavetas, tudo o que podemos garantir é que **pelo menos uma gaveta terá mais de uma camisa.**

Essa conclusão é fácil de ser tomada. Se eu colocar uma camisa em cada gaveta, terei um total de 8 camisas. Se eu quiser guardar todas as 10 camisas em gavetas, eu teria que, necessariamente, acumular mais de uma camisa em alguma gaveta.

No entanto, tome muito cuidado com essa conclusão. É relativamente fácil criar uma questão que possa confundir a respeito dela.

Não é possível garantir que:

- Há duas gavetas com mais de uma camisa;

- Todas as gavetas têm, pelo menos, uma camisa;
- Existe uma gaveta com duas camisas.

Vejamos um modo curioso de guardar as 10 camisas em 8 gavetas que ilustra claramente que todas essas três assertivas são falsas.

Número de Camisas	0	4	1	1	1	1	1	1
Gaveta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

Tabela 1: Aplicação do Teorema de Dirichlet

Portanto, podemos ver claramente que existe uma gaveta, no caso a gaveta número 2, que tem mais de uma camisa.

Esse simples teorema cai demais e sempre traz confusão entre os alunos.

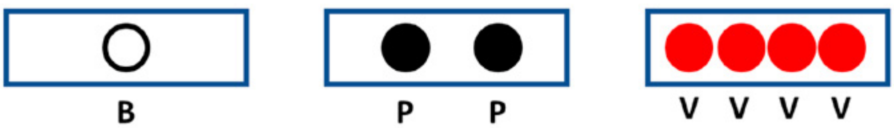
Direto do Concurso

005. (FGV/PREFEITURA DE CUIABÁ-MT/PROFESSOR DE PEDAGOGIA/2015) Em uma sacola há uma bola branca, duas pretas e quatro vermelhas. Não há outras bolas na sacola além dessas que foram citadas.

Retiram-se quatro bolas da urna, aleatoriamente. Sobre as bolas retiradas, é correto afirmar que:

a) Todas são vermelhas.
b) No máximo uma é vermelha.
c) Pelo menos uma é preta.
d) Pelo menos duas são da mesma cor.
e) Pelo menos duas são vermelhas.

Perceba que temos três bolas diferentes: brancas (B), pretas (P) e vermelhas (V). Você pode imaginar que, em vez de elas estarem uma sacola, elas estivessem em três gavetas diferentes para que possamos visualizar a mesma situação que vimos no Princípio da Casa dos Pombos.



Se retiramos quatro bolas, pelo Teorema de Dirichlet, duas delas devem vir da mesma gaveta. Portanto, devem apresentar a mesma cor.

Podemos, ainda, garantir que uma delas é vermelha, porque existe um limite de três bolas que não são vermelhas. No entanto, não é possível garantir que duas delas sejam vermelhas, pois podemos ter a seguinte situação BPPV.

Não podemos garantir que uma é preta, pois podemos ter BVVV.

Contudo, note que, em todos os casos, temos duas bolas da mesma cor, como já previsto pelo Teorema de Dirichlet.

Letra d.

Uma variante desse problema pode aparecer quando temos uma quantidade maior de camisas. Para isso, você deve observar que:

- se cada gaveta puder armazenar no máximo 2 camisas, o número máximo de camisas armazenadas é igual a 20. Logo, se houver 21 camisas, pelo menos uma gaveta terá mais de 2 camisas;
- se cada gaveta puder armazenar no máximo 3 camisas, o número máximo de camisas armazenadas é igual a 30. Logo, se houver 31 camisas, pelo menos uma gaveta terá mais de 3 camisas;

Generalizando, podemos dizer que, se houver A gavetas e k.A + 1 camisas, pelo menos uma gaveta terá mais de k camisas.

Outra forma de fazer isso é tomando a divisão.

Vejamos um exemplo: se temos 25 camisas e 7 gavetas, então:

$$\begin{array}{r|l} 25 & 7 \\ \cline{2-2} -21 & \mathbf{3} \\ (4) & \end{array}$$

Observe que 25 é maior que 7.3. Portanto, se temos 25 camisas e 7 gavetas, podemos garantir que pelo menos uma gaveta terá mais de 3 camisas.

E nós podemos garantir isso, porque o número máximo de camisas que poderiam ser armazenadas em 7 gavetas, de modo que cada gaveta tenha no máximo 3 camisas, seria igual a 21.

Direto do Concurso

006. (FCC/SEDU-ES/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2016) Em uma gaveta há 5 pares de meias pretas, 7 pares de meias vermelhas e 10 pares de meias brancas. O número mínimo de pares de meias que precisam ser retirados da gaveta, sem que se veja a cor, para que certamente sejam retirados pelo menos três pares de meias de cores diferentes é

a) 4.
b) 15.
c) 6.

d) 13.
e) 18.

É uma questão que requer bastante atenção. Ela pediu para ter certeza de que três pares de meias tenham cores diferentes. Portanto, o pior caso possível seria quando você retirasse as 10 meias brancas e depois 7 meias pretas. Nesse caso, necessariamente, a décima oitava meia seria vermelha, portanto, teríamos três pares de meias com cores diferentes.
Com menos de 18 meias, é sempre possível retirar apenas meias brancas e meias pretas.
Letra e.

1.2. Princípio da Inclusão e Exclusão

Antes de adentrarmos no estudo da Teoria de Probabilidades, precisamos saber algumas noções básicas de conjuntos.

Considere o conjunto de eventos possíveis no lançamento de um dado. Nesse caso, temos:

- **Espaço Amostral de Eventos (Ω):** representa todo o conjunto de eventos possíveis.

Exemplo: se estamos falando de um lançamento de um dado de seis faces, teremos o espaço amostral Ω = {1,2,3,4,5,6}.

- **Evento (A):** é um evento qualquer para o qual se deseja calcular a probabilidade de ocorrência.

Exemplo: se queremos saber qual a probabilidade de o lançamento ser maior ou igual a 5, teremos que A = {5, 6}.

Além disso, temos algumas operações importantes. Vamos a elas.

- **Intersecção (∩):** é representado pela palavra E.

Exemplo: considere dois eventos distintos. A é o evento anterior, ou seja, A ={5,6}. Já o evento B é o lançamento resultar em número ímpar, portanto, tem-se B = {1,3,5}. A intersecção, representada por A ∩Ω B, corresponde ao evento de acontecer A e B **simultaneamente.** Para isso, precisamos tomar os elementos comuns entre esses dois conjuntos.

$$A \cap B = \{5\}$$

- **União (∪):** é representado pela palavra OU.

A união, representada por A ∪ B, corresponde ao evento de acontecer, pelo menos, um dos dois eventos A ou B. Para isso, basta agrupar os elementos de ambos os conjuntos.

$$A \cup B = \{1,3,5,6\}$$

1.3. União de Eventos

Trata-se de um assunto amplamente explorado em provas.

Para entender melhor a expressão que vai ser deduzida, vamos representar os eventos A e B por meio de diagramas.

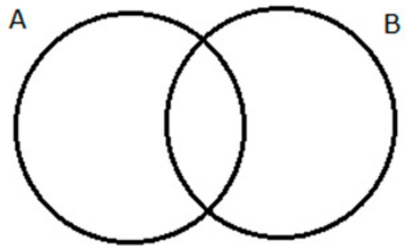


Figura 4: Diagrama da União de Dois Eventos

Para calcular a probabilidade da união de dois eventos, devemos calcular o número de elementos dessa união.

Podemos começar somando os elementos de A com os elementos de B. Marcaremos os elementos de A com linhas horizontais azuis e os de B com linhas diagonais vermelhas.

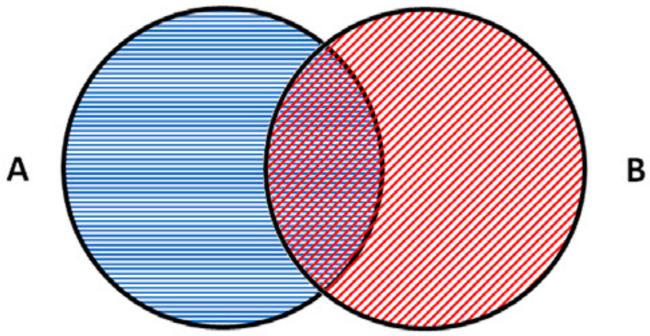


Figura 5: Visualização da Intersecção entre Dois Eventos

Perceba, no entanto, que os elementos da intersecção foram contados duas vezes. Por isso, precisamos retirá-los, de modo que eles sejam contados apenas uma vez.

Dessa maneira, temos que o número de elementos da união é:

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

Podemos generalizar essa expressão para união de três eventos. Caso tenha curiosidade, você poderá tentar deduzir, porém isso vai dar um pouco de trabalho.

Obs.: $\#(A \cup B \cup C) = \#(A) + \#(B) + \#(C) - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$

Há uma lógica relativamente simples para lembrar essa expressão. Perceba que:

Obs.: $$\#(A \cup B \cup C) = Soma\ das\ Elementos\ Um\ a\ Um - Intersecções\ Dois\ a\ Dois + Intersecção\ Três\ a\ Três$$

É só você se lembrar que o sinal vai alternando. 1 a 1 é positivo, as probabilidades 2 a 2 entram com sinal negativo; 3 a 3 positivo. E, assim, por diante, eu nunca vi em provas de concurso, mas se a questão colocar uma união de quatro ou mais eventos, você pode continuar: as intersecções 4 a 4 entram com sinal negativo; as 5 a 5, com sinal positivo e, por aí, vai.

E, agora, vamos treinar?

Direto do Concurso

007. (CESPE/TJ-SE/2014/ADAPTADA) O rito processual de análise de determinado tipo de processo segue as três seguintes fases:

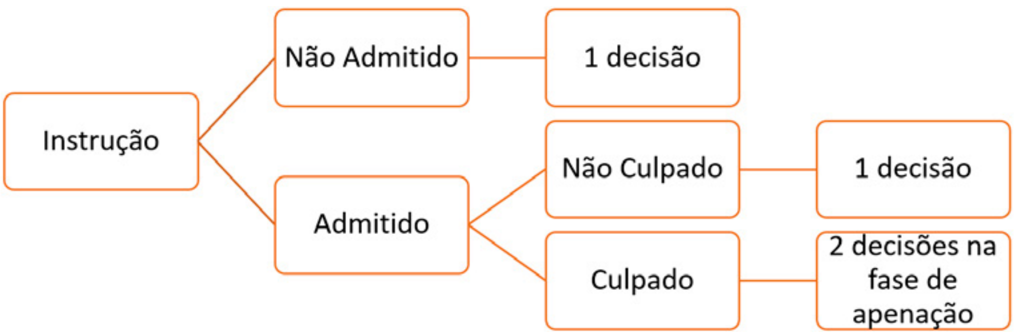
- instrução: após a apresentação da representação e das provas, o juiz decide pela admissibilidade ou não do caso;
- julgamento: admitido o caso, o juiz analisa o mérito para decidir pela culpa ou não do representado;
- apenação: ao culpado o juiz atribui uma pena, que pode ser ou o pagamento de multa, ou a prestação de serviços à comunidade.

Para cada processo do referido tipo, desconsiderando os possíveis erros de decisão, a quantidade de possíveis decisões durante o rito processual é superior a 5.

Questão interessante sobre a aplicação do PFC. Perceba que, na fase de instrução, se o juiz decidir pela não admissibilidade do caso, não há que se falar nas etapas posteriores. Portanto, caso o juiz encerre o processo na fase de instrução, só haverá uma decisão possível – a não admissibilidade do processo.

O mesmo se aplica ao julgamento, se o juiz decidir pela não culpa do representado, não há que se falar em fase de apenação. Da mesma forma, só existe uma decisão possível – a não culpa do representado.

Dessa maneira, temos as seguintes possibilidades para as decisões no rito processual.



Caso o representado seja declarado culpado, o juiz poderá tomar duas decisões diferentes na fase de apenação: o pagamento de multa ou a prestação de serviços na comunidade. Portanto, são apenas quatro decisões possíveis, não um número superior a cinco.

Errado.

2. Permutações

O problema das permutações consiste em encontrar o número de anagramas de uma palavra.

Um anagrama é uma palavra que pode ser obtida a partir de outra por meio de trocas nas posições das letras. A palavra formada não precisa existir no vocabulário.

Considere a palavra AMOR. São exemplos de anagramas dessa palavra: RAOM, MRAO, AMRO.

Nas questões de prova, é bem comum aparecer a seguinte pergunta: quantos anagramas possui a palavra AMOR?

Como a palavra AMOR tem 4 letras, temos, na verdade, quatro posições. Na primeira posição, podemos colocar qualquer uma das quatro letras.

$$4 \;.\; \underline{\quad} \;.\; \underline{\quad} \;.\; \underline{\quad} \qquad \underbrace{\underline{\qquad\quad}}_{\textbf{Total}}$$

Na segunda posição, podemos colocar qualquer uma das letras que não foram usadas, portanto, temos 3 opções:

$$\underline{4} \;.\; \underline{3} \;.\; \underline{\quad} \;.\; \underline{\quad} \qquad \underbrace{\underline{\qquad\quad}}_{\textbf{Total}}$$

Na terceira posição, podemos colocar qualquer uma das letras que não foram usadas nas duas posições anteriores. Sobraram, portanto, duas opções. Para a quarta opção, só restou a última letra que ainda não foi usada. Portanto, o número de anagramas é:

$$\underline{4} \;.\; \underline{3} \;.\; \underline{2} \;.\; \underline{1} \qquad \underbrace{\underline{= 4.3.2.1 = 24}}_{\textbf{Total}}$$

Temos, portanto, 24 anagramas. Perceba, ainda, que simplesmente usamos o Princípio Fundamental da Contagem para esse cálculo.

Agora que você aprendeu a mecânica de como funciona o cálculo de permutações, vamos nos aprofundar nesse assunto.

2.1. Números Fatoriais

Os fatoriais são representados pela exclamação “!”. Para os números inteiros, define-se:

$$n! = n.(n-1)!$$

$$0! = 1$$

Assim, podemos calcular todos os fatoriais. Vejamos alguns exemplos:

$$0! = 1$$

$$1! = 1.0! = 1.1 = 1$$

$$2! = 2.1! = 2.1 = 2$$

$$3! = 3.2! = 3.2.1 = 6$$

$$4! = 4.3! = 4.3.2.1 = 24$$

Temos duas observações interessantes sobre os números fatoriais:

- n! representa o produto de todos os números naturais de 1 a n;
- n! contém todos os fatoriais de números anteriores. Por exemplo, em 5!, podemos enxergar:

$$5! = 5.4.3.2.1 = 5.4! = 5.4.3! = 5.4.3.2!$$

Dessa maneira, **um fatorial de um número maior sempre é divisível pelo fatorial de um número menor.** Isso é importante para definirmos as permutações com repetição, os arranjos e as combinações.

2.2. Permutações sem Repetição

Quando temos uma fila de n elementos todos diferentes, o número de permutações é dado por:

Obs.: $P_n = n!$

É bem fácil de entender essa fórmula. Assim como fizemos para a palavra AMOR, podemos fazer uma generalização para uma sequência qualquer de n elementos.

Para a primeira posição, podemos escolher qualquer um dos n elementos.

n	.	___	.	...	.	___		___
								Total

Para a segunda posição, não podemos escolher o que já foi escolhido na primeira. Restam, portanto, n-1 elementos. Para a posição seguinte, restarão (n-2) e, assim, por diante, até que, na última posição, só teremos uma escolha.

n	.	n-1	.	...	.	1		n! = n(n-1)...2.1
								Total

Agora, já estamos avançando na matéria e dispondo de mais recursos para resolver as questões. Vamos fazer mais uma?

Direto do Concurso

008. (FCC/TRF-4ª REGIÃO/ANALISTA JUDICIÁRIO/OFICIAL DE JUSTIÇA AVALIADOR FEDERAL/2019) Em um concurso com 5 vagas, os candidatos aprovados serão alocados, cada um, em um dos municípios A, B, C, D ou E. O primeiro colocado foi designado para o município A. O número de possíveis alocações dos outros candidatos aprovados é:

a) 120
b) 24
c) 30
d) 6
e) 4

Observe que sobraram 4 candidatos e 4 municípios (B, C, D e E) em que eles podem ser alocados. Como são 4 candidatos que podem ser alocados em 4 municípios, o total de possibilidades é dado pela permutação de 4 elementos.

$$N = P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$$

Letra b.

009. (ESAF/AFRB/2012) Na prateleira de uma estante, encontram-se 3 obras de 2 volumes e 2 obras de 2 volumes, dispondo-se, portanto, de um total de 10 volumes. Assim, o número de diferentes maneiras que os volumes podem ser organizados na prateleira, de modo que os volumes de uma mesma obra nunca fiquem separados, é igual a:

a) 3.260
b) 3.840

c) 2.896
d) 1.986
e) 1.842

O fato de a questão ter separado 3 obras de 2 volumes e 2 obras de 2 volumes não influencia o resultado.
Perceba que, de qualquer maneira, podemos permutar livremente as 5 obras. Logo, temos o seguinte:

5	.	4	...	1	= 5! = 120
Obra 1		**Obra 2**	**...**	**Obra 5**	**Total**

Além disso, também podemos permutar os dois volumes dentro de cada obra. Lembre-se de que não podemos misturar volumes de obras diferentes. Sendo assim, temos algumas possibilidades a mais.

5!	.	2!	...	2!	= $5!(2!)^5$ = 120.32
Permutações das Obras		**Volumes da Obra 1**	**...**	**Volumes da Obra 5**	**Total**

Portanto, o número de maneiras de organizar a estante é:

$$N = 5!\,(2)^5 = 120.32 = 3840$$

Letra b.

010. (FGV/PC-MA/AUXILIAR DE PERÍCIA MÉDICO-LEGAL/2012) Considere as 24 permutações das letras P, C, E e M. Se colocarmos essas 24 permutações em ordem alfabética, a permutação PCEM ocupará a posição de ordem:
a) 24
b) 21
c) 19
d) 18
e) 17

Queremos descobrir quais anagramas da palavra PCEM aparecem antes no alfabeto da própria palavra PCEM.

Vamos separar os anagramas em dois grupos:

- os que começam com a letra P;
- os que começam com outra letra (C, E ou M).

Perceba que, se o anagrama começar com C, E ou M, ele virá antes de PCEM necessariamente. Portanto, já contemos os anagramas que começam com essas letras.

Para a primeira posição, temos 3 opções (CEM). Para a segunda posição, temos 3 opções, pois não podemos escolher a letra que já foi escolhida no passo anterior. Para a terceira posição, temos 2 opções, pois não podemos escolher nenhuma das 2 letras que já foram escolhidas antes. Por fim, para a quarta posição, só sobrou uma letra.

$$\underline{3} \ . \ \underline{3} \ . \ \underline{2} \ . \ \underline{1} \qquad \underbrace{\underline{= 3.3.2.1 = 18}}_{\textbf{Total}}$$

Agora, quanto aos anagramas que começam com a letra P, perceba que o primeiro deles é exatamente PCEM, pois as letras CEM estão em ordem alfabética.

Sendo assim, só existem 18 anagramas da palavra PCEM que vêm antes dela no alfabeto. Portanto, ela ocupa 19ª posição entre os anagramas. Muito cuidado para não cair na pegadinha da letra D (18).

Letra c.

2.3. Permutações com Repetição

Quantos anagramas tem a palavra AMADA?

Essa palavra tem cinco letras. Portanto, aplicando o raciocínio anterior, teríamos:

$$\underline{5} \ . \ \underline{4} \ . \ \underline{...} \ . \ \underline{1} \qquad \underbrace{\underline{= 5.4.3.2.1 = 120}}_{\textbf{Total}}$$

No entanto, prestemos atenção a alguns dos possíveis anagramas. Vamos identificar as três letras A da palavra como A_1, A_2 e A_3 – no entanto, é importante destacar que essas letras são iguais.

$$A_1MA_2DA_3$$
$$A_3MA_2DA_1$$
$$A_1MA_3DA_2$$

Observe que esses anagramas, na verdade, são iguais. Portanto, não deveriam ser contados. Por isso, precisamos **descontar as permutações** entre as letras repetidas.

Como são 3 letras A, precisamos dividir por 3! – a conta é uma divisão, porque estamos aplicando o Princípio Fundamental da Contagem.

Portanto, o número de anagramas da palavra AMADA será:

$$P_5^3 = \frac{5!}{3!} = \frac{5.4.3!}{3!} = 5.4. = 20$$

Podemos generalizar esse raciocínio. O número de permutações n elementos com k repetições é dado por:

$$P_n^k = \frac{n!}{k!}$$

Outro exemplo interessante é a palavra MATEMATICA. Essa palavra possui 10 letras, mas tem 2 M repetidos, 2 T repetidos e 3 A repetidos. Assim, o número de anagramas dessa palavra será:

$$P_{10}^{2,2,3} = \frac{10!}{2!\,2!\,3!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4.3!}{2.1.2.1.3.2.1} = 151.200$$

Direto do Concurso

011. (FGV/AL-BA/TÉCNICO DE NÍVEL SUPERIOR/ECONOMIA/2014) A sigla de Assembleia Legislativa do Estado da Bahia é “ALBA”. Embaralhando as letras de ALBA, o número de sequências diferentes que podem ser formadas com essas mesmas 4 letras é:

a) 4
b) 6
c) 8
d) 10
e) 12

A palavra ALBA tem 4 letras, sendo duas repetidas, portanto, o número de anagramas é:

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{4.3.2!}{2!} = 4.3 = 12$$

Letra e.

012. (CESPE/TRE-MT/2015) Em um campeonato de futebol amador de pontos corridos, do qual participam 10 times, cada um desses times joga duas vezes com cada adversário, o que totaliza exatas 18 partidas para cada. Considerando-se que o time vencedor do campeonato venceu 13 partidas e empatou 5, é correto afirmar que a quantidade de maneiras possíveis para que esses resultados ocorram dentro do campeonato é.

a) superior a 4.000 e inferior a 6.000.
b) superior a 6.000 e inferior a 8.000.
c) superior a 8.000.
d) inferior a 2.000.
e) superior a 2.000 e inferior a 4.000.

Queremos que a equipe em questão tenha vencido 13 partidas e empatado 5 vezes nas suas 18 partidas. Sendo V uma vitória e E um empate, queremos o número de anagramas da seguinte palavra:

VVVVVVVVVVVVVEEEEE

Trata-se de um problema clássico de permutação com repetição.

$$N = \frac{18!}{13!\,5!} = \frac{18.17.16.15.14}{5.4.3.2.1} = \frac{18.17.2.1.14}{1.1.1.1.1} = 8568 > 8000$$

Letra c.

2.4. Permutações Circulares

Nas permutações circulares, não existe o primeiro e o último termo. Pense, por exemplo, em uma mesa redonda.

Vejamos um exemplo com quatro elementos.

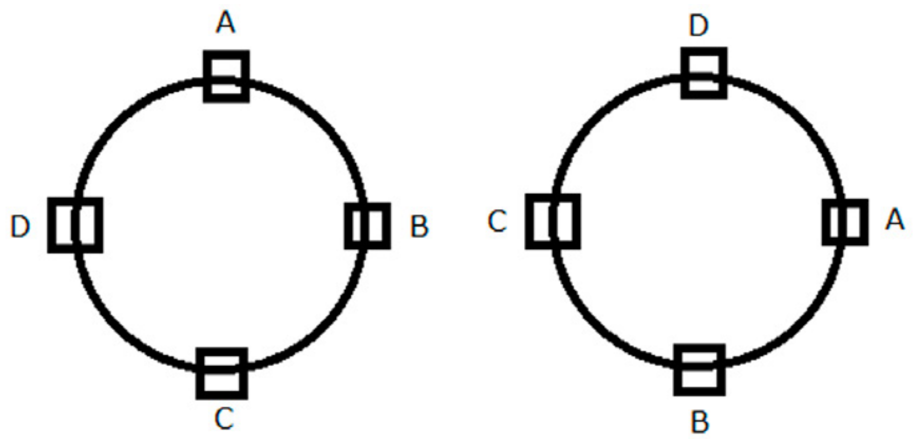


Figura 6: Permutações Circulares

Perceba que, na Figura 6, as duas imagens representam a mesma permutação, porque podem ser obtidas uma da outra por meio de uma rotação. Experimente rotacionar a imagem da esquerda 90º no sentido horário e você chegará à imagem da direita.

Assim, quando se consideram as permutações circulares, é necessário considerar que algumas permutações são perdidas.

Na Figura 6, podemos ver que existem 4 rotações. Basta que você continue rotacionando em 90º no sentido horário – a quarta rotação será igual à imagem original.

Assim, devemos dividir por 4 as permutações. Teríamos, portanto, nesse caso:

$$PC_4 = \frac{4!}{4} = 3! = 6$$

Podemos generalizar essa expressão. O número de permutações circulares sem repetição de n elementos é:

$$PC = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Caso haja repetições, basta aplicar o princípio visto na Seção anterior.

3. Arranjos e Combinações

Esse é um dos assuntos mais explorados pelas provas justamente pela confusão que os alunos costumam fazer entre arranjos e combinações.

Arranjos e Combinações consistem em **escolher k elementos num total de n.**

A diferença crucial entre eles é saber se a ordem importa ou não.

Nesse curso, não consideraremos os casos em que há elementos repetidos. Faremos o estudo apenas com todos os elementos diferentes. O estudo de arranjos e combinações com repetição elevam bastante o grau de dificuldade das questões e tal assunto jamais apareceu em provas de concursos públicos.

3.1. Arranjos

Um arranjo consiste em escolher k elementos num total de n, **importando a ordem.**

Suponha, por exemplo, que você tem uma equipe de 10 pessoas e você precisa escolher 2 delas para ser o presidente e o vice-presidente de uma comissão.

De quantas formas você poderá formar a tal comissão?

Para o Presidente, temos 10 opções, pois qualquer um dos membros da equipe pode sê-lo. Já para o vice, temos apenas 9 opções, pois o membro que já foi escolhido como presidente não pode ser escolhido.

Usando o Princípio Fundamental da Contagem, temos:

10	.	9	= 10.9 = 90
Presidente		**Vice**	**Total**

Agora, a pergunta mais relevante que você precisa fazer para questões de prova. Por que a ordem importa nesse caso?

Pare e pense na resposta dessa pergunta. Somente depois, prossiga a leitura desse material.

Ora, vejamos duas escolhas em que só mudou a ordem.

A	B
Presidente	**Vice**
B	A
Presidente	**Vice**

Perceba que existe uma grande diferença. No primeiro caso, A era o presidente e B era o vice. No segundo caso, mudou a ordem e mudaram também as funções.

Por isso, as possibilidades são diferentes e devem ser consideradas.

Sempre que uma questão falar de uma comissão em que as pessoas têm **funções diferentes,** a ordem importa, portanto você deverá utilizar um **arranjo.**
Caso a questão fale de uma comissão genérica em que todas as pessoas **têm funções iguais,** a ordem não importa, portanto você deverá utilizar uma **combinação.**
São comuns também as questões em que parte dos membros são genéricos e parte têm funções especiais. Nesse caso, minha recomendação é que você use o PFC começando pelos membros que possuem funções especiais, ou seja, pelo arranjo.

Agora, vamos apresentar a fórmula geral do arranjo, que pode ser obtida pelo Princípio Fundamental da Contagem.

Precisamos escolher k elementos num total de n. Isso também pode ser dito da seguinte forma "um arranjo de n elementos k a k".

Para o primeiro ser escolhido, temos n possibilidades – qualquer elemento pode ser escolhido. Para o segundo a ser escolhido, temos n – 1 opções, pois não podemos repetir o primeiro elemento já escolhido.

Para o terceiro, temos n – 2, porque não podemos escolher nenhum dos 2 que já foram escolhidos. E, assim, por diante até que, para o k-ésimo elemento escolhido, teremos n – k +1 opções.

Agora, aplicando o PFC, temos:

n	.	n-1	.	...	.	n-k+1	$= \boldsymbol{A_n^k} = \dfrac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{(n-k)!}}$
1º		**2º**				**Kº**	**Total**

Dessa maneira, temos que o arranjo de n elementos k a k é dado por:

Obs.: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$

3.2. Combinações

Uma combinação consiste em escolher k elementos num total de n, **sem importar a ordem**.

Obs.: quando eu estudei isso anos atrás, eu decorei a palavra “Combinãoções”, para memorizar que na combinação a ordem não importa. Nunca mais confundi combinação com o arranjo.

Nesse caso, podemos partir da fórmula já deduzida para o arranjo, mas precisamos descontar as permutações dos k elementos escolhidos.

Obs.: $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Essa expressão é extremamente importante. É chamada de “combinação de n elementos k a k” ou ainda de “binomial de n k a k”. O termo binomial é muito conhecido num assunto chamado Binômio de Newton e também na Distribuição Binomial vista em Estatística.

Vale a pena conhecer a notação para o número binomial, que é apresentada a seguir.

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Existe, ainda, outras notações que aparecem mais raramente:

$$C_n^k = C(n,k) = C^{n,k}$$

É importante que você conheça todas as notações, pois ambas podem aparecer nas questões de prova.

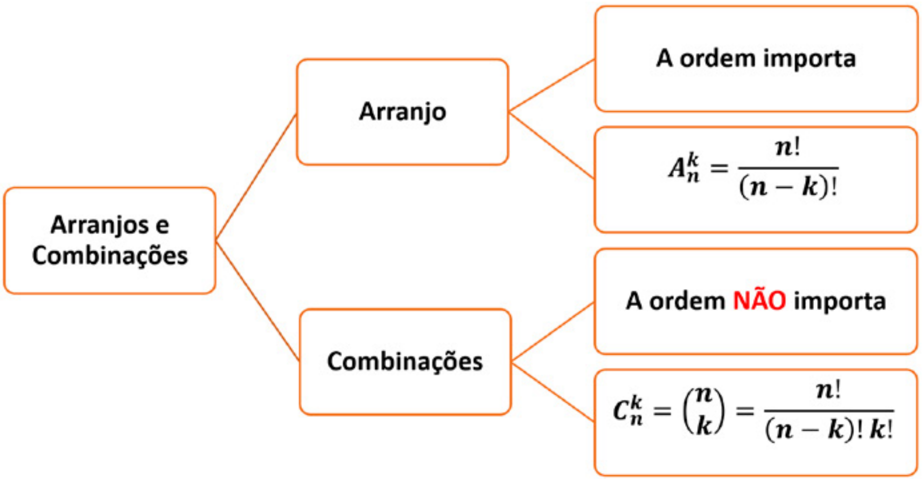


Figura 7: Arranjos e Combinações

Direto do Concurso

013. (CESPE/PGE-PE/ANALISTA ADMINISTRATIVO DE PROCURADORIA/CALCULISTA/2019) A União tem, hoje, 138 estatais sob sua gestão, entre elas o Banco do Brasil S.A., a PETROBRAS e a CAIXA. Dessas 138, somente três devem permanecer sob a gestão da União; as demais serão privatizadas.

Considerando essa afirmação, julgue o próximo item.

Se todas as estatais tiverem a chance de ficar sob a gestão da União, então a quantidade de maneiras distintas de escolher as três empresas que não serão privatizadas será inferior a 230.000.

Vamos escolher 3 empresas dentre as 138 possíveis para não serem privatizadas. Nessa seleção, a ordem não importa.

Tanto faz escolhermos Petrobras, Banco do Brasil e Caixa ou escolher Caixa, Banco do Brasil e Petrobras. Em ambos os casos, nenhuma das três será privatizada. Portanto, devemos usar uma combinação.

$$\binom{138}{3} = \frac{138!}{135!\,3!} = \frac{138.137.136}{3.2.1} = 428536 > 230000$$

Errado.

---

014. (CESPE/POLÍCIA FEDERAL/PAPILOSCOPISTA POLICIAL FEDERAL/2018) Em um processo de coleta de fragmentos papilares para posterior identificação de criminosos, uma equipe de 15 papiloscopistas deverá se revezar nos horários de 8 h às 9 h e de 9 h às 10 h.

Com relação a essa situação hipotética, julgue o item a seguir.

Se dois papiloscopistas forem escolhidos, um para atender no primeiro horário e outro no segundo horário, então a quantidade, distinta, de duplas que podem ser formadas para fazer esses atendimentos é superior a 300.

Temos 15 opções de papiloscopistas para o primeiro horário. Para o segundo horário, deve ser escolhido um profissional distinto, portanto, são 14 possibilidades.

15	**14**	**= 15.14 = 210**
8h às 9h	**9h às 10h**	**Total**

São 210 possibilidades, o que é menor que 300.

Observe que utilizamos nessa questão um arranjo, porque a ordem importa. Se trocarmos a ordem da escolha dos papiloscopistas, trocamos também os seus horários.

Errado.

---

015. (CESPE/SEFAZ-RS/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO FAZENDÁRIO/2018) Sete pessoas se dirigem para formar uma fila em frente ao único caixa de atendimento individual em uma agência bancária. Dessas sete pessoas, quatro são idosos. Um servidor da agência deverá organizar a fila de modo que os idosos sejam atendidos antes dos demais.

Nessa situação, a quantidade de maneiras distintas de se organizar a fila é igual a

a) 5.040.
b) 720.
c) 576.
d) 288.
e) 144.

Para organizar a fila, devemos colocar os idosos na frente dos outros clientes. Além disso, devemos notar que tanto os 4 idosos como os outros 3 clientes podem sofrer permutações nas suas ordenações.

Os 4 idosos podem ser organizados de 4! = 24 formas; e os outros 3 clientes podem ser organizados de 3! = 6 formas.

4!	x	3!	=	4!.3!
Idosos		**Outros**		**Total**

Portanto, o total de possibilidades de organizar a fila é:

$$N = 4!.3! = (4.3.2.1) \cdot (3.2.1) = 24 \cdot 6 = 144$$

Letra e.

016. (CESPE/TRF-1ª REGIÃO/2017) Em uma reunião de colegiado, após a aprovação de uma matéria polêmica pelo placar de 6 votos a favor e 5 contra, um dos 11 presentes fez a seguinte afirmação: "Basta um de nós mudar de ideia e a decisão será totalmente modificada."

Considerando a situação apresentada e a proposição correspondente à afirmação feita, julgue o próximo item.

A quantidade de maneiras distintas de se formar o placar de 6 votos a favor e 5 contra, na decisão do assunto polêmico pelos presentes no referido colegiado, é inferior a 500.

Nesse caso, precisamos escolher 6 presentes para terem uma opinião a favor e 5 presentes para terem uma opinião contrária.

Entre os favoráveis, precisamos escolher 6 presentes no total de 11.

$\binom{11}{6}$	$\cdot$		
A favor		**Contra**	**Total**

Como já escolhemos 6 presentes, sobraram apenas 5. Todos eles precisam ser contrários.

$\binom{11}{6}$	.	$\binom{5}{5}$	
A favor		**Contra**	**Total**

Basta calcular o produto encontrado.

$$\binom{11}{6} = \frac{11!}{6!\,5!} = \frac{11.10.9.8.7}{5.4.3.2.1} = 462$$

$$\binom{5}{5} = 1$$

462	.	1	462
A favor		**Contra**	**Total**

De fato, 462 < 500.

Certo.

RESUMO

Princípios Fundamental da Contagem: se você tem 2 calças **E** 3 camisas, o número de formas que você pode se vestir é:

2	x	3	= 6
Calças	**E**	**Camisas**	**Total**

Quando há o termo "OU", devemos somar as opções;

Se você pode usar 2 sapatos ou 1 tênis, 2 calças e 3 camisas, o número de formas que você pode se vestir é:

(2+1)	X	2	x	3	= 18
Sapatos ou Tênis		**Calças**		**Camisas**	**Total**

OU: soma.

E: multiplica.

Princípio da Casa dos Pombos:

- Se eu tenho 10 camisas e 8 gavetas, então **pelo menos uma gaveta terá mais de uma camisa**;
- Se eu tenho **A** gavetas e queremos saber o número mínimo de camisas para garantir que exista pelo menos uma gaveta com **k** camisas é igual a **k.A + 1**

Não é possível garantir que:

- Há duas gavetas com mais de uma camisa;
- Todas as gavetas têm, pelo menos, uma camisa.

Existe uma gaveta com duas camisas.

Permutações: consiste em mudar a ordem dos elementos

Sem Repetição	Permutações de **n** elementos distintos.	$\boldsymbol{P_n = n!}$
Com Repetição	Devemos dividir pelas permutações dos elementos repetidos	$P_n^{k_1,k_2} = \dfrac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!}$
Circulares	Devemos descontar as **n** possibilidades ao girar o círculo	$PC_n = (n-1)!$

Arranjos e Combinações:

- Sempre que uma questão falar de uma comissão em que as pessoas têm **funções diferentes**, a ordem importa, portanto, você deverá utilizar um **arranjo**;
- Caso a questão fale de uma comissão genérica em que todas as pessoas **têm funções iguais**, a ordem não importa, portanto, você deverá utilizar uma **combinação**. (Lembra-se do "combinãoção"?)

Arranjos	Escolher k elementos dentre n em que a ordem importa.	$\boldsymbol{A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}}$
Combinações	Escolher k elementos dentre n em que a ordem não importa.	$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

QUESTÕES COMENTADAS EM AULA

001. (INÉDITA/2020) Bruna tem 4 camisas, 2 calças, 1 saia e 3 sapatos. De quantas formas diferentes ela pode se vestir?

002. (PGE-RO/TÉCNICO DA PROCURADORIA/2015) Quatro processos, numerados de 1 a 4, deverão ser distribuídos entre três procuradores: Átila, Hércules e Ulisses. Um mesmo procurador pode receber até quatro processos, exceto o procurador Átila, que não pode receber o processo número 2.
O número de maneiras diferentes de se fazer tal distribuição é:
a) 81
b) 64
c) 54
d) 11
e) 8

003. (ESAF/FUNAI/2016) Considere as quatro letras A, C, G e T formando pares de letras nos quais A só forma par com T e C só forma par com G. Indique quantas sequências distintas de três pares ordenados de letras e com repetição podem ser formadas.
a) 4
b) 8
c) 16
d) 32
e) 64

004. (FGV/DPE-RO/TÉCNICO DA DEFENSORIA PÚBLICA/2015) Considere todas as placas de veículos desde NCD-4000 até NCD-9999. O número de placas que possuem os dígitos todos diferentes é:
a) 2.520
b) 3.024
c) 3.528
d) 3.786
e) 4.032

005. (FGV/PREFEITURA DE CUIABÁ-MT/PROFESSOR DE PEDAGOGIA/2015) Em uma sacola há uma bola branca, duas pretas e quatro vermelhas. Não há outras bolas na sacola além dessas que foram citadas.
Retiram-se quatro bolas da urna, aleatoriamente. Sobre as bolas retiradas, é correto afirmar que:

a) Todas são vermelhas.
b) No máximo uma é vermelha.
c) Pelo menos uma é preta.
d) Pelo menos duas são da mesma cor.
e) Pelo menos duas são vermelhas.

006. (FCC/SEDU-ES/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2016) Em uma gaveta há 5 pares de meias pretas, 7 pares de meias vermelhas e 10 pares de meias brancas. O número mínimo de pares de meias que precisam ser retirados da gaveta, sem que se veja a cor, para que certamente sejam retirados pelo menos três pares de meias de cores diferentes é
a) 4.
b) 15.
c) 6.
d) 13.
e) 18.

007. (CESPE/TJ-SE/2014/ADAPTADA) O rito processual de análise de determinado tipo de processo segue as três seguintes fases:

- instrução: após a apresentação da representação e das provas, o juiz decide pela admissibilidade ou não do caso;
- julgamento: admitido o caso, o juiz analisa o mérito para decidir pela culpa ou não do representado;
- apenação: ao culpado o juiz atribui uma pena, que pode ser ou o pagamento de multa, ou a prestação de serviços à comunidade.

Para cada processo do referido tipo, desconsiderando os possíveis erros de decisão, a quantidade de possíveis decisões durante o rito processual é superior a 5.

008. (FCC/TRF-4ª REGIÃO/ANALISTA JUDICIÁRIO – OFICIAL DE JUSTIÇA AVALIADOR FEDERAL/2019) Em um concurso com 5 vagas, os candidatos aprovados serão alocados, cada um, em um dos municípios A, B, C, D ou E. O primeiro colocado foi designado para o município A. O número de possíveis alocações dos outros candidatos aprovados é:
a) 120
b) 24
c) 30
d) 6
e) 4

009. (ESAF/AFRB/2012) Na prateleira de uma estante, encontram-se 3 obras de 2 volumes e 2 obras de 2 volumes, dispondo-se, portanto, de um total de 10 volumes. Assim, o número

de diferentes maneiras que os volumes podem ser organizados na prateleira, de modo que os volumes de uma mesma obra nunca fiquem separados, é igual a:
a) 3.260
b) 3.840
c) 2.896
d) 1.986
e) 1.842

010. (FGV/PC-MA/AUXILIAR DE PERÍCIA MÉDICO-LEGAL/2012) Considere as 24 permutações das letras P, C, E e M. Se colocarmos essas 24 permutações em ordem alfabética, a permutação PCEM ocupará a posição de ordem:
a) 24
b) 21
c) 19
d) 18
e) 17

011. (FGV/AL-BA/TÉCNICO DE NÍVEL SUPERIOR/ECONOMIA/2014) A sigla de Assembleia Legislativa do Estado da Bahia é "ALBA". Embaralhando as letras de ALBA, o número de sequências diferentes que podem ser formadas com essas mesmas 4 letras é:
a) 4
b) 6
c) 8
d) 10
e) 12

012. (CESPE/TRE-MT/2015) Em um campeonato de futebol amador de pontos corridos, do qual participam 10 times, cada um desses times joga duas vezes com cada adversário, o que totaliza exatas 18 partidas para cada. Considerando-se que o time vencedor do campeonato venceu 13 partidas e empatou 5, é correto afirmar que a quantidade de maneiras possíveis para que esses resultados ocorram dentro do campeonato é.
a) superior a 4.000 e inferior a 6.000.
b) superior a 6.000 e inferior a 8.000.
c) superior a 8.000.
d) inferior a 2.000.
e) superior a 2.000 e inferior a 4.000.

013. (CESPE/PGE-PE/ANALISTA ADMINISTRATIVO DE PROCURADORIA/CALCULISTA/2019) A União tem, hoje, 138 estatais sob sua gestão, entre elas o Banco do Brasil S.A., a

PETROBRAS e a CAIXA. Dessas 138, somente três devem permanecer sob a gestão da União; as demais serão privatizadas.
Considerando essa afirmação, julgue o próximo item.
Se todas as estatais tiverem a chance de ficar sob a gestão da União, então a quantidade de maneiras distintas de escolher as três empresas que não serão privatizadas será inferior a 230.000.

014. (CESPE/POLÍCIA FEDERAL/PAPILOSCOPISTA POLICIAL FEDERAL/2018) Em um processo de coleta de fragmentos papilares para posterior identificação de criminosos, uma equipe de 15 papiloscopistas deverá se revezar nos horários de 8 h às 9 h e de 9 h às 10 h.
Com relação a essa situação hipotética, julgue o item a seguir.
Se dois papiloscopistas forem escolhidos, um para atender no primeiro horário e outro no segundo horário, então a quantidade, distinta, de duplas que podem ser formadas para fazer esses atendimentos é superior a 300.

015. (CESPE/SEFAZ-RS/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO FAZENDÁRIO/2018) Sete pessoas se dirigem para formar uma fila em frente ao único caixa de atendimento individual em uma agência bancária. Dessas sete pessoas, quatro são idosos. Um servidor da agência deverá organizar a fila de modo que os idosos sejam atendidos antes dos demais.
Nessa situação, a quantidade de maneiras distintas de se organizar a fila é igual a
a) 5.040.
b) 720.
c) 576.
d) 288.
e) 144.

016. (CESPE/TRF-1ª REGIÃO/2017) Em uma reunião de colegiado, após a aprovação de uma matéria polêmica pelo placar de 6 votos a favor e 5 contra, um dos 11 presentes fez a seguinte afirmação: “Basta um de nós mudar de ideia e a decisão será totalmente modificada.”
Considerando a situação apresentada e a proposição correspondente à afirmação feita, julgue o próximo item.
A quantidade de maneiras distintas de se formar o placar de 6 votos a favor e 5 contra, na decisão do assunto polêmico pelos presentes no referido colegiado, é inferior a 500.

QUESTÕES DE CONCURSO

017. (CESPE/TRE-GO/TÉCNICO JUDICIÁRIO/2015) As prestações de contas das campanhas dos 3 candidatos a governador de determinado estado foram analisadas por 3 servidores do TRE desse estado. Considerando que um servidor pode analisar nenhuma, uma ou mais de uma prestação de contas e que, por coincidência, cada um dos 3 candidatos é parente de um dos 3 servidores, julgue o item que se segue.
A quantidade de maneiras distintas de se distribuírem as prestações de contas entre os 3 servidores de modo que nenhum deles analise as contas de um parente é superior a 5.

As contas de cada candidato podem ser avaliadas por quaisquer um dos dois servidores que não seja seu parente.
Como não há nenhum problema em um servidor analisar nenhuma ou duas contas, temos que é só aplicar o Princípio Fundamental da Contagem.

$$\underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \quad \underset{\textbf{Total}}{\underline{=2.2.2=8}}$$

Certo.

018. (FUNDATEC/PREFEITURA DE SAPUCAIA DO SUL-RS/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2019) O número de anagramas da palavra SAPUCAIA é:
a) 8!
b) 8!/3!
c) 8!.3!
d) 8! + 3!
e) 8! – 3!

Observe que a palavra SAPUCAIA tem 8 letras, mas 3 delas são repetidas. Assim, devemos utilizar a fórmula das permutações com repetição.

$$N = \frac{8!}{3!}$$

Nessa questão, o examinador nos poupou o trabalho de fazer as contas. Deixou as respostas diretamente em função dos fatoriais. Maravilha, não acha?
Letra b.

019. (CESPE/MEC/2014) A análise de requerimentos de certificação de entidades educacionais, no âmbito do Ministério da Educação, será realizada por uma equipe formada por, no mínimo, um analista contábil, um analista educacional e um analista processual. Considerando essa situação hipotética, julgue os itens subsecutivos.
A partir de cinco analistas contábeis, sete analistas educacionais e seis analistas processuais, é possível formar mais de 300 equipes distintas com exatamente um analista de cada especialidade em cada equipe.

Aplicação direta do PFC. Temos 5 opções para o analista contábil, 7 opções para o analista educacional e 6 opções para o analista processual.

5	x	7	x	6	=5.7.6 = 210
Analista Contábil		**Analista Educacional**		**Analista Processual**	**Total**

Portanto, o número de opções é menor que 300.
Errado.

020. (CESPE/TJ-PA/ANALISTA JUDICIÁRIO/PROGRAMADOR/2020) Em um sistema de acesso a uma rede de computadores, os usuários devem cadastrar uma senha de 6 dígitos, que deve ser formada da seguinte maneira:

- os 2 primeiros dígitos devem ser letras minúsculas distintas, escolhidas entre as 26 letras do alfabeto;
- os demais 4 dígitos da senha devem ser números inteiros entre 0 e 9, admitindo-se repetição.

Nessa situação, a quantidade de senhas diferentes que podem ser formadas é igual a:
a) 3.674.
b) 5.690.
c) 1.965.600.
d) 3.276.000.
e) 6.500.000.

A senha deve ter 6 algarismos. Vamos colocar as 6 posições, especificando em quais delas devemos ter letras ou números.
Na primeira posição, devemos ter qualquer letra – são 26 opções. Na segunda posição, podemos ter qualquer letra que não tenha sido a escolhida para a primeira posição. Logo, as possibilidades se reduzem para 25.

No caso de números, é possível a repetição, portanto, temos 10 opções de números em cada uma das quatro posições a ser ocupada.

26	x	25	x	10	x	10	x	10	x	10	= 6500000
Letra		**Letra**		**N.**		**N.**		**N.**		**N.**	**Total**

São possíveis 6.500.000 combinações.

Letra e.

---

021. (CESPE/BANCO DO BRASIL/ESCRITURÁRIO/2008) A quantidade de permutações distintas que podem ser formadas com as 7 letras da palavra REPETIR, que começam e terminam com R, é igual a 60.

Nesse caso, a primeira e a última letra estão travadas, ou seja, devem ser a letra R. Quanto às demais posições, devemos embaralhar as demais 5 letras, das quais 2 estão repetidas. Trata-se, portanto, de uma permutação com repetição

1	.	P_5^2	.	1	.	
R		**EPETI**		**R**		**Total**

$$N = P_5^2 = \frac{5!}{2!} = \frac{5.4.3.2!}{2!} = 5.4.3 = 60$$

Certo.

---

022. (FCC/SEDU-ES/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2016) São realizados três lançamentos, em sequência, de um dado com faces numeradas de 1 a 6. Com os resultados obtidos, em cada três lançamentos, forma-se um número de três algarismos. Por exemplo: se os resultados obtidos foram, nessa ordem, 2; 6 e 3, o número formado será 263. A quantidade de números diferentes, e que sejam menores do que 500, que podemos formar dessa maneira é igual a:

a) 499.
b) 186.
c) 399.
d) 144.
e) 400.

Como queremos os números menores que 500, a única restrição do problema é que o primeiro dado seja um dos números {1, 2, 3, 4}. São, portanto, 4 opções para o primeiro lançamento.

Tome cuidado, porque o enunciado fala em “menores do que 500”, portanto, o próprio número 500 não nos interessa.

4	x	6	x	6	= 144
					Total

Letra d.

---

023. (CESPE/ANVISA/TÉCNICO ADMINISTRATIVO/2016) Situação hipotética: A ANVISA, com objetivo de realizar a regulação de um novo medicamento, efetua as análises laboratoriais necessárias. Essas análises são assistidas por um grupo de 4 dos seus 8 técnicos farmacêuticos. Desses técnicos, 3 possuem cargo de chefia de equipe e por isso não trabalham juntos. Assertiva: Nessa situação, considerando que em cada uma das equipes participa sempre apenas um dos três técnicos farmacêuticos chefes, então a quantidade de equipes distintas com 4 técnicos farmacêuticos que poderão ser formadas é inferior a 25.

Na equipe, tem-se 5 técnicos comuns e 3 chefes. Precisamos escolher 1 chefe e 3 comuns para a equipe de 4 técnicos. Então, temos o seguinte:

$\binom{3}{1}$	.	$\binom{5}{3}$	
Chefe		**Comuns**	**Total**

Agora, basta calcular os binomiais.

$$\binom{3}{1} = 3$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5.4}{2.1} = 10$$

Agora, basta calcular:

3	.	**10**	=3.10 = 30 > 25
Chefe		**Comuns**	**Total**

Perceba que sempre utilizamos o PFC.

Errado.

---

024. (CESPE/MPOG/ANALISTA EM TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO/2015) Determinado órgão público é composto por uma diretoria geral e quatro secretarias; cada secretaria

é formada por três diretorias; cada diretoria tem quatro coordenações; cada coordenação é constituída por cinco divisões, com um chefe e sete funcionários subalternos em cada divisão. A respeito desse órgão público, julgue o item seguinte, sabendo que cada executivo e cada funcionário subalterno só pode ocupar um cargo nesse órgão.
Se, entre onze servidores previamente selecionados, forem escolhidos: sete para compor determinada divisão, um para chefiar essa divisão, um para a chefia da coordenação correspondente, um para a diretoria e um para a secretaria, haverá menos de 8.000 maneiras distintas de se fazer essas escolhas.

Vamos fazer o problema por partes. Primeiramente, escolheremos os quatro chefes de funções específicas.
Para isso, precisamos escolher 4 em 11, importando a ordem, porque cada um tem uma função diferente. Trata-se, portanto, de um arranjo.

11	.	10	.	9	.	8	=11.10.9.8
Chefe da Divisão		**Chefe da Coordenação**		**Diretoria**		**Secretaria**	**Total**

$$A_{11}^{4} = \frac{11!}{7!} = 11.10.9.8 = 7920$$

Como já escolhemos os quatro chefes, sobraram 7 funcionários. Todos eles devem compor a divisão. Portanto, o número de formas é mesmo 7920, que é inferior a 8000.
Certo.

---

025. (CESPE/FUB/TÉCNICO DE TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO/2015) Com as cinquenta e duas cartas de um baralho, é possível formar mais de 2.500.000 jogos distintos de 5 cartas.

Formar um jogo de 5 cartas é a mesma coisa de escolher 5 cartas dentre as 52 do baralho. Nesse caso, a ordem não importa. Por isso, utilizaremos uma combinação.

$$C_{52}^{5} = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!\,47!} = \frac{52.51.50.49.48}{5.4.3.2.1} = 2598960 > 2500000$$

Certo.

---

026. (CESPE/POLÍCIA FEDERAL/AGENTE DA POLÍCIA FEDERAL/2014) Um batalhão é composto por 20 policiais: 12 do sexo masculino e 8 do sexo feminino. A região atendida pelo batalhão é composta por 10 quadras e, em cada dia da semana, uma dupla de policiais policia cada uma das quadras.

Com referência a essa situação, julgue o item subsequente.

Se a escala dos policiais for feita de modo a diversificar as duplas que policiam as quadras, então, se determinada dupla policiar a quadra X em determinado dia, essa mesma dupla voltará a policiar a quadra X somente mais de seis meses após aquele dia.

Para isso, precisamos saber o número de duplas que podem ser formadas. Como não há nenhuma restrição a respeito do sexo dos policiais nas duplas, vamos considerar que precisamos escolher 2 policiais dentre os 20 no total.

$$C_{20,2} = \binom{20}{2} = \frac{20!}{2!\,18!} = \frac{20.19}{2.1} = 190$$

Dessa maneira, se uma dupla for formada hoje, ela só precisará se repetir daqui a 190 dias, ou seja, mais de 6 meses.

Certo.

027. (CESPE/PGE-PE/ANALISTA ADMINISTRATIVO DE PROCURADORIA/CALCULISTA/2019) Entre os 12 processos administrativos de determinado setor público, 5 se referem a adicional de periculosidade. Para agilidade na discussão e no julgamento, esses 12 processos serão agrupados em pares. Nesse caso, a quantidade de pares de processos distintos que podem ser formados de modo que pelo menos um dos processos se refira a adicional de periculosidade é igual a 35.

Podemos utilizar a ideia de:

- calcular todos as formas possíveis de escolher um par de processos distintos:

$$Total\ de\ Possibilidades = \binom{12}{2} = \frac{12.11}{2.1} = 66$$

- excluir as situações em que o par de processos não é formado:

$$não\ interessam = \binom{7}{2} = \frac{7.6}{2.1} = 21$$

Dessa forma, o total de processos que incluem pelo menos um processo referente a adicional de periculosidade é igual a:

$$N = 66 - 21 = 45$$

Errado.

028. (CESPE/TC-DF/TÉCNICO DE ADMINISTRAÇÃO PÚBLICA/2014) Considerando que, em um planejamento de ações de auditoria, a direção de um órgão de controle tenha mapeado a existência de 30 programas de governo passíveis de análise, e sabendo que esse órgão dispõe de 15 servidores para a montagem das equipes de análise e que cada equipe deverá ser composta por um coordenador, um relator e um técnico, julgue os próximos itens.
A quantidade de maneiras distintas de serem escolhidos 3 dos referidos servidores para a montagem de uma equipe de análise é superior a 2.500.

Como os três servidores possuem funções diferentes, a ordem de escolha importa. Portanto, devemos fazer um arranjo de 3 servidores em um total de 15.

$$A_{15}^{3} = \frac{15!}{12!} = 15.14.13 = 2730 > 2500$$

Certo.

029. (CESPE/TC-DF/TÉCNICO DE ADMINISTRAÇÃO PÚBLICA/2014) Considerando que, em um planejamento de ações de auditoria, a direção de um órgão de controle tenha mapeado a existência de 30 programas de governo passíveis de análise, e sabendo que esse órgão dispõe de 15 servidores para a montagem das equipes de análise e que cada equipe deverá ser composta por um coordenador, um relator e um técnico, julgue os próximos itens.
A quantidade de maneiras distintas de se escolherem 3 desses programas para serem acompanhados pelo órgão é inferior a 4.000.

Quando escolhemos 3 programas para serem analisados, a ordem não importa. Portanto, devemos fazer uma combinação de 30 programas 3 a 3.

$$C_{30}^{3} = \binom{30}{3} = \frac{30.29.28}{3.2.1} = 4060 > 4000$$

Errado.

030. (CESPE/SAEB-BA/2011) O número total de partidas em um campeonato de pingue-pongue com 20 participantes em que cada competidor jogue uma única vez com cada um dos demais é igual a:

a) 400
b) 380
c) 200
d) 190

Uma partida é formada por dois competidores, sem importar a ordem. Em outras palavras, a partida A x B é igual à partida B x A.
Por isso, devemos usar o conceito de combinação.

$$C_{20}^{2} = \binom{20}{2} = \frac{20!}{18!\,2!} = \frac{20.19}{2.1} = 190$$

Letra d.

---

031. (CESPE/MEC/2014) A análise de requerimentos de certificação de entidades educacionais, no âmbito do Ministério da Educação, será realizada por uma equipe formada por, no mínimo, um analista contábil, um analista educacional e um analista processual. Considerando essa situação hipotética, julgue os itens subsecutivos.
A partir de cinco analistas contábeis, sete analistas educacionais e seis analistas processuais, a quantidade de maneiras distintas de se formar equipes com exatamente três analistas de cada especialidade em cada equipe é superior a 5.000.

Precisamos escolher 3 analistas contábeis dentre 5, depois 3 analistas educacionais dentre 7 e, por fim, 3 analistas processuais dentre 6. Dentro de cada escolha, não há funções diferentes, portanto, não existe preferência de ordem.
Como não importa a ordem, devemos usar o conceito de combinação.

$\binom{5}{3}$	x	$\binom{7}{3}$	x	$\binom{6}{3}$	$\binom{5}{3}\binom{7}{3}\binom{6}{3}$
Analista Contábil		**Analista Educacional**		**Analista Processual**	**Total**

Temos, portanto, que o número de possibilidades é:

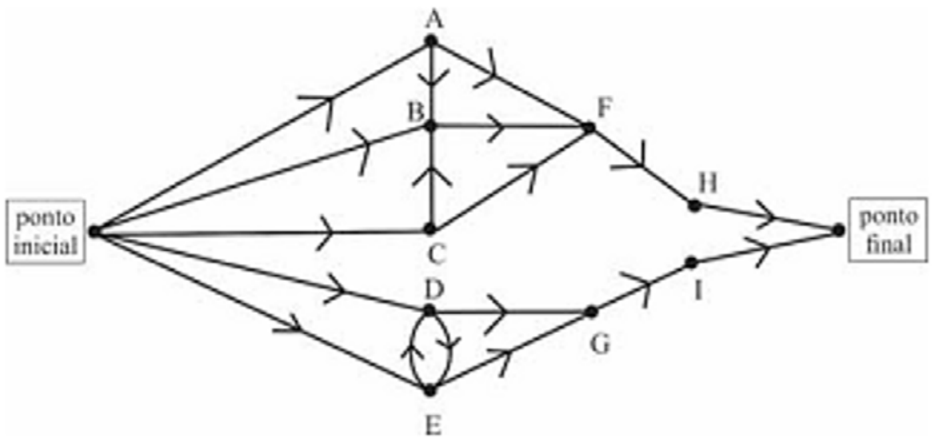
$$N = \binom{5}{3}\binom{7}{3}\binom{6}{3} = \frac{5!}{3!\,2!}\frac{7!}{3!\,4!}\frac{6!}{3!\,3!} = \frac{5.4}{2.1}\frac{7.6.5}{3.2.1}\frac{6.5.4}{3.2.1}$$

$$N = 10.35.20 = 7000 > 5000$$

Certo.

---

032. (CESPE/PREFEITURA DE SÃO PAULO-SP/ASSISTENTE DE GESTÃO DE POLÍTICAS PÚBLICAS I/2016) A questão da mobilidade urbana é um dos problemas que mais preocupam a população de grandes centros, como a cidade de São Paulo. A figura apresentada mostra as possibilidades de vias, em um centro urbano, para se deslocar de um ponto inicial até um ponto final, passando pelos pontos intermediários A, B, C, D, E, F, G, H ou I. Cada seta indica o sentido do fluxo de uma via ligando dois desses pontos. Dois caminhos que permitem o deslocamento desde o ponto inicial até o ponto final são denominados distintos se um deles incluir pelo menos uma via distinta. Considerando essas informações, a quantidade de caminhos distintos que permitem o deslocamento do ponto inicial até o ponto final é:



a) inferior a 7.
b) igual a 7.
c) igual a 8.
d) igual a 9.
e) superior a 9

Perceba que o primeiro passo pode levar aos pontos A, B, C, D ou E. Tem-se, portanto, 5 opções.
Saindo dos pontos A e C, tem-se dois caminhos para cada um.
Saindo do ponto B, tem-se apenas um único caminho:
PI – B – F – H – PF
Saindo do ponto D, tem-se três caminhos possíveis:
PI – D – G – I – PF
PI – D – E – G – I – PF
PI – D – E – D – G – I – PF.
Saindo do ponto E, tem-se também três caminhos possíveis:
PI – E – G – I – PF
PI – E – D – G – I – PF
PI – E – D – E – G – I – PF

	Passo 1	Continuação	Total
	1 opção (B)	1 opção	1.1 = 1
OU	2 opções (A e C)	2 opções	2.2 = 4
	2 opções (D e E)	3 opções	2.3 = 6
			1 + 4 + 6 = 11

São, portanto, onze caminhos.

Letra e.

---

033. (FGV/SSP-AM/TÉCNICO DE NÍVEL SUPERIOR/2015) Uma urna A contém cinco bolas numeradas com os números 1, 3, 5, 7 e 9. Uma urna B também contém cinco bolas, mas numeradas com os números 0, 2, 4, 6 e 8.

Retira-se, aleatoriamente, uma bola de cada urna e somam-se os números das duas bolas.

O número de valores diferentes possíveis para essa soma é:

a) 25
b) 21
c) 17
d) 13
e) 9

Agora, vamos ter que usar o PFC de uma maneira mais sutil.

Perceba que, se selecionarmos o número 1 na urna A, teremos 5 opções para a urna B. Vejamos:

1 + 0 = 1 **1 + 2 = 3** **1 + 4 = 5** **1 + 6 = 7** **1 + 8 = 9**

Agora, quando selecionamos o número 3 na urna A, não temos mais 5 opções, pois várias delas conduzem a somas que já foram encontradas anteriormente. Vejamos:

3 + 0 = 3	3 + 2 = 5	3 + 4 = 7	3 + 6 = 9	3 + 8 = 11
X	X	X	X	ok

O mesmo também quando selecionamos 5, 7 e 9 na urna A. Para cada um desse números, a única novidade será se somarmos a 8. Vejamos:

5 + 8 = 13	7 + 8 = 15	9 + 8 = 17
ok	ok	ok

Podemos contar todas as opções que já encontramos e chegamos a 9. Porém, vamos montar uma tabela para utilizar em que você pode visualizar a utilização do PFC.
Precisamos selecionar uma bola da urna A **E** uma bola da urna B. Por isso, multiplicamos as opções nas urnas A e B.

	Urna A	**Urna B**	**Total**
OU	1 opção (1)	5 opções (0, 2, 4, 6, 8)	1.5 = 5
	4 opções (3, 5, 7 e 9)	1 opção (8)	4.1 = 4
			5 + 4 = 9

Letra e.

---

034. (FCC/TRF-1ª REGIÃO/TÉCNICO JUDICIÁRIO/ÁREA ADMINISTRATIVA/2007) Um técnico judiciário foi incumbido da montagem de um manual referente aos Princípios Fundamentais da Constituição Federal. Sabendo que, excluídas a capa e a contracapa, a numeração das páginas foi feita a partir do número 1 e, ao concluí-la, constatou-se que foram usados 225 algarismos, o total de páginas que foram numeradas é
a) 97
b) 99
c) 111
d) 117
e) 126

Questão bem interessante. Nas páginas 1 a 9, foi usado apenas um algarismo. Portanto, um total de 9 algarismos até então.
Entre a página 10 e a 99, foram usados dois algarismos por página. Como são 90 páginas, foi necessário um total de 180 algarismos para numerá-las.
Até o momento, já foram utilizados 189 algarismos. Portanto, restam ainda 225-189 = 36.
A partir da página 100, vão ser necessários três algarismos por página. Portanto, os 36 algarismos que ainda restam serão suficientes para cobrir 12 páginas. Dessa forma, da página 100 à página 111 – cuidado para não pensar que é a página 112, ok?
Sendo assim, foram numeradas desde a página 1 até a página 111, perfazendo o total de 111 páginas.
Letra c.

---

035. (CESPE/SEFAZ-RS/AUDITOR-FISCAL DA RECEITA ESTADUAL/2019) Os funcionários de uma repartição foram distribuídos em sete grupos de trabalhos, de modo que cada funcionário participa de exatamente dois grupos, e cada dois grupos têm exatamente um funcionário em comum.

Nessa situação, o número de funcionários da repartição é igual a

a) 7.
b) 14.
c) 21.
d) 28.
e) 35.

Para garantir que cada dois grupos tenham exatamente um funcionário em comum, temos que os 7 grupos devem ser formados por 6 funcionários cada – um funcionário é em comum com cada um dos outros 6 grupos.

Como cada funcionário participa de dois grupos, precisamos dividir o número de funcionários por 2.

$$N = \frac{7.6}{2} = 21$$

Para fins de visualização, podemos construir os seguintes grupos. São 7 grupos cada um com 6 funcionários. Note que todos os funcionários (A a U) pertencem simultaneamente a exatamente dois grupos e que cada dois grupos possuem exatamente um funcionário em comum.

G1: ABCDEF
G2: AGHIJK
G3: BGLMNO
G4: CHLPQR
G5: DIMPST
G6: EJNQSU
G7: FKORTU

Contando as letras ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTU são realmente 21 letras.

Letra c.

036. (INÉDITA/2020) Em uma lanchonete, há 5 sabores diferentes de sanduíches, 6 sabores diferentes de sucos e 3 sabores de sobremesas. Um pedido é composto por, no máximo, um sanduíche, um suco e uma sobremesa, mas não necessariamente. Sendo assim, é possível que o cliente peça somente um suco ou somente um sanduíche, mas ele não pode pedir dois sanduíches no mesmo pedido. Determine quantos pedidos diferentes podem ser feitos nessa lanchonete.

Pode parecer uma questão boba, mas é um problema muito importante para a logística. Cada pedido diferente representa uma SKU (skilled unit) e, portanto, será monitorado pelo setor de logística de uma empresa.

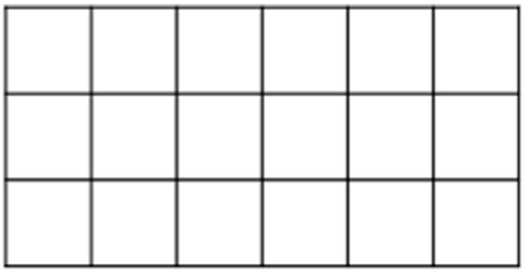
De qualquer maneira, podemos dizer que há 6 opções diferentes de sanduíches: além dos 5 do cardápio, o cliente tem a opção de não pedir nenhum sanduíche; o mesmo é válido para os sabores diferentes de sucos que são 7, pois o cliente pode não pedir nenhum. Assim, temos:

(5+1)	x	(6+1)	x	(3+1)	**=6.7.4 = 168**
Sanduíches		**Sucos**		**Sobremesas**	**Total**

Há um total de 168 pedidos diferentes. Convém notar que um desses pedidos é um pedido vazio, pois não contém nenhum sanduíche, nenhum suco e nenhuma sobremesa. Como o problema não fez nenhuma restrição à existência de pedidos vazios, esse pedido deve ser considerado.

168.

037. (ESAF/AFRFB/2009) Considere um retângulo formado por pequenos quadrados iguais, conforme a figura abaixo. Ao todo, quantos quadrados de quaisquer tamanhos podem ser contados nessa figura?

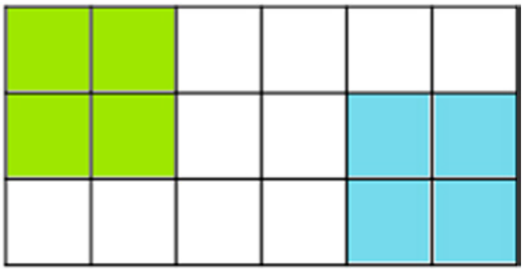


a) 128
b) 100
c) 63
d) 32
e) 18

Perceba que é possível formar quadrados de tamanho 1, 2 e 3 nessa figura.

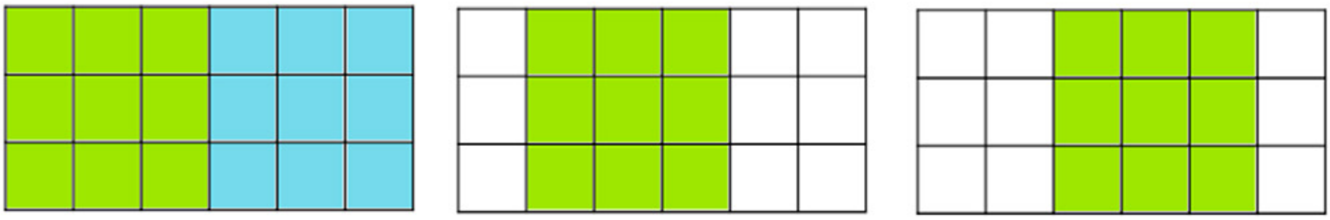
Para os quadrados de tamanho 1, podemos escolher qualquer uma das 6 colunas e qualquer uma das 3 linhas. São, portanto, 6.3 = 18 possibilidades.

Para os quadrados de tamanho 2, já é um pouco diferente.



O quadrado azul no canto inferior direito é o último quadrado possível e ele se inicia na segunda linha e na quinta coluna. De fato, não é possível que um quadrado de tamanho 2 comece na última linha ou na última coluna, pois a figura acabaria. Sendo assim, há 5.2 = 10 possibilidades de quadrados de tamanho 2.

Por fim, para os quadrados de tamanho 3, eles só podem iniciar na primeira linha e só há quatro possibilidades de coluna. Eles não podem se iniciar nem na quinta nem na última coluna, pois, nesse caso, a figura acabaria.



Sendo assim, há 4.1 = 4 possibilidades de quadrados de tamanho 3.

Tamanho	**Colunas**	**Linhas**	**Total**
1	6	3	6.3 = 18
2	5	2	5.2 = 10
3	4	1	4.1 = 4
Total			18+10+4 = 32

Letra d.

---

038. (FGV/TJ-PI/ANALISTA JUDICIÁRIO/OFICIAL DE JUSTIÇA/2015) Em um saco A há somente fichas vermelhas e em um saco B há somente fichas amarelas, sendo 7 fichas em cada saco. Retiram-se 3 fichas do saco A, que são então colocadas no saco B. Depois, retiram-se aleatoriamente 3 fichas do saco B, que são então colocadas no saco A. É correto concluir que ao final do procedimento descrito:

a) há no máximo 4 fichas vermelhas no saco A

b) há exatamente 4 fichas vermelhas no saco

c) há exatamente 4 fichas amarelas no saco

d) o número de fichas amarelas no saco A é menor do que o número de fichas vermelhas no saco B

e) o número de fichas vermelhas no saco A é igual ao número de fichas amarelas no saco B.

O saco A originalmente tinha 7 fichas vermelhas – que vamos representar por 7V. O saco B tinha originalmente 7 fichas amarelas – que vamos representar por 7A.

Quando foram retiradas 3 fichas do saco A, ele passou a ter apenas 4V, enquanto que o saco passou B passou a ter 7A + 3V.

Na segunda etapa, serão retiradas 3 fichas aleatórias do saco B que podem ser amarelas ou vermelhas. Suponha que sejam x fichas vermelhas retiradas do saco B. Teremos, portanto, que serão retiradas (3-x) fichas amarelas. Sendo assim, pode-se escrever:

A: 4V + xV + (3-x)A = (4+x)V + (3-x)A

B: 3V – xV + 7A – (3-x)A = (3-x)V + (7-3+ x)a = (3- x)V + (4+ x)A

Sendo assim, o número de fichas vermelhas no saco B é igual ao número de fichas amarelas do saco A.

Letra e.

---

039. (FCC/TRT-4ª REGIÃO/RS/ANALISTA JUDICIÁRIO/TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO/2015) Em uma caixa há 30 bolas, numeradas de 1 a 30, todas com numeração diferente. O menor número de bolas que devem ser retiradas ao acaso dessa caixa para se obter, com certeza, duas bolas com numeração ímpar e menor que 19 é igual a

a) 24.

b) 23.

c) 21.

d) 19.

e) 22.

As bolas com numeração ímpar e menor que 19 são as que pertencem ao conjunto A = {1, 3, 5…, 17} compondo um total de 9 elementos.

Perceba que, como o enunciado falou apenas em “menor que 19”, não podemos incluir a bola com o número 19 no conjunto A.

Por outro lado, as bolas que não interessam ao problema são as demais 21.

Agora, devemos imaginar o pior caso em que demoramos o máximo possível para tirar as bolas do conjunto A. Nesse caso, tiraríamos as 21 bolas que não pertencem a esse conjunto. Então, as duas bolas seguintes seriam necessariamente do conjunto A.

Portanto, é necessário retirar o mínimo de 23 bolas para garantir que, pelo menos, duas delas pertencem ao conjunto A.

Letra b.

---

040. (FCC/TJ-PE/2012) A palavra GOTEIRA é formada por sete letras diferentes. Uma sequência dessas letras, em outra ordem, é TEIGORA. Podem ser escritas 5040 sequências diferentes com essas sete letras. São 24 as sequências que terminam com as letras GRT, nessa ordem, e começam com as quatro vogais. Dentre essas 24, a sequência AEIOGRT é a primeira delas, se forem listadas alfabeticamente. A sequência IOAEGRT ocuparia, nessa listagem alfabética, a posição de número:

a) 11
b) 13
c) 17
d) 22
e) 23

Em um primeiro momento, devemos descobrir quantas sequências de letras desejadas vêm antes do alfabeto de IOAEGRT.

Vamos separar em dois casos. O primeiro caso contém as palavras que começam em A ou E. Nesse caso, elas necessariamente vêm antes de IOAEGRT.

Para a primeira posição, temos duas possibilidades (A ou E). Para a segunda posição, restam 3 possibilidades, pois precisamos excluir as letras GRT e também a letra que já foi escolhida para a primeira posição.

2	x	3	x	2	X	1	=2.3.2 = 12
1		2		3		4	Total

Além disso, a letra pode iniciar em I. Nesse caso, a segunda letra não pode ser O, pois a menor sequência já seria IOAEGRT. Sendo assim, a segunda letra deve ser necessariamente A ou E.

1	x	2	x	2	X	1	=1.2.2.2 = 4
1		2		3		4	Total

Sendo assim, existe um total de 12 + 4 = 16 combinações que vêm antes de IOAEGRT no alfabeto. Portanto, IOAEGRT ocupa a posição de número 17.

Letra c.

041. (FGV/CODESP-SP/ADVOGADO/2010) Há seis contêineres diferentes que deverão ser empilhados, três mais pesados embaixo e três mais leves em cima. O número de maneiras de se fazer essa arrumação, mantendo os três mais pesados embaixo e os três mais leves em cima é:

a) 18
b) 6
c) 9
d) 36
e) 72

Temos três posições tanto em cima como embaixo. Porém, não podemos misturar os contêineres de cima com os de baixo, porque os mais pesados devem ficar embaixo e os mais leves em cima.
Sendo assim, para os contêineres, do andar de cima, temos 3 contêineres que devem ser organizados em 3 posições. Isso equivale ao conceito de permutação.
O mesmo se aplica aos contêineres de baixo.

				Total
Superior	3	2	1	=3.2.1=6
Inferior	3	2	1	=3.2.1=6

Agora, devemos utilizar o Princípio Fundamental da Contagem.

6	.	6		= 6.6 = 36
Superior		**Inferior**		**Total**

Letra d.

042. (FCC/BANRISUL/ESCRITURÁRIO/2019) Ana e Beatriz são as únicas mulheres que fazem parte de um grupo de 7 pessoas. O número de comissões de 3 pessoas que poderão ser formadas com essas 7 pessoas, de maneira que Ana e Beatriz não estejam juntas em qualquer comissão formada, é igual a:
a) 20.
b) 15.
c) 30.
d) 18.
e) 25.

Questão bem interessante. Vamos calcular o total de comissões possíveis que poderiam ser formadas com as 7 pessoas:

$$N = \binom{7}{3} = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7.6.5.4!}{4!\,3.2.1} = \frac{7.6.5}{3.2.1} = 7.5 = 35$$

Agora, vamos excluir todas as comissões em que Ana e Beatriz estejam juntas. Para isso, precisamos escolher uma pessoa para completar a comissão.

1	.	1	.	5	=	5
Ana		**Beatriz**		**3ª Mulher**		**Total de Possibilidades**

Dessa forma, devem ser excluídas 5 comissões possíveis, em que Ana e Beatriz simultaneamente estejam presentes.

$$N = 35 - 5 = 30$$

Letra c.

---

043. (FGV/MRE/OFICIAL DE CHANCELARIA/2016) André, Beatriz e Carlos são adultos, Laura e Júlio são crianças e todos vão viajar em um automóvel com 5 lugares, sendo 2 na frente e 3 atrás. Dos adultos, somente Carlos não sabe dirigir. As crianças viajarão atrás, mas Júlio faz questão de ficar em uma janela. O número de maneiras diferentes pelas quais essas pessoas podem ocupar os cinco lugares do automóvel é:

a) 12
b) 16
c) 18
d) 20
e) 24

Uma questão bem inteligente. Creio que a melhor maneira de fazer é em dois passos:
1) calculamos de quantas maneiras é possível organizar os ocupantes dos bancos da frente;
2) calculamos de quantas maneiras é possível organizar os ocupantes dos bancos de trás.
Para os bancos da frente, temos que a cadeira do motorista só pode ser ocupada por 2 pessoas (Beatriz e André). Já a cadeira do carona pode ser ocupada por outras 2 pessoas (Carlos e a pessoa que não foi escolhida para motorista).
Portanto, para os bancos da frente, temos:

2	.	2	= 2.2 = 4
Motorista		**Copiloto**	**Bancos da Frente**

No banco de trás, vamos escolher primeiro a posição de Júlio. Ele só pode ficar em uma das janelas, portanto, só temos duas opções para alocá-lo.

Os demais 2 passageiros (Laura e o adulto que sobrou) podem ocupar qualquer posição, portanto, trata-se de uma permutação de dois elementos. Podemos escrever assim:

2	.	2	1	= 2.2 = 4
Júlio		**Laura**	**Adulto**	**Bancos de Trás**

Perceba que calculamos de formas diferentes o número de maneiras de ocupar os bancos da frente e os bancos de trás, porque escolhemos o modo mais fácil em ambos os casos.

Por fim, para calcular o número de formas de organizar todos os passageiros, basta aplicar o Princípio Fundamental da Contagem.

4	.	4	= 4.4 = 16
Frente		**Trás**	**Total**

Letra b.

---

044. (CESPE/TJ-SE/TÉCNICO JUDICIÁRIO/2014) Um grupo de 15 turistas que planeja passear pelo rio São Francisco, no Canyon do Xingó, em Sergipe, utilizará, para o passeio, três barcos: um amarelo, um vermelho e um azul. Cada barco tem capacidade máxima para 8 ocupantes e nenhum deles deixará o porto com menos de 3 ocupantes.

Com base nessa situação hipotética, julgue os itens seguintes.

A quantidade de maneiras distintas de escolher 8 turistas para ocupar o barco azul e 7 para ocupar o barco amarelo é inferior a $8^2 \times 7^2$.

Precisamos escolher 8 turistas dentre os 15 para ocupar o barco azul. Devemos usar uma combinação, porque não importa a ordem em que eles entram no barco. Os demais 7 estarão automaticamente escolhidos para o barco amarelo.

$$C_{15,8} = \binom{15}{8} = \frac{15!}{8!\,7!} = \frac{15.14.13.12.11.10.9}{7.6.5.4.3.2.1} = 6435 > 3136$$

O número fornecido pelo enunciado $8^2.7^2 = 3136$, portanto, vimos que a combinação citada é, na verdade, superior ao proposto pelo enunciado.

Errado.

---

045. (CESPE/TJ-SE/TÉCNICO JUDICIÁRIO/2014) Um grupo de 15 turistas que planeja passear pelo rio São Francisco, no Canyon do Xingó, em Sergipe, utilizará, para o passeio, três barcos: um amarelo, um vermelho e um azul. Cada barco tem capacidade máxima para 8 ocupantes e nenhum deles deixará o porto com menos de 3 ocupantes.

Com base nessa situação hipotética, julgue os itens seguintes.

A quantidade de maneiras distintas de distribuir os 15 turistas pelos 3 barcos, de forma que cada barco seja ocupado por exatamente 5 turistas, é superior a $2^2 \times 3^2 \times 7^2 \times 11^2$.

Nesse caso, precisamos escolher o primeiro grupo de 5 turistas para o primeiro barco no total de 15. Mais uma vez, usamos o conceito de combinação, porque a ordem não importa.

$\binom{15}{5}$	.	
1º Barco		**Total**

Até o momento, sobraram 10 turistas. Devemos escolher 5 deles para o 2º barco.

$\binom{15}{5}$	.	$\binom{10}{5}$	
1º Barco		**2º Barco**	**Total**

Os cinco turistas que sobraram estão automaticamente escolhidos para o terceiro barco. Porém, para fins didáticos, vamos calcular – escolher 5 turistas num total de 5.

$\binom{15}{5}$	.	$\binom{10}{5}$	$\binom{5}{5}$	
1º Barco		**2º Barco**	**3º Barco**	**Total**

Agora, só há mais um detalhe que precisamos calcular. Note que, até o momento, falamos em 1º barco, 2º barco e 3º barco. Porém, os três barcos são diferentes.

Devemos, portanto, considerar o número de formas de organizar os três barcos nas três posições, ou seja, trata-se de uma permutação de 3 elementos.

$\binom{15}{5}$	.	$\binom{10}{5}$	$\binom{5}{5}$	**3!**	
1º Barco		**2º Barco**	**3º Barco**	**Permutações dos Barcos**	**Total**

Agora, basta fazer o produto.

$$N = \binom{15}{5}\binom{10}{5}\binom{5}{5}3! = \frac{15!}{5!\,10!}\frac{10!}{5!\,5!}\frac{5!}{5!\,0!} =$$

$$N = \frac{15.14.13.12.11}{5.4.3.2.1}\frac{10.9.8.7.6}{5.4.3.2.1}.1.3.2.1$$

$$N = 3003.252.6 > 3003.6.11^2 > 42^2\,.6.11^2 = 6.2^2.3^2.7^2.11^2$$

Veja que é 6 vezes superior a $2^2 \times 3^2 \times 7^2 \times 11^2$.

Certo.

046. (CESPE/BANCO DO BRASIL/ESCRITURÁRIO/2008) Caso as senhas de acesso dos clientes aos caixas eletrônicos de certa instituição bancária contenham 3 letras das 26 do alfabeto, admitindo-se repetição, nesse caso, a quantidade dessas senhas que têm letras repetidas é superior a 2×10^3.

A melhor maneira de fazer essa questão é considerar o total de senhas possíveis e retirar aquelas que têm as letras todas diferentes.

Para o total de senhas possíveis, devemos considerar que qualquer uma das letras pode ser empregada em qualquer posição – inclusive várias vezes.

26	x	26	x	26	-26^3
					Total

Agora, vamos calcular a quantidade de senhas que possuem as letras todas diferentes. Nesse caso, devemos escolher 3 letras dentre as 26 – a ordem importa, pois senhas com ordens diferentes são diferentes. Por exemplo, a senha ABC é diferente da senha CBA.

Para isso, usamos o conceito de arranjo.

26	x	25	x	24	$= A_{26}^3$ $= 26.25.24$
					Proibidas

Para saber o número de senhas que nos interessam, ou seja, aquelas que possuem, pelo menos uma letra repetida, basta fazer a diferença.

$$N = 26^3 - 26.25.24 = 26.(26^2 - 25.24)$$

$$N = 26.(676 - 600) = 26.76 = 1976 < 2000$$

Errado.

047. (FCC/SEGEP-MA/AUDITOR-FISCAL DA RECEITA ESTADUAL/2016) Jair tem 8 primos, dos quais irá convidar 5 para um jantar em sua casa. Ocorre que 2 dos 8 primos só podem ir ao jantar se forem juntos. O total de escolhas diferentes dos 5 convidados que Jair pode fazer para o jantar é igual a

a) 40.
b) 56.
c) 30.

d) 26.

e) 36.

Jair tem duas opções: ele pode chamar os dois primos problemáticos OU não chamar nenhum. É importante destacar o conectivo ou, porque ele indica que faremos uma soma mais adiante. Caso ele resolva convidar os dois primos, ele precisará escolher dentre os outros 6 mais 3 convidados. Sendo assim, o número de formas de escolher é:

$$n_1 = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{6.5.4.3!}{3.2.1.3!} = 5.4. = 20$$

Por outro lado, caso ele não convide nenhum dos dois primos, ele precisará escolher 5 convidados dentre os demais 6 primos.

$$n_2 = \binom{6}{5} = \frac{6!}{5!\,1!} = \frac{6.5!}{5!\,1!} = 6$$

Sendo assim, o total de possibilidades para Jair é:

$$N = n_1 + n_2 = 20 + 6 = 26$$

Letra d.

---

048. (FCC/AL-AP/ANALISTA LEGISLATIVO/ADMINISTRADOR/2020) Há 51 pessoas em uma fila. Algumas pessoas dessa fila serão sorteadas. O menor número de pessoas que devem ser sorteadas para garantir que dentre elas haja pelo menos duas que são vizinhas na fila é:

a) 25

b) 27

c) 24

d) 26

e) 28

A situação em que temos o maior número possível de pessoas que estão presentes na fila, mas que não encontramos duas pessoas vizinhas é:

1 – 3 – 5 – … - 45 – 47 – 49 – 51

Vamos calcular o número de pessoas nessa fila utilizando a fórmula da progressão aritmética.

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

$$51 = 1 + 2.(n-1)$$

$$51 - 1 = 2.(n-1)$$

$$50 = 2.(n-1)$$

$$\therefore n - 1 = \frac{50}{2} = 25$$

$$\therefore n = 25 + 1 = 26$$

Estranhamente, essa questão caiu em uma prova que não cobrou Progressão Aritmética no seu edital. É verdade que o aluno poderia resolver também sem a fórmula. Bastaria você contar diretamente:

1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – 13 – 15 – 17 – 19 – 21 – 23 – 25 – 27 – 29 – 31 – 33 – 35 – 37 – 39 – 41 – 43 – 45 – 47 – 49 – 51

Ao contar os elementos selecionados acima, você encontrará exatamente 26.

Dessa forma, o maior conjunto de pessoas na fila que não sejam vizinhas é igual a 26. Logo, se forem sorteadas 27 pessoas, seguramente haverá duas pessoas vizinhas.

Letra b.

---

049. (FCC/SEGEP-MA/ANALISTA EXECUTIVO/PROGRAMADOR DE SISTEMAS/2018) No setor administrativo de uma empresa, há quatro tipos de cargos: estagiários, técnicos, gerentes e diretores. Alguns funcionários desse setor comporão um grupo que será transferido para o setor financeiro da empresa. Compondo-se o grupo com funcionários escolhidos ao acaso, o número mínimo de funcionários que deverá compor o grupo para que se tenha certeza de que nele haverá quatro funcionários de um mesmo cargo é igual a:

a) 17.
b) 15.
c) 13.
d) 16.
e) 14.

Considere a seguinte legenda:

Estagiário = E

Técnico = T

Gerente = G

Diretor = D

Vamos espalhar o máximo possível essas pessoas para que tenhamos o pior caso possível, em que tenhamos o maior número possível de funcionários sem que tenhamos 4 funcionários, como mostrado a seguir:

E | T | G | D
E | T | G | D
E | T | G | D

Portanto, conseguimos o máximo de 12 funcionários. Dessa forma, o próximo funcionário necessariamente terá o mesmo cargo de um anterior, formando um grupo de 4 funcionários de um mesmo cargo. Vejamos um exemplo.

E | T | G | D
E | T | G | D
E | T | G | D
E

Veja que com 13 pessoas satisfazemos o que a questão pede: quatro funcionários serem do mesmo cargo.

$$N = 35 - 5 - 10 = 20\ comissões$$

Letra c.

---

050. (FCC/SEDU-ES/PROFESSOR DE ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO/2018) Uma pessoa decidiu criar uma senha com dois algarismos ímpares diferentes e uma vogal, em qualquer ordem. O número total de senhas diferentes que ela pode criar é igual a

a) 600.
b) 450.
c) 300.
d) 900.
e) 550.

A senha tem dois algarismos e uma vogal. Para compô-la, precisamos escolher 2 algarismos dentre os 5 possíveis (1, 3, 5, 7 ou 9) e também 1 vogal dentre as possíveis (a, b, c, d, e). Portanto, há C(5,2) possibilidades de escolha para os algarismos ímpares e 5 possibilidades de escolha para as vogais.

$\binom{5}{2}$	**5**	$= \binom{5}{2} \cdot 5$
2 Algarismos	**Vogais**	**Escolhas**

Vamos fazer as contas do número binominal.

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5.4.3!}{3!\,.2.1} = \frac{5.4}{2.1} = 10$$

Temos, portanto, 50 possibilidades de escolha, sem contar as possíveis permutações.

$$n = 10.5 = 50$$

Agora, vamos considerar as permutações. Como são três elementos, temos 3! permutações.

$$N = 50.6 = 300\, possibilidades$$

A despeito disso, a banca considerou o gabarito 600.

A meu ver, a banca adotou uma resolução inadequada, em que ela considerou duas vezes as permutações possíveis entre os dois algarismos ímpares.

5	.	4	.	5	= 5.4.5 = 100 possibilidades
Algarismo 1		**Algarismo 2**		**Vogal**	**Escolhas**

A seguir, considerou as permutações possíveis entre os 3 elementos escolhidos.

$$N = 100.3! = 100.6 = 600\, possibilidades$$

Dessa forma, chega-se ao gabarito. Porém, vejo essa resolução como incorreta. A meu ver, a resposta correta seria 300 possibilidades, mas a banca considerou 600.

Letra a.

---

051. (FCC/PREFEITURA DE RECIFE-PE/ASSISTENTE DE GESTÃO PÚBLICA/2019) Uma determinada secretaria municipal conta com dois assessores (A1 e A2) e cinco supervisores (S1, S2, S3, S4 e S5). Deseja-se formar uma comissão formada por quatro membros, pelo menos um dos quais deve ser um assessor e os demais, supervisores. Ainda, se A1 for membro da comissão, S1 não deve ser. Nessas condições, podem ser formadas:

a) 15 comissões diferentes.
b) 30 comissões diferentes.
c) 20 comissões diferentes.
d) 44 comissões diferentes.
e) 60 comissões diferentes.

Podemos partir do global: o total de comissões que poderiam ser formadas por 4 membros dentro do total de 7 pessoas, que corresponde à combinação de 7 elementos 4 a 4.

$$N = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7.6.5.4!}{4!\,.3.2.1} = \frac{7.6.5}{3.2.1} = 7.5 = 35$$

Devemos excluir as comissões em que:
Não há nenhum assessor. Nesse caso, são as comissões formadas por apenas pelos 5 assessores. Dessa forma, devemos escolher 4 membros dentre os 5 assessores, ou seja, trata-se de uma combinação de 5 elementos 4 a 4:

$$n_1 = \binom{5}{4} = \frac{5!}{4!\,1!} = \frac{5.4!}{4!\,1} = 5$$

O assessor A1 está presente com o supervisor S1. Para montar essas comissões, devemos escolher os demais 2 membros dentre o total de 5 membros:

$$n_2 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5.4.3!}{3!\,2.1} = \frac{5.4}{2.1} = 10$$

Dessa forma, o total de comissões possíveis pode ser obtido descontando-se as comissões proibidas do total de comissão.

$$N = 35 - 5 - 10 = 20\ comissões$$

Letra c.

Obs.: vamos analisar algumas questões em que as bancas de concursos pegaram mais pesado.

052. (CESPE/SEFAZ-RS/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO FAZENDÁRIO/2018) A tabela a seguir mostra os preços, em R$ 100, de passagens aéreas para viagens com origem nas cidades A, B, C, D ou E e para viagens com destino a essas mesmas cidades.

		destino				
		A	B	C	D	E
origem	A	0	3	1	2	5
	B	2	0	2	1	4
	C	1	3	0	2	1
	D	2	5	4	0	3
	E	5	2	1	4	0

Por necessidade de serviço, um funcionário deverá visitar todas essas cidades uma única vez, sempre por via aérea, e deverá partir de alguma delas.

Considerando-se todas as possibilidades de partida, o menor valor a ser gasto com as passagens aéreas é igual a:

a) R$ 400.
b) R$ 500.
c) R$ 600.
d) R$ 800.
e) R$ 900.

Nessa questão, o(a) aluno(a) deve ser bem esperto.

Trata-se do famoso problema do caixeiro viajante, que é um dos problemas em aberto na Matemática. Não temos um algoritmo que seja capaz de resolvê-lo com facilidade. Porém, esse problema, em particular, pode ser resolvido com algumas observações.

Observe que o funcionário deverá fazer quatro viagens, pois ele deve passar pelas cinco cidades e não foi dito nada de que ele deveria retornar ao ponto de partida.

O preço mínimo das viagens é igual a R$100. Como são necessárias pelo menos quatro viagens, o valor mínimo a ser desembolsado seria de R$400.

Porém, não podemos marcar a letra A diretamente. Devemos encontrar pelo menos uma rota nesse valor.

Mas, note que nenhuma rota com destino em B tem o custo de R$100. O menor custo para chegar em B é igual a R$200. Portanto, isso já aumenta o custo mínimo do percurso para R$500.

E, agora, será que conseguimos encontrar um percurso com o custo igual a R$500?

Note que, para isso, necessariamente, precisamos ter uma etapa do percurso como E – B, com custo de R$200. Caso contrário, o custo aumentaria ainda mais.

Para chegar em E ao custo de R$100, precisamos partir de C. Portanto, o final da viagem deve ser C – E – B.

Para chegar a C ao custo de R$100, precisamos partir de E ou de A. Porém, a partida de E é inviável, pois essa cidade já será visitada mais adiante. Logo, precisamos concluir com o percurso A – C – E – B.

Por fim, precisamos passar pela cidade D. Se incluíssemos D no início da viagem, o custo do trecho D – A seria de R$200, logo, o trajeto total ficaria R$600. Porém, se incluíssemos D ao final, teríamos o percurso B – D ao custo de R$100.

Portanto, o percurso A – C – E – B – D teria o custo total de R$500.

$$A \xrightarrow{\text{R\$100}} C \xrightarrow{\text{R\$100}} E \xrightarrow{\text{R\$200}} B \xrightarrow{\text{R\$100}} D$$

Letra b.

053. (FGV/CGE-MA/AUDITOR/2014) João lançou um dado três vezes seguidas e a soma dos resultados deu 15. O número de maneiras possíveis para a sequência dos três resultados é:

a) 3
b) 5
c) 7
d) 9
e) 10

Como queremos que a soma dos três dados seja igual a 15, precisamos notar que os dois primeiros dados determinam o número que deve ser obtido pelo terceiro.
Exemplo, se tiramos 6 e 6 nos primeiros dados, necessariamente, teremos que o terceiro dado será igual a 3.
Além disso, em alguns casos, não é possível obter uma soma 15 quando obtemos números muito baixos nos primeiros dados. Por exemplo, se tiramos 1 e 1, não é possível obter soma 15 com o terceiro dado. O máximo da soma seria 1 + 1 + 6 = 8.
Então, podemos resolver o problema de trás para frente. Dessa forma, primeiro decidiremos as somas possíveis para os dois primeiros dados.

Dados 1 e 2	**Dado 3**
≤ 8	0 opções
9 (1 opção)	6 (1 opção)
10 (1 opção)	5 (1 opção)
11 (1 opção)	4 (1 opção)
12 (1 opção)	3 (1 opção)
13 (1 opção)	2 (1 opção)
14 (1 opção)	1 (1 opção)
≥ 15	0 opções

Agora, precisamos calcular o número de formas que podemos obter as somas de 9 a 14.
Para que a soma seja 9, perceba que o primeiro dado não pode ser menor que 3. São, portanto, quatro possibilidades.

3 + 6 = 9 **4 + 5 = 9** **5 + 4 = 9** **6 + 3 = 9**

Para que a soma seja 10, o primeiro dado não pode ser menor que 4. São três possibilidades.

4 + 6 = 10 5 + 5 = 10 6 + 4 = 10

Para que a soma seja 11, o primeiro dado não pode ser menor que 5. Restam, portanto, duas possibilidades.

5 + 6 = 11 6 + 5 = 11

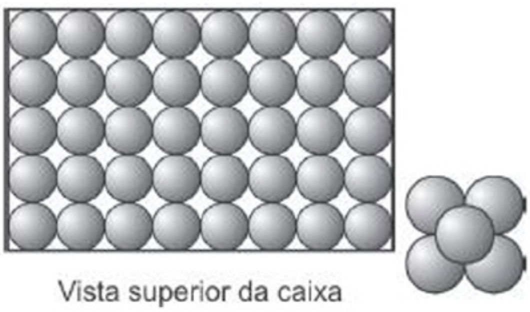
Para que a soma seja 12, os dois primeiros dados devem ser iguais a 6. Portanto, só existe uma possibilidade. Além disso, não é possível que a soma dos dois primeiros dados seja maior que 12.
Sendo assim, temos a tabela:

Dados 1 e 2	Dado 3	Total
9 (4 opções)	6 (1 opção)	4.1 = 4
10 (3 opções)	5 (1 opção)	3.1 = 3
11 (2 opções)	4 (1 opção)	2.1 = 2
12 (1 opção)	3 (1 opção)	1.1 = 1
		+ 3 + 2 +1 = 10

Letra e.

---

054. (FGV/MEC/DOCUMENTADOR/2009) Em uma caixa, foram colocadas 40 bolas de sinuca, dispostas sobre o fundo da caixa, como apresentado na figura.
A seguir, outras bolas foram empilhadas sobre as 40 primeiras, de tal forma que cada bola sempre ficasse apoiada sobre outras quatro, como ilustrado abaixo.

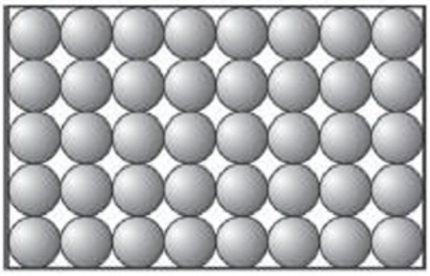


Vista superior da caixa

Sabendo-se que a construção não foi desrespeitada, assinale a alternativa que apresenta a quantidade máxima possível de bolas de sinuca dentro da caixa.

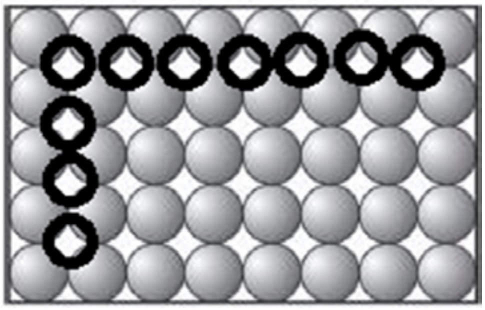
a) 112
b) 100
c) 96
d) 86
e) 68

No piso da caixa, temos 8 colunas e 5 linhas de bolas.



Vista superior da caixa

Como ilustrado pelo problema, é possível empilhar bolas nos espaços vazios deixados por essas. Perceba que só poderemos colocar 7 colunas e 4 linhas de bolas sobre essas. Essa situação está ilustrada a seguir.



No 3º andar de bolinhas, podemos empilhar, de forma análoga, mais 6 colunas e 3 linhas. No 4º andar, podemos empilhar mais 5 colunas e 2 linhas. Por fim, chegamos ao quinto andar, onde podemos empilhar mais 4 colunas e 1 linha de bolinhas. Não é possível mais empilhar nada sobre o quinto andar.

Sendo assim, o número total de bolinhas empilhadas é:

	Colunas	**Linhas**	**Total**
1º Andar	8	5	8.5 = 40
2º Andar	7	4	7.4 = 28

3º Andar	6	3	6.3 = 18
4º Andar	5	2	5.2 = 10
5º Andar	4	1	4.1 = 4
Total			40 + 28 + 18 + 10 + 4

O total de bolinhas empilhadas é, portanto:

$$N = 40 + 28 + 18 + 10 + 4 = 100$$

Letra b.

---

055. (FGV/SENADO FEDERAL/ANALISTA LEGISLATIVO/2008) Em uma reunião todas as pessoas se cumprimentaram, havendo ao todo 120 apertos de mão. O número de pessoas presentes nessa reunião foi:

a) 14
b) 15
c) 16
d) 18
e) 20

Seja N o número de pessoas presentes na sala. Um aperto de mão é feito entre duas pessoas. Para definir um aperto de mão, precisamos escolher 2 pessoas dentre N, sem importar a ordem – tanto faz se A aperta a mão de B ou se B aperta a mão de A.

Sendo assim:

$$\binom{N}{2} = 120$$

$$\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2} = 120 \therefore N(N-1) = 120.2 = 240$$

Aqui, muitos alunos ficariam tentados a multiplicar N por N-1 e chegar a uma equação do segundo grau. Porém, podemos resolver tal problema de um modo mais simples.

Perceba que o número de pessoas na sala é inteiro, portanto, N e N-1 devem ser divisores de 240.

O modo mais fácil de obter os divisores de 240 é fatorando-o em fatores primos.

240	**2**
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	$2^4.3.5$

Por sorte ou por destino, encontramos que a fatoração de 240 em fatores primos é

$$240 = 2^4.3.5 = 16.15$$

Isso nos permite concluir rapidamente que havia 16 pessoas na sala, pois N = 16 e (N-1) = 15, de modo que o produto N(N-1) = 240.

Letra c.

---

056. (FCC/DPE-SP/ANALISTA DE SISTEMAS/2015) Para formar uma senha de quatro letras é permitido o uso de uma letra A, uma letra B, duas letras C e três letras D. Dentre todas as senhas possíveis nesse sistema, o número daquelas que tem exatamente três letras diferentes supera o número das demais em

a) 28.
b) 24.
c) 42.
d) 36.
e) 30.

O sistema em questão é formado pelas letras ABCCDDD. São, portanto, 7 letras, sendo que existe repetição de 2 letras C e 3 letras D.

O total de senhas possíveis poderia ser calculado por um arranjo com repetição, mas nós não abordamos esse assunto no curso. Portanto, tentaremos outra forma.

Vejamos todas as possibilidades para escolher as letras e anotaremos suas permutações.

As senhas podem ter todas as quatro letras diferentes, pode haver uma repetição de duas letras xyCC ou xyDD, pode haver duas repetições CCDD ou ainda a letra D pode se repetir três vezes (xDDD).

Contemos as senhas em que todas as letras são diferentes.

ABCD: 4! = 24

$$n_1 = 4! = 24$$

Agora, testemos as senhas que possuem repetição de duas letras, portanto, são dois C ou dois D. Para isso, precisamos escolher uma das letras C ou D para se repetir duas vezes. Das 3 letras restantes, precisamos escolher 2 para completar o código (xyCC ou xyDD). Por fim, precisamos contar as permutações.

$$\binom{2}{1} = 2 \quad \times \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \times \quad P_4^2 = \frac{4!}{2!} = 4.3 = 12$$

CC ou DD	Escolher duas letras das 3 restantes para serem as letras não repetidas.	Permutações entre as 4 letras da palavra, com repetição de duas.

Observe, ainda, que é exatamente esse o caso que nos interessa pelo enunciado, pois todas essas palavras possuem exatamente três letras diferentes.

$$n_2 = 2.3.12 = 72$$

Ainda temos dois casos a analisar. No caso CCDD, temos que contar apenas as permutações.

$$n_3 = P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4.3}{2.1.} = 6$$

Por fim, temos o caso xDDD. Para isso, precisamos escolher a segunda letra da senha e contar as permutações possíveis.

3	x	$\boldsymbol{P_4^3 = \frac{4!}{3!} = 4}$
Escolher A, B ou C para completar a senha		**Permutações entre as 4 letras da palavra, com repetição de três.**

Dessa maneira, o total de possibilidades é:

$$n_4 = 3.4 = 12$$

Sendo assim, as demais senhas, ou seja, excluindo as senhas que apresentam exatamente três letras diferentes (n_2) é:

$$n_{demais} = n_1 + n_3 + n_4 = 24 + 6 + 12 = 42$$

Portanto, a diferença pedida no enunciado é:

$$n_2 - n_{demais} = 72 - 42 = 30$$

Letra e.

---

057. (FCC/TST/TÉCNICO JUDICIÁRIO/ÁREA ADMINISTRATIVA/2017) O código de um sistema de classificação de processos é composto por três vogais juntas, seguidas por três algarismos. A ordenação começa com o 1º processo, cujo código é AAA000, e termina com o 125.000º processo, cujo código é UUU999, seguindo sempre a ordem alfabética das letras e ordem crescente do número composto pelos três algarismos. Nesse sistema de classificação, o 10.500º processo terá o código:

a) AEA501.
b) AIA499.
c) AIA501.

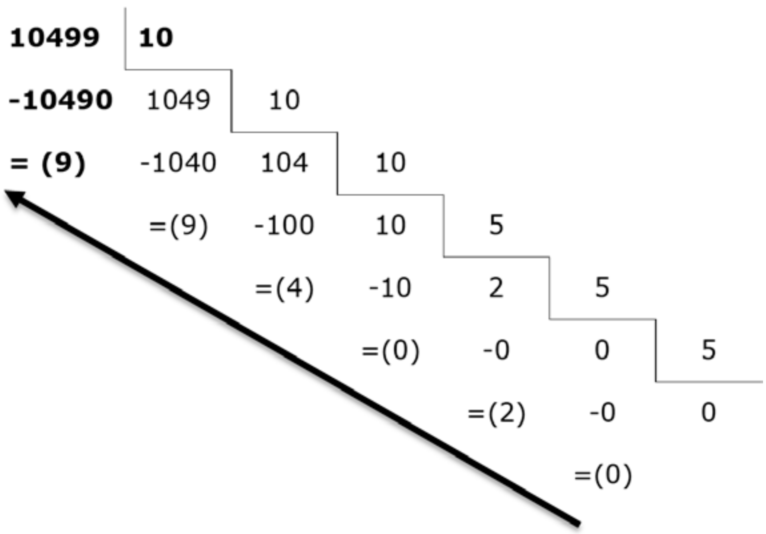
d) AIA500.
e) EAA499.

Como o primeiro processo tem o código terminado em zeros AAA0000, o 10500º deve ser obtido a partir das divisões de 10499.
Para fazer a conversão, devemos observar quantas possibilidades existem em cada casa decimal.

5 x 5 x 5 X 10 X 10 X 10

Na parte com 5 algarismos, temos as seguintes correspondências:
A – 0
E – 1
I – 2
O – 3
U – 4

Sendo assim, as três primeiras divisões devem ser feitas por 10 e as três últimas por 5. Façamos:



Agora, basta pegar os restos das divisões e seus correspondentes no sistema de numeração desejado:

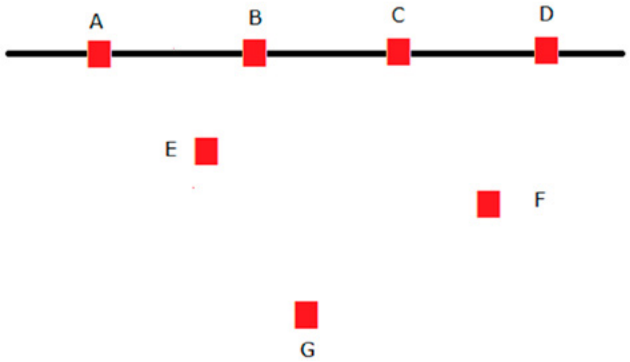
0	2	0	4	9	9
A	**I**	**A**	**4**	**9**	**9**

Letra b.

058. (ESAF/AFRFB/2009) Sabe-se que os pontos A, B, C, D, E, F e G são coplanares, ou seja, estão localizados no mesmo plano. Sabe-se, também, que destes sete pontos, quatro são colineares, ou seja, estão numa mesma reta. Assim, o número de retas que ficam determinadas por estes sete pontos é igual a:

a) 16
b) 28
c) 15
d) 24
e) 32

De acordo com o enunciado, temos a seguinte disposição dos pontos.

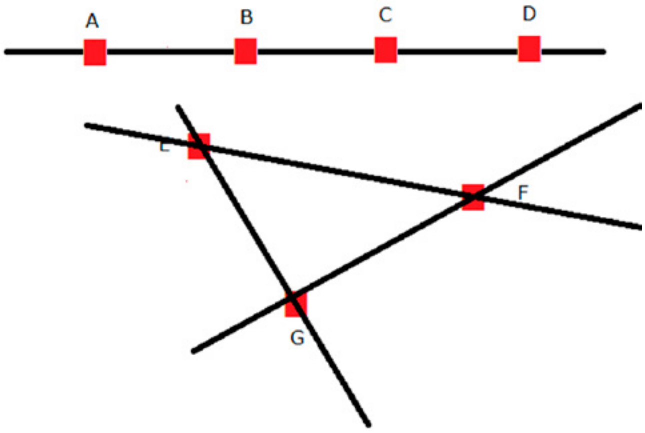


Para formar uma reta, devemos escolher dois pontos. Porém, perceba que escolher quaisquer dos quatro pontos colineares A, B, C e D, a reta formada será a mesma. Portanto, vamos separar o problema em três casos.

No primeiro caso, escolheremos quaisquer dos três pontos fora da reta (E, F ou G). Como a ordem não importa, temos um total de:

$$n_1 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{3.2!}{2!\,.1} = 3$$

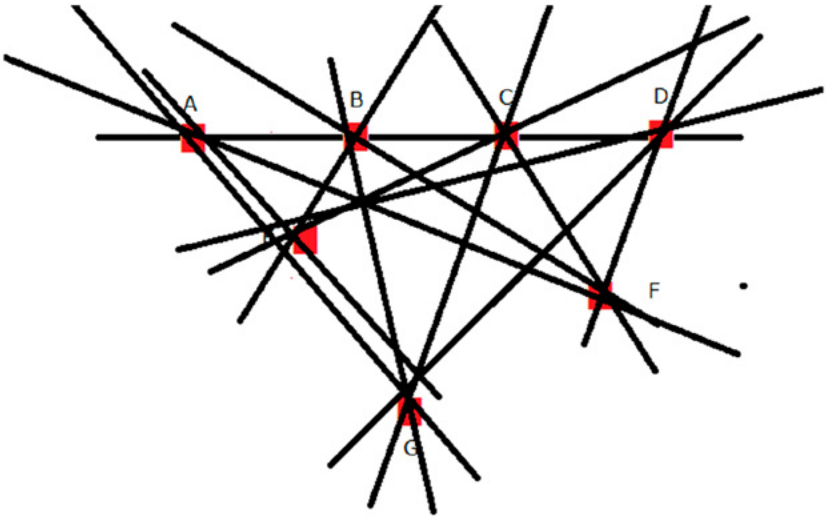
Essas três retas podem ser visualizadas:



No segundo caso, escolheremos um ponto fora da reta (E, F ou G) e um ponto na reta (A, B, C ou D). Nesse caso, temos 3 possibilidades para o ponto fora e 4 possibilidades para o ponto na reta.

$$n_2 = 3.4 = 12$$

Essas doze retas podem ser visualizadas na figura a seguir. Perceba que temos 4 retas saindo de cada ponto E, F e G.



Por fim, temos que adicionar a própria reta formada pelos quatro pontos colineares. Sendo assim, o total de retas é:

$$N = 3 + 12 + 1 = 16$$

Letra a.

---

059. (ESAF/AFRFB/2014) Um polígono regular possui 48 diagonais que não passam pelo seu centro. A partir desta informação, pode-se concluir que o número de lados desse polígono é igual a:

a) 12
b) 36
c) 24
d) 48
e) 22

Essa é uma questão deveras difícil. Mas fácil mesmo é ficar nas maravilhosas praias de Recife. Essa questão é para você passar em um dos concursos mais desejados do Brasil com um dos melhores planos de carreira de todo o serviço público – Auditor Fiscal da Receita Federal. Então, tem que ser para rachar a cuca mesmo.

Em primeiro lugar, devemos entender o que são as diagonais de um polígono. As diagonais são segmentos de reta que unem dois vértices, mas que não são os lados.

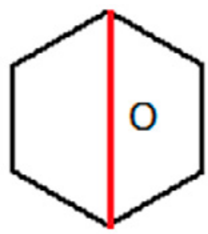
Quando o polígono é formado por um número ímpar de lados, nenhuma diagonal passa pelo centro. Tomemos, como exemplo, esse pentágono.

Para formar uma diagonal, primeiro devemos escolher um vértice. Temos N opções. Depois, podemos escolher qualquer vértice que não seja o próprio vértice escolhido no passo anterior nem os seus dois vizinhos, pois, nesse caso, formariam um lado, não uma diagonal. Sendo assim, são N-3 opções.

Além disso, devemos descontar as permutações entre os dois vértices (2!). Isso acontece porque, quando traçamos a diagonal 1-3, ela é igual à diagonal 3-1. Sendo assim, o número de diagonais que não passam pelo centro será:

$$D = \frac{N(N-3)}{2!} = \frac{N(N-3)}{2}$$

Por outro lado, quando o número de lados for par, temos uma situação importante a notar. Quando os vértices são diametralmente opostos, a diagonal passa pelo centro.



Dessa maneira, para formar uma diagonal, no primeiro passo, podemos escolher qualquer um dos N vértices. Mas, no segundo passo, não podemos escolher 4 opções: o próprio vértice já escolhido, os dois vizinhos e o que está diametralmente oposto. Além disso, devemos dividir por 2! Pelo mesmo motivo explicado anteriormente.

$$D = \frac{N(N-4)}{2!} = \frac{N(N-4)}{2}$$

Sendo assim, temos duas expressões diferentes, a depender se o número de lados do polígono é par.

Podemos adotar um procedimento igual à questão anterior. Porém, também podemos testar diretamente as respostas.

Na letra A, temos N = 12. Como 12 é par, o número de diagonais que não passam pelo centro de um polígono de 12 lados é:

$$D = 12.\frac{12-4}{2} = \frac{12.8}{2} = 48$$

Já encontramos a resposta.

Salientamos que o assunto Geometria consta no edital do AFRFB, logo, a ESAF aproveitou essa questão para exigir conceitos de Análise Combinatória e Geometria de uma vez só. Se não constasse Geometria no edital, a questão poderia ter sido anulada.

Letra a.

---

060. (CESPE/FUB/CONHECIMENTOS BÁSICOS/2015/DESAFIO)(♥), espadas (♠), ouros (♦) e paus (♣), viradas para baixo.As cartas do baralho, em ordem crescente de importância, são 2, 3,4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Q (dama), J (valete), K (rei) e A (ás). Nesse jogo, cada jogador recebe cinco cartas e pode descartar algumas ou todas e receber outras novas, na mesma quantidade, de modo a ficar sempre com cinco cartas na mão. O jogador com o melhor jogo, isto é, com a sequência de cinco cartas que vale mais pontos, ganha a rodada. As sequências de jogos vencedoras no pôquer fechado, em ordem crescente de importância, são:

- par – formado por duas cartas de mesmo valor e três outras sem relação (por exemplo: [Q♣] [Q ♠] [2♥] [4♥] [5♣]);
- dois pares – formado por duas cartas de mesmo valor, mais outras duas também de mesmo valor (mas de valor diferente do primeiro par) e uma carta não relacionada com as dos pares (por exemplo: [3♥] [3♦] [10♠] [10♥] [A♠]);
- trinca – formado por três cartas de mesmo valor e outras duas sem relação (por exemplo: [J♠] [J♦] [J♥] [6♥] [7♥]);
- straight (sequência) – formado por cinco cartas em sequência de naipes diferentes (por exemplo: [5 ♣] [6♠] [7♥] [8♥] [9 ♣]);
- flush – formado por cinco cartas do mesmo naipe (por exemplo: [4 ♣] [5 ♣] [10 ♣] [Q ♣] [J ♣]);
- full house – formado por um par e uma trinca (por exemplo: [Q ♣] [Q♠] [A♥] [A♠] [A♦]);
- quadra – formado por quatro cartas do mesmo valor e uma carta qualquer (por exemplo: [10♣] [10♠] [10♥] [10 ♦] [3♠]);
- straight flush – formado por cinco cartas em sequência e do mesmo naipe (por exemplo: [7♥] [8♥] [9♥] [10♥] [Q♥]);
- royal straight flush – formado pela sequência máxima, isto é, dez, dama, valete, rei e ás, todas do mesmo naipe (por exemplo: [10 ♠] [Q ♠] [J ♠] [K ♠] [A ♠]).

Com base nessas informações, julgue os seguintes itens, a respeito do jogo de pôquer fechado.

A quantidade de pares simples, e nenhum jogo melhor, que podem ser formados é igual a $6 \times 44 \times C_{13,9}$.

Essa é provavelmente uma das questões mais difíceis já produzidas para concursos públicos. O que torna essa questão tão especial é o fato de que não podemos formar nenhum jogo melhor que um par.

Então, vamos proceder o seguinte:

Escolhemos um par de cartas para formar um par simples. Essas cartas precisam ser do mesmo número. Como só temos um baralho, elas não podem ser do mesmo naipe – isso facilita bastante, pois não temos a possibilidade de formar um flush ou um straight.

As próximas três cartas precisam ser de números diferentes do número que foi escolhido anteriormente para não formar uma trinca e também precisam ser de números diferentes entre si para não formarem outro par.

Vamos escolher as cartas que formam o par simples. Podemos tomar qualquer uma das 52 cartas. Portanto, para a primeira carta, temos 52 opções. Para a segunda, precisamos escolher uma carta de mesmo número da anterior, portanto, só restam 3 opções – as cartas de naipes diferentes.

Exemplo: se escolhemos [10♣] na primeiro carta, só podemos escolher [10♠], [10♥] ou [10 ♦] na segunda.

52	X	3			=52.3
1ª Carta		**2ª Carta**			**Total**

Observe, ainda, que a ordem das cartas não importa. Por isso, precisamos dividir por 2!

Pouco importa se escolhemos [10♣] como a primeira carta e [10♠] como a segunda ou se trocamos a ordem, escolhendo [10♠] na primeira carta e [10♣] na segunda.

Portanto, o total de formas de escolher as cartas que formam o par simples é:

$$n_1 = \frac{52.3}{2!} = 26.3$$

No segundo passo, as próximas três cartas precisam ser de números diferentes e não podemos escolher o número já escolhido no passo anterior. Precisamos, portanto, escolher 3 números num total de 12.

Portanto, o número de maneira que podemos escolher os números das três cartas é:

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{9!\,3!}$$

Já escolhemos os números dessas cartas. Porém, elas podem ser de qualquer naipe. Temos 4 opções para o naipe da terceira carta, 4 opções para o naipe da quarta e 4 opções para o naipe da quinta.

$\binom{12}{3}$	x	4	x	4	x	4	$= 4^3\binom{12}{3}$
Números		**Naipe da 3ª**		**Naipe da 4ª**		**Naipe da 5ª**	**Total**

Portanto, o número de combinações possíveis é:

26.3	x	$4^3\binom{12}{3}$	
1ª e 2ª Cartas		**3ª, 4ª e 5ª Cartas**	**Total**

$$N = 26.3.4^3\binom{12}{3}$$

O CESPE ainda foi profundamente sagaz em trabalhar esse número.

$$N = 26.3.4^3\binom{12}{3} = 13.2.3.4^3.\frac{12!}{9!\,3!}$$

$$N = 13.6.4^3.\frac{12.11.10}{3.2.1} = 6.4^3\frac{13.12.11.10}{3.2.1}$$

Multiplicando por 4 em cima e baixo, chegamos a mais um binomial.

$$N = 6.4^3.4\frac{13.12.11.10}{4.3.2.1} = 6.4^4.\frac{13!}{9!\,4!} = 6.4^4\binom{13}{4}$$

Como os binomiais $\binom{13}{4} = \binom{13}{9}$ são iguais, temos que a afirmação está correta.

Certo.

---

061. (ESAF/AFRFB/2009/ANULADA) De quantas maneiras podem sentar-se três homens e três mulheres em uma mesa redonda, isto é, sem cabeceira, de modo a se ter sempre um homem entre duas mulheres e uma mulher entre dois homens?

a) 72
b) 36
c) 216

d) 820
e) 360

Se a mesa não fosse redonda, teríamos duas possibilidades de cobrir a mesa, em que M e H representam, respectivamente, mulher e homem.

M	H	M	H	M	H	Total
H	M	H	M	H	M	Total

No primeiro caso, para a primeira mulher, temos 3 opções, pois pode ser qualquer uma. Para o primeiro homem, também temos 3 opções, pois pode ser qualquer um. Para a segunda mulher, temos 2 opções, porque a que já foi escolhida anteriormente não pode ser repetida. O mesmo é válido para o segundo homem. Portanto, temos:

3	.	3	.	2	.	2	.	1	.	1		=36
M		H		M		H		M		H		Total
3	.	3	.	2	.	2	.	1	.	1		=36
H		M		H		M		H		M		Total

Tem-se, portanto, 72 possibilidades de organização dos homens e mulheres numa mesa que não fosse redonda.
Como a mesa é redonda e tem 6 lugares, devemos descontar as 6 rotações.

$$N = \frac{72}{6} = 12$$

Por não haver resposta, a questão foi anulada.
Anulada.

062. (CESPE/ANAC/ESPECIALISTA EM REGULAÇÃO/ECONOMIA/2009/DESAFIO) Considere que, em uma empresa, seja utilizado sistema de códigos com apenas dois tipos de símbolos (1 e 2), sendo cada código formado por uma sequência desses símbolos, cuja ordem é igual à soma dos algarismos que formam o código, a exemplo dos códigos distintos 1, 11, 12 e 121, que são de ordem 1, 2, 3 e 4, respectivamente. Considere, ainda, que s(0) = 1 e que s(n) é igual ao número de códigos distintos de ordem n, n≥1,
Existem, no máximo, 55 códigos distintos de ordem menor ou igual a 10.

Os códigos de ordem 10 são formados por uma certa quantidade x de dígitos 1 e uma quantidade y de dígitos 2. Temos que:

$$x + 2y = 10$$

Como 10 e 2y são pares, note que x também deverá ser par.

Sendo assim, comecemos com x = 0. Nesse caso, temos y = 5 e o código será 22222. Só existe uma possibilidade.

Quando x = 2, teremos y = 4. Nesse caso, temos o número 112222 e suas permutações que podem ser calculadas por:

$$P_6^{4,2} = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{6.5.4!}{4!\,.2.1} = 15$$

Quando x = 4, teremos y = 3. Nesse caso, temos o número 1111222 e suas permutações que podem ser calculadas por:

$$P_7^{4,3} = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7.6.5.4!}{4!\,3.2.1} = 35$$

Quando x = 6, teremos y = 2. Nesse caso, temos o número 11111122 e suas permutações que podem ser calculadas por:

$$P_8^{6,2} = \frac{8!}{6!\,2!} = \frac{8.7.6!}{6!\,.2.1} = 28$$

Quando x = 8, teremos y = 1. Nesse caso, temos o número 111111112 e suas permutações que podem ser calculadas por:

$$P_9^{8,1} = \frac{9!}{8!\,1!} = \frac{9.8!}{8!\,1} = 9$$

Quando x = 10, teremos y = 0. Nesse caso, temos o número 11111111. Nesse caso, só existe uma probabilidade.

Basta somar as possibilidades encontradas:

$$N_{10} = 1 + 15 + 35 + 28 + 9 + 1 = 89 > 55$$

Somente com o código de ordem 10 já superamos os 55 propostos pelo enunciado.

Errado.

063. (ITA/2015/DESAFIO) Dispomos de seis cores diferentes. Cada face de um cubo será pintada com uma cor diferente, de forma que as seis cores sejam utilizadas. De quantas maneiras isto pode ser feito, se uma maneira é considerada idêntica à outra, desde que possa ser obtida a partir desta por rotação do cubo?

a) 40
b) 36
c) 35
d) 32
e) 30

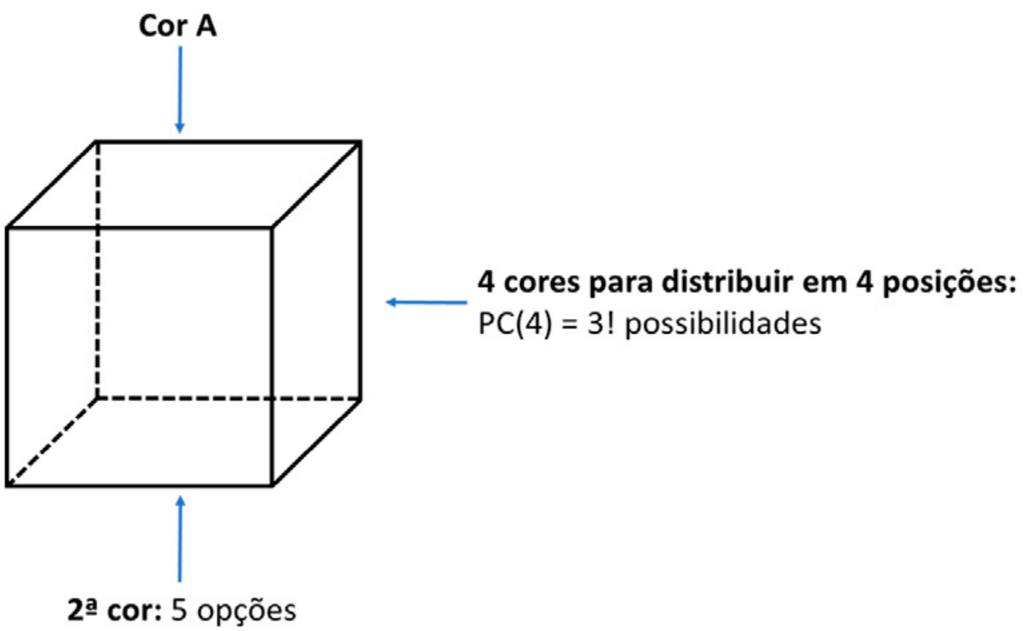
É uma questão bastante instrutiva e criativa.

Como todas as seis faces do cubo são iguais, suponha que escolhemos uma face qualquer para a cor 1. Colocamos essa face para cima apenas para facilitar a visualização.

Para a face inferior, teremos, portanto, 5 opções de cores, pois não podemos repetir a cor 1.

Para as faces laterais, temos 4 opções de cores e 4 faces. Trata-se, portanto, de uma permutação circular. São, portanto, 3! = 6 opções.

Sendo assim, o total de possibilidades é 5.6 = 30 possibilidades.



Letra e.

064. (IBFC/MPE-SP/AUXILIAR DE PROMOTORIA/MOTORISTA/2011/DESAFIO) Um livro de ensino médio tem 262 páginas. Os exercícios estão dispostos nas páginas numeradas com múltiplos de 5 e as soluções dos exercícios estão dispostas nas páginas numeradas com múltiplos de 13. O número de folhas que não figuram exercícios ou soluções é de:

a) 64
b) 67
c) 124
d) 190

Uma questão bastante interessante sobre o Princípio da Inclusão e Exclusão. Mas convenhamos que uma questão com este grau de dificuldade cair para um cargo de motorista, só se fosse para motorista (piloto) de foguete da NASA.
Perceba que o enunciado pediu "o número de folhas". Uma folha é diferente de uma página. Cada folha tem duas páginas. A primeira folha de um livro contém as páginas 1 e 2. Portanto, um livro de 262 páginas tem 131 folhas. Portanto, o conjunto universo será formado por 131 folhas.
Agora, precisamos determinar quantas dessas folhas possuem exercícios ou soluções.
Seja E o conjunto das folhas que possuem exercícios. Sabemos que E contém as páginas múltiplas de 13.
As páginas de E são E = {13, 26, 39, ...}. Temos que o número de elementos desse conjunto deve ser obtido pela divisão entre 262 e 13.

262	**13**
-260	20
=2	

Portanto, existem 20 páginas no livro com exercícios. É importante notar que essas páginas necessariamente estão em folhas diferentes, porque não existem múltiplos de 13 consecutivos. Portanto:

$$\#E = 20$$

Agora, seja S o conjunto das folhas que possuem as soluções desses exercícios. As páginas correspondentes a S são: S = {5, 10, 15...}. O número de páginas desse conjunto é obtido pela divisão:

262	**5**
-260	52
=2	

Todas essas páginas pertencem a folhas diferentes, porque não existem múltiplos de 5 consecutivos. Portanto:

$$\#S = 52$$

Finalmente, precisamos determinar a intersecção, ou seja, as folhas que contém exercícios e soluções simultaneamente. Há duas possibilidades que precisamos considerar.

A primeira delas acontece quando os exercícios e as soluções estão na mesma página. Isso só acontece nas páginas que são múltiplas do MMC entre 5 e 13 que é 65. Portanto, são as páginas {65, 130, 195, 260}. Nesse caso, é relativamente fácil contar, mas sempre poderíamos apelar para a divisão.

Porém, também precisamos considerar o caso em que os exercícios e as soluções estão na mesma folha, porém, em páginas diferentes. Uma folha contém as páginas 1 e 2, 3 e 4, 5 e 6, 7 e 8, 9 e 10 e, assim, por diante. Por exemplo, as páginas 25 e 26 estão na mesma folha – a página 25 contém exercícios e a 26 contém as soluções.

Em linguagem mais matemática, queremos saber quais múltiplos de 13 terminam em 6 ou em 9. Contemos:

E = {13, **26, 39**, 52, 65, 78, 91, 104, 117, 130...}

Agora, não precisamos mais contar um a um. Como já chegamos em um múltiplo de 10, sabemos que 26 + 130 = 156 e 39 + 130 = 169 também são páginas que estamos procurando.

Além disso, 156 + 130 = 286 já está fora do livro. Portanto, as folhas que contém exercícios e soluções são:

$$E \cap S = \{25 - 26, 39 - 40, 65, 130, 155 - 156, 169 - 170, 195, 260\}$$

$$\therefore \#E \cap S = 8$$

Dessa maneira, o total de folhas que contém soluções ou exercícios corresponde à união:

$$\#E \cup S = \#E + \#S - \#(E \cap S) = 20 + 52 - 8 = 64$$

Como o problema pediu as folhas que **não** figuram exercícios ou soluções, na verdade, ele pediu o número de elementos do complementar da união.

$$\#(E \cup S)^C = 131 - 64 = 67$$

Letra b.

Chegamos ao final da nossa aula.
Até o nosso próximo encontro,
Forte abraço!
Thiago Cardoso.

GABARITO

1. 36
2. c
3. e
4. b
5. d
6. e
7. E
8. b
9. b
10. c
11. e
12. c
13. E
14. E
15. e
16. C
17. C
18. b
19. E
20. e
21. C
22. d
23. E
24. C
25. C
26. C
27. E
28. C
29. E
30. d
31. C
32. e
33. e
34. c
35. c
36. 36. 168
37. d
38. e
39. b
40. c
41. d
42. c
43. b
44. E
45. C
46. E
47. d
48. b
49. c
50. a
51. c
52. b
53. e
54. b
55. c
56. e
57. b
58. a
59. a
60. C
61. Anulado
62. E
63. e
64. b

APÊNDICE

Neste apêndice, trouxemos duas técnicas especiais que você pode utilizar para resolver alguns problemas diferenciados que podem aparecer em provas de concursos.

Considero que o nível de incidência dessas técnicas é baixo, porém, elas podem ser úteis para complementar a sua preparação em Análise Combinatória.

Como Distribuir Objetos entre Pessoas?

Uma modalidade interessante de questão consiste em saber de quantas formas é possível dividir **N** de objetos entre **k** pessoas. Vejamos um exemplo de enunciado:

Obs.: de quantas formas um pai pode distribuir 6 presentes aos seus 4 filhos?

Sejam **x**, **y**, **w** e **z** o número de presentes que cada filho poderá receber, observe que, por restrição do enunciado, temos uma relação entre essas 4 variáveis:

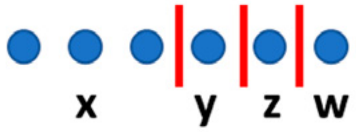
$$x + y + z + w = 6$$

O número de formas diferentes que o pai pode fazer a distribuição dos presentes corresponde ao número de soluções inteiras dessa equação. Uma forma de obter as soluções dessa equação é usar o sistema de pau e bola. Para isso, vamos desenhar 6 bolas, que representarão os presentes, e 3 paus, que representarão a divisão deles entre os filhos.

$$x = 2 \quad y = 1 \quad z = 2 \quad w = 1$$

$$x + y + z + w = 6$$

Observe que chegamos a uma solução da equação, em que os filhos x e z recebem 2 presentes e os demais filhos recebem 1 presente apenas. Observe, ainda, que qualquer permutação entre os paus e as bolas produzem soluções distintas dessa equação.



$$x = 3 \quad y = 1 \quad z = 1 \quad w = 1$$

$$x = 3 \quad y = 0 \quad z = 2 \quad w = 1$$

Portanto, o número de soluções da equação corresponde ao número de permutações possíveis entre 6 bolas e 3 paus. Trata-se de uma permutação de 9 elementos, com repetição de 6 e repetição de 3.

$$P_9^{6,3} = \frac{9!}{6!\,3!}$$

Observe que a permutação se transformou em uma combinação de 9 elementos 3 a 3.

$$P_9^{6,3} = \binom{9}{6} = \frac{9!}{6!\,3!} = \frac{9.8.7.6!}{6!\,.3.2.1} = \frac{9.8.7}{3.2.1} = 3.4.7 = 84$$

Podemos generalizar esse raciocínio. O número de maneiras de distribuir **N** objetos entre **k** pessoas é:

Obs.: $Total = \binom{N+k-1}{N}$

Uma variante desse problema consiste numa situação em que se deseja que cada pessoa receba pelo menos um objeto. Vejamos como podemos resolver?

Obs.: De quantas formas um pai pode distribuir 6 presentes exatamente iguais aos seus 4 filhos, de modo que cada filho receba pelo menos um presente?

A forma mais simples de resolver essa questão é considerando que cada filho vai inicialmente escolher um presente.

Dessa forma, sobrarão 2 presentes para serem distribuídos entre os quatro. E esse é um problema que já sabemos resolver. Basta usar a fórmula anterior.

$$Total = \binom{N+k-1}{N} = \binom{2+4-1}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5.4.3!}{2.1.3!} = \frac{5.4}{2} = 10$$

Portanto, existem apenas 10 formas de distribuir os 6 presentes entre os 4 filhos, de modo que cada um deles receba pelo menos um presente.

Vamos treinar com uma questão desse tipo?

DIRETO DO CONCURSO

065. (QUADRIX/CRM-AC/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO/2019) Se alguém deseja distribuir 9 balas idênticas entre 3 pessoas, sem qualquer critério de distribuição, com cada uma delas recebendo pelo menos uma bala, então existem 28 maneiras de se fazer a distribuição.

Como cada pessoa deve receber pelo menos uma bala, primeiramente, vamos distribuir 3 balas: uma para cada pessoas. Assim, sobram 6 balas (N = 6) a serem distribuídas entre 3 pessoas (k = 3). O número de formas de fazer essa distribuição é:

$$Total = \binom{N+k-1}{N} = \binom{6+3-1}{6} = \binom{8}{2} = \frac{8!}{6!\,2!} = \frac{8.7.6!}{6!\,.2.1} = \frac{8.7}{2} = 4.7 = 28$$

Certo.

Permutações Caóticas

Uma permutação caótica consiste em um tipo especial de permutação em que todos os elementos ocupam uma posição diferente da que ocupavam na sequência original. Por exemplo, as palavras AMOR e ROMA são permutações caóticas.

A	M	O	R
R	O	M	A
1	**2**	**3**	**4**

Esse tema é muito raro de ser cobrado em questões de concurso público. Porém, se você gostou muito dessa área da Análise Combinatória e quer aprender sobre esse tema que pode vir a ser cobrado em uma questão que vai surpreender a todos os candidatos, continue comigo neste material.

Uma pergunta que poderia aparecer em uma prova de concurso seria: quantas permutações caóticas existem na palavra AMOR?

Para responder a essa pergunta, vamos começar com os casos mais simples. Se uma palavra tem apenas duas letras, como a palavra AR, somente existe uma permutação caótica: a palavra RA.

Mas, como poderíamos calcular? A rota para isso é o Princípio da Inclusão e Exclusão:

- vamos considerar todas as permutações possíveis da palavra AR. Chamaremos de N_1;
- vamos excluir as permutações em que exatamente uma das letras está na sua posição original.

O primeiro passo é simples de calcular. Mas o segundo requer um novo uso do Princípio da Inclusão e Exclusão. Para isso, devemos:

- excluir as permutações em que pelo menos uma das letras está na sua posição original; e
- incluir as permutações em que as duas letras estão na sua posição original, porque essas permutações foram contadas duas vezes no passo a passo anterior.

Todas as permutações possíveis $-$ **Permutações em que pelo menos 1 elemento está na posição original** $+$ **Permutações em que pelo menos 2 elementos estão na posição original**

Um ponto a que devemos ter atenção é que, quando falamos "o número de permutações em que 1 elemento está na posição original", esse elemento pode ser qualquer deles. Portanto, devemos escolher 1 elemento dentre o total de 2 elementos.

Além disso, como 1 elemento está na sua posição original, os demais elementos devem sofrer permutações. Portanto, devemos multiplicar pelas permutações de (2 – 1) elementos.

$\binom{2}{1}$	$\cdot$	$(2-1)!$	$=$	$\binom{2}{1} \cdot 1! = 2.1 = 2$
Escolher 1 elemento dentre o total de 2 elementos		**Permutações dos demais elementos**		**Permutações em que pelo menos 1 elemento está na posição original**

Façamos o mesmo para as permutações em que pelo menos 2 elementos estão na sua posição original:

$\binom{2}{2}$	$\cdot$	$(2-2)!$	$=$	$\binom{2}{2} \cdot 0! = 1.1 = 1$
Escolher 2 elemento dentre o total de 2 elementos		**Permutações dos demais elementos**		**Permutações em que pelo menos 2 elementos está na posição original**

Dessa forma, poderíamos calcular o total de permutações caóticas.

$2!$	$-$	$\binom{2}{1} \cdot 1!$	$+$	$\binom{2}{2} \cdot 0!$	$=$	
Todas as permutações possíveis		**Permutações em que pelo menos 1 elemento está na posição original**		**Permutações em que pelo menos 2 elementos estão na posição original**		
2	$-$	2	$+$	1	$=$	1
Todas as permutações possíveis		**Permutações em que pelo menos 1 elemento está na posição original**		**Permutações em que pelo menos 2 elementos estão na posição original**		

Podemos estender esse mesmo raciocínio para palavras maiores. Pense, por exemplo, que desejamos determinar o número de permutações caóticas da palavra DIA.

$3!$	$-$	$\binom{3}{1} \cdot (3-1)!$	$+$	$\binom{3}{2} \cdot (3-2)!$	$-$	$\binom{3}{1} \cdot (3-3)!$
		Pelo menos 1 elemento está na posição original		**Pelo menos 2 elementos estão na posição original**		**Pelo menos 3 elementos estão na posição original**

Vamos calcular cada um dos termos:

$$3! = 3.2.1 = 6$$

$$\binom{3}{1} \cdot (3-1)! = \frac{3!}{1!\,2!} \cdot 2! = 3.2.1 = 6$$

$$\binom{3}{2} \cdot (3-2)! = \frac{3!}{2!\,1!} \cdot 1! = \frac{3.2.1}{2} = 3$$

$$\binom{3}{3} \cdot (3-3)! = \frac{3!}{3!\,0!} \cdot 0! = 1.1 = 1$$

Dessa forma, temos que o total de permutações caóticas da palavra DIA é:

$$N = 6 - 6 + 3 - 1 = 2$$

Existem, portanto, apenas duas permutações caóticas da palavra DIA. São elas: ADI e IAD.

E, se, agora, nós tentássemos fazer o número de permutações caóticas da palavra AMOR? Podemos montar um somatório, observando o seguinte:

- os sinais dos termos incluídos nos somatórios alternam + e –;
- os termos são formados pelo produto de um número binomial multiplicada por um número fatorial;
- o denominador do termo binomial é o mesmo número que aparece subtraindo o fatorial.

sinais + e – alternados

$$\underbrace{4!}_{\text{Todas as permutações possíveis}} - \underbrace{\binom{4}{1} \cdot (3 - 1)!}_{\text{Pelo menos 1 elemento está na posição original}} + \underbrace{\binom{4}{2} \cdot (3 - 2)!}_{\text{Pelo menos 2 elementos estão na posição original}} - \underbrace{\binom{4}{3} \cdot (4 - 3)!}_{\text{Pelo menos 3 elementos estão na posição original}} + \underbrace{\binom{4}{4} \cdot (4 - 4)!}_{\text{Pelo menos 4 elementos estão na posição original}}$$

Agora, vamos calcular cada termo:

$$4! = 4.3.2.1 = 24$$

$$\binom{4}{1} \cdot (4 - 1)! = \frac{4!}{1!\,3!} \cdot 3! = 4.3.2.1 = 24$$

$$\binom{4}{2} \cdot (4 - 2)! = \frac{4!}{2!\,2!} \cdot 2! = \frac{4.3.2.1}{2.1} = 12$$

$$\binom{4}{3} \cdot (4 - 3)! = \frac{4!}{3!\,1!} \cdot 1! = \frac{4.3!}{3!} = 4$$

$$\binom{4}{4} \cdot (4 - 4)! = \frac{4!}{4!\,0!} \cdot 0! = 1$$

Dessa forma, podemos calcular o total de permutações caóticas, usando sinais alternados.

$$N = 24 - 24 + 12 - 4 + 1 = 9$$

Concluímos, então, a existência de 9 permutações caóticas da palavra AMOR. Consegue ver quais são elas?

As 9 permutações caóticas possíveis da palavra AMOR são: MARO, MRAO, MORA, OARM, ORMA, ORAM, RAMO, ROMA, ROAM.

Podemos, ainda, generalizar o conceito de permutações caóticas para uma palavra com N letras distintas.

sinais + e – alternados

$$n! - \binom{n}{1} \cdot (n-1)! + \binom{n}{2} \cdot (n-2)! - \cdots + \binom{n}{n} \cdot (n-n)!$$

Todas as permutações possíveis

Pelo menos 1 elemento está na posição original

Pelo menos 2 elementos estão na posição original

Pelo menos n elementos estão na posição original

Podemos organizar na forma de somatório:

$$N = n! - \binom{n}{1} \cdot (n-1)! + \binom{n}{2} \cdot (n-2)! - \binom{n}{3} \cdot (n-3)! + \binom{n}{4} \cdot (n-4)! - \cdots \binom{n}{n} \cdot (n-n)!$$

Podemos, ainda, chegar em uma expressão interessante:

$$N = n! - \frac{n!}{(n-1)!\,1!} \cdot (n-1)! + \frac{n!}{(n-2)!\,2!} \cdot (n-2)! - \cdots + \frac{n!}{0!\,n!} \cdot (0)!$$

Vamos simplificar os binomiais que vamos destacar a seguir:

$$N = n! - \frac{n!}{\mathbf{(n-1)!}\,1!} \cdot \mathbf{(n-1)!} + \frac{n!}{\mathbf{(n-2)!}\,2!} \cdot \mathbf{(n-2)!} - \cdots + \frac{n!}{\mathbf{0!}\,n!} \cdot \mathbf{(0)!}$$

$$N = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots \frac{n!}{n!}$$

Podemos deixar o n! em evidência. Teremos:

$$N = n! \cdot \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots \frac{1}{n!}\right]$$

Direto do Concurso

066. (FCC/PREFEITURA DE RECIFE-PE/ASSISTENTE DE GESTÃO PÚBLICA/2019) Os quatro funcionários de uma repartição trabalham cada um em uma mesa, todos na mesma sala. O chefe da repartição determinou que os funcionários trocassem de mesa entre si. Os funcionários podem ser realocados na sala de modo que nenhum funcionário passe a ocupar a mesa que ocupava antes da realocação

a) de 4 maneiras diferentes.
b) de 24 maneiras diferentes.
c) de 9 maneiras diferentes.

d) de 6 maneiras diferentes.
e) de 12 maneiras diferentes.

Trata-se de uma permutação caótica, ou seja, aquela em que as 4 pessoas ocupam posições diferentes da posição original. Para isso, vamos utilizar a técnica aprendida.
Vamos obter o total de permutações possíveis dos quatro elementos.

$$Total = 4! = 4.3.2.1 = 24$$

Agora, vamos calcular o total de permutações em que uma pessoa está no seu lugar original. Para isso, devemos escolher uma pessoa (4 opções) e realizar as permutações entre os demais 3 elementos (3! permutações).

$$Uma\ Pessoa\ Está\ no\ Seu\ Lugar\ Original = 4.(4-1)! = 4.3! = 4.6 = 24$$

Façamos agora a conta do número de permutações em que 2 elementos ocupam a sua posição original. Para isso, devemos manter 2 pessoas nos seus lugares originais – existem C(4,2) possibilidades de escolher essas duas pessoas – e realizar as permutações entre os demais 2 elementos (2! permutações).

$$Duas\ Pessoas\ Estão\ no\ Seu\ Lugar\ Original = \binom{4}{2}\cdot(4-2)! = 6.2! = 12$$

Façamos agora a conta das permutações em que 3 pessoas ocupam o mesmo lugar. Para isso, devemos escolher 3 pessoas – são C(4,3) possibilidades – e realizar permutações entre os demais 1 elemento restante.

$$Três\ Pessoas\ Estão\ no\ Seu\ Lugar\ Original = \binom{4}{3}\cdot(4-3)! = 4.1! = 4$$

Por fim, chegamos às permutações em que todos os elementos ocupam a posição original. É somente

$$Quatro\ Pessoas\ Estão\ no\ Seu\ Lugar\ Original = \binom{4}{4}\cdot(4-4)! = 1.0! = 1$$

Finalmente, vamos aplicar o Princípio da Exclusão e Inclusão. Para isso, basta subtrair e somar alternadamente os valores calculados.

$$N = 24 - 24 + 12 - 4 + 1 = 9$$

Também poderíamos usar a estrutura que vimos na teoria.

sinais + e – alternados

$$4! - \underbrace{\binom{4}{1}\cdot(3-1)!}_{\text{Pelo menos 1 elemento está na posição original}} + \underbrace{\binom{4}{2}\cdot(3-2)!}_{\text{Pelo menos 2 elementos estão na posição original}} - \underbrace{\binom{4}{3}\cdot(4-3)!}_{\text{Pelo menos 3 elementos estão na posição original}} + \underbrace{\binom{4}{4}\cdot(4-4)!}_{\text{Pelo menos 4 elementos estão na posição original}}$$

Agora, vamos calcular cada termo:

$$4! = 4.3.2.1 = 24$$

$$\binom{4}{1} \cdot (4-1)! = \frac{4!}{1!\,3!} \cdot 3! = 4.3.2.1 = 24$$

$$\binom{4}{2} \cdot (4-2)! = \frac{4!}{2!\,2!} \cdot 2! = \frac{4.3.2.1}{2.1} = 12$$

$$\binom{4}{3} \cdot (4-3)! = \frac{4!}{3!\,1!} \cdot 1! = \frac{4.3!}{3!} = 4$$

$$\binom{4}{4} \cdot (4-4)! = \frac{4!}{4!\,0!} \cdot 0! = 1$$

Dessa forma, podemos calcular o total de permutações caóticas, usando sinais alternados.

$$N = 24 - 24 + 12 - 4 + 1 = 9$$

A forma mais rápida de resolver esse problema seria usando a fórmula:

$$N = 4! \cdot \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right] = 24 \cdot \left[1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right]$$

$$N = 24 \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] = \frac{24}{2} - \frac{24}{3} + \frac{24}{4} = 12 - 9 + 6 = 9$$

Letra c.

Thiago Cardoso

Engenheiro eletrônico formado pelo ITA com distinção em Matemática, analista-chefe da Múltiplos Investimentos, especialista em mercado de ações. Professor desde os 19 anos e, atualmente, leciona todos os ramos da Matemática para concursos públicos.


LEI Nº 8.666/1993 - LICITAÇÃO
Avaliação
Comentário
Seu feedback é valioso. Você gostaria de deixar um comentário e assim nos ajudar a melhorar nossos produtos e serviços?
Obs: A avaliação da aula em pdf é exclusivamente pedagógica. Clique aqui para relatar problemas técnicos, pois serão desconsiderados deste canal.
Sim, salvar comentário.
Não, obrigado.
NÃO SE ESQUEÇA DE AVALIAR ESTA AULA!
SUA OPINIÃO É MUITO IMPORTANTE PARA MELHORARMOS AINDA MAIS NOSSOS MATERIAIS.
ESPERAMOS QUE TENHA GOSTADO DESTA AULA!
PARA AVALIAR, BASTA CLICAR EM LER A AULA E, DEPOIS, EM AVALIAR AULA.
AVALIAR