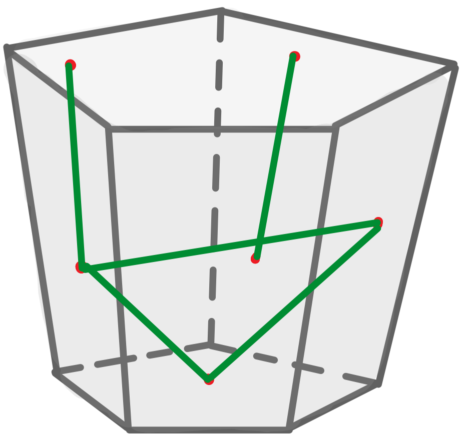
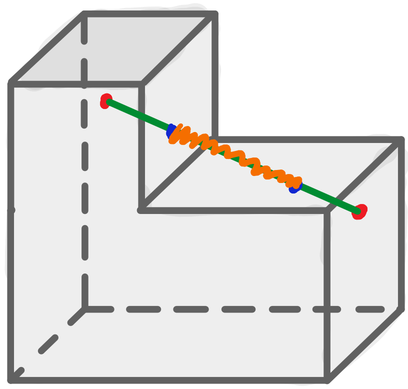
Poliedros

Definição

Poliedros São Sólidos Fechados Cujas Faces São Polígonos.

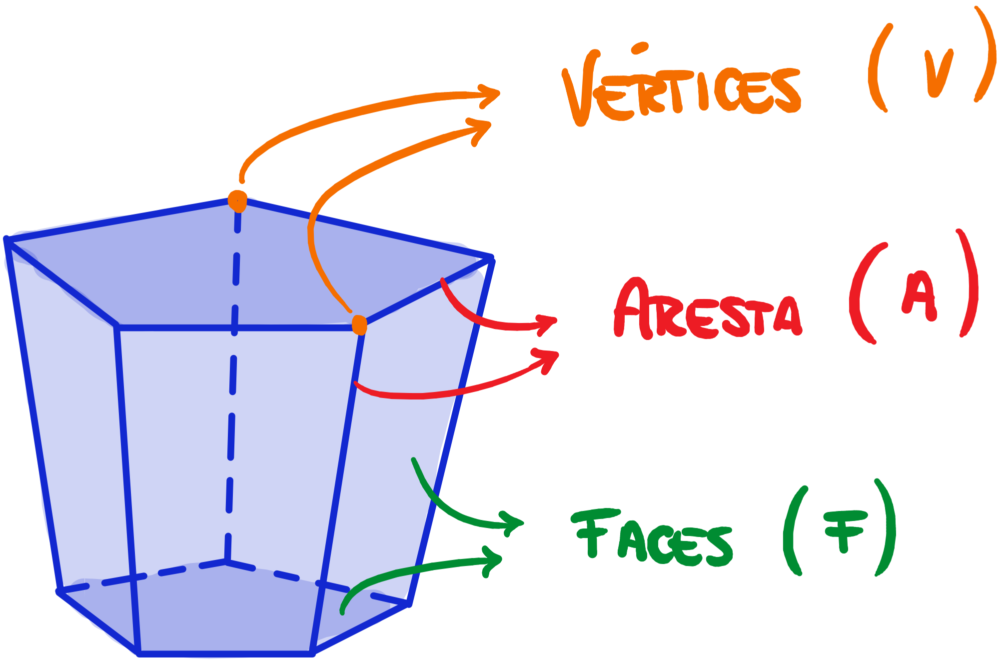


Poliedro Convexo



Poliedro Não Convexo (Côncavo)

Elementos De Um Poliedro



RELAÇÃO DE EULER

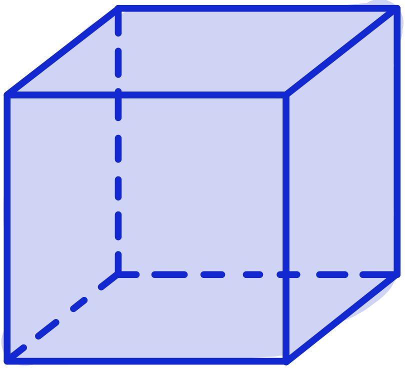
V: Nº DE VÉRTICES

F: Nº DE FACES

A: Nº DE ARESTAS

$$\boxed{V + F = A + 2}$$

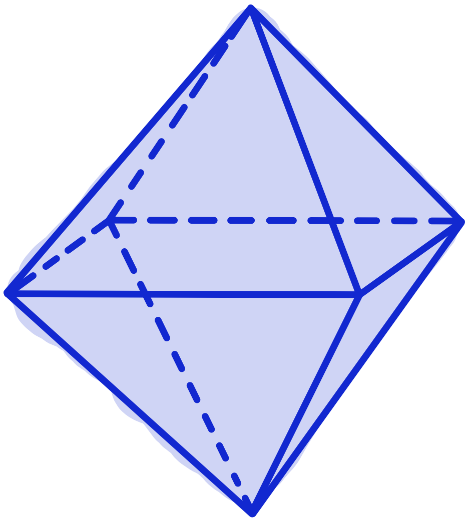
* VÁLIDO PARA TODO POLIEDRO CONVEXO *



$V = 8 \quad F = 6 \quad A = 12$

$V + F = A + 2$

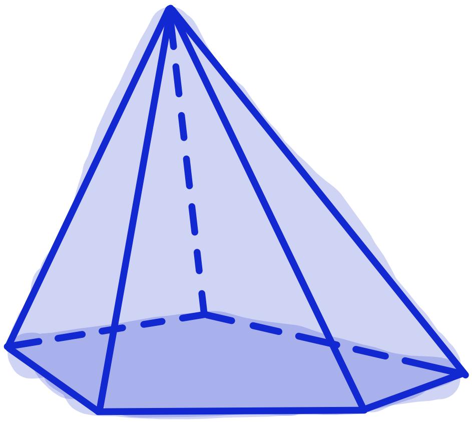
$8 + 6 = 12 + 2$



$V = 6 \quad F = 8 \quad A = 12$

$V + F = A + 2$

$6 + 8 = 12 + 2$



$V = 6 \quad F = 6 \quad A = 10$

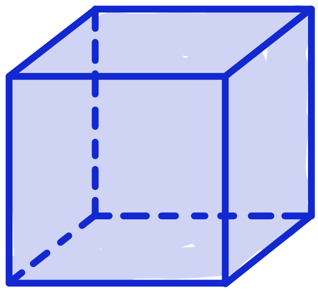
$V + F = A + 2$

$6 + 6 = 10 + 2$

UNIVERSO NARRADO

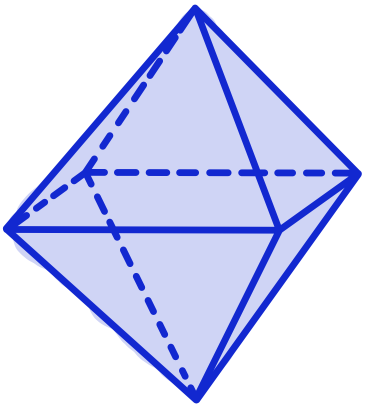
Soma dos Ângulos das Faces

$$\boxed{S = 360°(V-2)}$$



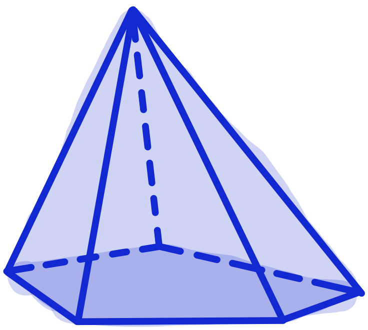
$S = 6 . 360° = 2.160°$

$S = 360(8-2) = 2.160°$



$S = 8 . 180° = 1440°$

$S = 360°(6-2) = 1.440°$



$S = 5 . 180 + 540° = 1440°$

$S = 360(6-2) = 1.440°$

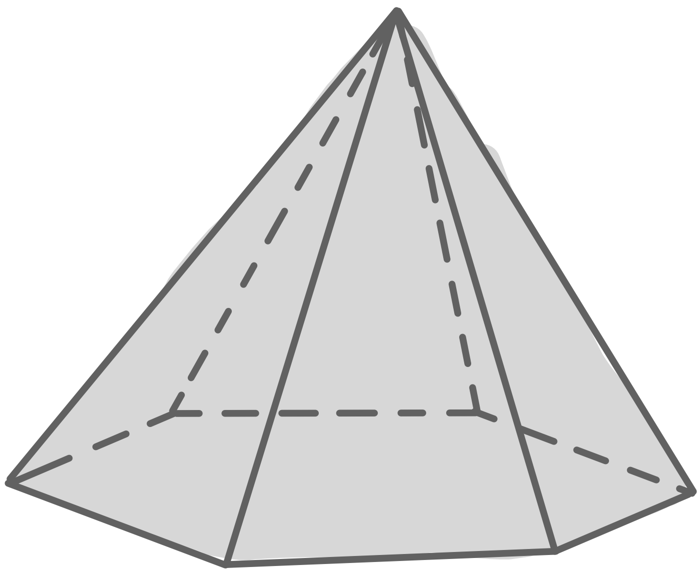
EXEMPLO

UM POLIEDRO CONVEXO POSSUI 12 ARESTAS E 7 FACES. CALCULE O NÚMERO DE VÉRTICES DESSE POLIEDRO.

$$V + F = A + 2$$

$$V + 7 = 12 + 2$$

$$V = 7$$



EXEMPLO

UM POLIEDRO CONVEXO POSSUI 21 ARESTAS E 9 FACES. CALCULE A SOMA DOS ÂNGULOS DAS FACES DESSE POLIEDRO.

$$V + F = A + 2$$

$$V + 9 = 21 + 2$$

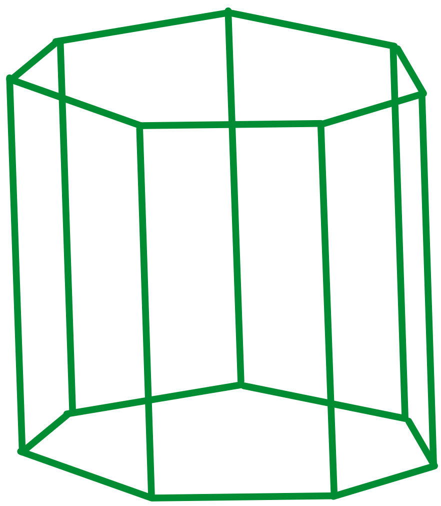
$$\underline{V = 14}$$

$$S = 360(V - 2)$$

$$S = 360(14 - 2)$$

$$S = 12 \cdot 360°$$

$$\underline{S = 4.320°}$$



$$S = 7 \cdot 360 + 180(7 - 2)$$

EXEMPLO

CALCULE O NÚMERO DE FACES DE UM POLIEDRO CONVEXO QUE TEM 28 ARESTAS E CUJA SOMA DOS ÂNGULOS DAS FACES É 5040°

$$A = 28$$

$$S = 360(V-2)$$

$$5.04\cancel{0} = 36\cancel{0}(V-2)$$

$$\frac{504}{36} = V-2 \rightarrow V-2 = 14$$

$$\underline{V = 16}$$

$$V + F = A + 2$$

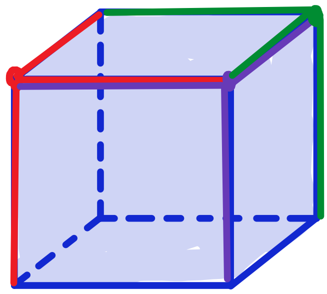
$$16 + F = 28 + 2$$

$$\underline{F = 14}$$

EXEMPLO

SEJA UM POLIEDRO CONVEXO COM 11 VÉRTICES. A PARTIR DE 5 VÉRTICES PARTEM 3 ARESTAS, A PARTIR DE OUTROS 5 VÉRTICES PARTEM 4 ARESTAS E A PARTIR DO VÉRTICE RESTANTE PARTEM 5 ARESTAS.

CALCULE O NÚMERO DE FACES DESSE POLIEDRO.



$$A = \frac{8.3}{2} = 12$$

$$A = \frac{5.3 + 5.4 + 1.5}{2} \rightarrow A = 20$$

$$V = 11$$

$$V + F = A + 2$$

$$11 + F = 20 + 2$$

$$F = 11$$

UNIVERSO NARRADO

EXEMPLO

SÃO DADOS DOIS POLIEDROS CONVEXOS, P_1 E P_2, CUJOS NÚMEROS DE FACES, VÉRTICES E ARESTAS SÃO DADOS, RESPECTIVAMENTE, POR F_1, V_1, A_1 E F_2, V_2, A_2.

SE A SEQUÊNCIA ABAIXO É UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA, CALCULE F_1 E F_2.

$$\left(4,\ V_1,\ V_2,\ A_1,\ A_2,\ 14\right)$$

$$\overset{}{4} \xrightarrow{2} V_1 \xrightarrow{2} V_2 \xrightarrow{2} A_1 \xrightarrow{2} A_2 \xrightarrow{2} 14$$

$V_1 = 6$

$V_2 = 8$

$A_1 = 10$

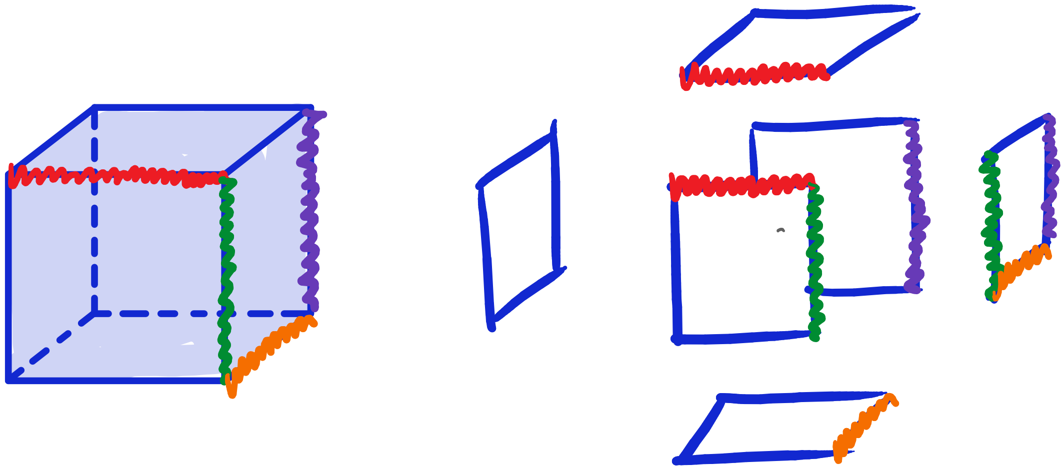
$A_2 = 12$

$$V_1 + F_1 = A_1 + 2$$
$$6 + F_1 = 10 + 2$$
$$\underline{F_1 = 6}$$

$$V_2 + F_2 = A_2 + 2$$
$$8 + F_2 = 12 + 2$$
$$\underline{F_2 = 6}$$

EXEMPLO

CALCULE O NÚMERO DE ARESTAS DE UM CUBO SEM CONTÁ-LAS DIRETAMENTE.



$$\boxed{A = \frac{6.4}{2}} \rightarrow A = 12$$

UNIVERSO NARRADO

EXEMPLO

SEJA UM POLIEDRO CONVEXO COM 2 FACES HEXAGONAIS, 6 PENTAGONAIS E 3 QUADRILATERIAS.

CALCULE O NÚMERO DE VÉRTICES DESSE POLIEDRO.

$F = 2 + 6 + 3 \rightarrow \underline{F = 11}$

$A = \dfrac{2.6 + 6.5 + 3.4}{2} \rightarrow \underline{A = 27}$

$$V + F = A + 2$$

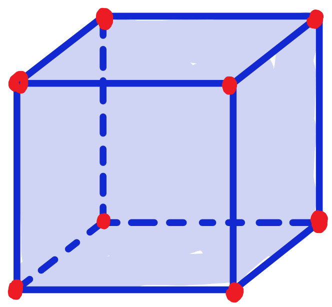
$$V + 11 = 27 + 2$$

$$\underline{V = 18}$$

EXEMPLO

SEJA UM POLIEDRO CONVEXO COM 2 FACES HEXAGONAIS, 6 PENTAGONAIS E 3 QUADRILATERIAS.

CALCULE O NÚMERO DE DIAGONAIS DESSE POLIEDRO.



LIGAÇÃO DE 2 VÉRTICES $\binom{V}{2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{DIAG. POLIEDRO} : x \\ \text{DIAG. FACES} : D \\ \text{ARESTAS} : A \end{array} \right.$$

$F = 11$

$$A = \frac{2 \cdot 6 + 6 \cdot 5 + 3 \cdot 4}{2} = 27$$

$$V + 11 = 27 + 2$$

$$\underline{V = 18}$$

Nº SEGMENTOS (PARES DE VÉRTICES)

$$\binom{18}{2} = \frac{18 \cdot 17}{2 \cdot 1} = 9 \cdot 17 = \underline{153}$$

DIAG. POLÍGONO DE n LADOS

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

HEX.	PENT.	QUAD.
$\frac{6 \cdot 3}{2} = 9$	$\frac{5 \cdot 2}{2} = 5$	$\frac{4 \cdot 1}{2} = 2$

$$D = 2 \cdot 9 + 6 \cdot 5 + 3 \cdot 2$$

$$\underline{D = 54}$$

$$x + 54 + 27 = 153$$

$$x = 153 - 81 \rightarrow \underline{x = 72}$$

EXEMPLO

JULGUE AS AFIRMATIVAS:

(✓) UM POLIEDRO CONVEXO POSSUI NÚMERO DE FACES IGUAL AO DE VÉRTICES. LOGO O NÚMERO DE ARESTAS É PAR.

$$V + F = A + 2$$
$$F + F = A + 2$$
$$A = 2F - 2$$
$$A = 2(F - 1)$$

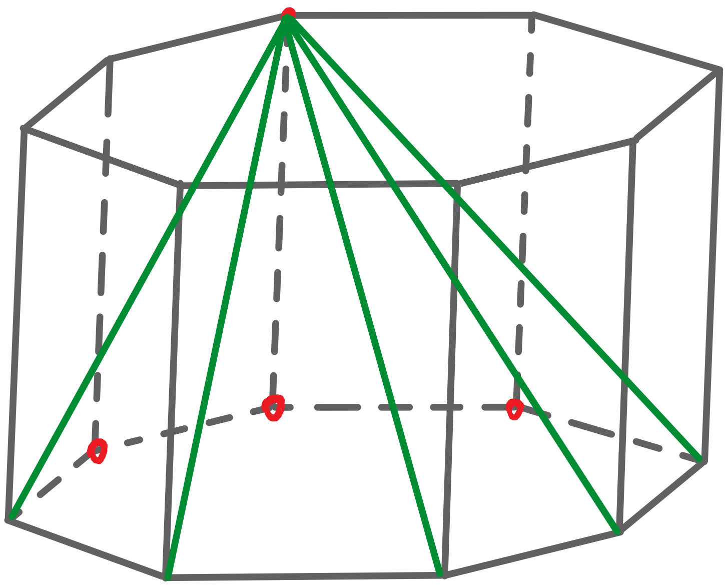
(F) EXISTE UM POLIEDRO QUE POSSUI 2 FACES HEXAGONAIS, 3 FACES PENTAGONAIS E 4 QUADRILATERAIS.

$$A = \frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 4}{2}$$

$$A = \frac{43}{2} = 21,5$$

EXEMPLO

UM PRISMA TEM NÚMERO DE VÉRTICES IGUAL AO NÚMERO DE DIAGONAIS. QUANTAS ARESTAS POSSUI ESSE PRISMA?



~~8~~

8 [5 ✓
  3 x

Nº LADOS BASE : n

Nº VÉRTICES : $2n$

Nº DIAG : $\dfrac{2n(n-3)}{2} = n(n-3)$

$$\cancel{n}(n-3) = 2\cancel{n}$$

$$n - 3 = 2$$

$$\underline{n = 5} \rightarrow \text{P. PENTAGONAL}$$

$V = 10$

$F = 5 + 2 = 7$

$$V + F = A + 2$$

$$10 + 7 = A + 2$$

$$\underline{A = 15}$$

POLIEDROS DE PLATÃO

SÃO POLIEDROS CONVEXOS TAIS QUE:

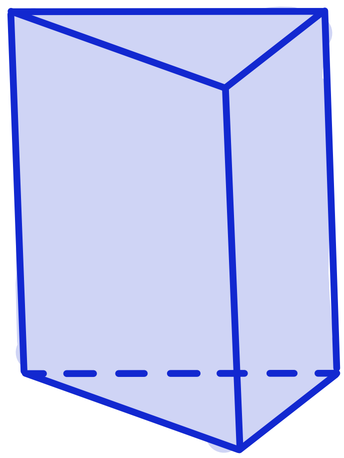
I) DE CADA VÉRTICE PARTEM O MESMO NÚMERO DE ARESTAS.

II) CADA FACE POSSUI O MESMO NÚMERO DE LADOS

FUN FACT!

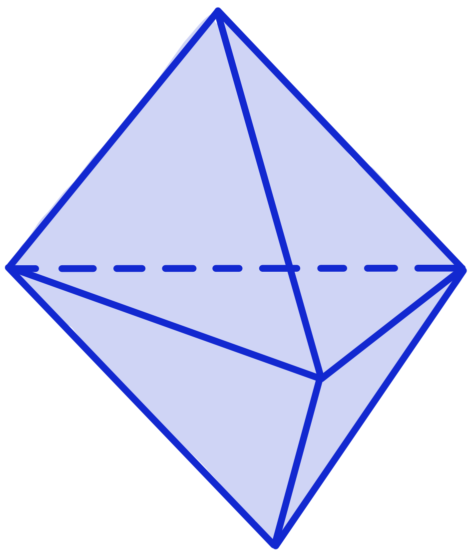
EXISTEM APENAS 5 POLIEDROS DE PLATÃO

UNIVERSO NARRADO



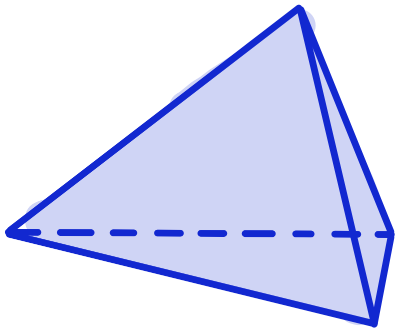
Cond. I ✓

Cond. II ✗

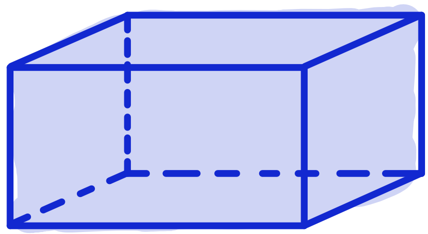


Cond. I ✗

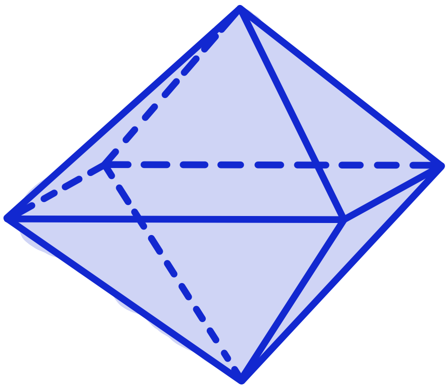
Cond. II ✓



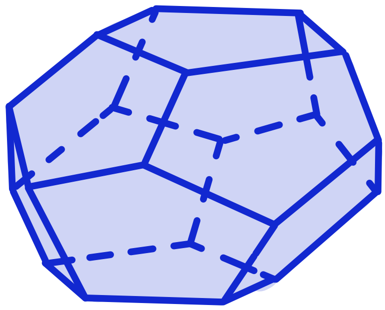
Tetraedro



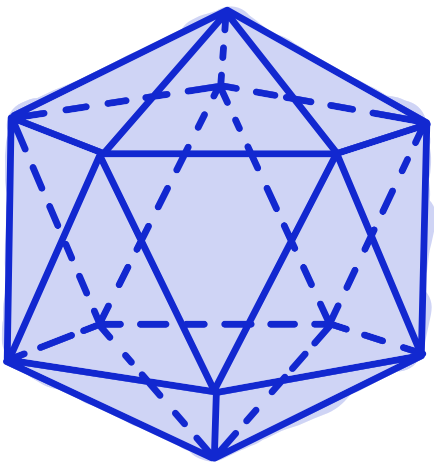
Hexaedro



Octaedro



Dodecaedro



Icosaedro

	F	A	V
TETRAEDRO	4	6	4
HEXAEDRO	6	12	8
OCTAEDRO	8	12	6
DODECAEDRO	12	30	20
ICOSAEDRO	20	30	12

TETRAEDRO : $A = \dfrac{4.3}{2} = 6$

HEXAEDRO : $A = \dfrac{6.4}{2} = 12$

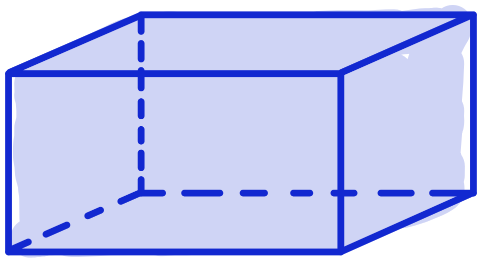
OCTAEDRO : $A = \dfrac{8.3}{2} = 12$

DODECAEDRO : $A = \dfrac{12.5}{2} = 30$

ICOSAEDRO : $A = \dfrac{20.3}{2} = 30$

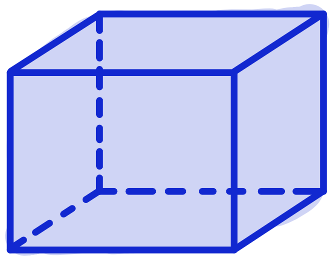
Poliedros Regulares

São poliedros de Platão cujas faces são congruentes.



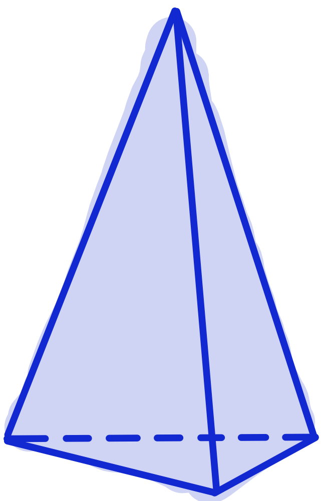
P. Platão ✓

P. Regular ✗



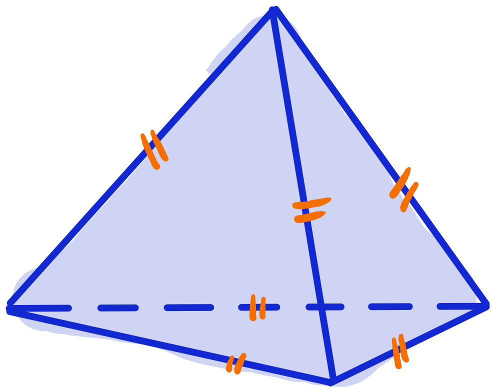
P. Platão ✓

P. Regular ✓



P. Platão ✓

P. Regular ✗



P. Platão ✓

P. Regular ✓