Aula 03

BNB - Raciocínio Lógico e Quantitativo - 2023 (Pré-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

24 de Março de 2023

Índice

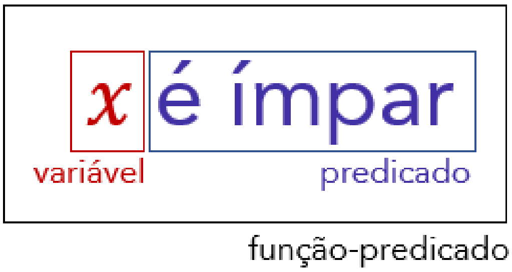
Lógica de Primeira Ordem

Simbologia e Aspectos Iniciais

Nesse primeiro momento, nosso principal objetivo será **passar alguns conceitos iniciais** e provocar uma **familiarização com os símbolos** que estaremos utilizando. Devemos, ao final desse capítulo, ser capazes de **traduzir a notação simbólica** que permeia a LPO **para o bom e velho português**. Para começar, considere a seguinte sentença:

x é ímpar

A sentença acima é verdadeira ou falsa? Não sabemos, pois **dependemos do valor de x**. Como x pode assumir vários valores distintos, **chamamos o x de variável**. Além disso, tudo que é dito sobre essa variável, nós **chamamos de predicado**. A oração "x é ímpar" vai ser, portanto, **uma função-predicado (ou função proposicional)** pois é uma sentença que depende do valor de uma variável para que seja possível atribuí-la determinado valor lógico. Observe:



A pergunta que faremos agora é: *quais números a variável x pode assumir?* Podemos considerar **o conjunto dos números inteiros**, isto é:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Nessa situação, chamamos o conjunto dos números inteiros de **Universo de Discurso do predicado**. Em outras palavras, **o Universo de Discurso é um conjunto formado pelos valores que a variável de uma função-predicado pode assumir**. Em muitas situações, esse conjunto não é explicitamente detalhado, ficando a cargo do leitor sua correta identificação **dado o contexto do problema**. Vamos observar alguns exemplos.

- x é um país emergente.
  Se nada for falado no comando da questão, pode-se extrair como Universo de Discurso o conjunto formado por **todos os países existentes no globo**. Por exemplo, se x assumir o valor "Canadá", a proposição será falsa. Caso assuma "Índia", então teremos uma proposição verdadeira.

- x passou no concurso dos sonhos.
  Novamente, se nada for falado no comando da questão, pode-se extrair como Universo de Discurso o conjunto formado por **todas as pessoas que estudam para concursos**. No entanto, o examinador pode estabelecer o Universo de Discurso como sendo, por exemplo, só os alunos do Estratégia.

Observe que ficar escrevendo a função-predicado "x é ímpar" não é interessante, pois, quando começarmos a aplicar propriedades e a fazer um estudo mais detalhado dos predicados, "carregar" a sentença inteira não é a melhor das ideias. Por esse motivo, **podemos simplificá-la escrevendo-a de até três maneiras distintas: $\boldsymbol{Impar(x)}$ ou $\boldsymbol{I(x)}$ ou $\boldsymbol{Ix}$.**

$$\boldsymbol{Impar(x) = I(x) = Ix = x \text{ é } ímpar}$$

HORA DE PRATICAR!

(BR/2012) Considere a afirmativa "Todo gerente de projeto é programador". Considere os predicados G(x) e P(x), que representam, respectivamente, que x é gerente de projeto e que x é programador. Uma representação coerente da afirmativa acima em lógica de primeira ordem é

A) $G(x) \rightarrow \neg P(x)$
B) $\neg G(x) \rightarrow P(x)$
C) $P(x) \rightarrow G(x)$
D) $\neg P(x) \rightarrow G(x)$
E) $\neg P(x) \rightarrow \neg G(x)$

Comentários:

O enunciado fornece os seguintes predicados:

$$G(x): \quad x \text{ é gerente de projeto}$$
$$P(x): \quad x \text{ é programador}$$

Note que afirmações do tipo **"todo A é B"** são equivalentes à **"Se A, então B"**. Dessa forma, devemos colocar os predicados acima na forma de uma condicional. Considerando os dados do enunciado, temos que**: todo gerente de projeto é programador.** Observe que tal afirmativa equivale a falar: **se é gerente de projeto, então é programador**. Em notação da lógica de primeira ordem fica:

$$G(x) \Longrightarrow P(x)$$

Observe que a forma que escrevemos **não está contemplada entre as alternativas**. Devemos, nesse momento, lembrar da aula de Equivalências Lógicas:

$$p \Longrightarrow q \qquad \equiv \qquad \neg q \Longrightarrow \neg p$$

Podemos usar a mesma relação aqui na lógica de primeira ordem.

$$G(x) \Longrightarrow P(x) \qquad \equiv \qquad \neg P(x) \Longrightarrow \neg G(x)$$

Qualquer uma das expressões acima **são possíveis respostas da questão**. No entanto, **apenas $\neg P(x) \Longrightarrow \neg G(x)$ está contemplada nas alternativas** e é o nosso gabarito.

Gabarito: LETRA E.

Na questão anterior, temos **uma resposta coerente**. No entanto, **ela não é uma resposta completa**. Uma representação mais adequada para a afirmativa do enunciado **deveria conter o quantificador universal $\forall$.** Isso acontece, pois, precisamos indicar que **a totalidade** dos gerentes de projeto são programadores.

Quando escrevemos que $G(x) \Longrightarrow P(x)$, estamos dizer que:

Se x é gerente de projeto, então x é programador

Intuitivamente, é possível inferir uma totalidade implícita quando escrevemos a própria condicional. Mas, **para uma resposta completa e explícita, devemos fazer o uso do quantificador**. Essa representação seria:

$$(\forall x)\big(G(x) \Longrightarrow P(x)\big)$$

Uma leitura completa da expressão acima é:

Para todo x pertencente ao Universo de Discurso, se x é gerente de projeto, então x é programador.

No cotidiano, **fazemos uma leitura simplificada**:

Para todo x, se x é gerente de projetos, x é programador.

A ideia de que x pertence ao universo de discurso **fica implícita**.

HORA DE PRATICAR!

(IPE-SAÚDE/2022) Considere como conjunto universo $U = \{0,1,2,3,4\}$ e observe as seguintes proposições quantificadas, assinalando V, se verdadeiro, ou F, se falso.

( ) $(\forall x \in U)(x + 3 > 6)$
( ) $(\exists x \in U)(x \text{ é } par)$
( ) $(\forall x \in U)(x^2 < 20)$

O valor lógico das afirmações acima, na ordem de preenchimento, de cima para baixo, é:

A) $V - V - V$.
B) $V - V - F$.
C) $V - F - V$.

D) $F - V - V$.
E) $F - F - F$.

Comentários:
Para começar nosso estudo de LPO, vamos avaliar as proposições do enunciado. O primeiro passo aqui é observar o **Universo de Discurso**.

$$U = \{0,1,2,3,4\}$$

(**F**) $(\forall x \in U)(x + 3 > 6)$
Pessoal, essa aqui é **falsa**. Quando "traduzimos" a expressão, ela diz que **para todo x** pertencente ao conjunto universo, temos que **x mais três é maior do que 6**. Ora, veja que se "x" for 0, a expressão não vai ser verdade. Com isso, não poderíamos usar o "para todo".

(**V**) $(\exists x \in U)(x \text{ é } par)$
Verdadeiro. A "tradução" para o português fica: *"existe x pertencente a U tal que x é par".* Ora, observando o conjunto U, vemos que existe sim! **O "0", o "2" e o "4" são números pares**.

(**V**) $(\forall x \in U)(x^2 < 20)$
Verdadeiro. A "tradução" dessa para o português fica: *"para todo x pertencente a U tem-se que o quadrado de x é menor do que 20".* Como o conjunto **U tem poucos elementos**, podemos testar todos.

$$0^2 = 0 \qquad 1^2 = 1 \qquad 2^2 = 4 \qquad 3^2 = 9 \qquad 4^2 = 16$$

Observe que os quadrados de **todos** os elementos de U são realmente **menores do que 20**. Logo, a proposição é **verdadeira**.

Gabarito: LETRA D.

LPO e as Proposições Categóricas

Você deve ter percebido que nosso foco está em **fazer verdadeiras traduções entre a Língua Portuguesa e a linguagem de símbolos da Lógica de Primeira Ordem**. Minha intenção aqui é fazer com que esse monte de símbolos não te assuste e que na hora da prova **você possa se diferenciar dos seus concorrentes**. Nesse intuito, eu gostaria que você prestasse bastante atenção no quadro abaixo.

Proposição Categórica	Representação Simbólica
(1) Todo A é B.	$\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$
(2) Algum A é B.	$\exists x(A(x) \wedge B(x))$
(3) Nenhum A é B.	$\neg\exists x(A(x) \wedge B(x))$
(4) Algum A não é B.	$\exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$

Observe que temos **uma representação simbólica para cada uma das formas** de proposição categórica que estudamos e revisamos anteriormente. **Vamos entender o porquê** de cada uma das representações?

- **Todo A é B.**

$$\underbrace{\forall x}_{\text{para todo x}}\Big(\underbrace{A(x)}_{\text{Se x é A}}\ \underbrace{\rightarrow}_{\text{então}}\ \underbrace{B(x)}_{\text{x é B}}\Big)$$

É exatamente a expressão que obtivemos ao escrever uma resposta mais completa para a questão que vimos. Note que, **para representar a noção de totalidade**, devemos colocar **o quantificador universal**.

Além disso, não esqueça que **a condicional desempenha um papel fundamental**, pois, quando queremos dizer que todo A é B, no fundo estamos dizendo *que se dado objeto possui a propriedade A, então ele também possuirá a propriedade B*.

- **Algum A é B.**

$$\underbrace{\exists x}_{\text{existe x tal que}}\Big(\underbrace{A(x)}_{\text{x é A}}\ \underbrace{\wedge}_{\text{e}}\ \underbrace{B(x)}_{\text{x é B}}\Big)$$

Agora, para representar que **algum objeto A possui a propriedade B**, utilizamos **o quantificador existencial ∃.** Esse quantificador, como já vimos, exprime a ideia de que *existe pelo menos um x* (ou, simplesmente, algum x). Veja que **usamos a conjunção (∧)** para expressar que o objeto **possui duas propriedades (A e B), simultaneamente**. *Essa combinação de símbolos, de fato, expressa que Algum A é B, concorda?*

- **Nenhum A é B.**

$$\underbrace{\neg\exists x}_{\text{não existe x tal que}}\Big(\underbrace{A(x)}_{\text{x é A}}\ \underbrace{\wedge}_{\text{e}}\ \underbrace{B(x)}_{\text{x é B}}\Big)$$

Note que para dizer que *Nenhum A é B*, basta dizer que **não existe x tal que x tenha as duas propriedades** (seja A e B, simultaneamente). Isso é exatamente **a negação (o operador ¬)** de "Algum A é B". Lembre-se que **a negação de uma proposição categórica particular positiva é uma universal negativa**.

- **Algum A não é B.**

$$\underbrace{\exists x}_{\text{existe x tal que}}\Big(\underbrace{A(x)}_{\text{x é A}}\ \underbrace{\wedge}_{\text{e}}\ \underbrace{\neg B(x)}_{\text{x não é B}}\Big)$$

Podemos aproveitar a representação simbólica de "todo A é B" para escrever a representação de "algum A não é B". Para isso, devemos lembrar que **um é a negação do outro**. Temos ainda que na negação de proposições quantificadas, **trocamos o quantificador e negamos a proposição subsequente**. Pouco mais cedo nessa aula, vimos que:

$$\sim(p \Rightarrow q) \ \equiv \ p \wedge \sim q$$

Vamos aproveitar essa informação e usar aqui também! A Lógica de Predicados nada mais é do que **uma extensão da Lógica Proposicional**. Observe a semelhança entre as duas expressões acima. Para ajudar na compreensão, vamos fazer uma questão do CESPE que traz uma grande aula sobre o assunto.

HORA DE PRATICAR!

(ADAPAR/2021) Considere a seguinte proposição categórica O.

O: “Nem todo carneiro é dócil”.

Considerando que x pertença ao conjunto T de todos os animais do mundo, que C(x) represente simbolicamente a propriedade “x é carneiro” e que D(x) represente simbolicamente a propriedade “x é dócil”, assinale a opção que apresenta uma representação simbólica correta da proposição O na linguagem da lógica de primeira ordem.

A) $\forall x\big(C(x) \rightarrow \neg D(x)\big)$
B) $\forall x\big(C(x) \rightarrow D(x)\big)$
C) $\neg\exists x\big(C(x) \wedge D(x)\big)$
D) $\exists x\big(C(x) \wedge \neg D(x)\big)$
E) $\exists x\big(C(x) \wedge D(x)\big)$

Comentários:

Questão bem bacana para treinar o que acabamos de ver. Inicialmente, é interessante escrever a proposição categórica O de um jeito mais familiar com o que estamos estudando.

"Nem todo carneiro é dócil" = "Algum carneiro não é dócil"

Com isso, caímos na situação que vimos anteriormente.

- **Algum A não é B.**

$$\underbrace{\exists x}_{\text{existe x tal que}}\Big(\underbrace{A(x)}_{\text{x é A}}\ \underbrace{\wedge}_{\text{e}}\ \underbrace{\neg B(x)}_{\text{x não é B}}\Big)$$

Como o enunciado deu que **C(x) representa "x é carneiro" e D(x) representa "x é dócil"**. Temos que:

$$\boldsymbol{\exists x\big(C(x) \wedge \neg D(x)\big)}$$

Perceba que para matarmos a questão, convertemos a frase para um formato familiar. Guarde essa dica! Às vezes, as questões não dão as proposições categóricas do jeito "tradicional". No entanto, lembre-se que você pode sim **escrevê-la de uma forma mais conveniente**, **desde que expresse o mesmo sentido**. Por fim, recomendo fortemente que decore a tabelinha abaixo:

Proposição Categórica	Representação Simbólica
(1) Todo A é B.	$\forall x\big(A(x) \rightarrow B(x)\big)$
(2) Algum A é B.	$\exists x\big(A(x) \wedge B(x)\big)$
(3) Nenhum A é B.	$\neg\exists x\big(A(x) \wedge B(x)\big)$
(4) Algum A não é B.	$\exists x\big(A(x) \wedge \neg B(x)\big)$

Esse tipo de conversão costuma cair bastante e saber "na lata" vai lhe **poupar preciosos minutos** enquanto seus concorrentes estarão "quebrando" a cabeça!

Gabarito: LETRA D.

Relações e Aridade

Vamos avançar um pouco mais. Todos os predicados que vimos até agora são **relações unárias**, isto é, possuem apenas uma única variável. Nesse caso, dizemos que **predicados assim possuem <u>aridade 1</u>**.

$I(x)$: x é impar
$G(x)$: x é gerente de projetos
$P(x)$: x é um pavão

No entanto, podemos ir além e **estabelecer relações entre dois ou mais objetos!** Observe alguns exemplos de **relações binárias**.

$C(x,y)$: x é casado com y
$E(x,y)$: x estuda na escola y
$A(x,y)$: x acredita na religião y

Os predicados acima possuem duas variáveis e, por esse motivo, dizemos que **possui aridade 2**. É importante ressaltar que, com duas variáveis, **encontraremos 2 quantificadores em um mesmo predicado**. **Cada um deles estará associado ao escopo de sua variável**. Para esclarecer melhor esse ponto da matéria, vamos analisar uma questão recente que traz essa abordagem.

HORA DE PRATICAR!

(TRANSPETRO/2018) Considere a seguinte sentença:

“Todo aluno do curso de Informática estuda algum tópico de Matemática Discreta”

e os seguintes predicados:

$A(x)$: x é aluno.
$I(x)$: x é do curso de Informática.
$E(x,y)$: x estuda y.
$T(x)$: x é tópico de Matemática Discreta.

Uma forma de traduzi-la é
A) $\forall x((A(x) \land I(x)) \rightarrow \exists y(T(y) \land E(x,y)))$
B) $\forall x(A(x) \land I(x)) \land \forall y(T(y) \rightarrow E(x,y))$
C) $\exists x \forall y(A(x) \land /(x) \land T(y) \land \neg E(x,y))$
D) $\forall x((A(x) \land I(x)) \rightarrow \forall y(T(y) \rightarrow E(x,y)))$
E) $\exists x \forall (A(x) \land I(x) \land T(y) \land E(x,y))$

Comentários:
Inicialmente, note que **x irá representar alguém no conjunto de todos os alunos**. **y representa alguma matéria que é estudada por x**. Temos a seguinte sentença para traduzi-la em linguagem simbólica:

“Todo aluno do curso de Informática estuda algum tópico de Matemática Discreta”

Note que podemos reescrever a frase do seguinte modo:

“Todo aluno do curso de Informática é estudante de algum tópico de Matemática Discreta”

Vimos que expressões do tipo **"Todo P é Q."** pode ser representada simbolicamente por:

$$\forall \boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \longrightarrow \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})\right)$$

Portanto, devemos procurar alternativas que **possuam uma condicional**. Sabendo disso, podemos **eliminar as alternativas $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{E}$**. Agora, vamos descobrir quem é o antecedente e o consequente dessa condicional. Atente-se aos predicados fornecidos pelo enunciado:

$A(x)$: x é aluno.
$I(x)$: x é do curso de Informática.
$E(x, y)$: x estuda y.
$T(x)$: x é tópico de Matemática Discreta.

Queremos que **$\boldsymbol{x}$ seja aluno** **<u>e</u>** **seja do curso de informática**. Logo, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x})$. Agora, queremos dizer que esse aluno **estuda <u>algum</u> tópico de matemática discreta**. Se x estuda y, então y é o tópico de matemática discreta, logo devemos usar $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{y})$. Para representar "algum", **utilizamos o quantificador $\exists$.** Ficamos então com **x estuda y <u>e</u> y é tópico de matemática discreta** ($\boldsymbol{T}(\boldsymbol{y}) \wedge \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$)

$$\forall x\left(\left(A(x) \wedge I(x)\right) \rightarrow \exists y\left(T(y) \wedge E(x, y)\right)\right)$$

Gabarito: LETRA A.

Equivalências Lógicas na LPO

Pessoal, **já sabemos que equivalências lógicas caem muito** em provas de concurso! Elas são igualmente cobradas aqui no contexto da Lógica de Primeira Ordem. No entanto, elas aparecerão numa forma **aparentemente mais complexa**. Confira, por exemplo, como representamos **as leis de De Morgan**:

$$\neg\left(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})\right) \equiv \neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vee \neg \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$$
$$\neg\left(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vee \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})\right) \equiv \neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \neg \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$$

HORA DE PRATICAR!

(ESFCEX/2021) Considere a seguinte sentença quantificada: $(\forall x)\ (x + 3 < 5 \wedge x + 7 \geq 1)$.

Uma negação para a sentença apresentada é:
A) $(\forall x)\ (x + 3 > 5 \wedge x + 7 \leq 1)$.
B) $(\forall x)\ (x + 3 \geq 5 \vee x + 7 < 1)$.
C) $(\exists x)\ (x + 3 \geq 5 \vee x + 7 < 1)$.

D) $(\exists x)\ (x\ +\ 3\ >\ 5\ \vee\ x\ +\ 7\ \leq\ 1)$.
E) $(\exists x)\ (x\ +\ 3\ \geq\ 5\ \wedge\ x\ +\ 7\ <\ 1)$.

Comentários:
Temos que negar a proposição apresentada.

O primeiro passo é negar o quantificador. Como na sentença do enunciado tínhamos $(\forall x)$, **na negação ficaremos com o $(\exists x)$.** Sabendo disso, já poderíamos cortar a letra A e a letra B.

O segundo passo é perceber que se trata de uma proposição composta conectadas pelo conectivo $\wedge$. Aqui, lembramos das leis de De Morgan, ou seja, **na negação substituiremos o conectivo $\wedge$ pelo $\vee$.**

Nesse ponto, podemos eliminar a letra E. Ademais, devemos negar cada uma das proposições:

Quando negamos $x\ +\ 3\ <\ 5$, ficamos com $x + 3 \geq 5$.

Quando negamos $x\ +\ 7\ \geq\ 1$, ficamos com $x + 7 < 1$.

Juntando tudo, nossa resposta fica:

$$(\exists x)\ (x\ +\ 3\ \geq\ 5\ \vee\ x\ +\ 7\ <\ 1)$$

▪

Gabarito: LETRA C.

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.