Aula 09

Banco do Brasil (Escriturário - Agente de Tecnologia) Probabilidade e Estatística - 2023 (Pós-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

02 de Janeiro de 2023

Índice

Olá, concurseiro(a)!

Nesta aula, vamos estudar **Variáveis Contínuas**. As medidas desta aula as mesmas da aula de Variáveis Discretas (esperança, variância etc.) e apresentam as mesmas propriedades, mas a forma em que elas são calculadas é diferente. Como as variáveis contínuas **não** são contáveis, substituímos os somatórios pelas **integrais**.

Se você não está familiarizado com Cálculo, não se preocupe. Nesta aula, veremos as principais operações, que permitem resolver a grande maioria das questões de concursos públicos sobre esta aula.

Por outro lado, se você tem pouco tempo para se dedicar a Estatística ou decidiu não aprender integrais e derivadas, acompanhe esta aula sem se preocupar com os pontos que envolvem Cálculo. Embora questões desse tipo estejam se tornando mais comuns nas provas, elas ainda são pouco frequentes.

Até já!

Luana Brandão

Quer me conhecer um pouquinho? Sou Doutora em Engenharia de Produção, pela Universidade Federal Fluminense, e Auditora Fiscal da SEFAZ-RJ. Sou professora de Estatística do Estratégia, porque quero muito ajudá-lo(a) em sua trajetória rumo à aprovação!

Se tiver alguma dúvida, entre em **contato** comigo!

professoraluanabrandao@gmail.com

@professoraluanabrandao

"Nossa maior fraqueza está em desistir.

O caminho mais certo de vencer é tentar mais uma vez."

Thomas Edison

TESTE DE HIPÓTESES

Nesta aula, vamos aprender a testar **suposições** (que chamamos de **hipóteses**), a respeito de um **parâmetro populacional**. Por exemplo, vamos supor que alguém afirme que a média de uma determinada população seja igual a 2. Para testar essa hipótese, vamos extrair uma **amostra**, calcular a sua **estatística** (no caso, a média amostral) e com base nela **decidir** se você **concorda ou não** com a pessoa.

Mas para que serve isso? Essa dinâmica ocorre na prática quando uma empresa adquire um lote grande de determinado produto de seu fornecedor. O fornecedor irá informar as especificações do produto, por exemplo, que a quantidade em cada recipiente é de 2L, em média.

Para **verificar** isso, a empresa seleciona uma amostra e calcula a média amostral. Se o resultado estiver **próximo** desse valor (por exemplo, 1,95L) a empresa irá **concordar** que o lote atende a tal especificação e **aceitar** o lote. Se o resultado estiver **muito distante** desse valor (por exemplo, 1L), a empresa irá **discordar** da hipótese de que há 2L, em média, em cada recipiente e **rejeitar** o lote.

Mas e se o resultado for de 1,9L? Ou 1,8L? Ou seja, qual é o limite que vamos utilizar? Isso será objeto do nosso estudo!

Conceitos Fundamentais

No exemplo que acabamos de ver, a suposição foi "a média populacional é $\mu = 2$". Essa suposição é chamada de **hipótese nula** (ou hipótese de **nulidade**), denotada por $\boldsymbol{H_o}$.

Porém, a média populacional pode não ser essa, assim chamamos de **hipótese alternativa**, indicada por $\boldsymbol{H_1}$ ou $\boldsymbol{H_A}$, uma suposição de que a hipótese nula é **falsa**. Ou seja, as hipóteses são **mutuamente excludentes**.

A hipótese alternativa para esse exemplo pode ser "a média populacional é $\mu \neq 2$".

Podemos representar essas hipóteses como:

Hipótese Nula $H_o: \mu = 2$

Hipótese Alternativa H_1 (ou H_A): $\mu \neq 2$

Para testar essas hipóteses, primeiro consideramos a **hipótese nula como verdadeira** e construímos um **intervalo de confiança** em torno do parâmetro $\mu = 2$. Veremos como esse intervalo será construído adiante, dependendo da situação, mas para entendermos o processo como um todo, por ora, vamos supor que o intervalo com $1 - \alpha = 95\%$ de **confiança** tenha sido (1,8; 2,2).

Então, esses serão os limites que utilizaremos para **concordar ou não** com a **hipótese nula**. Se a média da amostra observada estiver **fora** desse intervalo ($\bar{X} = 1$, por exemplo), iremos **rejeitar** a hipótese nula. **Senão** ($\bar{X} = 1{,}95$, por exemplo), iremos aceitá-la, ou melhor, **não a rejeitar**.

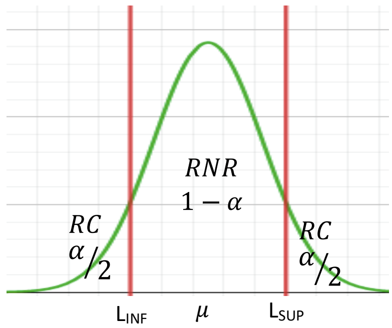
Por isso, a região **entre** os extremos do intervalo é chamada de **Região de Não Rejeição** (**RNR**) e a região **externa** ao intervalo é chamada de **Região Crítica** (**RC**).

Pontue-se que o intervalo é construído em torno do parâmetro indicado na **hipótese nula**, isto é, considerando essa hipótese como **verdadeira**.

Dessa forma, a probabilidade associada à **Região de Não Rejeição** é $\boldsymbol{1-\alpha}$ e corresponde à probabilidade de **não rejeitar** a hipótese nula, sendo ela **verdadeira**.

Já a probabilidade associada à **Região Crítica** é $\boldsymbol{\alpha}$, e corresponde à probabilidade de **rejeitar** a hipótese nula, sendo ela **verdadeira**.

A probabilidade $\boldsymbol{\alpha}$ é chamada de **nível de significância**. Ilustramos essas regiões no gráfico abaixo, em que L_{SUP} representa o limite superior do intervalo e L_{INF} representa o limite inferior do intervalo de confiança.



Ou seja, vamos **rejeitar** a hipótese inicial se $\boldsymbol{\bar{X} < L_{INF}}$ **ou** $\boldsymbol{\bar{X} > L_{SUP}}$ e **não a rejeitar**, caso contrário, isto é, se $\boldsymbol{L_{INF} \leq \bar{X} \leq L_{SUP}}$.

TOME NOTA!

Resultado do Teste na Região Crítica (RC) → Rejeitar $\boldsymbol{H_0}$
Resultado do Teste na Região de Não Rejeição (RNR) → Não Rejeitar $\boldsymbol{H_0}$

Por que "não rejeição", em vez de "aceitação"?

Porque a **rejeição** é a decisão **forte**. Afinal, considerando a hipótese nula como verdadeira, construímos um intervalo que engloba $1-\alpha = 95\%$ dos possíveis resultados, isto é, quase todos os valores. Em outras palavras, se de fato a média populacional for $\mu = 2$, a probabilidade de obter um valor **fora** do intervalo é de apenas $\alpha = 5\%$, isto é, **muito pequena**.

Por isso, quando o resultado do teste é de **rejeição**, dizemos que o teste é **significante**, ou que gerou **evidência estatística**.

Caso **contrário**, o teste **não** é significante (**não** gera evidência estatística). Neste caso, não é correto dizer que *aceitamos* a hipótese nula, apenas que **não a rejeitamos**.

É possível que a média populacional seja, de fato, $\mu = 2$ *e a média amostral observada tenha sido* $\bar{X} = 1$*.* Sim! É possível, mas é improvável.

Outra forma de decidir se vamos aceitar ou rejeitar a hipótese nula é calculando a **estatística da amostra** (para o nosso exemplo, a média amostral) e construir um **intervalo de confiança** para essa estatística. Em seguida, devemos **rejeitar** a hipótese nula se o intervalo construído **não** contemplar o parâmetro indicado na hipótese nula e **não a rejeitar, caso contrário**.

Supondo a mesma hipótese nula do exemplo anterior $H_o: \mu = 2$, vamos supor que tenhamos calculado uma média amostral $\bar{X} = 1{,}95$. Vamos considerar que, de acordo com o tamanho da amostra e com o nível de confiança desejado, o intervalo de confiança construído a partir da média amostral $\bar{X} = 1{,}95$ seja $(1{,}85;\ 2{,}05)$. Como o parâmetro indicado na hipótese H_o: $\mu = 2$ está **contemplado** nesse intervalo de confiança, então **não rejeitamos** a hipótese nula.

Por outro lado, se tivéssemos calculado uma média amostral $\bar{X} = 1$ e um intervalo de confiança $(0{,}9;\ 1{,}1)$, nesse caso, o parâmetro indicado na hipótese H_o: $\mu = 2$, **não** estaria contemplado no intervalo e, por isso, **rejeitaríamos** a hipótese nula.

(CESPE/2019 – TJ-AM) A respeito dos testes de hipóteses, julgue o próximo item.

A hipótese nula (Ho) e a hipótese alternativa (Ha) são mutuamente excludentes.

Comentário:

A hipótese alternativa é a hipótese formulada supondo a hipótese nula como falsa. Portanto, são **mutuamente excludentes**.

Gabarito: Certo.

(FGV/2019 – DPE-RJ – *Adaptada*) A respeito da formulação, execução, decisão e critérios de avaliação de testes de hipóteses, julgue a afirmativa a seguir.

Tanto na rejeição quanto na aceitação, o teste de hipóteses é uma ferramenta da inferência que gera evidência estatística.

Comentário:

Dizemos que o teste **gera evidência estatística**, apenas quando **rejeitamos** a hipótese nula, ou seja, o teste não gera evidência estatística na aceitação. Logo, a afirmativa está incorreta.

Resposta: Errado

(FGV/2017 – Prefeitura de Salvador/BA) Suponha que se deseja testar se um determinado candidato tem 50% das intenções de voto. Assim, foram realizadas pesquisas em cinco regiões (A, B, C, D e E) e seus respectivos intervalos de confiança foram calculados.

Sendo a letra de cada alternativa representante de cada região com seu respectivo intervalo de confiança, a única região em que se pode rejeitar a hipótese de que o candidato detém 50% dos votos é

a) [45; 55].

b) [49,9; 59,9].

c) [40; 50]

d) [44,9; 49,9]

e) [0; 100]

Comentários:

Para que a hipótese nula seja **rejeitada**, o **parâmetro** nela indicado **não** pode estar contemplado no **intervalo de confiança** construído a partir dos resultados da amostra. Dentre as alternativas, a única que não contempla o parâmetro de 50% é a alternativa D.

Gabarito: D

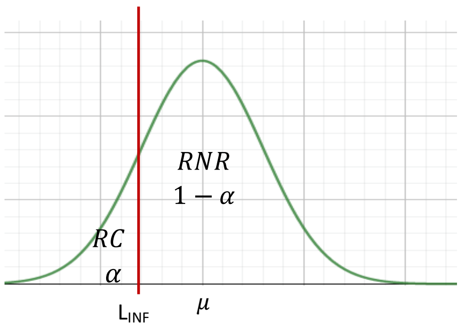
Agora, vamos voltar ao exemplo do fabricante. Se estamos testando a quantidade média de produto em cada recipiente, **não** temos por que **rejeitar** o lote se encontrarmos uma quantidade **maior** do que a estipulada pelo fabricante. Então, nessa situação iremos rejeitar a hipótese nula (e o lote) apenas se a quantidade encontrada for **inferior** a um limite mínimo.

Assim, as hipóteses para esse exemplo seriam:

Hipótese Nula $H_o: \mu = 2$

Hipótese Alternativa H_1 (ou H_A): $\mu < 2$

Nesse caso, toda a **região crítica** estará à **esquerda** do parâmetro $\mu = 2$, como representado a seguir:



Assim, vamos **rejeitar** a hipótese nula caso o valor observado seja $\overline{X} < L_{INF}$ e **não a rejeitar**, caso contrário, ou seja, se $\overline{X} \geq L_{INF}$.

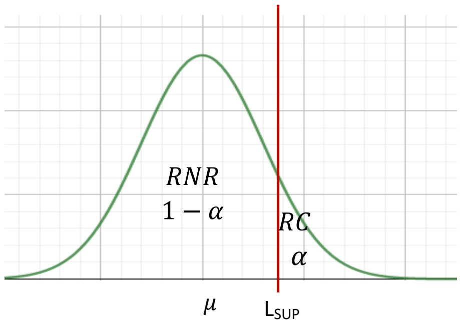
Como a **região crítica** está totalmente concentrada à **esquerda**, esse teste é chamado **unilateral** (ou **unicaudal** ou **monocaudal**) à **esquerda**, enquanto o teste que vimos **anteriormente** é chamado **bilateral** ou **bicaudal**.

Pontue-se que a **hipótese nula** desse mesmo teste pode ser descrita como $\mu \geq 2$:

Hipótese Nula H_o: $\mu \geq 2$

Hipótese Alternativa H_1 (ou H_A): $\mu < 2$

Há também o teste **unilateral** (ou **unicaudal** ou **monocaudal**) **à direita**, em que a **região crítica** está totalmente concentrada à **direita**, como representado a seguir:



Esse teste é utilizado, por exemplo, quando precisamos colocar uma peça dentro de uma outra. Se a peça for menor do que a média estipulada (digamos, $\mu = 2$ cm), não haverá problema, pois ela caberá dentro da outra; porém, se ela for maior do que determinado limite, não será possível trabalhar com ela.

Nessa situação, o teste terá as seguintes hipóteses:

Hipótese Nula H_o: $\mu = 2$ (ou $\mu \leq 2$)

Hipótese Alternativa H_1 (ou H_A): $\mu > 2$

Nesse caso, vamos **rejeitar** a hipótese nula caso o valor observado seja $\bar{\boldsymbol{X}} > \boldsymbol{L_{SUP}}$ e **não a rejeitar**, caso contrário, ou seja, se $\bar{\boldsymbol{X}} \leq \boldsymbol{L_{SUP}}$.

Nos testes **unilaterais**, as hipóteses alternativas podem ser chamadas de **direcionais** (pois supõem que o parâmetro seja **maior** ou **menor** que determinado valor) e, nos **bilaterais**, de **não direcionais** (pois supõem que o parâmetro é **diferente** de determinado valor).

RESUMINDO

Teste bilateral (ou **não direcional**): Região Crítica dividida nos **2 extremos**

Hipótese Nula: $H_0: \theta = \theta_0$

Hipótese Alternativa: H_1 ou $H_A: \theta \neq \theta_0$

Teste unilateral (ou **direcional**) **à esquerda**: **Região Crítica** somente à **esquerda**

Hipótese Nula: $H_0: \theta = \theta_0$

Hipótese Alternativa: H_1 ou $H_A: \theta < \theta_0$

Teste unilateral (ou **direcional**) **à direita**: **Região Crítica** somente à **direita**

Hipótese Nula: $H_0: \theta = \theta_0$

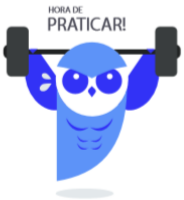
Hipótese Alternativa: H_1 ou $H_A: \theta > \theta_0$

Podemos, ainda, classificar as hipóteses em **simples** ou **compostas**.

As **hipóteses simples** são aquelas que **especificam** o parâmetro da distribuição, com sinal de **igualdade**, como $\mu = 2$, por exemplo; enquanto as **hipóteses compostas** são aquelas que trazem alguma informação a respeito da distribuição, porém **sem especificar** o parâmetro, isto é, **sem** o sinal de igualdade, como $\mu > 2$ ou $\mu \neq 2$, por exemplo.

No quadro acima, as hipóteses **nulas** são **simples** e as hipóteses **alternativas** são **compostas**. Embora essa situação seja bastante comum, ela **não** é obrigatória. Inclusive, já vimos que as hipóteses **nulas** unilaterais podem ser descritas como $\mu \leq 2$ (quando a alternativa é $\mu > 2$) ou $\mu \geq 2$ (quando a alternativa é $\mu < 2$). Nesses exemplos, ambas as **hipóteses** são **compostas**.

Ademais, existem casos em que as **hipóteses alternativas** são **simples**, por exemplo, $H_1: \mu = 1{,}5$. Esse tipo de situação ocorre quando há **apenas duas possibilidades** para o parâmetro, $\mu = 2$ ou $\mu = 1{,}5$, por exemplo. Sendo assim, podemos formular a hipótese nula como $H_0: \mu = 2$ e a hipótese alternativa $H_1: \mu = 1{,}5$, em que ambas são **hipóteses simples**.



(CESPE/2019 – TJ/AM) A respeito dos testes de hipóteses, julgue o próximo item.

A hipótese alternativa (Ha) é direcional em um teste unicaudal.

Comentário:

A hipótese alternativa pode ser classificada como **direcional** em testes **unilaterais** (ou **unicaudais**) e como não direcional em testes bilaterais (também chamados de bicaudais).

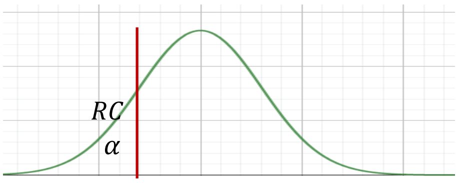
Gabarito: Certo.

(FGV/2019 – DPE-RJ – *Adaptada*) A respeito da formulação, execução, decisão e critérios de avaliação de testes de hipóteses, julgue a afirmativa a seguir.

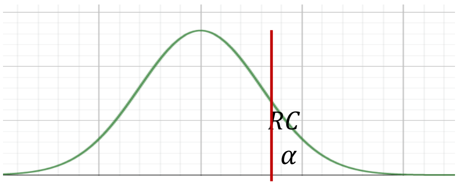
A região crítica de um teste é limitada superiormente ou inferiormente ou em ambos os sentidos.

Comentário:

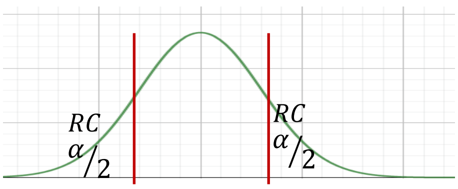
A Região **Crítica** (associada à rejeição) é limitada **superiormente** (isto é, apresenta um limite superior) quando o teste é **unilateral à esquerda**. O limite superior da região crítica, nesse caso, é igual ao limite inferior da Região de Não Rejeição.



Para testes **unilaterais à direita**, a região crítica é limitada **inferiormente** (isto é, apresenta limite inferior). O limite inferior da região crítica, nesse caso, é igual ao limite superior da Região de Não Rejeição.



Já nos testes bilaterais, **não há limite inferior** para a região crítica à esquerda e **nem limite superior** para a região crítica à direita. Por isso, **não** podemos dizer que a região crítica é limitada em ambos os sentidos.



Resposta: Errado.

LEITURA OBRIGATÓRIA

Algumas questões não indicam claramente a hipótese nula e a alternativa, sendo necessário deduzi-las a partir do texto. Nesses casos, precisamos identificar a hipótese que se deseja **comprovar** e considerá-la como hipótese **alternativa**. Dessa forma, iremos concordar com essa hipótese somente se rejeitarmos a hipótese nula, ou seja, se o resultado do teste for **estatisticamente significativo**.

Por exemplo, vamos considerar o seguinte trecho do enunciado de uma questão FGV/2014, referente a um teste da renda média dos cidadãos atendidos Defensoria Pública: "Deseja-se demonstrar, cabalmente, que, em média, os beneficiários ganham menos do que R$ 1.000 por mês."

Se o objetivo é **demonstrar cabalmente** (**comprovar**) que a renda média dos beneficiários é **menor do que** R$ 1.000 por mês, essa deve ser a **hipótese alternativa**; e a **hipótese nula** deve ser o contrário, isto é, de que a renda média dos beneficiários é **maior ou igual** a R$ 1.000 por mês:

$$H_o: \mu \geq 1000$$

$$H_A: \mu < 1000$$

HORA DE PRATICAR!

(FGV/2014 – DPE/RJ) A Defensoria Pública tem como prioridade garantir o acesso à assistência jurídica a todos aqueles que dela necessitam, mesmo que, por natural imprecisão de critérios, venha a prestar eventual e involuntariamente serviços a indivíduos capazes de pagar. Para testar se um grupo de pessoas merece receber assistência é fixada uma linha de corte igual a R$ 1.448,00, ou seja, dois salários mínimos para a renda média (Rm). Considerando a prioridade da inclusão dos que de fato necessitam, as hipóteses do teste devem ser:.

a) H_o: $R_m = 1.448$ contra H_a: $R_m \neq 1.448$;

b) H_o: $R_m \geq 1.448$ contra H_a: $R_m < 1.448$;

c) H_o: $R_m < 1.448$ contra H_a: $R_m \geq 1.448$;

d) H_o: $R_m \leq 1.448$ contra H_a: $R_m > 1.448$;

e) H_o: $R_m \neq 1.448$ contra H_a: $R_m = 1.448$;

Comentário:

Nessa questão, precisamos interpretar o texto para encontrar as hipóteses nula e alternativa. O enunciado informa que fará um teste para verificar se um grupo de pessoas merece receber assistência gratuita ou não, considerando a renda média de referência de R$ 1.448,00.

O enunciado também informa que a prioridade é **garantir** a assistência a todos que precisam, ou seja, àqueles que apresentam **baixa renda média**, mesmo que isso implique em prestar o serviço gratuito a alguns indivíduos capazes de pagar, por erro.

Isso significa que o teste deve indicar que o serviço **não** deve ser prestado apenas em casos **excepcionais**, em que a renda for **realmente superior** ao valor de referência. Em outras palavras, a renda **maior que** a referência deve constar como **hipótese alternativa**, pois só iremos concordar com ela se o teste for **estatisticamente significativo**.

Portanto, a hipótese nula é de que a renda é menor ou igual ao valor de referência e a hipótese alternativa é de que a renda é maior que o valor de referência:

$$H_0: R_m \leq 1.448$$

$$H_a: R_m > 1.448$$

Gabarito: D.

Função de Distribuição Acumulada

Assim como para variáveis discretas, a **função de distribuição acumulada** (**f.d.a**. ou **função de distribuição cumulativa** ou, simplesmente, **função de distribuição**) para variáveis contínuas também é definida como a **probabilidade acumulada desde o início até o ponto indicado** $\boldsymbol{x}$:

$$\boxed{\boldsymbol{F_A}(\boldsymbol{x}) = P(X \leq \boldsymbol{x})}$$

Ou seja, a f.d.a. corresponde ao total das probabilidades desde o extremo inferior da distribuição até o ponto $\boldsymbol{x}$. Para variáveis contínuas, esse total é calculado pela **integral** da f.d.p., no intervalo entre o limite inferior $\boldsymbol{x_I}$ e o ponto $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{F_A}(\boldsymbol{x}) = P(X \leq \boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{x_I}}^{\boldsymbol{x}} f(x).dx$$

$$\boldsymbol{F_A}(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{x_I})$$

Por exemplo, vamos supor que a f.d.p. seja $f(x) = 9x^2$, para $\boldsymbol{x \geq 0}$. Para calcular a f.d.a., primeiro calculamos a integral dessa função, sem nos preocupar com o intervalo.

$$F(x) = \int 9x^2.dx = 9 \times \frac{x^{2+1}}{2+1} = 9 \times \frac{x^3}{3}$$

$$F(x) = 3.x^3$$

A f.d.a. corresponde à diferença entre essa integral aplicada no ponto $\boldsymbol{x}$ e no limite inferior $\boldsymbol{x_I}$. Nesse exemplo, o limite inferior é $\boldsymbol{x_I = 0}$, então:

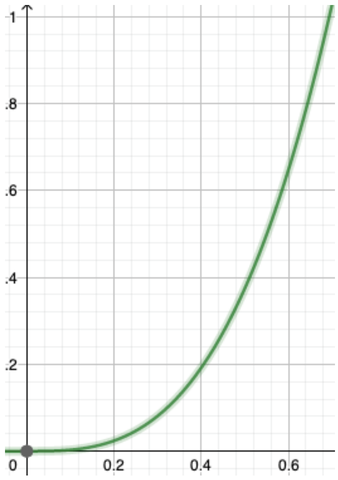
$$\boldsymbol{F_A}(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{0}) = 3.x^3 - 3.(0)^3 = \boldsymbol{3.x^3}$$

> Nesse caso, a f.d.a. $\boldsymbol{F_A(x)}$ foi exatamente igual à integral da f.d.p. $\boldsymbol{F(x)}$. Isso ocorreu porque a integral aplicada no limite inferior foi nula, $\boldsymbol{F(x_I)} = 0$, mas nem sempre isso irá ocorrer.

O valor probabilidade acumulada em $\boldsymbol{x = 0,5}$, por exemplo, é:

$$\boldsymbol{F_A}(\boldsymbol{0,5}) = \boldsymbol{3.(0,5)^3} = 3 \times 0{,}125 = 0{,}375$$

O gráfico da f.d.a. $\boldsymbol{F_A(x) = 3.x^3}$ é:



TOME NOTA!

A função de distribuição acumulada apresenta as seguintes características (são as mesmas da função de distribuição acumulada das variáveis discretas):

i) F_A é **não decrescente**, pois as probabilidades são sempre **acrescidas**.

ii) Por ser uma **probabilidade**, a f.d.a. assume valores entre 0 e 1:

$$\boldsymbol{0 \leq F_A(x) \leq 1}$$

Na verdade, para valores menores ou iguais ao **extremo inferior** do intervalo $\boldsymbol{x_I}$, a f.d.a. é igual a **0** e para valores maiores ou iguais ao **extremo superior** do intervalo $\boldsymbol{x_S}$, a f.d.a. é igual a **1**:

$$F_A(x) = \mathbf{0}, \quad para\ x \leq \boldsymbol{x_I}$$

$$F_A(x) = \mathbf{1}, \quad para\ x \geq \boldsymbol{x_S}$$

Para o nosso exemplo, em que a f.d.a. é $\boldsymbol{F_A(x) = 3.x^3}$, sabemos que o **extremo inferior** é $\boldsymbol{x_I} = \mathbf{0}$. Então, vamos calcular o **extremo superior** dessa variável, isto é, o valor de $\boldsymbol{x_S}$ para o qual a f.d.a. é $F(\boldsymbol{x_S}) = \mathbf{1}$.

$$\boldsymbol{F_A(x_S) = 3.x_S^3 = 1}$$

$$x_S{}^3 = \frac{1}{3}$$

$$x_S = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \cong 0{,}69$$

Ou seja, a **função de distribuição acumulada** para essa variável pode ser descrita como:

$$F_A(x) = \begin{cases} \mathbf{0} & se\ x \leq \mathbf{0} \\ \mathbf{3x^3} & se\ \mathbf{0} < x < \sqrt[3]{\mathbf{\frac{1}{3}}} \\ \mathbf{1} & se\ x \geq \sqrt[3]{\mathbf{\frac{1}{3}}} \end{cases}$$

Mais precisamente, a f.d.a. é definida como a integral da f.d.p. de **menos infinito** (isto é, o menor valor possível) até o ponto x**:**

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x).dx$$

A f.d.a. é igual a **0** quando x tende a **menos infinito** (ou seja, quando x apresenta valores muito pequenos); e igual a **1** quando x tende a **mais infinito** (ou seja, quando x apresenta valores muito grandes):

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \mathbf{0}, \ \lim_{x \to \infty} F(x) = \mathbf{1}$$

(CESPE/2011 – Analista de Correios) Julgue o próximo item, referentes à probabilidade e às variáveis aleatórias.

A função de distribuição cumulativa de uma variável aleatória é sempre uma função decrescente e assume valores no intervalo [0,1].

Comentários:

A função de distribuição acumulada, ou cumulativa, é uma função crescente, com valores entre 0 e 1.

Gabarito: Errado.

(FCC/2012 – Analista Judiciário do TRF da 2ª Região) Uma variável aleatória contínua tem função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}, & se\ 1 \leq x < \infty \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

Se F(x) é a função de distribuição de X, então F(2) é igual a

a) 0,40.

b) 0,56.

c) 0,75.

d) 0,80.

e) 0,82.

Comentários:

Para calcular a função de distribuição acumulada, primeiro calculamos a integral de f(x):

$$F(x) = \int \frac{2}{x^3}.dx = \int 2 \times x^{-3}.dx = 2 \times \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = 2 \times \frac{x^{-2}}{-2}$$

$$F(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

A f.d.a. é a diferença entre essa integral aplicada no ponto $\boldsymbol{x}$ e no limite inferior. No caso, o limite inferior da f.d.p. descrita no enunciado é $\boldsymbol{x_I = 1}$

$$\boldsymbol{F_A}(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}) - F(\mathbf{1}) = -\frac{1}{\boldsymbol{x}^2} - \left(-\frac{1}{\mathbf{1}^2}\right)$$

$$\boldsymbol{F_A}(\boldsymbol{x}) = 1 - \frac{1}{\boldsymbol{x}^2}$$

Assim, a f.d.a. no ponto desejado $\boldsymbol{x = 2}$ é:

$$\boldsymbol{F}(\mathbf{2}) = 1 - \frac{1}{\mathbf{2}^2} = 1 - \frac{1}{4} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

Gabarito: C.

MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E DE DISPERSÃO

Agora, veremos como calcular as medidas de tendência central (mediana, moda e média) e de dispersão (variância e desvio padrão).

Mediana

A mediana divide a distribuição em **duas partes iguais**, de modo que **metade** das observações são **superiores** e **metade** das observações são **inferiores**, ou seja:

$$P(X \leq \boldsymbol{x_{Md}}) = 50\% = 0{,}5$$

Sabendo que a probabilidade $P(X \leq \boldsymbol{x_{Md}})$ corresponde à função de distribuição acumulada (f.d.a.) no ponto $\boldsymbol{x_{Md}}$, podemos calcular a mediana $\boldsymbol{x_{Md}}$, a partir da f.d.a.:

$$F(\boldsymbol{x_{Md}}) = P(X \leq \boldsymbol{x_{Md}}) = 0{,}5$$

EXEMPLIFICANDO

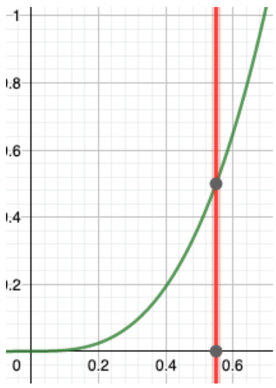
Vamos calcular a mediana para a f.d.a. $F(x) = 3x^3$:

$$F(x_{Md}) = 3x_{Md}^3 = 0{,}5$$

$$x_{Md}^3 = \frac{1}{6}$$

$$x_{Md} = \sqrt[3]{\frac{1}{6}} \cong 0{,}55$$

O gráfico abaixo representa a **função acumulada** $F(x) = 3x^3$ e a reta vermelha representa a **mediana**, que divide a distribuição em duas partes iguais. Isso significa que a área sob a curva para cada uma das partes é igual a 0,5.



Quando **somamos, subtraímos, multiplicamos ou dividimos uma constante dos valores da distribuição**, a mediana também sofrerá o mesmo efeito, isto é, também será somada, subtraída, multiplicada ou dividida pela mesma constante:

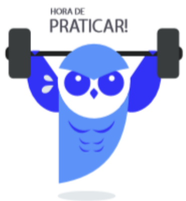
$$Md(X + a) = Md(X) + a$$

$$Md(X - a) = Md(X) - a$$

$$Md(X * a) = Md(X) * a$$

$$Md(X \div a) = Md(X) \div a$$

Afinal, a mediana é um valor da distribuição. Se todos os valores são duplicados, por exemplo, a mediana também será duplicada.



(CESPE/2011 – FUB) Considerando que X, Y e Z sejam variáveis aleatórias, que a seja uma constante não nula e que E, Md, Var, Cov, denotem, respectivamente, esperança, mediana, variância, covariância, primeiro quartil e terceiro quartil, julgue o item a seguir.

Md(X + a) = Md(X)

Comentários:

Quando somamos uma constante a uma distribuição X, todos os valores da distribuição são somados a essa constante. Em particular, a mediana também é somada a essa constante:

$$Md(X + a) = Md(X) + a$$

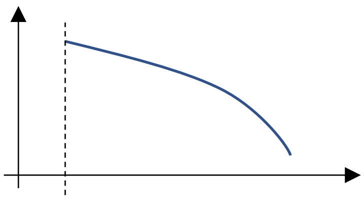
Gabarito: Errado.

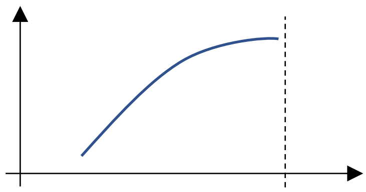
Moda

A moda corresponde ao valor com **maior probabilidade**.

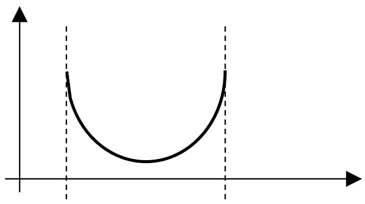
A moda pode ser **visualmente** identificada, a partir do gráfico da f.d.p., pois é o valor de x associado ao **maior valor da função** densidade de probabilidade, $f(x)$.

Se a f.d.p., definida em determinado intervalo, for uma função que sabemos ser **decrescente** ou **crescente**, então a **moda** será o **menor** ou **maior** **valor**, respectivamente, do intervalo da variável.

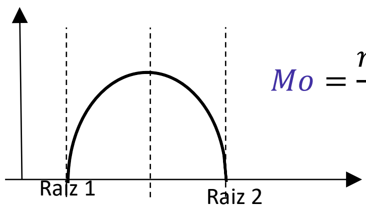




Se a f.d.p. for uma **parábola com concavidade voltada para cima**, a **moda** será o **menor** ou o **maior** valor (ou **ambos**) do intervalo da variável. Nessa situação, **teste** os dois extremos para saber qual corresponde ao maior valor da f.d.p.; ou se ambos apresentam o mesmo valor, caso em que haverá duas modas.



Se for uma **parábola com concavidade voltada para baixo**, a moda será a **média entre as raízes**. Raízes são os valores de x para os quais a **função** é igual a **zero**.



$$Mo = \frac{raiz_1 + raiz_2}{2}$$

Porém, se não for possível identificar a moda dessa forma, será necessário calcular a **derivada** da f.d.p. O valor da **moda** será, então, o valor de x para o qual a **derivada** da f.d.p. é igual a **zero**.

$$\boldsymbol{f'(x_{Mo}) = \frac{d[f(x_{Mo})]}{dx} = 0}$$

ESCLARECENDO!

A **derivada**[1] de uma função é o **inverso** da **integral**, ou seja, se a integral de uma função f é F, então a derivada de F é igual a f. Assim, temos:

i) A derivada de uma variável x qualquer, elevada a uma constante $\boldsymbol{a}$ é:

$$\frac{d(x^{a})}{dx} = a.x^{a-1}$$

Por exemplo:

$$\frac{d(x^{4})}{dx} = 4.x^{4-1} = 4x^{3}$$

$$\frac{d(x^{-2})}{dx} = -2.x^{-2-1} = -2x^{-3}$$

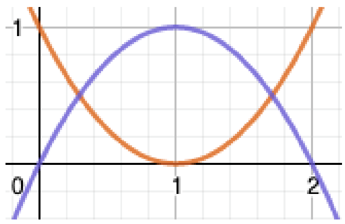
ii) A derivada de uma constante é zero: $\frac{d(a)}{dx} = 0$

Por exemplo:

$$\frac{d(5)}{dx} = 0, \qquad \frac{d(20)}{dx} = 0$$

[1] A derivada de uma função representa a sua variação, isto é, o quanto a função está crescendo ou decrescendo em cada ponto. Por exemplo, a função f(x) = 2x está sempre dobrando de valor. Por isso, a derivada dessa função é igual a 2 em todos os pontos.

Assim, quando igualamos a derivada de uma função a zero, estamos buscando o ponto em que ela não cresce e nem decresce. O ponto encontrado pode ser um ponto de máximo ou de mínimo, conforme ilustrado a seguir:



No gráfico laranja, o ponto x = 1 corresponde a um ponto de mínimo e, no gráfico roxo, o ponto x = 1 corresponde a um ponto de máximo. Em ambos os casos, a função não cresce e nem decresce nesse ponto, logo a derivada é igual a zero em x = 1 para ambas as funções.

Quando igualamos a derivada a zero e verificamos que o ponto encontrado é um ponto de máximo, como é o caso de x = 1 para a curva roxa, podemos concluir que o valor de X encontrado corresponde à moda da função.

iii) A derivada de uma função qualquer $f(x)$ multiplicada por uma constante $\boldsymbol{a}$ é igual ao produto da constante pela derivada da função. Por exemplo:

$$\frac{d(\boldsymbol{a}.x^{\boldsymbol{b}})}{dt} = a.\frac{d(t^{\boldsymbol{b}})}{dt} = a.\boldsymbol{b}.t^{\boldsymbol{b-1}}$$

iv) A derivada de e^t é o próprio e^t:

$$\frac{d(e^t)}{dt} = \boldsymbol{e^t}$$

v) A derivada da soma de funções $\boldsymbol{f(t)}$ e $\boldsymbol{g(t)}$ é igual à soma das derivadas:

$$\frac{d(f(t)+g(t))}{dt} = \frac{d(f(t))}{dt} + \frac{d(\boldsymbol{g(t)})}{dt}$$

Por exemplo, suponha que $f(x) = x - x^2, para\ x \in [0,1]$ seja uma f.d.p.

Para encontrar a moda, vamos primeiro derivá-la:

$$\frac{d}{dx}(x - x^2) = \mathbf{1}.x^{\mathbf{1-1}} - \mathbf{2}.x^{\mathbf{2-1}} = x^{\mathbf{0}} - \mathbf{2}.x^{\mathbf{1}} = 1 - 2x$$

A moda corresponde ao valor de x para o qual essa derivada seja nula, logo:

$$1 - 2x = 0$$

$$x = 0{,}5$$

Como a função $f(x) = x - x^2$ tem a sua concavidade voltada para **baixo**, uma vez que o termo elevado ao quadrado está com o sinal **negativo**, então o ponto encontrado é um ponto de **máximo** e, assim, concluímos que $x = 0{,}5$ corresponde, de fato, à **moda** da função.

(FCC/2011 – Analista Judiciário do TRT da 1ª Região) Considere a variável aleatória contínua X com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x), & se\ 0 < x < 1 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

Se Mo (X) representa a moda de X, então P [X ≤ Mo (X)] é igual a

a) 16/27.

b) 8/27.

c) 16/81.

d) 8/81.

e) 32/81.

Comentários:

Para calcular a moda de X, primeiro calculamos a derivada da f.d.p., que pode ser escrita como

$$f(x) = 12x^2(1 - x) = 12x^2 - 12x^3$$

A sua derivada é, portanto:

$$\frac{d}{dx}(12x^2 - 12x^3) = 12 \times \mathbf{2}.x^{2-1} - 12 \times \mathbf{3}.x^{3-1} = 24.x - 36.x^2$$

No ponto $x = x_{Mo}$, a derivada é igual a 0:

$$24.x_{Mo} - 36.x_{Mo}^2 = 0$$

Sendo $x_{Mo} \neq 0$, tendo em vista o intervalo de X fornecido no enunciado, podemos dividir toda a equação por $12.x_{Mo}$:

$$2 - 3x_{Mo} = 0$$

$$Mo(X) = x_{Mo} = \frac{2}{3}$$

Esse ponto, de fato, corresponde à moda da função porque a função tem concavidade voltada para baixo, uma vez que o termo

Para calcular a probabilidade $P(X \leq 2/3)$, primeiro calculamos a integral da f.d.p.:

$$F(x) = \int (12x^2 - 12x^3).dx = \int 12x^2.dx - \int 12x^3.dx$$

Calculando essas integrais em separado, temos:

$$\int 12x^2.dx = 12 \times \frac{x^{2+1}}{2+1} = 12 \times \frac{x^3}{3} = 4.x^3$$

$$\int 12x^3.dx = 12 \times \frac{x^{3+1}}{3+1} = 12 \times \frac{x^4}{4} = 3.x^4$$

Logo, a f.d.a. é:

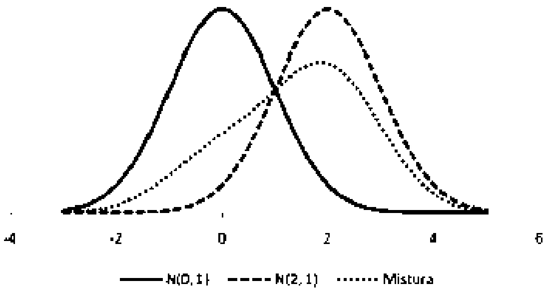
$$\boldsymbol{F_A}(x) = F(x) - F(0) = 4.x^3 - 3.x^4 - [4.(0)^3 - 3.(0)^4] = 4.x^3 - 3.x^4$$

No ponto $x = \frac{2}{3}$, temos:

$$P\left(X \leq \frac{2}{3}\right) = \boldsymbol{F_A}\left(\frac{2}{3}\right) = 4.\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 3.\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{4 \times 2^3}{3^3} - \frac{3 \times 2^4}{3^4} = \frac{4 \times 8}{27} - \frac{16}{27} = \frac{16}{27}$$

Gabarito: A.

(CESPE/2011 – TJ/ES)



A figura acima mostra a função densidade da distribuição normal padrão – $f_{N(0,1)}(x)$ –, a função densidade da distribuição normal com média 2 e desvio padrão 1 – $f_{N(2,1)}(x)$ –, e a combinação entre elas – $f(x) = 0{,}3 \times f_{N(0,1)}(x) + 0{,}7 \times f_{N(2,1)}(x)$. Julgue o item que segue, com relação a essas funções.

A moda da distribuição da combinação $f(x)$ coincide com a moda de $f_{N(0,1)}(x)$ ou com a moda de $f_{N(2,1)}(x)$.

Comentários:

Pelo gráfico, podemos observar que a moda da combinação $f(x)$ se aproxima da moda de $f_{N(2,1)}(x)$. Porém, será que essas modas coincidem?

Por definição, a moda corresponde ao valor de x para o qual a derivada da função densidade é igual a zero (ou seja, a função densidade não aumenta nem diminui). No ponto x = 2 (moda de $f_{N(2,1)}$), a derivada de $f(x)$ será dada por:

$$f'(2) = 0{,}3 \times f'_{N(0,1)}(2) + 0{,}7 \times f'_{N(2,1)}(2)$$

Como x = 2 é moda de $f_{N(2,1)}$, então a derivada dessa função é nula nesse ponto, logo:

$$f'(2) = 0{,}3 \times f'_{N(0,1)}(2)$$

Porém, o ponto x = 2 não é moda para $f_{N(0,1)}$. Pelo contrário, podemos observar que a função está decrescendo, logo:

$$f'(2) = 0{,}3 \times f'_{N(0,1)}(2) < 0$$

Portanto, o ponto x = 2 não é moda para a combinação $f(x)$. Nesse ponto, a função já está decrescendo, o que significa que a moda é inferior a esse valor. Assim, a moda da combinação não coincide nem com $f_{N(0,1)}(x)$, nem com $f_{N(2,1)}(x)$.

Gabarito: Errado.

Esperança Matemática

Para o caso **discreto**, a esperança matemática é definida como:

$$E(X) = \sum x . P(X = x)$$

Para o caso contínuo, a situação é análoga. Porém, como os elementos não são contáveis, não conseguimos somá-los. Por isso, substituímos a soma do produto, pela **integral** do produto.

Assim, para uma f.d.p., definida no intervalo de x_I a x_S, a esperança é:

$$\boldsymbol{E(X) = \int_{x_I}^{x_S} x.f(x).dx}$$

Vamos calcular a esperança para a f.d.p. $f(x) = 9x^2$ para $0 < x < \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$:

$$E(X) = \int_0^{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}} x.9x^2.dx = \int_0^{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}} 9x^3.dx$$

Primeiro calculamos a integral, sem os limites:

$$E(X) = \int 9x^3.dx = 9 \times \frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{9}{4}x^4$$

Aplicando os limites, temos:

$$E(X) = \frac{9}{4}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^4 - \frac{9}{4}(0)^4 = \frac{9}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{4/3}$$

Mais precisamente, a esperança é definida como a integral da f.d.p., multiplicada por x, de **menos infinito** (menor valor) até **mais infinito** (maior valor)**:**

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x).dx$$

É possível termos uma f.d.p. com uma função definida para um intervalo e outra função definida para outro intervalo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & se\ 0 \le x < 1 \\ -\frac{x}{4} + \frac{5}{6}, & se\ 1 \le x \le 3 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

Nesses casos, precisaremos calcular as integrais em separado e, em seguida **somá-las**.

$$E(X) = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} x.\left(\frac{2}{3}x\right) dx + \int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{3}} x.\left(-\frac{x}{4} + \frac{5}{6}\right) dx$$

Pontue-se que todas as **propriedades** de esperança que valem para distribuições discretas também se aplicam a variáveis contínuas:

i) $\boldsymbol{E(X+Y) = E(X) + E(Y)}$

ii) $\boldsymbol{E(X-Y) = E(X) - E(Y)}$

iii) Se X e Y são **independentes**, então $\boldsymbol{E(X.Y) = E(X).E(Y)}$

iv) $\boldsymbol{E(k.X) = k.E(X)}$

v) $\boldsymbol{E(k) = k}$

Em uma distribuição **simétrica e unimodal** (somente uma moda), temos Média = Mediana = Moda. Nessa situação, podemos nos referir a esse valor central, dizendo que a variável é simétrica **em torno** desse valor.

Média = Mediana = Moda

As **parábolas** (equações de 2º grau) com concavidade para baixo são bons exemplos de funções **simétricas** em que Média = Mediana = Moda; e esse ponto é igual ao **ponto central entre suas raízes**.

Já as parábolas com concavidade para cima apresentam modas diferentes, mas são funções simétricas, cuja média e mediana também são iguais ao ponto central entre suas raízes.

Então, sendo a f.d.p. uma **parábola**, basta calcular a **média de suas raízes** (ou o valor da sua **única raiz**) para calcular a média (e a mediana) da variável.

EXEMPLIFICANDO

Por exemplo, vamos supor $f(x) = \frac{3}{2}(x-1)^2$, no intervalo (0, 2). Essa função apresenta uma única raiz:

$$\frac{3}{2}(x-1)^2 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

Esse é o valor da esperança (e da mediana) da variável! Vamos verificar?

$$E(X) = \frac{3}{2}\int_0^2 (x-1)^2 dx = \frac{3}{2}\int_0^2 (x^2 - 2x + 1)dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + x\right]_0^2$$

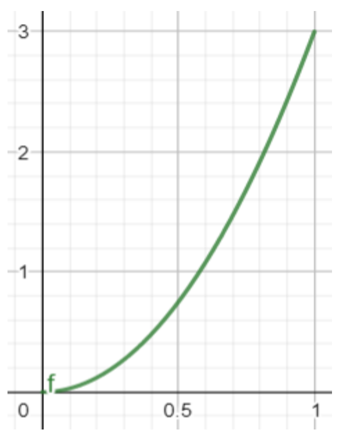
$$E(X) = \frac{3}{2}\left(\frac{8}{3} - 4 + 2\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{8-12+6}{3}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$$

▪

No entanto, é importante verificar se o **intervalo** em que a variável está definida é **simétrico** em relação ao ponto calculado. Para o nosso exemplo, o intervalo (0, 2) realmente é simétrico em torno do ponto $x = 1$.

Caso contrário, a f.d.p. **não** será simétrica em relação ao ponto calculado.

Por exemplo, para $f(x) = 3x^2$, no intervalo (0, 1), a única raiz é $x = 0$, mas a f.d.p. não é simétrica em torno desse ponto, conforme ilustrado a seguir:



Algumas questões exigem que você saiba derivar uma **função composta**, isto é, uma função g de uma função $f(x)$, que podemos representar por $g[f(x)]$**,** por exemplo, $e^{t.x}$.

Para isso, precisamos da **regra da cadeia**. Segundo ela, a derivada da função composta é a derivada da função externa, $g'[f(x)]$, multiplicada pela derivada da função interna, $f'(x)$:

$$g[f(x)]' = g'[f(x)] \times f'(x)$$

A função $e^{t.x}$ tem a função $t.x$ como função interna, $f(x) = t.x$, que é o expoente de e:

$$g[f(x)] = e^{f(x)}$$

Sabemos que a derivada de e^x é ela mesma, então a derivada da função externa é:

$$g'[f(x)] = e^{f(x)} = e^{t.x}$$

Agora, derivamos a função interna:

$$f'(x) = t$$

Então, a derivada de $e^{t.x}$ é o produto:

$$e^{t.x'} = t.e^{t.x}$$

E se precisarmos integrar, em vez de derivar?

A integral fará a operação **contrária**: em vez de multiplicarmos por t dividimos por t:

$$F(x) = \int e^{t.x}\,dx = \frac{e^{t.x}}{t}$$

(FCC/2007 – Analista de Documentação do MPU) O tempo em minutos, X, para a digitação de um texto, é considerado uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & se\ 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{8}, & se\ 2 \leq x < 6 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

O valor esperado de X é

a) 5,0.

b) 4,0.

c) 3,5.

d) 2,5.

e) 1,0.

Comentários:

Nesse caso, temos 2 funções, uma para o intervalo $0 \leq x < 2$ e outra para o intervalo $2 \leq x < 6$.

Então, precisaremos calcular a integral das 2 funções multiplicadas por x em seus respectivos intervalos e, em seguida, somá-las.

A integral da 1ª função multiplicada por x é:

$$E_1(X) = \int \frac{1}{4}.x.dx = \frac{1}{4} \times \frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{1}{4} \times \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{8}$$

Essa função deve ser aplicada nos limites do intervalo $x = 0$ e $x = 2$:

$$E_1(2) - E_1(0) = \frac{2^2}{8} - \frac{0^2}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

A integral da 2ª função multiplicada por x é:

$$E_2(x) = \int \frac{1}{8}.x.dx = \frac{1}{8} \times \frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{1}{8} \times \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{16}$$

Essa função deve ser aplicada nos limites do intervalo $x = 2$ e $x = 6$:

$$E_2(6) - E_2(2) = \frac{6^2}{16} - \frac{2^2}{16} = \frac{36-4}{16} = \frac{32}{16} = 2$$

Agora, basta somar os resultados:

$$E(X) = \frac{1}{2} + 2 = 2,5$$

Gabarito: D.

(CESPE/2013 – CNJ) A função f(t) mostrada abaixo corresponde à função densidade de probabilidade do tempo gasto (t, em meses) para se analisar um processo em determinada vara civil. Com relação essa função, julgue os itens seguintes.

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{3}t, & se\ 0 \leq t < 1 \\ -\frac{t}{4} + \frac{5}{6}, & se\ 1 \leq t \leq 3 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

(CESPE/2013 – CNJ) Cada processo demora, em média, pelo menos 1,5 mês para ser analisado.

Comentários:

A média (ou esperança) é dada por:

$$E(X) = \int x.f(x).dx$$

Como há funções diferentes para intervalos diferentes, então precisamos fazer o cálculo em separado. Para a primeira função $f_1(t) = \frac{2}{3}.t$, temos:

$$E_1(T) = \int \frac{2}{3}.t \times t.dt = \int \frac{2}{3}t^2.dt = \frac{2}{3}.\frac{t^{2+1}}{2+1} = \frac{2}{3}.\frac{t^3}{3} = \frac{2.t^3}{9}$$

Aplicando essa função nos limites do intervalo t = 0 e t = 1, temos:

$$E(1) - E(0) = \frac{2.1^3}{9} - \frac{2.0^3}{9} = \frac{2}{9}$$

Para a segunda função $f_2(t) = -\frac{t}{4} + \frac{5}{6}$, temos:

$$E_2(T) = \int \left(-\frac{t}{4} + \frac{5}{6}\right) \times t.dt = \int \left(-\frac{t^2}{4} + \frac{5t}{6}\right).dt = \int -\frac{1}{4}.t^2.dt + \int \frac{5}{6}.t.dt$$

Separando as integrais:

$$\int -\frac{1}{4}.t^2.dt = -\frac{1}{4} \times \frac{t^{2+1}}{2+1} = -\frac{1}{4} \times \frac{t^3}{3} = -\frac{t^3}{12}$$

$$\int \frac{5}{6}.t.dt = \frac{5}{6} \times \frac{t^{1+1}}{1+1} = \frac{5}{6} \times \frac{t^2}{2} = \frac{5.t^2}{12}$$

Somando os resultados:

$$E_2(T) = -\frac{t^3}{12} + \frac{5t^2}{12} = \frac{-t^3 + 5t^2}{12}$$

Agora, aplicamos essa função nos limites do intervalo t = 1 e t = 3:

$$E_2(3) - E_2(1) = \frac{-3^3 + 5.3^2}{12} - \frac{-1^3 + 5.1^2}{12} = \frac{-27 + 45}{12} - \frac{-1 + 5}{12} = \frac{18 - 4}{12} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$$

A esperança é, portanto, a soma desses dois resultados:

$$E(T) = \frac{2}{9} + \frac{7}{6} = \frac{4 + 21}{18} = \frac{25}{18} \cong 1{,}4$$

Ou seja, a esperança é inferior a 1,5 mês.

Gabarito: Errado.

(CESPE/2013 – CNJ) O tempo médio para se avaliar sequencialmente 10 processos é superior a 1 ano.

Comentários:

Na última questão, calculamos que cada processo demora em média $\frac{25}{18} \cong 1{,}4$ mês para ser analisado. Logo, considerando as propriedades da esperança, 10 processos levam, em média:

$$E(a.T) = \text{a}.E(T)$$

$$E(10.T) = 10.E(T) = 10 \times \frac{25}{18} \cong 14$$

Como 14 meses são superiores a 1 ano (composto de 12 meses), o item está correto.

Gabarito: Certo.

(FGV/2022 – PC/AM) Suponha que X seja uma variável aleatória contínua com a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{Bmatrix} k2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & caso\ contrário \end{Bmatrix}$$

O valor de k e o valor esperado de X são, respectivamente,

a) 1/2 e 1/2.

b) 1 e 1/2.

c) 1 e 2/3.

d) 1 e 1/3.

e) 2 e 4/3.

Comentários:

Para encontrar o valor de k, precisamos considerar que a probabilidade associada a todos os possíveis valores da variável (ao Espaço Amostral) é igual a 1. Para variáveis contínuas, a integral da função densidade de probabilidade (f.d.p.) deve ser igual a 1. Sabendo a f.d.p. $f(x) = k.2.x$ se aplica no intervalo (0, 1), temos:

$$P(U) = \int_0^1 k.2.x.dx = 1$$

Considerando que k e 2 são constantes, podemos tirá-los de dentro da integral:

$$P(U) = k.2\int_0^1 x.dx = k.2.\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = k.2.\left[\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = k.2.\left[\frac{1}{2}\right] = k$$

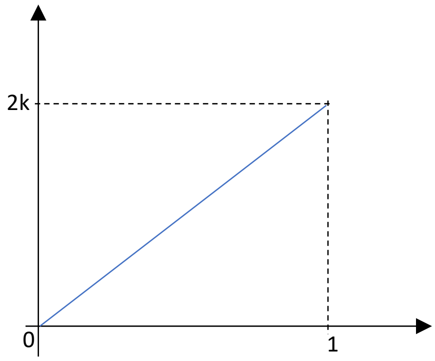
Sabendo que essa probabilidade (que corresponde a todo o Espaço Amostral) deve ser igual, temos que $k = 1$ e $f(x) = 2x$.

Para calcular a esperança, multiplicamos a f.d.p. por x e integramos a função no intervalo da variável (que é análogo ao caso discreto, em que multiplicamos as probabilidades por x e somamos os resultados):

$$E(X) = \int_0^1 x.2x.dx = 2.\int_0^1 x^2.dx = 2.\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2.\left[\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] = 2.\left[\frac{1}{3}\right] = \frac{2}{3}$$

Sendo $k = 1$ e $E(X) = \frac{2}{3}$, verificamos que o gabarito é C.

Observação: Neste caso específico, como a f.d.p. $f(x) = k.2.x$ é uma reta, poderíamos ter calculado o valor de k geometricamente. O gráfico a seguir representa a f.d.p., no intervalo (0, 1):



Sabendo que a área delimitada (triângulo) deve ser igual a 1, temos:

$$A_{tri} = \frac{base \times altura}{2} = \frac{1 \times 2k}{2} = 1$$

$$k = 1$$

Gabarito: C

Variância

A variância de uma variável aleatória X, seja ela discreta ou contínua, pode ser calculada como:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Para variáveis discretas, o valor $E(X^2)$ é dado por:

$$E(\boldsymbol{X^2}) = \sum \boldsymbol{x^2}.P(X = x)$$

Para variáveis contínuas, substituímos o somatório pela integral e a probabilidade $P(X = x)$ pela f.d.p. $f(x)$, definida no intervalo de $\boldsymbol{x_I}$ a $\boldsymbol{x_S}$:

$$\boldsymbol{E(X^2) = \int_{x_I}^{x_S} x^2.f(x).dx}$$

O termo $\boldsymbol{E(X^2)}$ pode ser chamado de **segundo momento** e a **variância** $V(X)$ de **segundo momento central**.

Vamos calcular $\boldsymbol{E(X^2)}$ para o nosso exemplo, em que a f.d.p. é $f(x) = 9x^2$ para $\boldsymbol{0} < x < \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$:

$$\boldsymbol{E(X^2)} = \int_{\boldsymbol{0}}^{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}} x^2.9x^2.dx = \int_{\boldsymbol{0}}^{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}} 9x^4\,.dx$$

Primeiro calculamos a integral, sem os limites:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}^2) = \int 9x^4.dx = 9 \times \frac{x^{4+1}}{4+1} = \frac{9}{5}x^5$$

Aplicando os limites, temos:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}^2) = \frac{9}{4}\left(\sqrt[3]{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}}\right)^5 - \frac{9}{4}(\mathbf{0})^5 = \frac{9}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{5/3}$$

Mais precisamente, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}^2)$ é a integral da f.d.p., multiplicada por x^2, de **menos infinito** até **mais infinito**:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x).dx$$

Todas as propriedades de variância, que valem para variáveis discretas, também se aplicam a variáveis contínuas:

i) $V(X+k) = V(X)$

ii) $V(k.X) = k^2.V(X)$

iii) $V\left(\frac{X}{k}\right) = \frac{V(X)}{k^2}$

Além disso, vale ressaltar a seguinte propriedade, válida somente para variáveis **independentes**, que também se aplica tanto para o caso discreto quanto para o caso contínuo:

iv) Se X e Y são **independentes**, então $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

Por fim, vale pontuar que o desvio padrão é a raiz quadrada da variância:

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

Quando estivermos aplicando limites, principalmente limites infinitos, podem surgir **resultados indeterminados**, como $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Uma boa ferramenta para esses casos é a **Regra de L´Hôpital**, segundo a qual podemos **derivar** as expressões, que o limite será o mesmo:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$$

Por exemplo, vamos supor que precisamos aplicar o limite $x \to \infty$ para a expressão $\frac{x}{e^x}$.

Esse é um caso de indeterminação, pois a aplicação direta resultaria em $\frac{\infty}{\infty}$. Então, vamos aplicar a Regra de L´Hôpital, derivando o numerador e o denominador:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

E assim resolvemos a indeterminação!

(CESPE/2014 – Analista Judiciário do TJ/SE) Considerando que X seja uma variável aleatória contínua, tal que E(X) = 1 e E(X^2) = 4, julgue o item seguinte.

Var(X) = 2

Comentários:

Conhecendo $E(X) = 1$ e $E(X^2) = 4$, podemos calcular a variância como:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 4 - 1^2 = 3$$

Gabarito: Errado.

(FCC/2010 – Analista Judiciário do TRT da 9ª Região) A variável aleatória contínua X tem função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 6(x - x^2), & para\ 0 < x \leq 1 \\ 0, & para\ x \leq 0\ ou\ x > 1 \end{Bmatrix}$$

A variância de X é igual a

a) 0,01.

b) 0,02.

c) 0,03.

d) 0,04.

e) 0,05.

Comentários:

Podemos calcular a variância por:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Vamos primeiro calcular $E(X)$. Para isso, integrar f(x) multiplicada por x:

$$E(X) = \int x.6(x - x^2).dx = \int (6x^2 - 6x^3).dx = \int 6x^2.dx - \int 6x^3.dx$$

Resolvendo essas integrais em separado:

$$\int 6x^2.dx = 6 \times \frac{x^{2+1}}{2+1} = 6 \times \frac{x^3}{3} = 2.x^3$$

$$\int 6x^3.dx = 6 \times \frac{x^{3+1}}{3+1} = 6 \times \frac{x^4}{4} = \frac{3.x^4}{2}$$

Juntando esses resultados, encontramos a função E(X):

$$E(X) = 2.x^3 - \frac{3}{2}x^4$$

Agora, aplicamos E(X) nos limites x = 0 e x = 1:

$$E(X) = E(1) - E(0) = 2.1^3 - \frac{3.1^4}{2} - \left(2.0^3 - \frac{3.0^4}{2}\right) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Agora, calculamos $E(X^2)$. Para isso, precisamos integrar o produto de x^2 por $f(x)$:

$$E(X^2) = \int x^2.6(x - x^2).dx = \int (6x^3 - 6x^4).dx = \int 6x^3.dx - \int 6x^4.dx$$

Resolvendo essas integrais em separado:

$$\int 6x^3.dx = 6 \times \frac{x^{3+1}}{3+1} = 6 \times \frac{x^4}{4} = \frac{3.x^4}{2}$$

$$\int 6x^4.dx = 6 \times \frac{x^{4+1}}{4+1} = 6 \times \frac{x^5}{5} = \frac{6.x^5}{5}$$

Juntando esses resultados, encontramos a função $E(X^2)$:

$$\boldsymbol{E(X^2) = \frac{3.x^4}{2} - \frac{6.x^5}{5}}$$

Agora, aplicamos $E(X^2)$ nos limites **x = 0** e **x = 1**:

$$E(X^2) = E(\mathbf{1^2}) - E(\mathbf{0^2}) = \frac{\mathbf{3.1^4}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{6.1^5}}{\mathbf{5}} - \left(\frac{\mathbf{3.0^4}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{6.0^5}}{\mathbf{5}}\right) = \frac{3}{2} - \frac{6}{5} = \frac{15-12}{10} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

Por fim, subtraímos $E(X^2) - [E(X)]^2$ para calcular a variância:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0{,}3 - 0{,}5^2 = 0{,}3 - 0{,}25 = 0{,}05$$

Gabarito: E.

Covariância e correlação

A covariância é definida da seguinte maneira (seja para variáveis discretas, seja para contínuas):

$$\boldsymbol{Cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)}$$

A **diferença** está na forma de calcular o valor de $E(X.Y)$. Para o caso discreto, temos:

$$E(X.Y) = \sum x.y.P(X = x, Y = y)$$

Para o caso contínuo, em que as variáveis não são contáveis, não conseguimos efetuar a soma desses resultados. Por isso, a substituímos pela **integral**:

$$E(X.Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x.y.f_{X,Y}(x,y).dy.dx$$

Nessa fórmula, temos uma integral dupla, em que precisamos resolver a integral **interna primeiro**:

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} x.y.f_{X,Y}(x,y).dy$$

E depois integramos o resultado em relação a x:

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y).dx$$

Pontue-se que $P(X = x, Y = y)$ é chamada de **distribuição conjunta de probabilidade**, enquanto $f_{X,Y}(x,y)$ é chamada de **função densidade conjunta de probabilidade**.

As propriedades da covariância também são as mesmas, tanto para variáveis discretas quanto para contínuas:

i)	**Simetria**: $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
ii)	**Mesma variável**: $Cov(X, X) = Var(X)$
iii)	Com uma **constante**: $Cov(k, X) = 0$
iv)	**Soma**: $Cov(X + Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$
v)	**Produto** de uma constante: $Cov(kX, Y) = Cov(X, kY) = k. Cov(X, Y)$

A partir da covariância, podemos calcular a **variância da soma e da subtração** de duas variáveis não (necessariamente) independentes:

$$\boldsymbol{Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2. Cov(X, Y)}$$

$$\boldsymbol{Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2. Cov(X, Y)}$$

Para calcular a variância da soma de **múltiplas variáveis**, somamos as variâncias e o dobro das covariâncias entre cada par de variáveis:

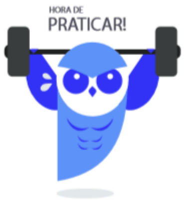
$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2. \sum_{j>i}^{n} \sum_{i=1}^{n} Cov(X_i, X_j)$$

Para 3 variáveis, por exemplo, temos:

$$V(X + Y + Z) = V(X) + V(Y) + V(Z) + 2[Cov(X, Y) + Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)]$$

Por fim, o **coeficiente de correlação** também é calculado pela razão entre a covariância e o produto dos desvios padrão, assim como para variáveis discretas:

$$\boldsymbol{\rho(X, Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X . \sigma_Y}}$$



(CESPE/2016 – TCE/PR) Se satisfação no trabalho e saúde no trabalho forem indicadores com variâncias populacionais iguais a 8 e 2, respectivamente, e se a covariância populacional entre esses indicadores for igual a 3, então a correlação populacional entre satisfação no trabalho e saúde no trabalho será igual a:

a) 0,8125.

b) 1.

c) 0,1875.

d) 0,30.

e) 0,75.

Comentários:

Sabendo que V(X) = 8, V(Y) = 2 e Cov(X,Y) = 3, então a correlação é dada por:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X.\sigma_Y} = \frac{3}{\sqrt{8}.\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Gabarito: E

TEOREMAS DE DESIGUALDADE

Nesta seção, veremos a **Desigualdade de Chebyshev** e a **Desigualdade Unilateral**, cujo objetivo é trazer uma **estimativa de probabilidades**, a partir da **esperança** e da **variância** da variável.

Desigualdade de Chebyshev

Antes de falar sobre a desigualdade, vale pontuar que existem diversas maneiras de escrever o nome do matemático russo: **Chebyshev, Tchebychev, Tschebyscheff, Chebychov**,...

Seja X uma variável aleatória com esperança $\boldsymbol{E(X) = \mu}$ *e variância* $\boldsymbol{V(X) = \sigma^2}$.

Então, para todo $\boldsymbol{\delta > 0}$, *temos:*

$$P(|X - \boldsymbol{\mu}| \geq \boldsymbol{\delta}) \leq \frac{\boldsymbol{\sigma^2}}{\boldsymbol{\delta^2}}$$

Em outras palavras, a probabilidade de X se **distanciar** da **média** (para cima **ou** para baixo) em **mais que** um determinado valor $\boldsymbol{\delta}$ é, no **máximo**, igual à razão entre a **variância** e o **quadrado de $\boldsymbol{\delta}$.**

Para que o **módulo** da diferença $X - \mu$ seja **maior ou igual** a δ, ou a diferença é **positiva** e maior ou igual a δ ou a diferença é **negativa** e menor ou igual a $-\delta$:

$$|X - \mu| \geq \delta = \begin{Bmatrix} X - \mu \geq \delta, & se\ X - \mu \geq 0 \\ X - \mu \leq -\delta, & se\ X - \mu < 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X \geq \mu + \delta, & se\ X - \mu \geq 0 \\ X \leq \mu - \delta, & se\ X - \mu < 0 \end{Bmatrix}$$

Assim, a probabilidade $P(|X - \mu| \geq \delta)$ corresponde à união dessas probabilidades:

$$P(|X - \boldsymbol{\mu}| \geq \boldsymbol{\delta}) = P(X \leq \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\delta} \cup X \geq \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\delta})$$

EXEMPLIFICANDO

Vamos supor que uma fábrica produza, em média, 1000 unidades por dia de determinado medicamento, com variância de 200 unidades^2/dia.

Com apenas essas informações, vamos calcular a probabilidade de a fábrica produzir **menos** que 900 unidades **ou mais** que 1100 unidades em um dia.

Em ambos os casos, temos uma "distância", em relação à média, de 100 unidades, pois |900 – 1000| = 100 e |1100 – 1000| = 100. Logo, $\delta = 100$ unidades:

$$P(|X-\mu| \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{\delta^2}$$

$$P(X < 900 \cup X > 1100) = P(|X-1000| \geq 100) \leq \frac{200}{(100)^2}$$

$$P(X < 900 \cup X > 1100) \leq 0{,}02$$

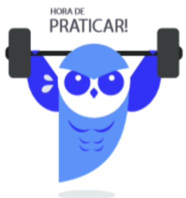
Ou seja, a probabilidade de a fábrica produzir menos de 900 unidades ou mais de 110 unidades é **no máximo** igual a 0,02 = 2%.

Podemos calcular também a probabilidade de produzir **entre** 900 e 1100 unidades em um dia, que é a probabilidade complementar:

$$P(900 < X < 1100) = 1 - P(X < 900 \cup X > 1100)$$

$$P(900 < X < 1100) \geq 1 - 0{,}02 = 0{,}98$$

Ou seja, a probabilidade de a fábrica produzir entre 900 e 110 unidades é **no mínimo** igual a 0,98 = 98%.



(FCC/2012 – Analista Judiciário do TRE/SP) Seja X uma variável aleatória contínua com uma média igual a 20. Utilizando o Teorema de Tchebyshev, obtém-se que a probabilidade de X não pertencer ao intervalo (15, 25) é, no máximo, 6,25%. Isto significa que o desvio padrão de X é igual a

a) 1,25.

b) 1,50.

c) 2.00.

d) 2,25.

e) 2,50.

Comentários:

Sabendo que $\mu = 20$, então a probabilidade de X **não** pertencer ao intervalo (15,25) corresponde à probabilidade de X se **distanciar da média** em pelo menos 5 unidades:

$$P(X \leq 15 \; ou \; X \geq 25) = P(|X-20| \geq 5)$$

O enunciado informa que essa probabilidade é no máximo 6,25% = 0,0625:

$$P(|X-20| \geq 5) \leq 0{,}0625$$

Aplicando o teorema de Chebyshev, podemos calcular a variância:

$$P(|X-\mu| \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{\delta^2}$$

$$P(|X-20| \geq 5) \leq \frac{\sigma^2}{5^2}$$

$$\frac{\sigma^2}{25} = 0{,}0625$$

$$\sigma^2 = 25 \times 0{,}0625$$

Assim:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{25 \times 0{,}0625} = 5 \times 0{,}25 = 1{,}25$$

Gabarito: A

(FCC/2010 – Analista Judiciário do TRT da 8ª Região) Seja X uma variável aleatória contínua representando os salários dos empregados de uma empresa. Como é desconhecida a distribuição destes salários, utilizou-se o teorema de Tchebyshev para saber qual é a porcentagem dos empregados que ganham mais que R$ 1.600,00 e menos que R$ 2.400,00. O resultado encontrado foi que esta porcentagem foi no mínimo igual a 84%, baseado no fato de que a média de X é igual a R$ 2.000,00. A correspondente variância de X, em $(R\$)^2$, é igual a

a) 22.500.

b) 25.600.

c) 40.000.

d) 62.500.

e) 160.000.

Comentários:

A probabilidade de os empregados ganharem mais que R$ 1.600 ou menos que R$ 2.400 pode ser considerada como o **complementar** da probabilidade de os empregados ganharem menos que R$ 1.600 ou mais que R$ 2.400:

$$P(X \leq 1.600 \; ou \; X \geq 2.400) = 1 - P(1.600 < X < 2.400)$$

O enunciado informa que $P(1.600 < X < 2.400) = 84\% = 0{,}84$, logo, o seu complementar é:

$$P(X \leq 1.600 \; ou \; X \geq 2.400) = 1 - 0{,}84 = 0{,}16$$

Sabendo que a média é $\mu = 2.000$, então a probabilidade de os empregados ganharem menos que R$ 1.600 ou mais que R$ 2.400 corresponde à probabilidade de os salários se distanciarem da média em mais de R$ 400:

$$P(X \leq 1.600 \; ou \; X \geq 2.400) = P(|X-2.000| \geq 400)$$

Pelo teorema de Chebyshev, calculamos a variância:

$$P(|X-\mu| \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{\delta^2}$$

$$P(|X - 2.000| \geq 400) \leq \frac{\sigma^2}{400^2}$$

$$\frac{\sigma^2}{160.000} = 0{,}16$$

$$\sigma^2 = 160.000 \times 0{,}16 = 25.600$$

Gabarito: B.

Desigualdade Unilateral

É possível estimar a probabilidade de uma variável se afastar da média **apenas para cima**, chamada de **versão unilateral de Cantelli da desigualdade de Chebyshev** (ou de **desigualdade unilateral de Chebyshev** ou, ainda, de **desigualdade de Cantelli**):

$$P(X - \mu \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \delta^2}$$

Ou seja, a probabilidade de X superar a **média** em mais de δ é, **no máximo**, igual à razão $\frac{\sigma^2}{\sigma^2+\delta^2}$.

EXEMPLIFICANDO

Para o mesmo exemplo, podemos calcular a probabilidade de a fábrica produzir **mais que** 1100 unidades, somente, sabendo que a média é de 1000 unidades e a variância de 200 unidades^2/dia. A distância em relação à média é $\delta = 100$, então:

$$P(X - \mu \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \delta^2}$$

$$P(X - 1000 \geq 100) \leq \frac{200}{200 + 10.000}$$

$$P(X \geq 1100) \leq 0{,}0196$$

Assim, a probabilidade de produzir menos que 1100 unidades é dada por:

$$P(X < 1100) = 1 - P(X \geq 1100)$$

$$P(X < 1100) \geq 1 - 0{,}0196 = 0{,}9804$$

HORA DE PRATICAR!

(CESPE/2011 – EBC) Considerando as desigualdades usuais em teoria de probabilidades, julgue o próximo item.

Suponha que uma variável aleatória *X* tenha média zero e variância finita e que, pela desigualdade unilateral de Chebyshev, P(X≥ 25) ≤ 0,25. Nesse caso, a variância de X será superior a 200.

Comentários:

Pela desigualdade unilateral de Chebyshev, temos:

$$P(X-\mu \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\delta^2}$$

Pelo enunciado, $P(X \geq 25) \leq 0{,}25$, detectamos que $\mu = 0$ e $\delta = 25$, logo:

$$P(X \geq \mathbf{25}) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\mathbf{25}^2}$$

O enunciado informa que $P(X \geq 25) \leq 0{,}25$, então:

$$\frac{\sigma^2}{\sigma^2+625} = 0{,}25$$

$$\sigma^2 = 0{,}25 \times \sigma^2 + 0{,}25 \times 625$$

$$0{,}75 \times \sigma^2 = 0{,}25 \times 625$$

$$\sigma^2 = \frac{0{,}25 \times 625}{0{,}75} = \frac{625}{3} = 208{,}333\ldots$$

Gabarito: Certo.

(CESPE/2014 – Analista Judiciário do TJ/SE) Considerando que X seja uma variável aleatória contínua, tal que E(*X*) = 1 e E(X^2) = 4, julgue o item seguinte.

P(X > 4) ≤ ¼

Comentários:

Para resolver essa questão, vamos utilizar a desigualdade lateral de Chebyshev:

$$P(X-\mu \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\delta^2}$$

O enunciado informa que a média é $\mu = E(X) = 1$. Ele também fornece $E(X^2)$, que permite calcular a variância:

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 4 - 1^2 = 3$$

Sabendo que a média é $\mu = 1$, a probabilidade $P(X > 4)$ corresponde à probabilidade de X se afastar da média em mais de 3 unidades:

$$P(X > 4) = P(X - 1 > 3)$$

Ou seja, $\delta = 3$. Substituindo esses valores na desigualdade de Chebyshev, temos:

$$P(X - 1 \geq \mathbf{3}) \leq \frac{3}{3 + \mathbf{3}^2} = \frac{3}{12}$$

$$P(X \geq 4) \leq \frac{1}{4}$$

Lembre-se que, por ser uma variável contínua, temos $P(X > 4) = (X \geq 4)$.

Gabarito: Certo.

RESUMO DA AULA

⇒ Função **densidade** de probabilidade **positiva** $f(x) \geq 0$

⇒ Probabilidade de um **intervalo** $P(a < X < b) = \int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a)$

⇒ Função de **distribuição acumulada** varia entre **0 e 1**: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x).dx$

⇒ **Esperança**: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x).dx$

⇒ **Variância**, $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, com $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2.f(x).dx$

⇒ **Covariância**: $Cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$,

⇒ **Correlação**: $\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X.\sigma_Y}$

⇒ **Variância da Soma e da Diferença**:

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2.Cov(X,Y)$$

$$Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2.Cov(X,Y)$$

⇒ **Desigualdade de Chebyshev**: $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{\delta^2}$

⇒ **Desigualdade Unilateral**: $P(X - \mu \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \delta^2}$

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Noções de variáveis contínuas

1. (CESGRANRIO/2011 – Petrobrás) A função densidade de uma variável aleatória é dada por f(x) = x/4, para $1 \leq x \leq 3$, com f(x) = 0 para os demais valores de x. A probabilidade de que X assuma um valor menor que 2 é

a) 1/4

b) 1/3

c) 5/16

d) 3/8

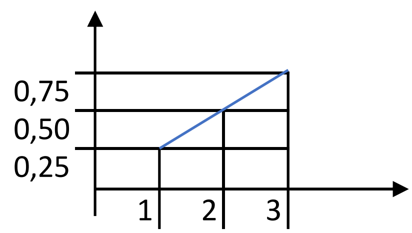
e) 1/2

Comentários:

Sendo a função f(x) = x/4, $1 \leq x \leq 3$, temos:

- para x = 1, temos f(1) = 1/4 = 0,25;
- para x = 2, temos f(2) = 2/4 = 0,5; e
- para x = 3, temos f(3) = 3/4 = 0,55.

Logo, podemos representar a função pelo gráfico a seguir:

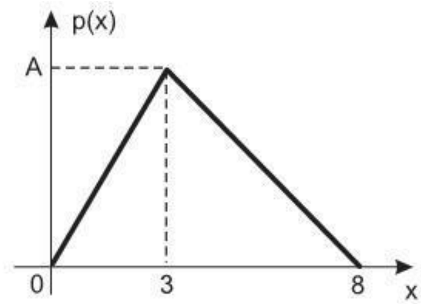


Podemos observar que a probabilidade P(X < 2) corresponde à área do trapézio abaixo da função (reta azul), entre os pontos x = 1 e x = 2:

$$P(X < 2) = \acute{A}rea\ do\ trap\acute{e}zio = \frac{(B+b)\times h}{2} = \frac{(0{,}5+0{,}25)\times 1}{2} = \frac{0{,}75}{2} = \frac{3}{8}$$

Gabarito: D

2. (CESGRANRIO/2011 – Transpetro)



O gráfico da figura acima mostra a função densidade de probabilidade de um experimento com uma variável aleatória X. O valor de A é

a) 0,10

b) 0,15

c) 0,20

d) 0,25

e) 0,30

Comentários:

O enunciado pede o valor de A. Para obtê-lo, devemos considerar que a probabilidade associada a todo o Espaço Amostral é P(U) = 1. Ou seja, a área sob a função deve ser igual a:

$$P(U) = \acute{A}rea\ do\ tri\hat{a}ngulo = \frac{b \times h}{2} = \frac{8 \times A}{2} = 1$$

$$8 \times A = 2$$

$$A = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Gabarito: D

3. (CESGRANRIO/2010 – EPE) O teor de etanol presente na gasolina determina o preço de venda. Seja X a variável aleatória que representa o teor de etanol. Se X está entre 0,20 e 0,25, a gasolina é vendida a R$ 2,00 por litro; caso contrário, a gasolina é vendida a R$ 1,80 por litro. A função de densidade de probabilidade de X é:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

O valor esperado do preço de venda, por litro, em reais, é

a) 1,95

b) 1,93

c) 1,88

d) 1,84

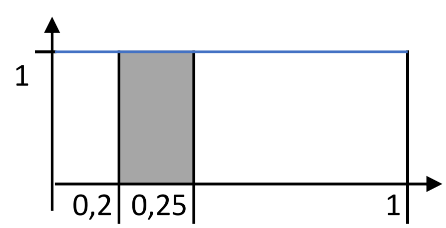
e) 1,81

Comentários:

O valor esperado do preço de venda é a soma dos produtos dos preços de venda pelas respectivas probabilidades. O enunciado informa que o preço de venda é de R$ 2,00, caso X pertença ao intervalo 0,20 < X < 0,25; e de R$ 1,80 caso contrário. Chamando de p a probabilidade P(0,20 < X < 0,25), temos:

$$Preço\ Esperado = 2 \times p + 1{,}8 \times (1 - p)$$

O enunciado informa que f(x) = 1, para $0 \leq x \leq 1$. Assim, a probabilidade P(0,20 < X < 0,25) corresponde à área indicada a seguir (retângulo):



$$p = Área\ do\ retângulo = b \times h = 0{,}05 \times 1 = 0{,}05$$

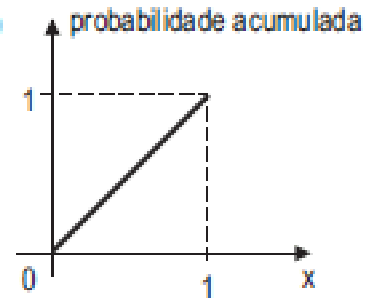
Substituindo o valor de p na expressão do preço esperado, temos:

$$Preço\ Esperado = 2 \times 0{,}05 + 1{,}8 \times (1 - 0{,}05) = 0{,}1 + 1{,}71 = 1{,}81$$

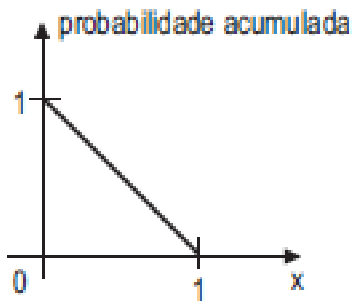
Gabarito: E

4. (CESGRANRIO/2014 – FINEP) As Figuras abaixo mostram os gráficos de diversas funções que deveriam representar a distribuição acumulada de probabilidade de uma variável aleatória contínua X. Essa variável X assume valores no intervalo fechado [0, 1], segundo uma distribuição uniforme.

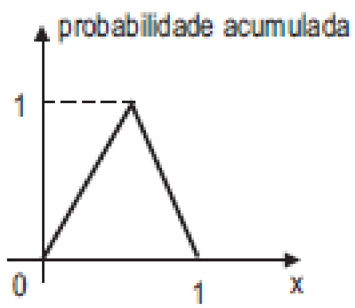
Constata-se que o gráfico correspondente à distribuição acumulada de X é o da Figura



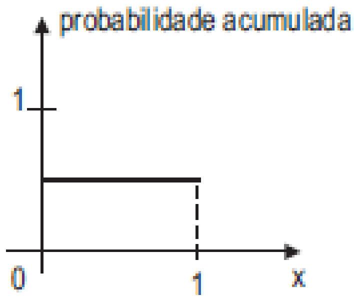
a)



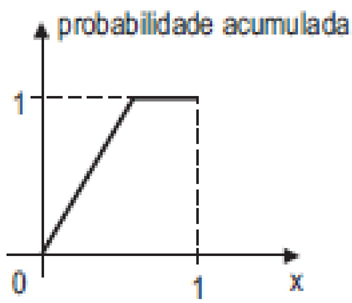
b)



c)



d)



e)

Comentários:

A função de distribuição acumulada é uma função não decrescente que assume valores entre 0 e 1. Para uma distribuição uniforme no intervalo [0, 1], a função acumulada cresce constantemente nesse intervalo, como indicado na letra A.

Gabarito: A

5. (CESGRANRIO/2010 – Petrobras) Um serviço de atendimento, que se inicia às 9 h, tem uma única fila para atendimento por um único servidor. O intervalo (em minutos) entre a chegada de dois clientes e o tempo (em minutos) de atendimento pelo servidor são variáveis aleatórias distribuídas uniformemente entre 0 e 10. No quadro a seguir, é apresentado o resultado de uma simulação com essas variáveis.

Cliente	Intervalo	Atendimento
1	1	2
2	5	8
3	7	3
4	1	7
(...)	(...)	(...)

Por exemplo, o primeiro cliente chega às 9 h 1 min, é atendido durante 2 min e, portanto, sai do sistema às 9h3min. O segundo cliente chega 5 min após a chegada do primeiro cliente e o servidor irá consumir 8 min em seu atendimento. Nesse processo de simulação, o quarto cliente sairá do sistema às

a) 9h22min

b) 9h23min

c) 9h24min

d) 9h25min

e) 9h26min

Comentários:

O **primeiro** cliente chega às **9h01min**, leva 2 min para ser atendido e sai às **9h03**min.

O **segundo** cliente chega 5 min depois do primeiro cliente, isto é, às **9h06min**. Como o atendente está disponível desde às 9h03min, o segundo cliente chega e é atendido imediatamente, às 9h06min. Considerando que o seu atendimento leva 8 min, ele sairá às **9h14**min.

O **terceiro** cliente chega 7 min depois do segundo cliente, isto é, às **9h13min**. Como ele será atendido após o segundo cliente, o seu atendimento se inicia às 9h14min. Considerando que o seu atendimento leva 3 min, ele sairá às **9h17**min.

O **quarto** cliente chega 1 min depois do terceiro cliente, isto é, às **9h14min**. Como ele será atendido após o terceiro cliente, o seu atendimento se inicia às 9h17min. Considerando que o seu atendimento leva 7 min, ele sairá às **9h24**min.

Portanto, o quarto cliente sai às 9h24min

Gabarito: E

6. (CESGRANRIO/2010 – Petrobras) Um serviço de atendimento, que se inicia às 9 h, tem uma única fila para atendimento por um único servidor. O intervalo (em minutos) entre a chegada de dois clientes é uma variável aleatória uniformemente distribuída entre 0 e 4, e o tempo (em minutos) de atendimento pelo servidor é uma variável aleatória distribuída uniformemente entre 5 e 10. No quadro a seguir, é apresentado o resultado de uma simulação com essas variáveis.

Cliente	Intervalo	Atendimento
1	2	5
2	1	10
3	1	6
4	2	8
(...)	(...)	(...)

Por exemplo, o primeiro cliente chega às 9 h 2 min, é atendido durante 5 min e, portanto, sai do sistema às 9 h 7 min. O segundo cliente chega 1 min após a chegada do primeiro cliente, e o servidor irá consumir 10 min em seu atendimento. O cliente que aguardará na fila mais tempo para ser atendido irá esperar

a) 13 min

b) 14 min

c) 15 min

d) 16 min

e) 17 min

Comentários:

O **primeiro** cliente **não irá esperar** tempo algum na fila. Então, ele chega às **9h02min**, leva 5 min para ser atendido e sai às **9h07**min.

O **segundo** cliente chega 1 min depois do primeiro cliente, isto é, às **9h03min**. Como ele será atendido após o primeiro cliente, o seu atendimento se inicia às 9h07min, ou seja, ele espera 7 – 3 = **4 min** para ser atendido. Considerando que o seu atendimento leva 10 min, ele sairá às **9h17**min.

O **terceiro** cliente chega 1 min depois do segundo cliente, isto é, às **9h04min**. Como ele será atendido após o segundo cliente, o seu atendimento se inicia às 9h17min, ou seja, ele espera 17 – 4 = **13 min** para ser atendido. Considerando que o seu atendimento leva 6 min, ele sairá às **9h23**min.

O **quarto** cliente chega 2 min depois do terceiro cliente, isto é, às **9h06min**. Como ele será atendido após o terceiro cliente, o seu atendimento se inicia às 9h23min, ou seja, ele espera 23 – 6 = **17 min** para ser atendido.

Portanto, o cliente que aguarda mais tempo para ser atendido (quarto cliente) aguarda 17 min.

Gabarito: E

QUESTÕES COMENTADAS – MULTIBANCAS

Noções de variáveis contínuas

CEBRASPE

1. (CEBRASPE/2013 – CNJ)

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{3}t & \text{, se } 0 \leq t < 1 \\ -\frac{t}{4} + \frac{5}{6} & \text{, se } 1 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

A função f(t) mostrada acima corresponde à função densidade de probabilidade do tempo gasto (t, em meses) para se analisar um processo em determinada vara civil. Com relação essa função, julgue o item seguinte.

A probabilidade de um processo, escolhido ao acaso, demorar menos de três meses para ser analisado é superior a 0,99.

Comentários:

Por se tratar de uma variável contínua, temos $P(t < 3) = P(t \leq 3)$.

Pelo enunciado, observamos que para t > 3, a função densidade é igual a zero, ou seja:

$$P(t > 3) = 0$$

Logo, a probabilidade complementar é:

$$P(t \leq 3) = 1 - P(t > 3) = 1 - 0 = 1$$

Como 1 é superior a 0,99, o item está certo.

Gabarito: Certo.

2. (CEBRASPE/2013 – CNJ)

$$f(t)=\begin{cases}\frac{2}{3}t & ,\text{se } 0\le t<1\\ -\frac{t}{4}+\frac{5}{6} & ,\text{se } 1\le t\le 3\\ 0 & ,\text{caso contrário}\end{cases}$$

A função f(t) mostrada acima corresponde à função densidade de probabilidade do tempo gasto (t, em meses) para se analisar um processo em determinada vara civil. Com relação essa função, julgue o item seguinte.

A probabilidade de um processo, escolhido ao acaso, demorar mais de dois meses para ser analisado é superior a 0,4.

Comentários:

A probabilidade de um processo demorar mais de 2 meses é igual à probabilidade de o processo demorar entre 2 e 3 meses, uma vez que $P(t>3)=0$:

$$P(t>2)=P(2<t\le 3)$$

Pela f.d.p. fornecida, temos:

$$P(2<t\le 3)=\int_2^3 f(t).dt=\int_2^3\left(-\frac{t}{4}+\frac{5}{6}\right).dt$$

Considerando que $\int\left(-\frac{t}{4}+\frac{5}{6}\right)dt=-\frac{t^2}{4\times 2}+\frac{5}{6}t$, então, aplicando os limites da integral, temos:

$$P(2<t\le 3)=-\frac{(3^2-2^2)}{8}+\frac{5}{6}(3-2)=-\frac{5}{8}+\frac{5}{6}=\frac{-15+20}{24}=\frac{5}{24}\cong 0{,}21$$

Logo, a probabilidade é inferior a 0,4.

Gabarito: Errado.

3. (CEBRASPE/2014 – Analista Judiciário do TJ/SE) Considerando que X seja uma variável aleatória contínua, tal que E(X) = 1 e E(X^2) = 4, julgue o item seguinte.

O coeficiente de variação é igual ou superior a 2.

Comentários:

O coeficiente de variação é dado por:

$$C_V = \frac{desvio\ padrão}{média} = \frac{\sigma}{E(X)}$$

Para calcular o desvio padrão, vamos primeiro calcular a variância:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

O enunciado informa que E(X) = 1 e $E(X^2) = 4$, logo:

$$V(X) = 4 - [1]^2 = 3$$

Assim, o desvio padrão, raiz quadrada da variância, é:

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{V(X)}} = \sqrt{3}$$

Sabendo que E(X) = 1, o coeficiente de variação é:

$$C_V = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \cong 1{,}7$$

Logo, o coeficiente de variação é inferior a 2.

Gabarito: Errado.

4. (CEBRASPE/2020 – Analista Judiciário do TJ/PA) Se *Y* for uma variável aleatória contínua e simétrica em torno de zero, tal que P(Y^2 < 4) = 0,4, então P(*Y* > 2) será igual a

a) 0,2

b) 0,3

c) 0,4

d) 0,5

e) 0,6

Comentários:

Se $Y^2 < 4$, então extraindo a raiz de ambos os lados, temos:

$$\sqrt{Y^2} < \sqrt{4}$$

$$|Y| < 2$$

O enunciado informa que essa probabilidade é de 0,4:

$$P(Y^2 < 4) = P(|Y| < 2) = 0{,}4$$

Pelo complementar, temos:

$$P(|Y| > 2) = 1 - P(|Y| < 2) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$

Substituindo o módulo, temos:

$$P(|Y| > 2) = P(Y < -2 \cup Y > 2) = P(Y < -2) + P(Y > 2) = 0{,}6$$

Como a distribuição é simétrica em torno de zero, então:

$$P(Y < -2) = P(Y > 2)$$

Logo:

$$P(Y < -2) + P(Y > 2) = 2.P(Y > 2) = 0{,}6$$

$$P(Y > 2) = 0{,}3$$

Gabarito: B.

5. (CEBRASPE/2013 – Analista Judiciário do TRT 17ª Região) Com base em distribuições contínuas, julgue o item subsequente.

Considere que uma variável aleatória contínua e simétrica em zero tenha função densidade de probabilidade f(x) tal que

$$\int_{-k}^{0} f(x)\,dx \leq 0 \leq \int_{0}^{k} f(x)\,dx$$

Nesse caso, P(X ∈ [-k;k]) = 0.

Comentários:

Sabemos que a probabilidade associada a certo intervalo para uma variável contínua é:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x).dx$$

Assim, as integrais fornecidas no enunciado correspondem às seguintes probabilidades:

$$\int_{-k}^{0} f(x).dx = P(-k \leq X \leq 0)$$

$$\int_{0}^{k} f(x).dx = P(0 \leq X \leq k)$$

Sendo a variável simétrica em zero, então:

$$P(-k \leq X \leq 0) = P(0 \leq X \leq k)$$

Pela inequação fornecida no enunciado, temos:

$$P(-k \leq X \leq 0) \leq 0 \leq P(0 \leq X \leq k)$$

Logo:

$$P(0 \leq X \leq k) \leq 0 \leq P(0 \leq X \leq k)$$

Ou seja, essa probabilidade é, ao mesmo tempo, menor ou igual a zero e maior ou igual a zero. A única possibilidade é ela ser igual a zero. Logo:

$$P(-k \leq X \leq 0) = P(0 \leq X \leq k) = 0$$

Assim, a probabilidade desejada é:

$$P(-k \leq X \leq k) = P(-k \leq X \leq 0) + P(0 \leq X \leq k) = 0$$

Gabarito: Certo.

6. (CEBRASPE/2013 – Analista Judiciário do TRT 17ª Região) Com relação à teoria de probabilidades, julgue o próximo item.

Se $f(x)$ for uma função densidade de probabilidade definida em $[0, \infty)$ e se $g(k) = \int_k^{k+1} f(x).dx$, então $\sum_{k=0}^{\infty} g(k) = 1$

Comentários:

A probabilidade de um intervalo de uma variável contínua é dada por:

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x).dx$$

Logo, a integral $\int_k^{k+1} f(x).dx$ corresponde à probabilidade $P(k \leq X < k+1)$. Assim, o somatório $\sum_{k=0}^{\infty} g(k)$ corresponde ao somatório de probabilidades:

$$\sum_{k=0}^{\infty} g(k) = P(0 \leq X < 1) + P(1 \leq X < 2) + P(2 \leq X < 3) + \cdots$$

Sabendo que a f.d.p. está definida no intervalo $[0, \infty)$ então esse somatório corresponde à soma da probabilidade de todos os resultados possíveis da variável, que sabemos ser igual a 1:

$$\sum_{k=0}^{\infty} g(k) = P(U) = 1$$

Gabarito: Certo

7. (CEBRASPE/2020 – Analista Judiciário do TJ/PA) O tempo de duração de processos judiciais (em anos) que tramitam em certo tribunal é representado por uma variável aleatória contínua *Y* cuja função de distribuição acumulada é expressa por:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{1}{2y}\right)^2, & \text{se } y \geq 0{,}5; \\ 0, & \text{se } y < 0{,}5. \end{cases}$$

A partir dessa situação hipotética, assinale a opção correta.

a) A mediana de Y é superior a 1.

b) P(Y = 1) = 0,75

c) A moda da variável Y é igual a 1,5

d) O valor esperado de Y é igual a 1.

e) A variância de Y é inferior a 100.

Comentários:

Em relação à alternativa A, a mediana é calculada, a partir da função acumulada, como:

$$F(y_{Md}) = 0{,}5$$

Considerando o valor da função acumulada fornecida no enunciado, temos:

$$1 - \left(\frac{1}{2y_{Md}}\right)^2 = 0{,}5$$

$$\left(\frac{1}{2y_{Md}}\right)^2 = 0{,}5$$

$$\frac{1}{4y_{Md}^2} = 0{,}5$$

$$2.\,y_{Md}^2 = 1$$

$$y_{Md}^2 = 0{,}5$$

Extraindo a raiz de ambos os lados da equação, temos:

$$|y_{Md}| = \sqrt{0{,}5}$$

Como $y \geq 0{,}5$, então y só pode ser positivo. Logo:

$$y_{Md} = \sqrt{0{,}5}$$

Esse valor é menor que 1, portanto, a alternativa A está incorreta.

Em relação à alternativa B, como se trata de uma variável contínua, a probabilidade de a variável assumir exatamente determinado valor é zero, então P(Y = 1) = 0. Logo, a alternativa B está incorreta.

Em relação à alternativa C, a moda é o valor de y que maximiza a f.d.p. Vamos, então, calculá-la, pela derivada da função de distribuição acumulada fornecida pelo enunciado:

$$f(y) = \frac{d}{dy}\left[1 - \frac{1}{4}y^{-2}\right]$$

$$f(y) = 0 - \frac{1}{4} \times (-2.\,y^{-3}) = \frac{1}{2.\,y^3}$$

Por se tratar de uma divisão, quanto **maior y**, **menor** o valor de f(y). Assim, a moda é o menor valor possível para a variável: $y_{Mo} = 0{,}5$. Logo, a alternativa C está incorreta.

Em relação à alternativa D, o valor esperado é:

$$E(Y) = \int_{x_I}^{x_S} y.f(y).dy$$

Sabendo que $y \geq 0{,}5$ e $f(y) = \frac{1}{2.y^3}$, temos:

$$E(Y) = \int_{0,5}^{\infty} y.\frac{1}{2.y^3}.dy = \int_{0,5}^{\infty} \frac{1}{2.y^2}.dy = \int_{0,5}^{\infty} \frac{1}{2}.y^{-2}.dy$$

Desconsiderando os limites, o resultado da integral é:

$$\int \frac{1}{2}.y^{-2}dy = \frac{1}{2} \times \frac{y^{-1}}{-1} = -\frac{1}{2y}$$

Aplicando os limites da integral, temos[1]:

$$E(Y) = -\left(\frac{1}{2 \times \infty} - \frac{1}{2 \times 0{,}5}\right)$$

A divisão de um número finito por infinito é 0, logo:

$$E(Y) = -\left(0 - \frac{1}{2 \times 0{,}5}\right) = 1$$

Logo, a alternativa D está correta.

A variância é dada por:

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(X)]^2$$

Sendo:

$$E(Y^2) = \int_{x_I}^{x_S} y^2.f(y).dy = \int_{0,5}^{\infty} y^2.\frac{1}{2.y^3}.dy = \int_{0,5}^{\infty} \frac{1}{2} \times \frac{1}{y}.dy$$

Desconsiderando os limites, temos:

[1] Formalmente, não representamos a divisão por infinito como $\frac{1}{\infty}$. O correto seria $\lim_{y \to \infty} \frac{1}{y}$. Porém, essa expressão pode confundir alguns alunos e por isso preferimos a primeira forma para simplificar.

$$\int \frac{1}{2} \times \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \ln y$$

Em seguida, devemos aplicar os limites da integral. Porém, o logaritmo de infinito é infinito. Ou seja, $E(Y^2) = \infty$ e, consequentemente, $V(Y) = \infty$. Por isso, a alternativa E está incorreta.

Gabarito: D.

FGV

8. (FGV/2017 – IBGE) Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com variâncias iguais a 21 e 17, respectivamente. Além disso, sabe-se que a variável Z representada pela diferença entre as duas tem variância igual a 44. Com base em tais informações, é correto deduzir que:

a) as variáveis Z e X são positivamente correlacionadas;

b) o momento de segunda ordem de Y é maior do que o de Z;

c) a média de Z é menor do que ambas as médias, de X e de Y;

d) a covariância entre X e Y é positiva;

e) as variáveis X e Y são negativamente correlacionadas

Comentários:

Sendo Z = X – Y (ou Z = Y – X), a variância de Z é dada por:

Var(Z) = Var(X – Y) = Var(X) + Var(Y) – 2.Cov(X,Y)

O enunciado informa que Var(X) = 21, Var(Y) = 17 e Var(Z) = 44. Substituindo esses valores, temos:

44 = 21 + 17 – 2.Cov(X,Y)

44 – 38 = -2Cov(X,Y)

6 = -2Cov(X,Y)

Cov(X,Y) = -3

Com esse resultado, podemos concluir que as alternativas A e D estão incorretas e a alternativa E está correta.

Em relação à alternativa B, sabemos que a variância é dada por:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Logo, o segundo momento é:

$$E(X^2) = V(X) + [E(X)]^2$$

Ou seja, para calcular o segundo momento, a partir da variância, precisamos dos valores das médias, os quais não foram informados. Assim, a alternativa B está incorreta.

Em relação à alternativa C, a média de Z é dada por:

E(Z) = E(X) – E(Y)

Como não conhecemos nem E(X) nem E(Y), não temos como comparar a média de Z com as médias de X ou Y.

Gabarito: E.

9. (FGV/2018 – TJ/AL) Seja X uma variável aleatória do tipo contínua com função de densidade de probabilidade dada por:

$f_x(x) = (2 - 2x)$ *para* $0 < x < 1$ e *Zero caso contrário*

Assim sendo, sobre as estatísticas de X tem-se que:

a) E(X) = 0,75;

b) Var(X) = 4;

c) Mo(X) = 0;

d) Me(X) = 0,25;

e) Q_3 = 0,5

Comentários:

Em relação à alternativa A, a esperança é, por definição:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x).dx = \int_0^1 x.(2-2x).dx = \int_0^1 (2.x - 2x^2).dx$$

$$E(X) = x^2]_0^1 - \frac{2.x^3}{3}\Big]_0^1 = 1^2 - \frac{2.1^3}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Logo, a alternativa A está incorreta.

Em relação à alternativa B, precisamos de $E(X^2)$ para calcular a variância:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2.f(x).dx = \int_0^1 x^2.(2-2x).dx = \int_0^1 (2.x^2 - 2x^3).dx$$

$$E(X^2) = \frac{2.x^3}{3}\bigg]_0^1 - \frac{2.x^4}{4}\bigg]_0^1 = \frac{2.1^3}{3} - \frac{1^4}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$$

A variância é, então:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{3-2}{18} = \frac{1}{18}$$

Logo, a alternativa B está incorreta.

Em relação à alternativa C, a moda corresponde ao valor de X ao qual está associado o maior valor da f.d.p. Como a função assume valor no intervalo 0 < x < 1 e zero, caso contrário, então a f.d.p. para x = 0 assume o valor 0. Por isso, não é a moda da função. Logo, a alternativa C está incorreta.

Para calcular a mediana e o terceiro quartil (alternativas D e E), precisamos da função de distribuição acumulada, dada por:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x).dx = \int_0^x (2-2x).dx = 2.x - x^2$$

A mediana é o valor de x para o qual F(x) = 0,5:

$$F(x) = 2.x - x^2 = 0{,}5$$

$$-x^2 + 2.x - 0{,}5 = 0$$

Multiplicando toda a equação por -1, temos:

$$x^2 - 2.x + 0{,}5 = 0$$

Pela fórmula de bhaskara, com a = 1, b = -2 e c = 0,5, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4-2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

Esse resultado é aproximadamente $1 \pm 0{,}7$. Como 1,7 está acima do limite superior, a mediana é aproximadamente 0,3. Logo, a alternativa D está errada.

O terceiro quartil é o valor de x para o qual F(x) = 0,75:

$$F(x) = 2.x - x^2 = 0{,}75$$

$$-x^2 + 2.x - 0{,}75 = 0$$

$$x^2 - 2.x + 0{,}75 = 0$$

Pela fórmula de bhaskara, com a = 1, b = -2 e c = 0,75, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{2} = \frac{2 \pm 1}{2}$$

Ou seja, as raízes são x = 1,5 ou x = 0,5. Como x = 1,5 está acima do limite superior, então o 3º quartil é x = 0,5. Logo, a alternativa E está correta.

Gabarito: E.

10. (FGV/2017 – IBGE) Para duas variáveis aleatórias estão disponíveis as seguintes informações estatísticas:

Cov (Y, Z) = 18, E(Z) = 4, Var(Z) = 25, E(Y) = 4 e CV(Y) = 2.

Onde CV é o coeficiente de variação, além da nomenclatura usual.

Então a expressão E(Z^2) + Var(2Y - 3Z) vale:

a) 265

b) 274

c) 306

d) 373

e) 405

Comentários:

Vamos calcular E(Z^2) + Var(2Y - 3Z) por partes. O valor de E(Z^2) pode ser calculado a partir da variância:

$$Var(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2$$

$$E(Z^2) = Var(Z) + [E(Z)]^2$$

O enunciado informou que Var(Z) = 25 e E(Z) = 4, logo:

$$E(Z^2) = 25 + [4]^2 = 25 + 16 = 41$$

A variância da diferença entre duas variáveis é dada por:

Var(2Y – 3Z) = Var(2Y) + Var(3Z) – 2.Cov(2Y,3Z)

Pelas propriedades da variância, temos:

Var(2Y) = 4.Var(Y)

Var(3Z) = 9.Var(Z)

Pelas propriedades da covariância, temos:

Cov(2Y,3Z) = 2x3xCov(Y,Z)

Substituindo esses resultados na expressão anterior, temos:

Var(2Y – 3Z) = 4.Var(Y) + 9.Var(Z) – 12.Cov(Y,Z)

O enunciado informa que Cov(Y,Z) = 18 e Var(Z) = 25. O valor de Var(Y) pode ser obtido a partir do coeficiente de variação e da esperança de Y, fornecidos pelo enunciado:

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sqrt{Var(Y)}}{E(Y)} = \frac{\sqrt{Var(Y)}}{4} = 2$$

$$\sqrt{Var(Y)} = 2 \times 4 = 8$$

Var(Y) = 64

Logo:

Var(2Y – 3Z) = 4x64 + 9x25 – 12x18 = 256 + 225 – 216 = 265

A expressão solicitada no enunciado é, portanto:

$E(Z^2)$ + Var(2Y - 3Z) = 41 + 265 = 306

Gabarito: C

11. (FGV/2015 – TJ-BA) Seja X uma variável aleatória contínua com uma distribuição triangular, com função densidade de probabilidade não nula no intervalo [0,2], dada por f(x) = 1/2.(2-x) , sendo nula caso contrário. Então é possível afirmar que:

a) P(X > 1) = P(X ≤ 1) = 0,5

b) $F_X(x) = 1 – x^2/4$, é a função distribuição acumulada de X;

c) $F_X(1,5) = 15/16$

d) E(X) = ¾, é a esperança matemática de X;

e) Me(X) > 1, onde Me(X) representa a mediana de X

Comentários:

O enunciado informa que a f.d.p. da variável é $f(x) = \frac{1}{2}.(2 - x)$, para o intervalo $0 \leq x \leq 2$. Em relação à alternativa A, a probabilidade P(X ≤ 1) pode ser calculada como:

$$P(X \leq 1) = \int_0^1 \frac{1}{2}.(2 - x).dx$$

A integral, sem os limites, é:

$$\int \frac{1}{2}.(2 - x).dx = \int \left(1 - \frac{1}{2}x\right)dx = \int 1.dx - \int \frac{1}{2}x.dx = x - \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2} = x - \frac{x^2}{4}$$

Aplicando os limites, temos:

$$P(X \leq 1) = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}x\right).dx = (1 - 0) - \left(\frac{1^2}{4} - \frac{0^2}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Logo, P(X > 1) é a probabilidade complementar:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Logo, a alternativa A está errada. Em relação à alternativa B, a função distribuição acumulada é dada por (calculamos a integral na alternativa anterior):

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \frac{1}{2}.(2 - x).dx = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{2}x\right).dx = x - \frac{x^2}{4}$$

Logo, a alternativa B está errada. Em relação à alternativa C, o valor de F(1,5) pode ser calculado aplicando-se x = 1,5 na função calculada na alternativa anterior:

$$F(1{,}5) = 1{,}5 - \frac{1{,}5^2}{4} = \frac{3}{2} - \frac{2{,}25}{4} = \frac{24-9}{16} = \frac{15}{16}$$

Logo, a alternativa C está correta. Em relação à alternativa D, a esperança matemática é dada por:

$$E(X) = \int_0^2 x.\frac{1}{2}.(2-x).dx = \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right).dx$$

A integral, sem os limites, é:

$$\int \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \int x.dx - \int \frac{1}{2}x^2.dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$$

Aplicando os limites, temos:

$$E(X) = \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right).dx = \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} - \left(\frac{2^3}{6} - \frac{0^3}{6}\right) = 2 - \frac{8}{6} = \frac{6-4}{3} = \frac{2}{3}$$

Logo, a alternativa D está incorreta. Em relação à alternativa E, a mediana é o valor de x para o qual a f.d.a. é F(x) = 0,5. Vamos calcular o valor de F(1) para avaliar se a mediana é superior a 1, como afirma a alternativa, ou não. Para isso, aplicamos x = 1 na f.d.a. calculada na alternativa B:

$$F(1) = 1 - \frac{1^2}{4} = 0{,}75$$

Isso significa que a mediana é inferior a 1 e, por isso, a alternativa E está errada.

Gabarito: C

12. (FGV/2016 – IBGE) Seja X uma variável aleatória mista com função densidade de probabilidade dada por:

$f_X(x) = \frac{1}{x^2}$ $para\ 1 < x \leq 4, P(X = 1) = 0,25,$ sendo igual a zero caso contrário. Então os valores de $P(X \leq 2)$ e $E(X^2)$, esperança matemática de X ao quadrado, são respectivamente iguais a:

a) 0,25 e 2,50;

b) 0,50 e 2,50;

c) 0,50 e 3,25;

d) 0,75 e 2,50;

e) 0,75 e 3,25.

Comentários:

Trata-se de uma variável mista, com natureza discreta para X = 1 e contínua para o intervalo (1,4].

Assim, a probabilidade $P(X \leq 2)$ pode ser calculada como:

$$P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(1 < X \leq 2) = 0{,}25 + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$$

A integral, sem os limites, é:

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2}. dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$$

Aplicando os limites, temos:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Logo:

$$P(X \leq 2) = 0{,}25 + 0{,}5 = 0{,}75$$

Analogamente, o segundo momento, $E(X^2)$, pode ser calculado como:

$$E(X^2) = 1^2 \times P(X = 1) + \int_1^4 x^2 \times \frac{1}{x^2}. dx = 0{,}25 + \int_1^4 1 . dx$$

Considerando que a integral é $\int 1. dx = x$, aplicando os limites, temos:

$$\int_1^4 1. dx = (4) - (1) = 3$$

Logo:

$$E(X^2) = 0{,}25 + 3 = 3{,}25$$

Gabarito: E

FCC

13. (FCC/2015 – DPE-SP) Usuários de certo medicamento para o tratamento de câncer interpõem aos órgãos públicos responsáveis, através da Defensoria Pública de sua região, ações para o recebimento do medicamento. Suponha que o tempo, em meses, entre a interposição da ação e o recebimento do medicamento pelos usuários, seja uma variável aleatória com a seguinte função de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} K.x, & 0 < x \leq 2 \\ 2K, & 2 < x \leq 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

Nessas condições, o tempo médio, em dias, para o recebimento do medicamento pelos usuários pertence ao intervalo

a) [68,70)

b) [65,68)

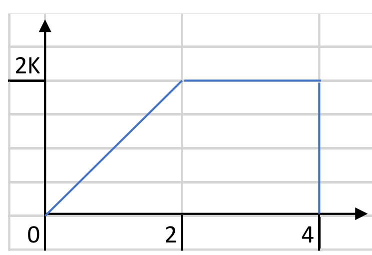
c) [74,76)

d) [71,73)

e) [73,75)

Comentários:

Para calcularmos o tempo médio (esperança da variável) precisamos do valor de K. Para isso, devemos considerar o axioma de que a probabilidade associada a todo o Espaço Amostral é igual a 1 (100%). Para isso, vamos considerar o gráfico da função:



Embora não conheçamos o valor de K, sabemos que no intervalo (0,2] temos uma reta que varia em função de x, da forma Kx, e que no intervalo (2,4] temos uma reta paralela ao eixo x, da forma 2K. Logo, a probabilidade associada a todo o Espaço Amostral pode ser calculada pela área do trapézio:

$$A_{Trap} = \frac{(B + b) \times h}{2} = 1$$

$$A_{Trap} = \frac{(4 + 2) \times 2K}{2} = 6 \times K = 1$$

$$K = \frac{1}{6}$$

Conhecendo a função densidade de probabilidade, podemos calcular a esperança, atentando-se para o fato de que a função não é a mesma em todo o intervalo:

$$E(X) = \int_{x_I}^{x_S} x.f(x).dx$$

$$E(X) = \int_0^2 x.\frac{1}{6}.x.dx + \int_2^4 x.2.\frac{1}{6}.dx = \int_0^2 \frac{1}{6}.x^2.dx + \int_2^4 \frac{1}{3}x.dx$$

$$E(X) = \left[\frac{1}{6}.\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}.\frac{x^2}{2}\right]_2^4 = \frac{1}{18}[2^3 - 0^3] + \frac{1}{6}[4^2 - 2^2]$$

$$E(X) = \frac{8}{18} + \frac{16-4}{6} = \frac{4}{9} + 2 = \frac{22}{9}$$

Esse é o tempo médio em meses, pois a função de probabilidade fornecida está em meses, conforme informado no enunciado. Mas, a questão pediu o tempo médio em dias. Logo, devemos multiplicar esse resultado por 30:

$$\frac{22}{9} \times 30 = \frac{220}{3} \cong 73{,}3$$

Logo, o tempo médio em dias pertence ao intervalo [73, 75)

Gabarito: E

14. (FCC/2015 – TRE-RR) A função de distribuição acumulada da variável aleatória X é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \leq 0 \\ 4.x^2, & se\ 0 < x \leq 0{,}5 \\ 1, & se\ x > 0{,}5 \end{cases}$$

Nessas condições, a variância de X é igual a:

a) 1/36

b) 1/18

c) 1/72

d) 1/9

e) 2/9

Comentários:

A variância de X pode ser calculada como:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Para isso, precisamos da função densidade de probabilidade, que corresponde à derivada da função de distribuição acumulada:

$$f(x) = \frac{d[F(x)]}{dx} = \frac{d[4x^2]}{dx} = 2 \times 4x^1 = 8.x$$

Válida no intervalo $0 < x \leq 0{,}5$.

A esperança é dada por:

$$E(X) = \int_{x_I}^{x_S} x.f(x).dx$$

$$E(X) = \int_0^{0,5} x.8x.dx = \int_0^{0,5} 8x^2.dx = \left[8.\frac{x^3}{3}\right]_0^{0,5} = \frac{8}{3}[0{,}5^3 - 0^3]$$

$$E(X) = \frac{8}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{8}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{3}$$

Logo:

$$[E(X)]^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

E o segundo momento é dado por:

$$E(X^2) = \int_{x_I}^{x_S} x^2.f(x).dx$$

$$E(X^2) = \int_0^{0,5} x^2.8x.dx = \int_0^{0,5} 8x^3.dx = \left[8.\frac{x^4}{4}\right]_0^{0,5} = 2.[0{,}5^4 - 0^4]$$

$$E(X^2) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

E a variância é:

$$V(X) = \frac{1}{8} - \frac{1}{9} = \frac{9-8}{72} = \frac{1}{72}$$

Gabarito: C

15. (FCC/2018 – TRT-2ª Região) A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua X é dada por

$$\boldsymbol{f_X(x) = \begin{cases} 0,2(x-0,5), & para\ 2 \leq x \leq K \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}}$$

Sendo K > 2, então a variância de X é igual a

a) 103/225

b) 4/9

c) 71/225

d) 199/225

e) 9/15

Comentários:

A variância de X pode ser calculada como:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Para isso, precisamos do intervalo em que a função densidade é válida. Para isso, devemos considerar o axioma de que a probabilidade associada a todo o Espaço Amostral é igual a 1 (100%). Sabendo que o limite inferior da variável é $x_I = 2$, temos[2]:

$$P(U) = \int_{x_I}^{x_S} f(x).dx = 1$$

$$P(U) = \int_{2}^{x_S} 0{,}2.(x-0{,}5).dx = \int_{2}^{x_S} (0{,}2.x - 0{,}1).dx = \left[0{,}2.\frac{x^2}{2} - 0{,}1.x\right]_2^{x_S} = 1$$

[2] Alternativamente, por se tratar de uma reta, poderíamos encontrar o valor do limite superior graficamente, como fizemos em questões anteriores.

$$P(U) = 0{,}1.[x_S^2 - 2^2] - 0{,}1.[x_S - 2] = 0{,}1.x_S^2 - 0{,}4 - 0{,}1.x_S + 0{,}2 = 1$$

$$0{,}1.x_S^2 - 0{,}1.x_S - 1{,}2 = 0$$

$$x_S^2 - x_S - 12 = 0$$

Podemos aplicar a fórmula de Bhaskara para encontrar as raízes, ou perceber que os números cuja soma é -1 e o produto é -12 são -4 e 3:

$$x_S^2 - x_S - 12 = (x_S - 4).(x_S + 3)$$

Logo, as raízes são:

$$x_1 = 4, \qquad x_2 = -3$$

Sabendo que o valor de K é maior que 2, então K = 4. A esperança é dada por:

$$E(X) = \int_{x_I}^{x_S} x.f(x).dx$$

$$E(X) = \int_2^4 x.(0{,}2.x - 0{,}1).dx = \int_2^4 (0{,}2.x^2 - 0{,}1.x).dx = \left[0{,}2.\frac{x^3}{3} - 0{,}1.\frac{x^2}{2}\right]_2^4$$

$$E(X) = \frac{1}{15}[4^3 - 2^3] - \frac{1}{20}[4^2 - 2^2] = \frac{1}{15}[64 - 8] - \frac{1}{20}[16 - 4] = \frac{56}{15} - \frac{12}{20} = \frac{56}{15} - \frac{3}{5} = \frac{56 - 9}{15} = \frac{47}{15}$$

E o quadrado é:

$$[E(X)]^2 = \left(\frac{47}{15}\right)^2 = \frac{2209}{225}$$

E o segundo momento é dado por:

$$E(X^2) = \int_{x_I}^{x_S} x^2.f(x).dx$$

$$E(X^2) = \int_2^4 x^2.(0{,}2.x - 0{,}1).dx = \int_2^4 (0{,}2x^3 - 0{,}1x^2).dx = \left[0{,}2.\frac{x^4}{4} - 0{,}1.\frac{x^3}{3}\right]_2^4$$

$$E(X^2) = \frac{1}{20}[4^4 - 2^4] - \frac{1}{30}[4^3 - 2^3] = \frac{1}{20}[256 - 16] - \frac{1}{30}[64 - 8] = \frac{240}{20} - \frac{56}{30} = 12 - \frac{28}{15}$$

$$E(X^2) = \frac{180 - 28}{15} = \frac{152}{15}$$

Logo, a variância é:

$$V(X) = \frac{152}{15} - \frac{2209}{225} = \frac{2280 - 2209}{225} = \frac{71}{225}$$

Gabarito: C

16. (FCC/2012 – TRE-SP) A função densidade de probabilidade da variável aleatória X é dada por:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{Bmatrix} k.x^3, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & caso\ contrário \end{Bmatrix}}$$

A probabilidade condicional dada por: P(1 ≤ X ≤ 1,5 | X ≤ 1,5) é igual a

a) 2/9

b) 5/9

c) 15/49

d) 43/81

e) 65/81

Comentários:

Para calcularmos a probabilidade desejada, primeiro precisamos do valor de k. Para isso, devemos considerar o axioma de que a probabilidade associada a todo o Espaço Amostral é igual a 1 (100%).

Sabendo que X só assume valor no intervalo $0 \le x \le 2$, temos:

$$P(U) = \int_{x_I}^{x_S} f(x).dx = 1$$

$$P(U) = \int_0^2 k.x^3.dx = k.\left[\frac{x^{3+1}}{3+1}\right]_0^2 = k.\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = k\left[\frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right] = k.\frac{16}{4} = 4.k$$

$$P(U) = 4.k = 1$$

$$k = \frac{1}{4}$$

Portanto, agora conhecemos a f.d.p. Após calcular a integral, podemos obter a f.d.a.:

$$F(x) = \int_{x_I}^{x} f(x).\,dx$$

$$F(x) = \int_{0}^{x} \frac{1}{4}.x^3.\,dx = \frac{1}{4}.\left[\frac{x^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right] = \frac{x^4}{16}$$

A probabilidade condicional que a questão pede é definida como:

$$P(1 \leq X \leq 1{,}5 | X \leq 1{,}5) = \frac{P(1 \leq X \leq 1{,}5 \cap X \leq 1{,}5)}{P(X \leq 1{,}5)}$$

Observe que a interseção entre $1 \leq X \leq 1{,}5$ e $X \leq 1{,}5$, indicada no numerador, corresponde justamente a $1 \leq X \leq 1{,}5$, ou seja:

$$P(1 \leq X \leq 1{,}5 | X \leq 1{,}5) = \frac{P(1 \leq X \leq 1{,}5)}{P(X \leq 1{,}5)}$$

A probabilidade do denominador corresponde à f.d.a. no ponto x = 1,5 = 3/2:

$$P(X \leq 1{,}5) = P\left(X \leq {}^{3}\!/_{2}\right) = F\left({}^{3}\!/_{2}\right) = \frac{\left({}^{3}\!/_{2}\right)^4}{16} = \frac{3^4}{2^4} \times \frac{1}{16} = \frac{81}{256}$$

E a probabilidade do numerador corresponde à diferença entre a f.d.a. no ponto x = 1,5 (que já calculamos) e a f.d.a. no ponto x = 1:

$$P(1 \leq X \leq 1{,}5) = F(1{,}5) - F(1) = \frac{81}{256} - \frac{(1)^4}{16} = \frac{81}{256} - \frac{16}{256} = \frac{65}{256}$$

Agora, podemos calcular a probabilidade condicional desejada:

$$P(1 \leq X \leq 1{,}5 | X \leq 1{,}5) = \frac{\frac{65}{256}}{\frac{81}{256}} = \frac{65}{81}$$

Gabarito: E

CESGRANRIO

17. (CESGRANRIO/2011 – Petrobrás) A função densidade de uma variável aleatória é dada por f(x) = x/4, para 1 ≤ x ≤ 3, com f(x) = 0 para os demais valores de x. A probabilidade de que X assuma um valor menor que 2 é

a) 1/4

b) 1/3

c) 5/16

d) 3/8

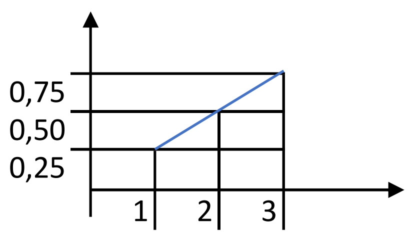
e) 1/2

Comentários:

Sendo a função f(x) = x/4, 1 ≤ x ≤ 3, temos:

- para x = 1, temos f(1) = 1/4 = 0,25;
- para x = 2, temos f(2) = 2/4 = 0,5; e
- para x = 3, temos f(3) = 3/4 = 0,55.

Logo, podemos representar a função pelo gráfico a seguir:

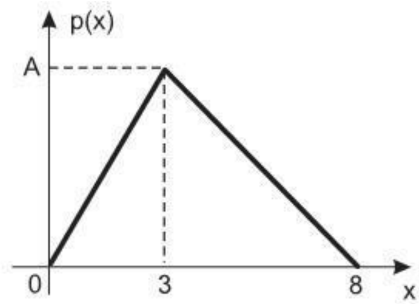


Podemos observar que a probabilidade P(X < 2) corresponde à área do trapézio abaixo da função (reta azul), entre os pontos x = 1 e x = 2:

$$P(X < 2) = \acute{A}rea\ do\ trap\acute{e}zio = \frac{(B + b) \times h}{2} = \frac{(0{,}5 + 0{,}25) \times 1}{2} = \frac{0{,}75}{2} = \frac{3}{8}$$

Gabarito: D

18. (CESGRANRIO/2011 – Transpetro)



O gráfico da figura acima mostra a função densidade de probabilidade de um experimento com uma variável aleatória X. O valor de A é

a) 0,10

b) 0,15

c) 0,20

d) 0,25

e) 0,30

Comentários:

O enunciado pede o valor de A. Para obtê-lo, devemos considerar que a probabilidade associada a todo o Espaço Amostral é P(U) = 1. Ou seja, a área sob a função deve ser igual a:

$$P(U) = \acute{A}rea\ do\ tri\hat{a}ngulo = \frac{b \times h}{2} = \frac{8 \times A}{2} = 1$$

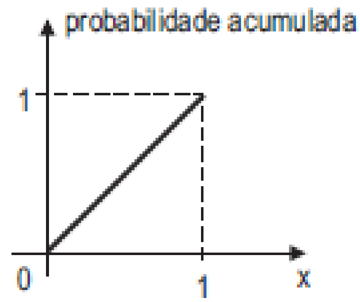
$$8 \times A = 2$$

$$A = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

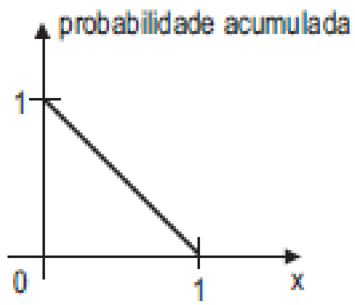
Gabarito: D

19. (CESGRANRIO/2014 – FINEP) As Figuras abaixo mostram os gráficos de diversas funções que deveriam representar a distribuição acumulada de probabilidade de uma variável aleatória contínua X. Essa variável X assume valores no intervalo fechado [0, 1], segundo uma distribuição uniforme.

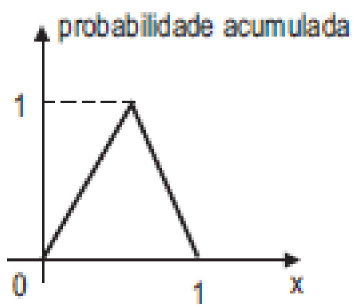
Constata-se que o gráfico correspondente à distribuição acumulada de X é o da Figura



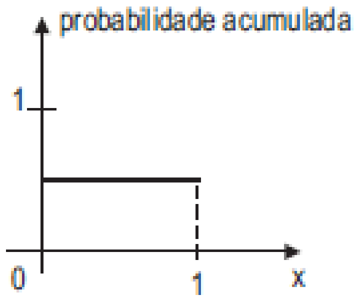
a)



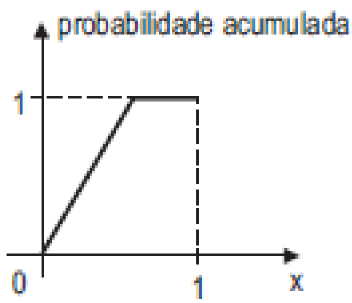
b)



c)



d)



e)

Comentários:

A função de distribuição acumulada é uma função não decrescente que assume valores entre 0 e 1. Para uma distribuição uniforme no intervalo [0, 1], a função acumulada cresce constantemente nesse intervalo, como indicado na letra A.

Gabarito: A

QUESTÕES COMENTADAS – MULTIBANCAS

Teoremas de Desigualdade

1. (FCC/2014 – Analista Judiciário do TRT 13ª Região) A média de uma variável aleatória contínua X, em que se desconhece sua distribuição, é igual a 10,4. Pelo teorema de Tchebichev obteve-se um intervalo igual a (7,4 ; 13,4) em que a probabilidade mínima de X pertencer a este intervalo é igual a 84%. O valor da variância (σ^2) da variável X é tal que

a) $\sigma^2 < 1{,}25$.

b) $1{,}25 \leq \sigma^2 < 1{,}50$.

c) $1{,}50 \leq \sigma^2 < 1{,}75$.

d) $1{,}75 \leq \sigma^2 < 2{,}00$.

e) $\sigma^2 \geq 2{,}00$.

Comentários:

Sabendo que a média de X é $\mu = 10{,}4$, então o intervalo 7,4 < X < 13,4, cuja probabilidade mínima foi fornecida no enunciado, corresponde a um distanciamento de até 3 em relação à média, ou seja:

$$P(7{,}4 < X < 13{,}4) = P(|X - 10{,}4| < 3)$$

O complementar dessa probabilidade está associado a um distanciamento **maior** que 3:

$$P(|X - 10{,}4| \geq 3) = 1 - P(|X - 10{,}4| < 3)$$

Como $P(|X - 10{,}4| < 3) \geq 84\% = 0{,}84$, conforme consta no enunciado, então:

$$P(|X - 10{,}4| \geq 3) \leq 1 - 0{,}84$$

$$P(|X - 10{,}4| \geq 3) \leq 0{,}16$$

Pelo teorema de Chebyshev, temos:

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{\delta^2}$$

Portanto, para essa questão, temos $\mu = 10{,}4$ e $\delta = 3$:

$$P(|X - 10{,}4| \geq 3) \leq \frac{\sigma^2}{9}$$

Sabendo que $P(|X - 10{,}4| \geq 3) \leq 0{,}16$, temos:

$$\frac{\sigma^2}{9} = 0{,}16$$

$$\sigma^2 = 9 \times 0{,}16 = 1{,}44$$

Gabarito: B

2. (FCC/2014 – TRE-RR) Conclui-se que, com a utilização do Teorema de Tchebichev, uma variável aleatória X com média igual a 50 apresenta uma probabilidade mínima de 75% de X pertencer ao intervalo (45, 55). A variância de X é

a) 4,00.

b) 1,00.

c) 1,44

d) 2,25.

e) 6,25.

Comentários:

Sabendo que a média de X é $\mu = 50$, então o intervalo 45 < X < 55, cuja probabilidade mínima foi fornecida no enunciado, corresponde a um distanciamento de até 5 em relação à média, ou seja:

$$P(45 < X < 55) = P(|X - 50| < 5)$$

O complementar dessa probabilidade está associado a um distanciamento **maior** que 5:

$$P(|X - 50| \geq 5) = 1 - P(|X - 50| < 5)$$

Como $P(|X - 50| < 5) \geq 75\% = 0{,}75$, conforme consta no enunciado, então:

$$P(|X - 50| \geq 5) \leq 1 - 0{,}75$$

$$P(|X - 50| \geq 5) \leq 0{,}25$$

Pelo teorema de Chebyshev, temos:

$$P(|X-\mu| \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{\delta^2}$$

Portanto, para essa questão, temos $\mu = 50$ e $\delta = 5$:

$$P(|X-50| \geq 5) \leq \frac{\sigma^2}{25}$$

Sabendo que $P(|X-50| \geq 5) \leq 0{,}25$, temos:

$$\frac{\sigma^2}{25} = 0{,}25$$

$$\sigma^2 = 25 \times 0{,}25 = 6{,}25$$

Gabarito: E

3. (FCC/2016 – TRT-20ª Região) Sabe-se, pelo Teorema de Tchebichev, que a probabilidade mínima de que uma variável aleatória X pertença ao intervalo (m − 1, m + 1) é igual a 75%. Se a média de X é m, então a variância de X é igual a

a) 1/4

b) 1/16

c) 1/64

d) 1

e) 9/16

Comentários:

Sabendo que a média de X é m, então o intervalo m – 1 < X < m + 1, cuja probabilidade mínima foi fornecida no enunciado, corresponde a um distanciamento de até 1 em relação à média, ou seja:

$$P(m-1 < X < m+1) = P(|X-m| < 1)$$

O complementar dessa probabilidade está associado a um distanciamento **maior** que 1:

$$P(|X-m| \geq 1) = 1 - P(|X-m| < 1)$$

Como $P(|X-m|<1) \geq 75\% = 0{,}75$, conforme consta no enunciado, então:

$$P(|X-m| \geq 1) \leq 1 - 0{,}75$$

$$P(|X-m| \geq 1) \leq 0{,}25$$

Pelo teorema de Chebyshev, temos:

$$P(|X-\mu| \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{\delta^2}$$

Portanto, para essa questão, temos $\mu = m\ \delta = 1$:

$$P(|X-m| \geq 1) \leq \frac{\sigma^2}{1}$$

Sabendo que $P(|X-m| \geq 1) \leq 0{,}25$, temos:

$$\frac{\sigma^2}{1} = 0{,}25$$

$$\sigma^2 = 0{,}25 = \frac{1}{4}$$

Gabarito: A

4. (FCC/2018 – TRT-2ª Região) Em virtude de não se conhecer a função de densidade de uma variável aleatória X, com média 22, obteve-se um intervalo de confiança (20, 24), sabendo-se que existe a probabilidade mínima de 84% de X pertencer a este intervalo conforme o Teorema de Tchebichev. Considerando este mesmo teorema, obtém-se que a probabilidade de X não pertencer ao intervalo (22 − K, 22 + K) é no máximo 6,25%. A amplitude deste último intervalo é de

a) 8,0

b) 3,2

c) 6,4

d) 4,0

e) 5,6

Comentários:

A questão trabalha com o teorema de Chebyshev, dado por:

$$P(|X-\mu| \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{\delta^2}$$

O enunciado informa que a média é $\mu = 22$ e que a probabilidade associada ao intervalo (20, 24) é de no mínimo 84%. Logo, a probabilidade de a variável afastar de sua média em mais que $\delta = 2$ é complementar

$$P(|X-22| \geq 2) \leq 1 - 0{,}84 = 0{,}16$$

Com essas informações, podemos calcular a variância:

$$P(|X-22| \geq 2) \leq \frac{\sigma^2}{2^2} \leq 0{,}16$$

$$\sigma^2 = 0{,}16 \times 4 = 0{,}64$$

Em seguida o enunciado informa que a probabilidade de a variável não pertencer ao intervalo da forma (22 − K, 22 + K) é no máxima de 6,25%:

$$P(|X-22| \geq K) \leq 0{,}0625$$

O valor de K pode ser calculado pelo teorema de Chebyshev:

$$\frac{\sigma^2}{\delta^2} = \frac{0{,}64}{K^2} = 0{,}0625$$

$$K^2 = 10{,}24$$

$$K = \sqrt{10{,}24} = 3{,}2$$

Logo, a amplitude do intervalo é:

$$2.K = 2 \times 3{,}2 = 6{,}4$$

Gabarito: C

5. (FCC/2014 – Analista Judiciário do TRT 19ª Região) Uma variável contínua X apresenta uma média igual a 50. Pelo Teorema de Tchebyshev, a probabilidade de X não pertencer ao intervalo (10, 90) é no máximo 25%. O resultado da divisão da variância de X pelo quadrado da média de X é

a) 0,64.

b) 0,25.

c) 0,16.

d) 0,32.

e) 0,04.

Comentários:

Sabendo que $\mu = 50$, então:

$$P(X < 10 \; ou \; X > 90) = P(|X - 50| \geq 40)$$

O enunciado informa que $P(|X - 50| \geq 40) \leq 25\%$. Pelo teorema de Chebyshev, temos:

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{\delta^2}$$

$$P(|X - 50| \geq 40) \leq \frac{\sigma^2}{1600}$$

$$\sigma^2 = 1600 \times 0{,}25 = 400$$

Assim, a variância relativa é:

$$V(X)_{Rel} = \frac{\sigma^2}{\mu^2} = \frac{400}{2500} = 0{,}16$$

Gabarito: C

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Noções de variáveis contínuas

1. (CESGRANRIO/2011 – Petrobrás) A função densidade de uma variável aleatória é dada por f(x) = x/4, para $1 \leq x \leq 3$, com f(x) = 0 para os demais valores de x. A probabilidade de que X assuma um valor menor que 2 é

a) 1/4

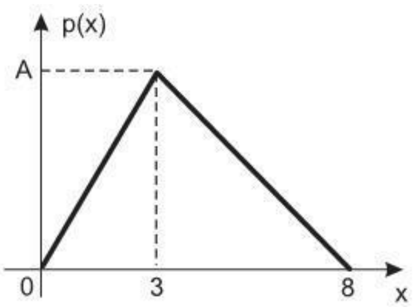
b) 1/3

c) 5/16

d) 3/8

e) 1/2

2. (CESGRANRIO/2011 – Transpetro)



O gráfico da figura acima mostra a função densidade de probabilidade de um experimento com uma variável aleatória X. O valor de A é

a) 0,10

b) 0,15

c) 0,20

d) 0,25

e) 0,30

3. (CESGRANRIO/2010 – EPE) O teor de etanol presente na gasolina determina o preço de venda. Seja X a variável aleatória que representa o teor de etanol. Se X está entre 0,20 e 0,25, a gasolina é vendida a R$ 2,00 por litro; caso contrário, a gasolina é vendida a R$ 1,80 por litro. A função de densidade de probabilidade de X é:

$$f_X(x) = \begin{Bmatrix} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & caso\ contrário \end{Bmatrix}$$

O valor esperado do preço de venda, por litro, em reais, é

a) 1,95

b) 1,93

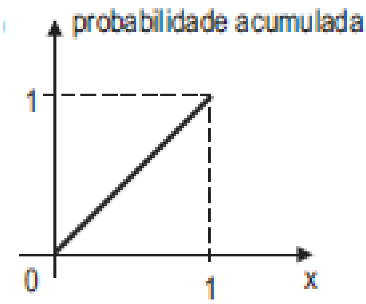
c) 1,88

d) 1,84

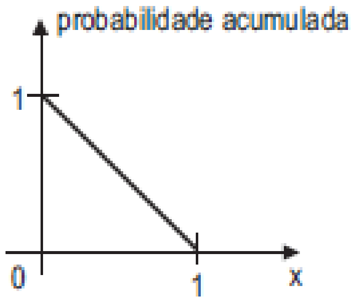
e) 1,81

4. (CESGRANRIO/2014 – FINEP) As Figuras abaixo mostram os gráficos de diversas funções que deveriam representar a distribuição acumulada de probabilidade de uma variável aleatória contínua X. Essa variável X assume valores no intervalo fechado [0, 1], segundo uma distribuição uniforme.

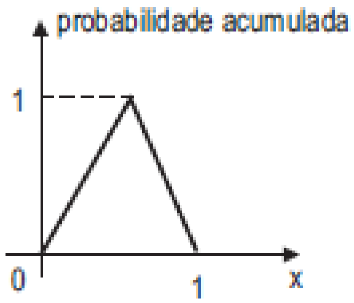
Constata-se que o gráfico correspondente à distribuição acumulada de X é o da Figura



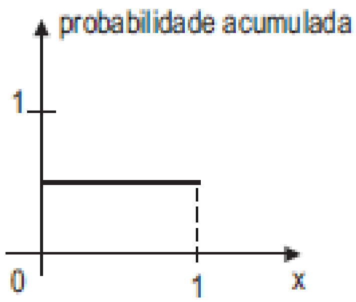
a)


probabilidade acumulada
1
0
1
x

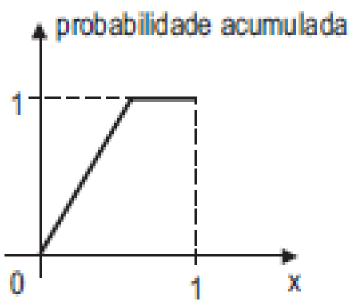
b)


probabilidade acumulada
1
0
1
x

c)


probabilidade acumulada
1
0
1
x

d)


probabilidade acumulada
1
0
1
x

e)

5. (CESGRANRIO/2010 – Petrobras) Um serviço de atendimento, que se inicia às 9 h, tem uma única fila para atendimento por um único servidor. O intervalo (em minutos) entre a chegada de dois clientes e o tempo (em minutos) de atendimento pelo servidor são variáveis aleatórias distribuídas uniformemente entre 0 e 10. No quadro a seguir, é apresentado o resultado de uma simulação com essas variáveis.

Cliente	Intervalo	Atendimento
1	1	2
2	5	8
3	7	3
4	1	7
(...)	(...)	(...)

Por exemplo, o primeiro cliente chega às 9 h 1 min, é atendido durante 2 min e, portanto, sai do sistema às 9h3min. O segundo cliente chega 5 min após a chegada do primeiro cliente e o servidor irá consumir 8 min em seu atendimento. Nesse processo de simulação, o quarto cliente sairá do sistema às

a) 9h22min

b) 9h23min

c) 9h24min

d) 9h25min

e) 9h26min

6. (CESGRANRIO/2010 – Petrobras) Um serviço de atendimento, que se inicia às 9 h, tem uma única fila para atendimento por um único servidor. O intervalo (em minutos) entre a chegada de dois clientes é uma variável aleatória uniformemente distribuída entre 0 e 4, e o tempo (em minutos) de atendimento pelo servidor é uma variável aleatória distribuída uniformemente entre 5 e 10. No quadro a seguir, é apresentado o resultado de uma simulação com essas variáveis.

Cliente	Intervalo	Atendimento
1	2	5
2	1	10
3	1	6
4	2	8
(...)	(...)	(...)

Por exemplo, o primeiro cliente chega às 9 h 2 min, é atendido durante 5 min e, portanto, sai do sistema às 9 h 7 min. O segundo cliente chega 1 min após a chegada do primeiro cliente, e o servidor irá consumir 10 min em seu atendimento. O cliente que aguardará na fila mais tempo para ser atendido irá esperar

a) 13 min

b) 14 min

c) 15 min

d) 16 min

e) 17 min

Gabarito

1. LETRA D
2. LETRA D
3. LETRA E
4. LETRA A
5. LETRA E
6. LETRA E

LISTA DE QUESTÕES – MULTIBANCAS

Noções de variáveis contínuas

CEBRASPE

1. (CEBRASPE/2013 – CNJ)

$$f(t)=\begin{cases}\frac{2}{3}t & \text{, se } 0\le t<1\\ -\frac{t}{4}+\frac{5}{6} & \text{, se } 1\le t\le 3\\ 0 & \text{, caso contrário}\end{cases}$$

A função f(t) mostrada acima corresponde à função densidade de probabilidade do tempo gasto (t, em meses) para se analisar um processo em determinada vara civil. Com relação essa função, julgue o item seguinte.

A probabilidade de um processo, escolhido ao acaso, demorar menos de três meses para ser analisado é superior a 0,99.

2. (CEBRASPE/2013 – CNJ)

$$f(t)=\begin{cases}\frac{2}{3}t & \text{, se } 0\le t<1\\ -\frac{t}{4}+\frac{5}{6} & \text{, se } 1\le t\le 3\\ 0 & \text{, caso contrário}\end{cases}$$

A função f(t) mostrada acima corresponde à função densidade de probabilidade do tempo gasto (t, em meses) para se analisar um processo em determinada vara civil. Com relação essa função, julgue o item seguinte.

A probabilidade de um processo, escolhido ao acaso, demorar mais de dois meses para ser analisado é superior a 0,4.

3. (CEBRASPE/2014 – Analista Judiciário do TJ/SE) Considerando que X seja uma variável aleatória contínua, tal que E(X) = 1 e E(X^2) = 4, julgue o item seguinte.

O coeficiente de variação é igual ou superior a 2.

4. (CEBRASPE/2020 – Analista Judiciário do TJ/PA) Se *Y* for uma variável aleatória contínua e simétrica em torno de zero, tal que P(Y^2 < 4) = 0,4, então P(*Y* > 2) será igual a

a) 0,2

b) 0,3

c) 0,4

d) 0,5

e) 0,6

5. (CEBRASPE/2013 – Analista Judiciário do TRT 17ª Região) Com base em distribuições contínuas, julgue o item subsequente.

Considere que uma variável aleatória contínua e simétrica em zero tenha função densidade de probabilidade f(x) tal que

$$\int_{-k}^{0} f(x)\,dx \leq 0 \leq \int_{0}^{k} f(x)\,dx$$

Nesse caso, P(X ∈ [-k;k]) = 0.

6. (CEBRASPE/2013 – Analista Judiciário do TRT 17ª Região) Com relação à teoria de probabilidades, julgue o próximo item.

Se $f(x)$ for uma função densidade de probabilidade definida em $[0,\infty)$ e se $g(k) = \int_{k}^{k+1} f(x).dx$, então $\sum_{k=0}^{\infty} g(k) = 1$

7. (CEBRASPE/2020 – Analista Judiciário do TJ/PA) O tempo de duração de processos judiciais (em anos) que tramitam em certo tribunal é representado por uma variável aleatória contínua *Y* cuja função de distribuição acumulada é expressa por:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{1}{2y}\right)^2, & \text{se } y \geq 0{,}5; \\ 0, & \text{se } y < 0{,}5. \end{cases}$$

A partir dessa situação hipotética, assinale a opção correta.

a) A mediana de Y é superior a 1.

b) P(Y = 1) = 0,75

c) A moda da variável Y é igual a 1,5

d) O valor esperado de Y é igual a 1.

e) A variância de Y é inferior a 100.

FGV

8. (FGV/2017 – IBGE) Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com variâncias iguais a 21 e 17, respectivamente. Além disso, sabe-se que a variável Z representada pela diferença entre as duas tem variância igual a 44. Com base em tais informações, é correto deduzir que:

a) as variáveis Z e X são positivamente correlacionadas;

b) o momento de segunda ordem de Y é maior do que o de Z;

c) a média de Z é menor do que ambas as médias, de X e de Y;

d) a covariância entre X e Y é positiva;

e) as variáveis X e Y são negativamente correlacionadas

9. (FGV/2018 – TJ/AL) Seja X uma variável aleatória do tipo contínua com função de densidade de probabilidade dada por:

$f_X(x) = (2 - 2x)$ *para* $0 < x < 1$ e *Zero caso contrário*

Assim sendo, sobre as estatísticas de X tem-se que:

a) E(X) = 0,75;

b) Var(X) = 4;

c) Mo(X) = 0;

d) Me(X) = 0,25;

e) $Q_3 = 0,5$

10. (FGV/2017 – IBGE) Para duas variáveis aleatórias estão disponíveis as seguintes informações estatísticas: Cov (Y, Z) = 18, E(Z) = 4, Var(Z) = 25, E(Y) = 4 e CV(Y) = 2. Onde CV é o coeficiente de variação, além da nomenclatura usual. Então a expressão E(Z^2) + Var(2Y - 3Z) vale:

a) 265

b) 274

c) 306

d) 373

e) 405

11. (FGV/2015 – TJ-BA) Seja X uma variável aleatória contínua com uma distribuição triangular, com função densidade de probabilidade não nula no intervalo [0,2], dada por f(x) = 1/2.(2-x) , sendo nula caso contrário. Então é possível afirmar que:

a) P(X > 1) = P(X ≤ 1) = 0,5

b) F_X(x) = 1 – x^2/4, é a função distribuição acumulada de X;

c) F_X(1,5) = 15/16

d) E(X) = ¾, é a esperança matemática de X;

e) Me(X) > 1, onde Me(X) representa a mediana de X

12. (FGV/2016 – IBGE) Seja X uma variável aleatória mista com função densidade de probabilidade dada por: $f_X(x) = \frac{1}{x^2}$ $para\ 1 < x \leq 4, P(X = 1) = 0,25$, sendo igual a zero caso contrário. Então os valores de $P(X \leq 2)$ e $E(X^2)$, esperança matemática de X ao quadrado, são respectivamente iguais a:

a) 0,25 e 2,50;

b) 0,50 e 2,50;

c) 0,50 e 3,25;

d) 0,75 e 2,50;

e) 0,75 e 3,25.

FCC

13. (FCC/2015 – DPE-SP) Usuários de certo medicamento para o tratamento de câncer interpõem aos órgãos públicos responsáveis, através da Defensoria Pública de sua região, ações para o recebimento do medicamento. Suponha que o tempo, em meses, entre a interposição da ação e o recebimento do medicamento pelos usuários, seja uma variável aleatória com a seguinte função de probabilidade

$$f(x) = \begin{Bmatrix} K.x, & 0 < x \leq 2 \\ 2K, & 2 < x \leq 4 \\ 0, & x > 4 \end{Bmatrix}$$

Nessas condições, o tempo médio, em dias, para o recebimento do medicamento pelos usuários pertence ao intervalo

a) [68,70)

b) [65,68)

c) [74,76)

d) [71,73)

e) [73,75)

14. (FCC/2015 – TRE-RR) A função de distribuição acumulada da variável aleatória X é dada por

$$F(x) = \begin{Bmatrix} 0, & se\ x \leq 0 \\ 4.x^2, & se\ 0 < x \leq 0,5 \\ 1, & se\ x > 0,5 \end{Bmatrix}$$

Nessas condições, a variância de X é igual a:

a) 1/36

b) 1/18

c) 1/72

d) 1/9

e) 2/9

15. (FCC/2018 – TRT-2ª Região) A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua X é dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 0,2(x-0,5), & para\ 2 \le x \le K \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

Sendo K > 2, então a variância de X é igual a

a) 103/225

b) 4/9

c) 71/225

d) 199/225

e) 9/15

16. (FCC/2012 – TRE-SP) A função densidade de probabilidade da variável aleatória X é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k.x^3, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

A probabilidade condicional dada por: P(1 ≤ X ≤ 1,5 | X ≤ 1,5) é igual a

a) 2/9

b) 5/9

c) 15/49

d) 43/81

e) 65/81

CESGRANRIO

17. (CESGRANRIO/2011 – Petrobrás) A função densidade de uma variável aleatória é dada por f(x) = x/4, para $1 \leq x \leq 3$, com f(x) = 0 para os demais valores de x. A probabilidade de que X assuma um valor menor que 2 é

a) 1/4

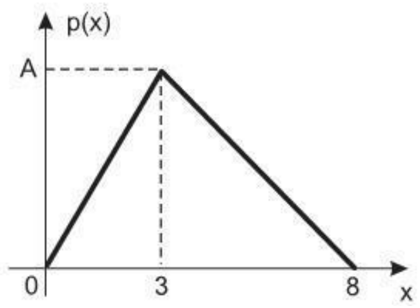
b) 1/3

c) 5/16

d) 3/8

e) 1/2

18. (CESGRANRIO/2011 – Transpetro)



O gráfico da figura acima mostra a função densidade de probabilidade de um experimento com uma variável aleatória X. O valor de A é

a) 0,10

b) 0,15

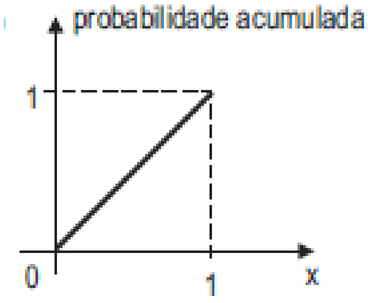
c) 0,20

d) 0,25

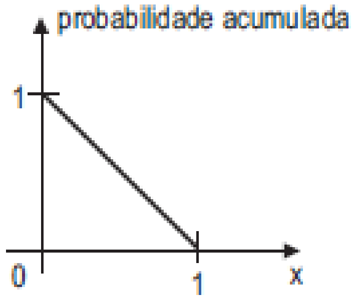
e) 0,30

19. (CESGRANRIO/2014 – FINEP) As Figuras abaixo mostram os gráficos de diversas funções que deveriam representar a distribuição acumulada de probabilidade de uma variável aleatória contínua X. Essa variável X assume valores no intervalo fechado [0, 1], segundo uma distribuição uniforme.

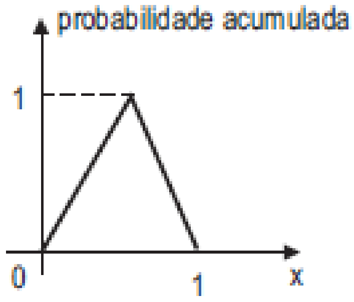
Constata-se que o gráfico correspondente à distribuição acumulada de X é o da Figura



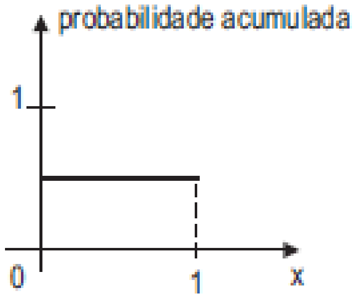
a)



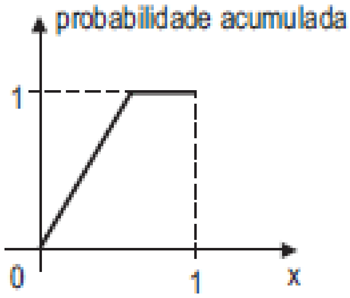
b)



c)


probabilidade acumulada
1
0
1
x

d)


probabilidade acumulada
1
0
1
x

e)

GABARITO

1. CERTO
2. ERRADO
3. ERRADO
4. LETRA B
5. CERTO
6. CERTO
7. LETRA D
8. LETRA E
9. LETRA E
10. LETRA C
11. LETRA C
12. LETRA E
13. LETRA E
14. LETRA C
15. LETRA C
16. LETRA E
17. LETRA D
18. LETRA D
19. LETRA A

LISTA DE QUESTÕES – MULTIBANCAS

Teoremas de Desigualdade

1. (FCC/2014 – Analista Judiciário do TRT 13ª Região) A média de uma variável aleatória contínua X, em que se desconhece sua distribuição, é igual a 10,4. Pelo teorema de Tchebichev obteve-se um intervalo igual a (7,4 ; 13,4) em que a probabilidade mínima de X pertencer a este intervalo é igual a 84%. O valor da variância (σ^2) da variável X é tal que

a) $\sigma^2 < 1{,}25.$

b) $1{,}25 \leq \sigma^2 < 1{,}50.$

c) $1{,}50 \leq \sigma^2 < 1{,}75.$

d) $1{,}75 \leq \sigma^2 < 2{,}00.$

e) $\sigma^2 \geq 2{,}00.$

2. (FCC/2014 – TRE-RR) Conclui-se que, com a utilização do Teorema de Tchebichev, uma variável aleatória X com média igual a 50 apresenta uma probabilidade mínima de 75% de X pertencer ao intervalo (45, 55). A variância de X é

a) 4,00.

b) 1,00.

c) 1,44

d) 2,25.

e) 6,25.

3. (FCC/2016 – TRT-20ª Região) Sabe-se, pelo Teorema de Tchebichev, que a probabilidade mínima de que uma variável aleatória X pertença ao intervalo (m − 1, m + 1) é igual a 75%. Se a média de X é m, então a variância de X é igual a

a) 1/4

b) 1/16

c) 1/64

d) 1

e) 9/16

4. (FCC/2018 – TRT-2ª Região) Em virtude de não se conhecer a função de densidade de uma variável aleatória X, com média 22, obteve-se um intervalo de confiança (20, 24), sabendo-se que existe a probabilidade mínima de 84% de X pertencer a este intervalo conforme o Teorema de Tchebichev. Considerando este mesmo teorema, obtém-se que a probabilidade de X não pertencer ao intervalo (22 − K, 22 + K) é no máximo 6,25%. A amplitude deste último intervalo é de

a) 8,0

b) 3,2

c) 6,4

d) 4,0

e) 5,6

5. (FCC/2014 – Analista Judiciário do TRT 19ª Região) Uma variável contínua X apresenta uma média igual a 50. Pelo Teorema de Tchebyshev, a probabilidade de X não pertencer ao intervalo (10, 90) é no máximo 25%. O resultado da divisão da variância de X pelo quadrado da média de X é

a) 0,64.

b) 0,25.

c) 0,16.

d) 0,32.

e) 0,04.

Gabarito

1. LETRA B
2. LETRA E
3. LETRA A
4. LETRA C
5. LETRA C

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.