Aula 12

BNB (Analista Bancário) Matemática - 2023 (Pré-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

07 de Junho de 2023

Índice

E aí, caro Aluno do Estratégia Concursos, tudo bem?

Na aula de hoje iremos abordar o tema: **Funções Logarítmicas**.

Vamos iniciar a aula com o **estudo do Logaritmo** analisando sua **definição** e as **consequências** decorrentes da definição, assim como iremos estudar exaustivamente as **propriedades do logaritmo** que serão alicerces para toda a continuidade da aula.

Posteriormente, faremos um estudo minucioso da **Função Logarítmica**, bem como a análise do domínio, da imagem, do comportamento e também de como se constrói um gráfico a depender da base do logaritmo.

Iremos comparar a Função Logarítmica com a Função Exponencial (estudada na última aula), o que irá esclarecer o porquê de uma ser a inversa da outra.

Em seguida, falaremos sobre as **Equações e Inequações Logarítmicas**.

Fiquem tranquilos que sempre que terminarmos um tópico, iremos resolver **diversos exemplos** elaborados por mim e também **muitas questões de concurso**.

Todas as questões resolvidas passo a passo para você compreender este assunto.

Então, essa será a **sistemática da aula**: Abordagem de um tópico da matéria, resolução de alguns exemplos e comentários através de questões de concurso de como esse tópico é cobrado em prova.

Por fim, no tópico final "questões comentadas" faremos **mais exercícios** de concurso público, abrangendo a matéria como um todo para sintetizarmos o conteúdo por completo.

FALE COMIGO

Contem sempre comigo. Caso tenham dúvidas, enviem no **Fórum de Dúvidas** ou por e-mail ***vinicius.veleda@estrategiaconcursos.com.br***.

> "Seja qual for o seu sonho, batalhe, lute por ele, não o espere. Seja diferenciado. Não se sinta superior, seja humilde, mas seja diferenciado. Faça sua vida valer a pena. Crie um ideal para ela e siga a jornada até estar concluída, até ser **aprovado**! "

Vinícius Veleda

LOGARITMOS

Estudamos na aula de equações e inequações exponenciais igualdades do tipo:

$$2^y = 8$$

Onde podíamos reduzir ambas as potências à mesma base e resolver para y.

$$2^y = 8$$

$$2^y = 2^3 \quad \rightarrow \quad y = 3$$

Porém, em diversas outras situações, **não conseguiremos** reduzir as potências.

Imagine que uma questão da sua prova pergunte qual o valor de y na igualdade abaixo:

$$3^y = 5$$

Como você resolveria?

Não conseguiríamos reduzir as potências à mesma base.

Para poder resolver esta e outras operações iremos iniciar o **estudo do Logaritmo**.

1 - Definição

Dados dois números reais positivos $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{x}$, com $\boldsymbol{a} > 0$ e $\boldsymbol{a} \neq 1$, o **logaritmo** de $\boldsymbol{x}$ na base $\boldsymbol{a}$ é igual ao expoente y ao qual a base $\boldsymbol{a}$ deve ser elevada para se chegar a x como resultado.

Se $\boldsymbol{a} > 0$ e $\boldsymbol{a} \neq 1$ e $\boldsymbol{x} > 0$, temos que:

$$\log_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{x} = y \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{a}^y = \boldsymbol{x} \quad , \quad onde:$$

- $\boldsymbol{a}$ $\rightarrow$ base do logaritmo
- $\boldsymbol{x}$ $\rightarrow$ logaritmando
- y $\rightarrow$ logaritmo

Isto é, o **logaritmo** de $\boldsymbol{x}$ na base $\boldsymbol{a}$ é a solução de y na equação $\boldsymbol{a}^y = \boldsymbol{x}$.

Observe que o Logaritmo é uma operação matemática intrinsicamente ligada à potenciação. A ideia do logaritmo é **reverter a operação de exponenciação**.

Sempre que nos depararmos com logaritmo estaremos mentalmente trabalhando com expoentes. Veremos mais a frente (na parte de função) que **a função logarítmica é a inversa da função exponencial**.

Inicialmente, esta definição pode parecer um pouco confusa ou difícil. No decorrer da aula, com inúmeros exemplos e questões de provas, tudo ficará mais claro.

TOME NOTA!

logaritmando

$\log_a x = y$

base

$$\log_a x = y \quad \leftrightarrow \quad a^y = x$$

Condição de existência: $a > 0$ e $a \neq 1$ e $x > 0$

A pergunta que sempre devemos fazer é: "**Devemos elevar a base a qual expoente para se obter o logaritmando?**"

Vamos voltar no nosso exemplo do começo da aula.

Estávamos interessados em resolver a seguinte igualdade:

$$3^y = 5$$

Aplicando a definição de logaritmo, podemos calcular o valor de y:

$$3^y = 5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = \log_3 5}$$

ESCLARECENDO

Observe que iremos **trabalhar constantemente** com a **definição** e também com o **sentindo inverso da definição**. É **importante** que você esteja confortável para trabalhar tanto em um sentido quanto no outro.

$$\log_a x = y \quad \leftrightarrow \quad a^y = x$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: $\log_2 8 = y$

Lembre-se sempre da pergunta: "**Devemos elevar a base a qual expoente para se obter o logaritmando?**"

Nesse caso estaríamos perguntando: 2 elevado a que número dará 8? Sabemos que 2 ao cubo é igual a 8. Logo,

$$\log_2 8 = 3 \quad , \quad pois \quad 2^3 = 8$$

Exemplo 2: $\log_7 7 = y$

7 elevado a 1 é igual a 7. Logo,

$$\log_7 7 = 1 \quad , \quad pois \quad 7^1 = 7$$

Exemplo 3: $\log_{1.050.875} 1 = y$

Um milhão cinquenta mil oitocentos e setenta e cinco elevado a que número resultará em um?

Como vimos na aula de potenciação, qualquer número elevado a 0 resultará em 1. Logo,

$$\log_{1.050.875} 1 = 0 \quad , \quad pois \quad 1.050.875^0 = 1$$

Exemplo 4: $\log_2 \frac{1}{4} = y$

2 elevado a qual número resultará em $1/4$?

$$\log_2 \frac{1}{4} = -2 \quad , \quad pois \quad 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

E professor, esse nível "básico" cai em concurso? Com certeza. Iremos <u>trabalhar constantemente com a definição de logaritmo</u> em todos os níveis da aula de hoje.

Vejamos uma questão cobrada no concurso da IF-SP.

(IF SP - 2012) Se $\log_x 243 = 5$, então o valor de x deve ser:

a) 2
b) 4
c) 1

d) 3
e) 0

Comentários:

Observe que a banca nos questiona o valor da base. Até então estávamos sempre calculando o resultado de um logaritmo.

Todavia, a operação e a definição continuam as mesmas. Vejamos:

$$\log_x 243 = 5 \quad \rightarrow \quad x^5 = 243$$

$$\boldsymbol{x = 3}$$

Gabarito: Alternativa **D**

2 - Consequências da definição

Devemos ter em mente algumas igualdades decorrentes das **consequências da definição**.

1. Se o logaritmando for igual a base, o **logaritmo será igual a 1**. Vimos isto no exemplo 2.

$$\boxed{\boldsymbol{\log_a a = 1}}$$

Pois, **qualquer número elevado a 1 é igual a ele mesmo**.

2. O logartimo de 1 (unidade) em qualquer base **é igual a 0**. Analisamos no exemplo 3.

$$\boxed{\boldsymbol{\log_a 1 = 0}}$$

Pois, **qualquer número elevado a 0 é igual a 1**.

3. A potência de base a e expoente $\log_a x$ será **igual a $\boldsymbol{x}$**.

$$\boxed{\boldsymbol{a^{\log_a x} = x}}$$

4. Se o logaritmo for igual a base e estiver elevado a um expoente x, o **logaritmando será o próprio x**.

$$\boxed{\log_a a^x = x}$$

5. Dois logaritmos em uma mesma base são iguais, se e somente se, **os logaritmandos também forem iguais**.

$$\boxed{\log_a x = \log_a y \quad \leftrightarrow \quad x = y}$$

Estas consequências da definição serão usadas constantemente nas resoluções dos problemas. Então, **decore!**

Consequências da definição				
$\log_a a = 1$	$\log_a 1 = 0$	$a^{\log_a x} = x$	$\log_a a^x = x$	$\log_a x = \log_a y \ \leftrightarrow \ x = y$

3 - Bases Especiais ou Particulares

Duas bases frequentemente são cobradas em provas. A base 10 e a base e.

1. Logaritmo na base 10.

É o que chamamos de logaritmo decimal. É o mais "comum" a ser usado.

Quando **não estiver explícita a base** do logaritmo em uma operação, entende-se que **a base é a decimal**.

$$\log x \quad \rightarrow \quad \log_{10} x$$

2. Logaritmo na base e.

O número de Euller (e) é uma constante matemática irracional e igual, aproximadamente, a 2,721.

O logaritmo de um número na base e tem a seguinte notação:

$$\log_e x \quad \rightarrow \quad \ln x$$

4 - Propriedades dos Logaritmos

Este tema é **MUITO cobrado** em prova. Praticamente todas as questões de logaritmos envolvem a aplicação de uma das propriedades abaixo.

Passarei as propriedades uma a uma com seu conceito e fórmula e ao final farei um **quadro resumo** com as notações que você **DEVE decorar**.

Iremos praticar também com **bastantes exemplos e questões de provas** para você entender como as bancas gostam de cobrar este assunto.

Logaritmo do Produto

O logaritmo do **produto** é igual a **soma** de seus logaritmos.

$$\boldsymbol{\log_a (x * y) = \log_a x + \log_a y}$$

Obs: Esta propriedade pode ser estendida para n fatores:

$$\log_a (x_1 * x_2 * x_3 * \ldots * x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \cdots + \log_a x_n$$

Logaritmo do Quociente

O logaritmo do **quociente** é igual a **diferença** dos seus logaritmos.

$$\boldsymbol{\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y}$$

Logaritmo da Potência

O logaritmo de uma **potência** (base real positiva e expoente real) é igual a esta **potência vezes o logaritmo**.

$$\boxed{\log_a x^p = p * \log_a x}$$

Base elevada a um expoente

Quando a **base estiver elevada a um expoente**, o logaritmo é igual ao **produto do inverso da base vezes o logaritmo**.

$$\boxed{\log_{a^p} x = \frac{1}{p} * \log_a x}$$

Propriedades dos Logaritmos

Propriedade	Fórmula	Conceito
Logaritmo do Produto	$\log_a(x * y) = \log_a x + \log_a y$	O logaritmo do produto é igual a soma de seus logaritmos
Logaritmo do Quociente	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$	O logaritmo do quociente é igual a diferença dos seus logaritmos
Logaritmo da Potência	$\log_a x^p = p * \log_a x$	O logaritmo de uma potência é igual a esta potência vezes o logaritmo
Base elevada a um expoente	$\log_{a^p} x = \frac{1}{p} * \log_a x$	Quando a base estiver elevada a um expoente, o logaritmo é igual ao produto do inverso da base vezes o logaritmo

TOME NOTA!

É muito **IMPORTANTE** que você decore essas propriedades e também se sinta **confortável para trabalhar nos dois sentidos da igualdade**.

Em diversos exercícios será exigida a manipulação das soluções com a "volta" de uma das propriedades.

Vejamos alguns exemplos de aplicação dessas propriedades.

Estes exercícios buscam sempre uma "manipulação" algébrica dos numerais. Fique atento às contas. Irei sempre colocar o passo a passo para você acompanhar.

Exemplo 4: Dado que $\mathbf{\log 2 = \boldsymbol{a}}$ e $\mathbf{\log 3 = \boldsymbol{b}}$, calcule os seguinte logaritmos:

a) $y = \log 6$

Aplicaremos a propriedade do **logaritmo do produto** para reescrever este logaritmo e calcular seu valor.

$$y = \log 6$$

$$y = \log(2 * 3)$$

$$y = \log 2 + \log 3$$

$$y = a + b \quad \rightarrow \quad \mathbf{\log 6 = \boldsymbol{a + b}}$$

b) $\mathrm{y} = \log 9$

Aplicaremos a propriedade do **logaritmo da potência** e calcularemos o valor do logaritmo.

$$y = \log 9$$

$$y = \log 3^2$$

$$y = 2 * \log 3$$

$$y = 2 * b \quad \rightarrow \quad \mathbf{\log 9 = 2\boldsymbol{b}}$$

c) $y = \log 1{,}5$

Aplicando a propriedade do **logaritmo do quociente**:

$$y = \log 1{,}5$$

$$y = \log\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$y = \log 3 - \log 2$$

$$y = b - a \quad \rightarrow \quad \mathbf{\log 1,5 = \ b - a}$$

d) $y = \log 15$

Aplicando a propriedade do **logaritmo do produto**:

$$y = \log 15$$

$$y = \log(10 * 1{,}5)$$

$$y = \log 10 + \log 1{,}5$$

$$y = 1 + (b - a) \quad \rightarrow \quad \mathbf{\log 15 = 1 + b - a}$$

e) $y = \log \sqrt{3}$

Aplicando a propriedade do **logaritmo da potência**:

$$y = \log \sqrt{3}$$

$$y = \log 3^{1/2}$$

$$y = \frac{1}{2} * \log 3$$

$$y = \frac{1}{2} * b \quad \rightarrow \quad \mathbf{\log \sqrt{3} = \frac{b}{2}}$$

f) $y = \log 5$

Aplicando a propriedade do **logaritmo do quociente**:

$$y = \log 5$$

$$y = \log\left(\frac{10}{2}\right)$$

$$y = \log 10 - \log 2$$

$$y = 1 - a \quad \rightarrow \quad \mathbf{\log 5 = 1 - \boldsymbol{a}}$$

g) $y = \log_{100} 2$

Aplicando a propriedade da **base elevada a um expoente**:

$$y = \log_{100} 2$$

$$y = \log_{10^2} 2$$

$$y = \frac{1}{2} * \log_{10} 2$$

$$y = \frac{1}{2} * \log 2$$

$$y = \frac{1}{2} * a \quad \rightarrow \quad \mathbf{\log_{100} 2 = \frac{\boldsymbol{a}}{2}}$$

h) $y = \log 36$

Aplicando simultaneamente as propriedades do **logaritmo do produto** e **do logaritmo da potência**:

$$y = \log 36$$

$$y = \log(2^2 * 3^2)$$

$$y = 2 * \log 2 + 2 * \log 3$$

Conseguiu entender esta última passagem?

Fique atento! Pois, na grande parte dos exercícios, pode ser que tenhamos de **usar propriedades em conjunto**. Observe passo a passo a resolução acima.

$$y = \log 36$$

$$y = \log(2^2 * 3^2)$$

Primeiro vamos aplicar a propriedade do **logaritmo do produto**:

$$y = \log(2^2 * 3^2)$$

$$y = \log 2^2 + \log 3^2$$

Agora, aplicaremos a propriedade do **logaritmo da potência** para ambos os fatores:

$$y = \log 2^2 + \log 3^2$$

$$y = 2 * \log 2 + 2 * \log 3$$

$$y = 2 * a + 2 * b \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\log 36 = 2a + 2b}$$

Exemplo 5: Se $\log_2 x = k$, quanto vale $y = \log_{16} x$?

Primeiro vamos "manipular" algebricamente o número 16 para encontrá-lo em função do número 2.

$$y = \log_{16} x$$

$$y = \log_{2^4} x$$

Aplicaremos agora a **propriedade da base elevada a um expoente**.

$$y = \log_{2^4} x$$

$$y = \frac{1}{4} * \log_2 x$$

$$y = \frac{1}{4} * k \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\log_{16} x = \frac{k}{4}}$$

Exemplo 6: A soma dos logaritmos de três números na base 3 é igual a 4. Determine o produto desses números.

O enunciado nos informa que a soma dos logaritmos de três números na base 3 é igual a 4.

$$\log_3 x + \log_3 y + \log_3 z = 4$$

Aplicaremos o **"sentido contrário"** da propriedade do **logaritmo do produto**.

É muito **IMPORTANTE** que você decore essas propriedades e também se sinta confortável para trabalhar nos dois sentidos da igualdade.

$$\log_3 x + \log_3 y + \log_3 z = 4$$

$$\log_3(x * y * z) = 4$$

$$(x * y * z) = 3^4 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{(x * y * z) = 81}$$

5 - Mudança de Base

Em algumas situações pode ser necessária a **conversão do logaritmo para uma única base conveniente**.

As propriedades estudadas acima são correlacionadas a logaritmos com a mesma base.

Nestes casos iremos proceder com a **mudança de base do logaritmo**.

Dados a, x e b, números reais positivos e a e $b \neq 1$, o logaritmo de x na base a pode ser escrito da seguinte forma:

$$\boxed{\boldsymbol{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}}$$

Acerca dessa mudança de base, há **duas observações importantes**:

1. Esta propriedade também pode ser representada da seguinte forma:

$$\boxed{\boldsymbol{\log_a x = \log_b x * \log_a b}}$$

2. Se a e x são números reais positivos e diferentes de 1, temos:

$$\boxed{\boldsymbol{\log_a x = \frac{1}{\log_x a}}}$$

Exemplo 7: Dado que $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, calcule os seguintes logaritmos:

a) $y = \log_3 2$

Aplicando a **mudança para a base 10**:

$$y = \log_3 2$$

$$y = \frac{\log 2}{\log 3}$$

$$y = \frac{a}{b} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\log_3 2 = \frac{a}{b}}$$

b) $y = \log_2 3$

Poderíamos resolver igual a questão acima (aplicando a mudança para a base 10) ou aplicar a segunda observação estudada que nos diz:

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

No exemplo acima calculamos $\log_3 2$, então:

$$y = \log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2}$$

$$y = \frac{1}{\frac{a}{b}}$$

$$y = \frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\log_2 3 = \frac{b}{a}}$$

c) $y = \log_6 5$

Aplicando a **mudança para a base 10**:

$$y = \log_6 5$$

$$y = \frac{\log 5}{\log 6}$$

Esses logaritmos acima foram calculados nos exemplos $4f$ e $4a$. Veja que os exemplos começam a **misturar diversos conceitos** de logaritmos.

Neste caso, trabalharíamos com mudança de base, propriedade do logaritmo do produto e propriedade do logaritmo do quociente.

Substituindo os valores já calculados teremos:

$$y = \frac{\log 5}{\log 6}$$

$$y = \frac{1-a}{a+b} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\log_6 5 = \frac{1-a}{a+b}}$$

Iremos resolver, agora, uma **série de exercícios de concurso público**. Tenha decoradas as propriedades dos logaritmos e o entendimento do conceito da definição e das consequências da definição.

Os exercícios serão resolvidos passo a passo e você entenderá a maneira como as bancas gostam de cobrar este tema.

(FUNDATEC - 2019) Sabendo que o valor de $\log 5 = 0,698$, o valor do $\log 50$ será:

a) 1,698
b) 2,698
c) 3,698
d) 4,698
e) 10,698

Comentários:

Vamos chamar o valor que queremos encontrar de y e aplicar a "volta" da **propriedade do logaritmo do produto** para encontrarmos o seu valor.

$$y = \log 50$$

$$y = \log(5 * 10)$$

$$y = \log 5 + \log 10$$

$$y = 0{,}698 + 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = 1,698}$$

Gabarito: Alternativa **A**

(Alternative - 2016) Calculando o logaritmo de 625 na base 5, obtem-se:

a) 4
b) 8
c) 2
d) 3
e) 5

Comentários:

Vamos chamar o valor que queremos encontrar de y e aplicar a **propriedade do logaritmo da potência** para encontrar seu valor.

$$y = \log_5 625$$

$$y = \log_5 5^4$$

$$y = 4 * \log_5 5 = 4 * 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = 4}$$

Gabarito: Alternativa **A**

(FGV - 2019) Sabe-se que $\log_3 x + \log_3 y = 4$. O valor do produto $(x * y)$ é igual a:

a) 12
b) 24
c) 36
d) 54
e) 81

Comentários:

Vamos aplicar o "caminho inverso" da **propriedade do logaritmo do produto**.

$$\log_3 x + \log_3 y = 4$$

$$\log_3(x * y) = 4$$

$$(x * y) = 3^4$$

$$\boldsymbol{(x * y) = 81}$$

Gabarito: Alternativa **E**

(ESAF - 2014) Sabendo-se que $\log x$ representa o logaritmo de x na base 10, calcule o valor da expressão

$$\log 20 + \log 5$$

a) 5
b) 4
c) 1
d) 2
e) 3

Comentários:

Vamos chamar o valor que queremos encontrar de y e aplicar o sentido inverso da **propriedade do logaritmo do produto** para encontrar nossa resposta.

$$y = \log 20 + \log 5$$

$$y = \log(20 * 5)$$

$$y = \log 100 \quad \rightarrow \boldsymbol{y = 2}$$

Gabarito: Alternativa **D**

(COTEC - 2016) Considere a um número real positivo. Se $\log a = 3$, então $\log(a^2/10)$ vale:

a) 8
b) 9
c) 7
d) 5

Comentários:

A sistemática de resolução é a mesma. Chamaremos de y o valor que queremos encontrar e aplicando **as propriedades do logaritmo** calcularemos seu valor.

$$y = \log\left(\frac{a^2}{10}\right)$$

Aplicando a **propriedade do logaritmo do produto e do logaritmo da potência** e calculando y:

$$y = \log\left(\frac{a^2}{10}\right)$$

$$y = \log a^2 - \log 10$$

$$y = 2 * \log a - 10$$

$$y = 2 * 3 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = 5}$$

Gabarito: Alternativa **D**

(CESGRANRIO - 2011) Se $\log x$ representa o logaritmo de x na base 10, então o valor de n que tal que $\log n = 3 - \log 2$ é:

a) 2.000
b) 1.000
c) 500
d) 100
e) 10

Comentários:

Vamos desenvolver a igualdade aplicando o caminho inverso da **propriedade do logaritmo do produto**.

$$\log n = 3 - \log 2$$

$$\log n + \log 2 = 3$$

$$\log(n * 2) = 3$$

$$\log(2n) = 3$$

$$2n = 10^3$$

$$2n = 1.000 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{n = 500}$$

Gabarito: Alternativa **C**

(NC UFPR - 2014) A expressão $\log_{10} 8 + \log_{10} 2$ é equivalente a:

a) $\log_{10} 10$
b) $8 * \log_{10} 2$
c) $2 * \log_{10} 8$
d) $2 * \log_{10} 4$

e) $\log_{10} 2$

Comentários:

Vamos chamar o valor que queremos encontrar de y e aplicar as propriedades que estudamos para encontrar uma resposta que seja equivalente à expressão fornecida no enunciado.

$$y = \log_{10} 8 + \log_{10} 2$$

Aplicando o "sentido contrário" da **propriedade do logaritmo do produto**:

$$y = \log_{10} 8 + \log_{10} 2$$

$$y = \log_{10}(8 * 2)$$

$$y = \log_{10} 16$$

Perceba que não há gabarito para este resultado. Vamos manipular algebricamente este valor para chegarmos ao gabarito.

Reescrevendo y:

$$y = \log_{10} 16$$

$$y = \log_{10} 4^2$$

Aplicando a propriedade do logaritmo da potência:

$$y = \log_{10} 4^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = 2 * \log_{10} 4}$$

Gabarito: Alternativa **D**

(CURSIVA - 2015) Sabendo que $\log 2 = 0,301$ e $\log 3 = 0,477$, qual o valor de $\log 12$?

a) 1,907
b) 1,070
c) 1,079
d) 1,790

Comentários:

Iremos chamar o valor de $\log 12$ de y e aplicaremos a propriedade do logaritmo do produto e do logaritmo da potência para calcular o gabarito.

$$y = \log 12$$

$$y = \log(4 * 3)$$

$$y = \log(2^2 * 3)$$

$$y = \log 2^2 + \log 3 \quad \rightarrow \quad y = 2 * \log 2 + \log 3$$

Substituindo os valores fornecidos no enunciado e calculando y teremos:

$$y = 2 * \log 2 + \log 3$$

$$y = 2 * 0{,}301 + 0{,}477$$

$$y = 0{,}602 + 0{,}477 \quad \rightarrow \boldsymbol{y = 1{,}079}$$

Gabarito: Alternativa **C**

(COTEC - 2020) Considere $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$. Nessas condições pode-se afirmar que $\log_{100} 72$ é igual a:

a) $\frac{a+b}{2}$
b) $\frac{a^2+b^2}{2}$
c) $\frac{2a+3b}{2}$
d) $\frac{3a+2b}{2}$
e) $2a + 3n$

Comentários:

Esta questão aborda de forma bem completa as propriedades que acabamos de aprender.

Vamos chamar o valor de $\log_{100} 72$ de y e desenvolver até conseguirmos reduzir nossa resposta em função de $\log 2$ e de $\log 3$.

$$y = \log_{100} 72$$

$$y = \log_{10^2} 72$$

Aplicaremos a **propriedade da base elevada a um expoente**:

$$y = \log_{10^2} 72 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2} * \log 72$$

Escrevendo agora o número 72 em função dos números 2 e 3.

$$y = \frac{1}{2} * \log(2^3 * 3^2)$$

Aplicando a **propriedade do logaritmo do produto**.

$$y = \frac{1}{2} * \log(2^3 * 3^2) \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2} * (\log 2^3 - \log 3^2)$$

Utilizaremos a **propriedade do logaritmo da potência** e iremos calcular y em função de a e b.

$$y = \frac{1}{2} * (\log 2^3 - \log 3^2) \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2} * (3 * \log 2 + 2 * \log 3)$$

Substituindo os valores fornecidos no enunciado teremos y igual a:

$$y = \frac{1}{2} * (3 * \log 2 + 2 * \log 3)$$

$$y = \frac{1}{2} * (3 * a + 2 * b) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = \frac{3a + 2b}{2}}$$

Gabarito: Alternativa **D**

(CETREDE - 2019) Marina afirmou para Cláudio que $2^x = 6$. Quanto será $\log_2 3$.

a) $x + 3$
b) $x - 1$
c) 2
d) $x - 2$
e) $4x$

Comentários:

Usando a definição de logaritmo, sabemos que:

$$2^x = 6 \quad \rightarrow \quad x = \log_2 6$$

Desenvolveremos o resultado para calcular em função de $\log_2 3$. Acompanhe.

$$x = \log_2 6$$

$$x = \log_2(2 * 3)$$

Vamos aplicar a **propriedade do logaritmo do produto** e encontrar o valor questionado pela banca.

$$x = \log_2(2 * 3)$$

$$x = \log_2 2 + \log_2 3$$

$$x = 1 + \log_2 3$$

$$\mathbf{\log_2 3 = x - 1}$$

Gabarito: Alternativa **B**

(QUADRIX Adaptada - 2018) Uma colônia de bactérias se prolifera e o número de indivíduos para cada instante $t > 0$ é dado por:

$$N(t) = 2e^{kt}$$

Em que k é uma constante positiva. Sabe-se que, no instante $t = 4$, o número de bactérias é igual a 162.

Com base nesse caso hipotético, o valor de k e o número de bactérias no instante $t = 8$ é igual a:

a) $\ln 3$
b) $\ln 5$
c) $\ln 4$
d) $\ln 7$
e) $\ln 2$

Comentários:

O enunciado nos fornece a igualdade e uma condição de contorno para calcularmos k.

Observe que quando $t = 4 \rightarrow N(t) = 162$.

Vamos substituir estes valores na igualdade e calcular o valor de k.

$$N(t) = 2e^{kt}$$

$$162 = 2e^{4k}$$

$$e^{4k} = \frac{162}{2}$$

$$e^{4k} = 81$$

Aplicando a **definição de logaritmo**:

$$e^{4k} = 81 \quad \rightarrow \quad 4k = \ln 81 \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{4} \ln 81$$

Aplicaremos a "volta" da **propriedade do logaritmo da potência**.

É muito **IMPORTANTE** que você decore essas propriedades e também se sinta confortável para trabalhar nos dois sentidos da igualdade.

$$k = \frac{1}{4} \ln 81$$

$$k = \ln 81^{1/4} = \ln \sqrt[4]{81} \quad \rightarrow \boldsymbol{k = \ln 3}$$

Gabarito: Alternativa **A**

(NC UFPR - 2017) Considerando que $\log_{10} 5 = 0,7$, assinale a alternativa que apresenta o valor de $\log_5 100$:

a) 0,35
b) 0,50
c) 2,85
d) 7,00
e) 70,00

Comentários:

Vamos chamar de y o valor de $\log_5 100$ e desenvolver a igualdade:

$$y = \log_5 100$$

Aplicaremos a mudança para a base 10.

$$y = \log_5 100$$

$$y = \frac{\log_{10} 100}{\log_{10} 5}$$

$$y = \frac{2}{0{,}7} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = 2,85}$$

Gabarito: Alternativa **C**

(FCC - 2015) O valor da expressão:

$$\boldsymbol{y = \log_2 16 + \log_4 8 + \log_8 4}$$

é igual a:

a) 5
b) 23/2
c) 37/6
d) 5/4
e) 41/8

Comentários:

Vamos aplicar a mudança de base nos dois últimos fatores e calcular o valor da expressão:

$$y = \log_2 16 + \log_4 8 + \log_8 4$$

$$y = \log_2 16 + \frac{\log_2 8}{\log_2 4} + \frac{\log_2 4}{\log_2 8}$$

$$y = 4 + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} \quad , \quad MMC(2{,}3) = 6$$

$$y = \frac{24 + 9 + 4}{6} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = \frac{37}{6}}$$

Gabarito: Alternativa **C**

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

1 - Definição

A função logarítmica de base $\boldsymbol{a}$, onde $\boldsymbol{a > 0}$ e $\boldsymbol{a \neq 1}$ é definida por:

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = \log_a x}}$$

Sendo uma função f de R_+^* em R que <u>associa cada número x</u> a seu respectivo valor $\log_a x$.

$$f: R_+^* \ \rightarrow R \quad , \quad x \ \rightarrow \ \log_a x$$

TOME NOTA!

Quando trabalhamos com funções é comum usarmos como **notação $\boldsymbol{f(x)}$ ou $\boldsymbol{y}$**. Então, sempre que aparecer um desses dois termos, saibam que <u>são coincidentes</u>.

$$f: R_+^* \ \rightarrow R \qquad \boldsymbol{f(x)} = \log_a x \quad ou \quad \boldsymbol{y} = \log_a x$$

2 - Domínio

O **domínio** de uma função representa o conjunto dos **possíveis valores de $\boldsymbol{x}$** onde a função é <u>definida</u>. Na função logarítmica o <u>domínio é composto por duas condições</u>.

- ✓ A primeira é a **base do logaritmo** ser **maior que 0** e também **diferente de 1**.
- ✓ A segunda é o **logaritmando ser maior que 0**.

Lembram-se da <u>condição de existência do logaritmo</u> visto na primeira parte da aula? Ela será o **domínio** da nossa função logarítmica.

FIQUE ATENTO!

logaritmando

$\log_a x = f(x)$ Condição de existência: $a > 0$ e $a \neq 1$ e $x > 0$

base

Exemplo 1: Encontre o domínio das funções logarítmicas abaixo:

a) $f(x) = \log_3(x - 8)$

Estudamos acima que a condição de existência é dada por duas condições. A primeira é a base ser maior que 0 e diferente de 1. Neste exemplo a base é igual a 3 e já satisfaz esta condição.

A segunda condição é o logaritmando ser maior que 0. Vamos determinar os valores de x para esta condição.

$$x - 8 > 0$$

$$\boldsymbol{x > 8}$$

Sendo assim, o domínio pode ser representado por:

$$\boldsymbol{D = \{x \in R \mid x > 8\}}$$

b) $f(x) = \log_{(x-3)} 8$

Perceba que neste exemplo o logaritmando é maior que 0. O que satisfaz uma das nossas condições de existência.

Todavia, precisamos encontrar o valor de x para que a base possa ser maior que 0 e também diferente de 1.

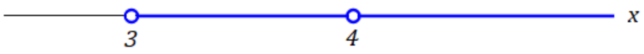
$$x - 3 > 0 \quad e \quad x - 3 \neq 1$$

$$\boldsymbol{x > 3} \qquad \boldsymbol{x \neq 4}$$

Observe que o domínio é dado pelos valores de $x > 3$. Porém, x tem que ser também diferente de 4. Ou seja, x é igual a todos os valores maiores do que 3, menos o valor 4.

$$\boldsymbol{D = \{x \in R \mid x > 3\ e\ x \neq 4\}}\ \ ou\ \ \boldsymbol{D = \{x \in R \mid x > 3 \neq 4\}}$$

Podemos ainda representar os valores no eixo Real das abscissas.



O <u>intervalo é aberto</u> em 3 pois queremos os números maiores que 3 e não maiores ou iguais a 3.

c) $f(x) = \log_2(x^2 - 9x + 14)$

Perceba que a base já é maior que 0 e diferente de 1, o que satisfaz uma das duas condições de existência.

A segunda é o logaritmando ser maior que 0.

$$x^2 - 9x + 14 > 0$$

Lembra-se da aula de inequações? Essa é uma boa hora para revisar, pois vamos usar exaustivamente o estudo das inequações para encontrar o domínio das funções logarítmicas.

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

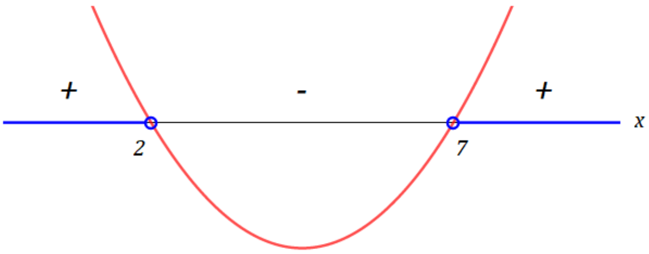
$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 * 1 * 14}}{2 * 1}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x = \frac{9 \pm 5}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{9+5}{2} & \rightarrow \quad \boldsymbol{x_1 = 7} \\ x_2 = \dfrac{9-5}{2} & \rightarrow \quad \boldsymbol{x_2 = 2} \end{cases}$$

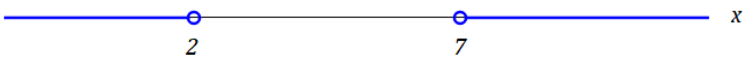
De posse das raízes, vamos proceder com o estudo da função quadrática na reta.

A função é um **parábola com concavidade voltada para cima** e corta o eixo x nas raízes 2 e 7. Como queremos os valores maiores que 0, o intervalo é aberto nas raízes.



Estamos em busca dos valores maiores que 0, isto é, positivos. Os valores positivos encontram-se a esquerda de 2 e a direita de 7.

Representando o domínio na reta teremos:



$$\boldsymbol{D = \{x \in R \mid x < -2 \; e \; x > 7\}} \quad ou \quad \boldsymbol{x =]-\infty, 2[\; \cup \;]7, +\infty[}$$

Exemplo 2: Veremos agora, como exemplo de uma questão de concurso, no maior nível que a banca pode complicar. Faremos o estudo simultâneo da base com o logaritmando.

(CRS / PMMG Aspirante – 2010) O domínio da função:

$$\boldsymbol{f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 5x - 14)}$$

está no intervalo:

a) $]7, +\infty[$
b) $]-2,7[$
c) $]-1, +\infty[$
d) $]0, +\infty[$

Comentários:

O enunciado nos fornece a lei de formação da função logarítmica e nos questiona o **domínio** desta função.

O **domínio** de uma função representa o conjunto dos **possíveis valores de x** onde a função é definida. Na função logarítmica o domínio é composto por duas condições.

- ✓ A primeira é a **base do logaritmo** ser **maior que 0** e também **diferente de 1**.
- ✓ A segunda é o **logaritmando ser maior que 0**.

$$f(x)\log_a x \quad \rightarrow \quad x > 0 \quad e \quad a > 0\; e\; a \neq 1$$

Vamos então dividir nosso problema em dois.

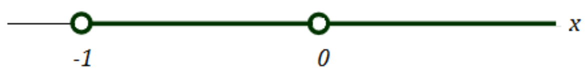
A primeira parte vai ser encontrar a condição de existência para a base $a > 0\; e\; a \neq 1$. E a segunda parte, encontrar o intervalo de existência para o logaritmando $x > 0$.

- (I) – base maior que zero e diferente de 1.

$$f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 5x - 14)$$

$$x + 1 > 0 \;\; e \;\; x + 1 \neq 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x > -1 \;\; e \;\; x \neq 0}$$

Representando os valores de x na reta:



Observe que representamos na reta os valores maiores que -1 (intervalo aberto) e utilizamos a representação também aberta em 0, pois o como vimos $x > -1 \;\; e \;\; x \neq 0$.

- (II) – Logaritmando maior do que zero.

$$f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 5x - 14)$$

$$x^2 - 5x + 14 > 0$$

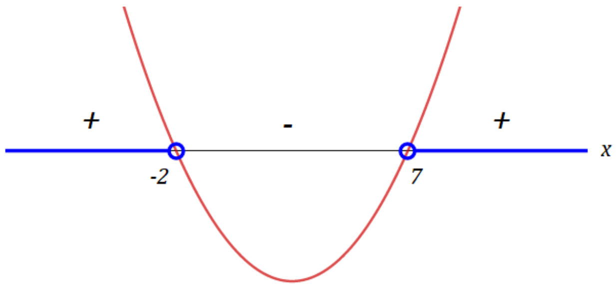
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 * 1 * (-14)}}{2 * 1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{81}}{2}$$

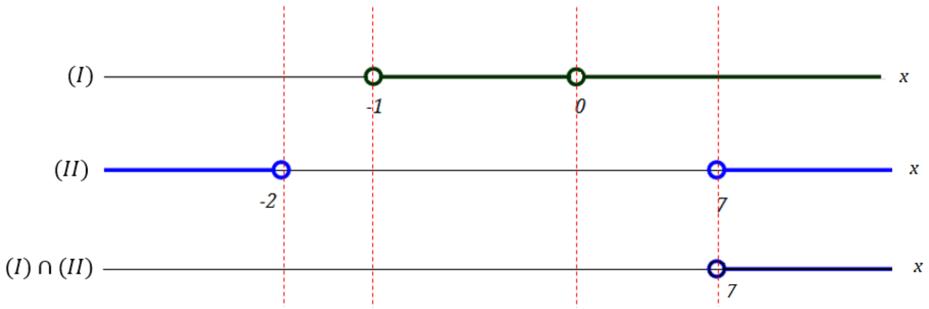
$$\frac{5 \pm 9}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{5+9}{2} & \rightarrow \quad \boldsymbol{x_1 = 7} \\ x_2 = \dfrac{5-9}{2} & \rightarrow \quad \boldsymbol{x_2 = -2} \end{cases}$$

Fazendo o estudo da inequação na reta:



Perceba que queremos os valores de x onde a função é maior do que zero, isto é, a função é positiva. O intervalo aberto em -2 e também em 7 deve-se ao fato que queremos os valores apenas maiores do que zero e não maiores e iguais a zero.

Vamos agora fazer a interseção da condição (I) com a condição (II).



A interseção será determinada pelo intervalo:

$$]\mathbf{7}, +\infty[$$

Gabarito: Alternativa **A**

3 - Imagem

A **imagem** de uma função é representada pelos **possíveis valores de y ou $f(x)$** resultantes da aplicação de x na lei de formação da função.

A **função logarítmica** apresenta como **imagem todos os números reais**. A imagem pode ser negativa, positiva ou até mesmo o zero.

FIQUE ATENTO!

A **função logarítmica** apresenta como **imagem todos os números reais**.

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{R} \quad ou \quad \boldsymbol{I} =]-\infty, +\infty[$$

Exemplo 3: Observe esta questão de concurso público elaborada pela FUNDATEC e veja como o tema foi cobrado na prova.

(FUNDATEC – 2019) O conjunto imagem da função $f(x) = \log_2 x$.

a) $[0\,,1]$
b) $[1\,,+\infty]$
c) $[-\infty\,,1]$
d) $(-\infty\,,+\infty)$
e) $\emptyset$

Comentários:

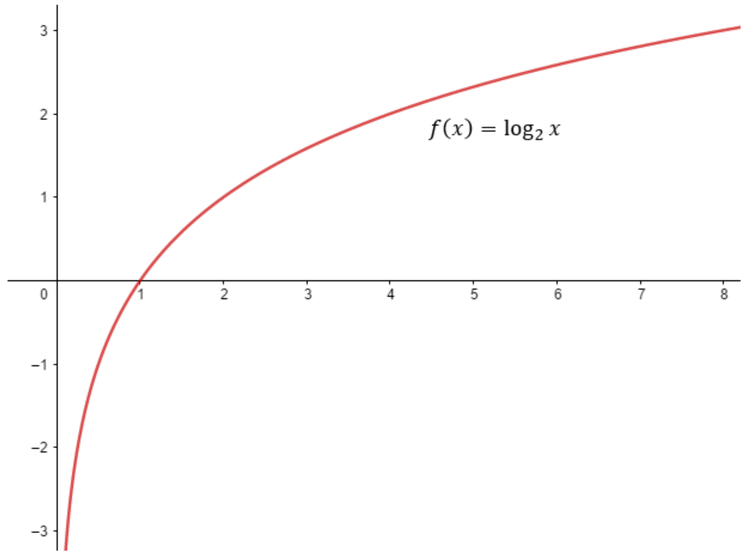
Como vimos acima, bastava saber o conceito sobre a Imagem da função logarítmica para responder a questão e garantir seu ponto na prova.

A imagem da função logarítmica é dada pelo conjunto dos números Reais. Logo:

$$I = R$$

$$\boldsymbol{I} = (-\infty\,,+\infty)$$

E o gráfico da função (que será estudado mais a frente) será:



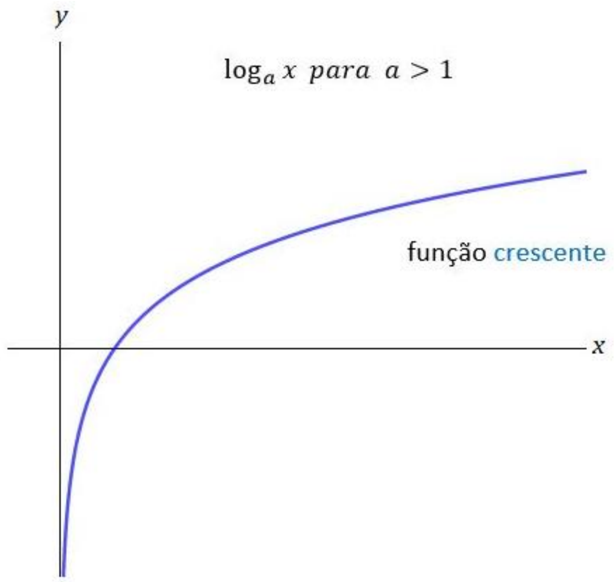
Gabarito: Alternativa **D**

4 – Gráfico e Comportamento

O gráfico da função logarítmica $f(x) = \log_a x$ pode apresentar dois comportamentos distintos a **depender do valor da base a**.

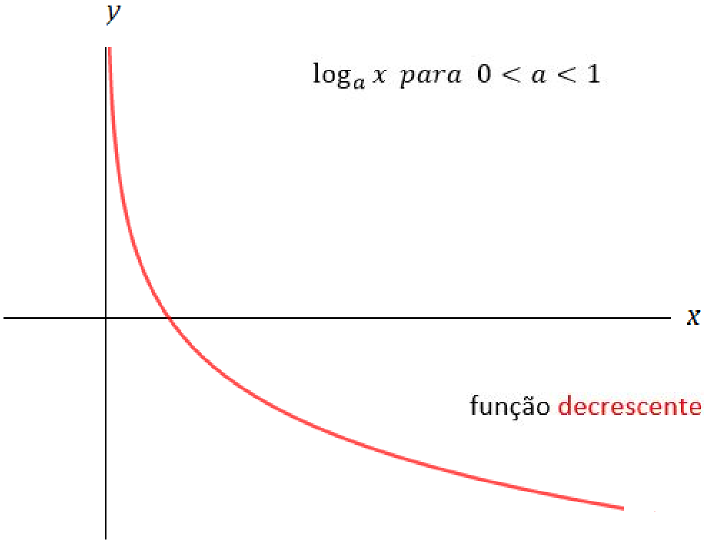
1. **$a > 1$**

Quando a **base é maior que a unidade** a função logarítmica terá o seguinte comportamento:



2. $0 < a < 1$

Quando a **base estiver entre 0 e 1**, o comportamento da função será:

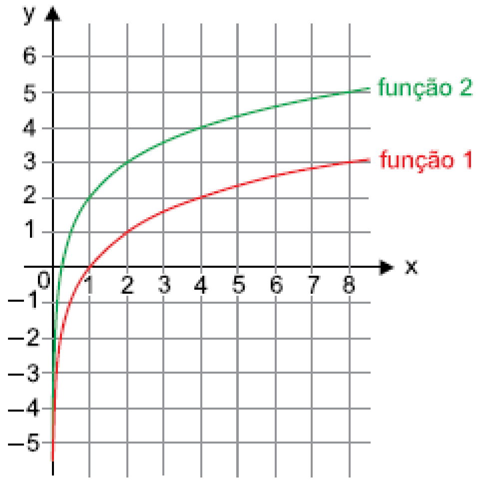


É muito **IMPORTANTE** que você saiba o **comportamento da função logarítmica** em função do valor da base. Conhecer como a função se comporta te ajudará demais na resolução dos exercícios.

- Se $a > 1$, a função será **crescente** e dado $x_2 > x1 \rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.
- Se $0 < a < 1$, a função será **decrescente** e dado $x_2 > x1 \rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

Exemplo 3: Vejamos uma questão de concurso elaborada pela VUNESP em que você apenas precisava lembrar do comportamento da função logarítmica e assim garantiria seu ponto na prova.

(VUNESP – 2015) A imagem indica o gráfico das funções 1 e 2, ambas definidas para x real e maior do que zero.



De acordo com o gráfico, as funções 1 e 2 podem ser, respectivamente,

a) $y = \log_{\frac{1}{2}} x \ e \ y = \log_{\frac{1}{2}} 2x$
b) $y = 2^{x-2} \ e \ y = 2^{2x}$
c) $y = \sqrt{x} - 1 \ e \ y = \sqrt{x} + 1$
d) $y = \log_2 x \ \ e \ y = \log_2 4x$
e) $y = \sqrt{x} \ e \ y = \sqrt{4x}$

Comentários:

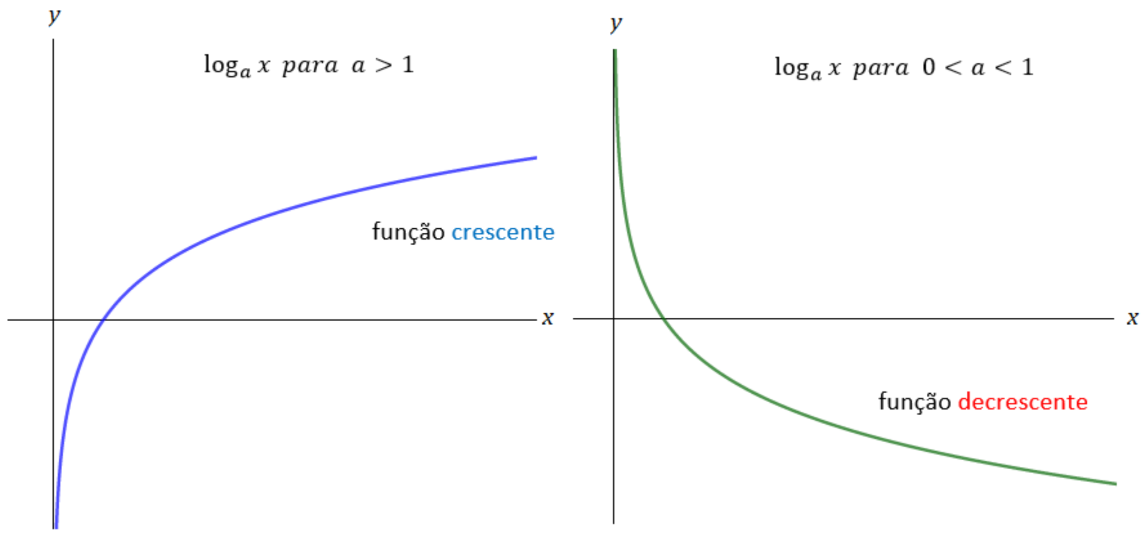
Esta questão nos mostra a importância de estar familiarizado com o gráfico das funções. Se você soubesse o comportamento da função, não precisaria fazer uma conta sequer na hora da prova.

Vamos recordar o comportamento do gráfico da função logarítmica em função da base do logaritmo. Lembrando que a base do logaritmo tem que ser maior que 0 e diferente de 1.

Em termos genéricos temos:

$$f(x) = \log_a x \quad , \quad a > 0 \ e \ a \neq 1$$

O gráfico da função pode assumir dois formatos. Vejamos:



Observe que os gráficos fornecidos pela banca possuem comportamento similar à **função crescente**, isto é, com **base maior que 1**.

A **única opção** dentre as alternativas que apresenta uma **função logarítmica com base maior que 1** é a letra D.

Gabarito: Alternativa **D**

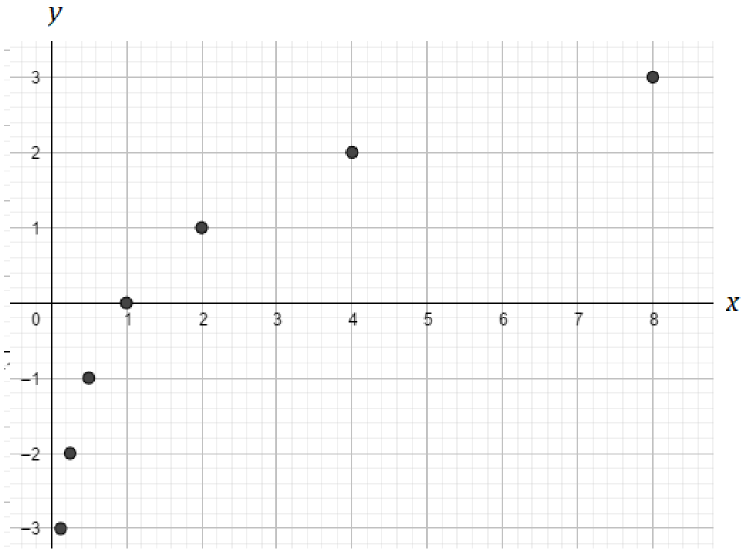
5 - Construindo o gráfico da função logarítmica

Para construir o gráfico da função iremos atribuir valores para x e calcular o valor da função neste ponto.

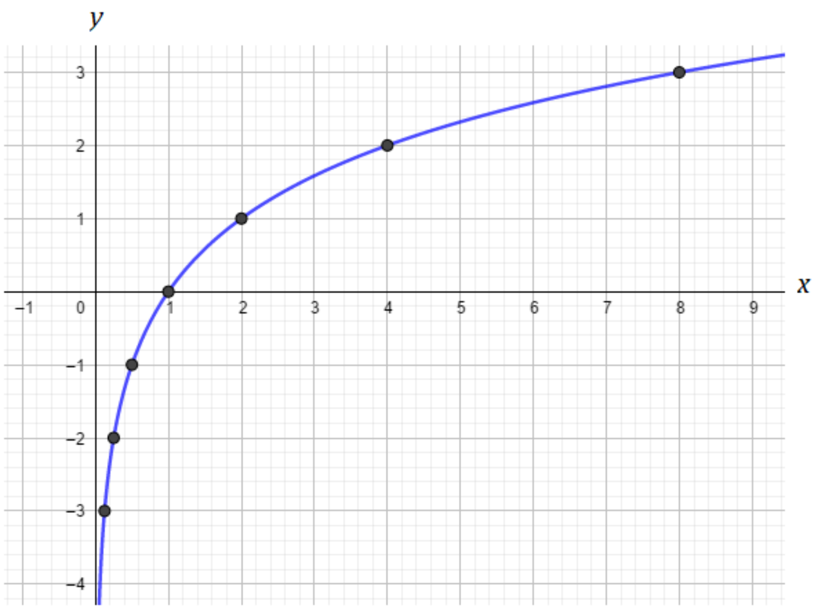
Exemplo 4: Construa o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$.

Vamos **atribuir alguns valores para x** e **calcular o valor da função para o respectivo valor de x.** Explicitaremos os pontos calculados no gráfico.

x	$f(x) = \log_2 x$
$^1/_8$	$f(^1/_8) = \log_2(^1/_8) = -3$
$^1/_4$	$f(^1/_4) = \log_2(^1/_4) = -2$
$^1/_2$	$f(^1/_2) = \log_2(^1/_2) = -1$
1	$f(1) = \log_2 1 = 0$
2	$f(2) = \log_2 1 = 1$
4	$f(4) = \log_2 4 = 2$
8	$f(8) = \log_2 8 = 3$



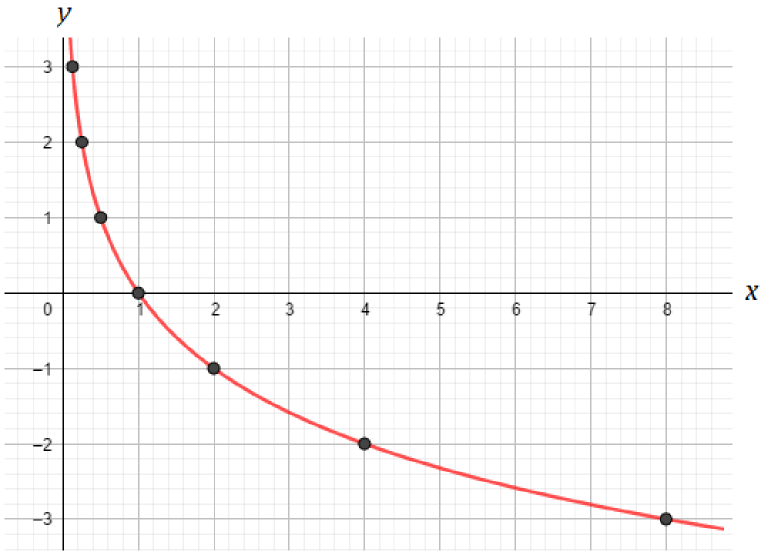
Por fim, traçamos a curva $f(x) = \log_2 x$



Exemplo 5: Construa o gráfico da função $f(x) = \log_{1/2} x$.

A mecânica da construção será a mesma. Iremos **atribuir valores para x** e calcular o valor da função para o respectivo valor de x.

x	$f(x) = \log_{1/2} x$
$^{1}/_{8}$	$f(^{1}/_{8}) = \log_{1/2}(^{1}/_{8}) = 3$
$^{1}/_{4}$	$f(^{1}/_{4}) = \log_{1/2}(^{1}/_{4}) = 2$
$^{1}/_{2}$	$f(^{1}/_{2}) = \log_{1/2}(^{1}/_{2}) = 1$
1	$f(1) = \log_{1/2} 1 = 0$
2	$f(2) = \log_{1/2} 1 = -1$
4	$f(4) = \log_{1/2} 4 = -2$
8	$f(8) = \log_{1/2} 8 = -3$



Aprendemos como construir o gráfico de uma **função logarítmica**. A sistemática será sempre essa. **Atribuir valores para x** e calcular o valor da função nesse ponto x.

Então **fique atento**. A banca pode cobrar essa construção de <u>duas maneiras</u>.

1. A banca pode te <u>dar uma função e perguntar qual gráfico</u>, dentre as alternativas, é o gráfico da função dada ou,

2. O enunciado pode <u>fornecer o gráfico e perguntar qual é a função</u> que aquele gráfico representa.

E não se esqueça do **comportamento da função logarítmica em função do valor da base** do logaritmo. Essas informações serão de grande valia para a resolução dos exercícios.

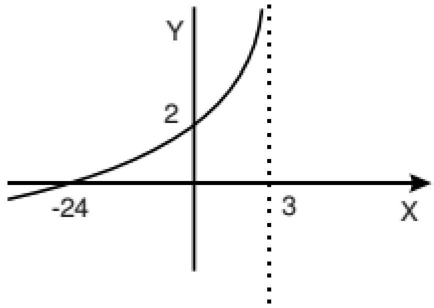
Vejamos <u>um exemplo de cada maneira</u> de como a prova pode abordar esse assunto.

Exemplo 6: A banca fornece a função e pergunta qual é o gráfico.

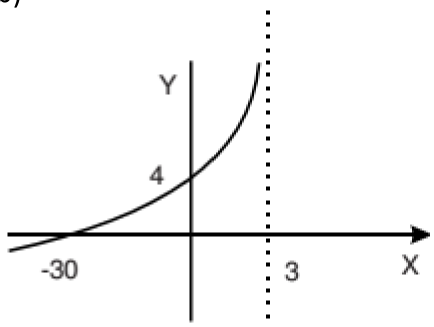
(UEPA – 2012) O gráfico que representa a função $f(x) = 3 - \log_3(3 - x)$

Uma aplicação de $f: R \to R$ é:

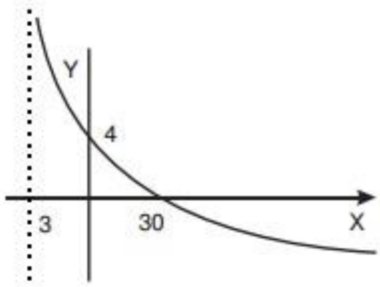
a)



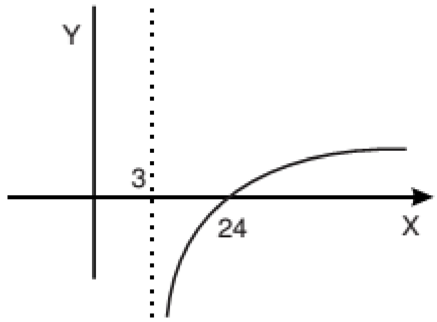
b)



c)



d)



Comentários:

A banca nos fornece a lei de formação da função logarítmica e nos questiona qual o gráfico que melhor a representa.

O **primeiro passo** é descobrir **em que ponto essa função intercepta o eixo das ordenadas**, isto é, em que ponto ela corta o eixo y. Lembrando que quando a função "corta" o eixo y, o valor de x é igual a zero.

- Para $x = 0$:

$$f(x) = 3 - \log_3(3 - x)$$

$$f(0) = 3 - \log_3(3 - 0)$$

$$f(0) = 3 - \log_3 3 = 3 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{f(0) = 2}$$

Ou seja, a função intercepta o eixo y no ponto $(0,2)$.

Perceba que só com essa informação já poderíamos marcar como gabarito a letra A.

Vamos agora descobrir o valor da função quando $y = 0$, isto é, quando a função intercepta o eixo x.

- Para $y = 0$:

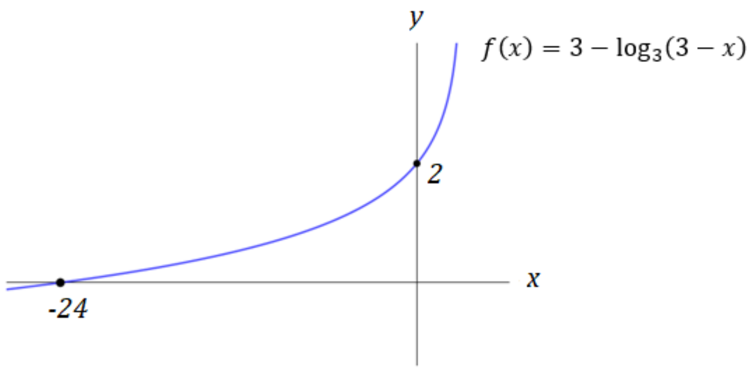
$$f(x) = 3 - \log_3(3 - x)$$

$$0 = 3 - \log_3(3 - x)$$

$$\log_3(3 - x) = 3$$

$$3 - x = 3^3 \quad \rightarrow \quad 3 - x = 27 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = -24}$$

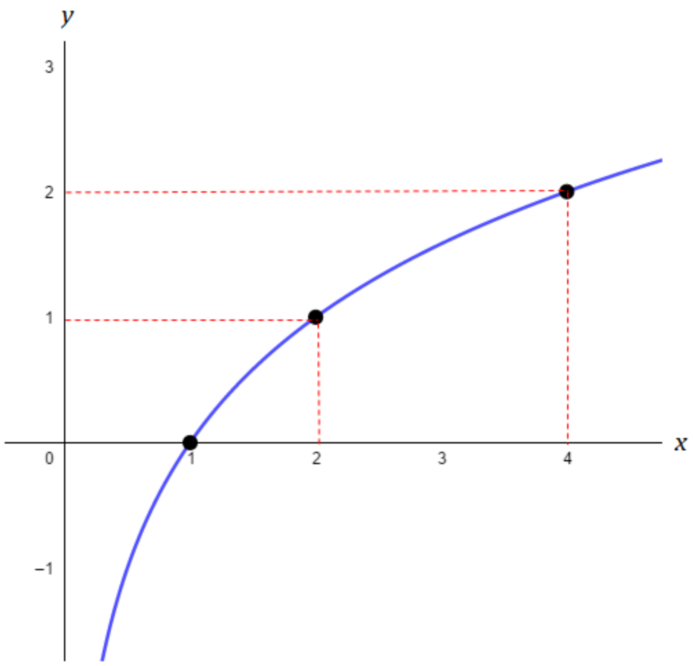
Então, o gráfico da função $f(x) = 3 - \log_3(3 - x)$ será igual a:



Gabarito: Alternativa **A**

Exemplo7: A banca fornece o gráfico e pergunta qual é a função.

(Gualimp - Adaptada / Prefeitura de Areal (RJ) – 2020) Considere a função $f: R \rightarrow R$ cujo o gráfico está esboçado abaixo.



Qual é a lei de formação da função?

a) $\log_2(x+1)$
b) $\log_2 x$
c) $\log x$
d) $\log_2 x + 1$

Comentários:

A lei de formação genérica de uma função logarítmica é igual a:

$$f(x) = \log_a(x+b)$$

Precisamos então calcular a e b. Perceba que quando $x = 1 \rightarrow y = 0$. Iremos substituir estes valores na função e calcular o valor de b.

$$f(x) = \log_a(x + b)$$

$$0 = \log_a(1 + b)$$

$$a^0 = 1 + b$$

$$1 = 1 + b \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{b = 0}}$$

E para calcular o valor de a, substituiremos outro ponto pertencente a função. Observe que quando $x = 2 \rightarrow y = 1$. Sendo assim, o valor de a será igual a:

$$f(x) = \log_a(x + b)$$

$$f(2) = \log_a(2 + 0)$$

$$1 = \log_a 2$$

$$a^1 = 2 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{a = 2}}$$

Logo, a **lei de formação** será igual a:

$$f(x) = \log_a(x + b)$$

$$f(x) = \log_2(x + 0) \quad \rightarrow \boldsymbol{f(x) = \log_2 x}$$

Gabarito: Alternativa **B**

6 - Função Logarítmica x Função Exponencial

Em aulas anteriores, estudamos o comportamento da função exponencial. E na aula de hoje, o comportamento da função logarítmica.

Iremos entender agora a relação entre essas duas funções.

No início da aula explicamos que **o logaritmo está intrinsicamente ligado à exponenciação**. A ideia do logaritmo é reverter a operação de exponenciação.

Na aula de **função exponencial**, aprendemos que a função:

$$g(x) = a^x$$

é uma função bijetora, e como tal, **admite função inversa**.

Calculando a função inversa de $g(x)$, teremos:

$$g(x) = a^x$$

$$y = a^x$$

$$x = a^{y^{-1}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y^{-1} = \log_a x}$$

Sendo assim, **a função logarítmica $f(x) = \log_a x$**, como demonstrado**, é a inversa da função exponencial $g(x) = a^x$**.

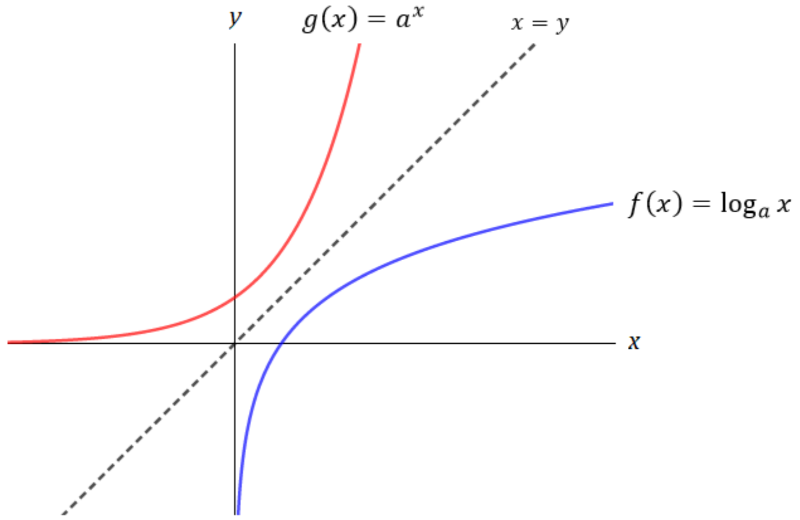
A função logarítmica $f(x)$ é inversa da função exponencial $g(x)$, ou seja, tais funções são simétricas em relação à reta xy (bissetriz dos quadrantes ímpares).

$$f(x) = \log_a x$$

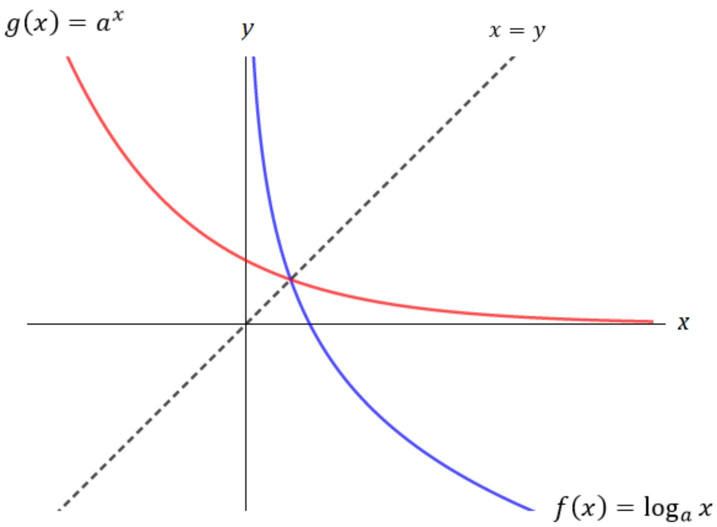
$$g(x) = a^x$$

Vamos analisar o gráfico dessas duas funções **em função da base a** do logaritmo.

1. $a > 1$



2. $\mathbf{0 < a < 1}$



EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Este tópico **sintetiza** toda a matéria até então estudada. Iremos resolver equações que apresentam logaritmo em seus termos.

O item 5 das consequências da definição do logaritmo (estudado no início da aula) nos diz que:

Dois logaritmos em uma mesma base são iguais, se e somente se, **os logaritmandos também forem iguais**.

$$\log_a x = \log_a y \quad \leftrightarrow \quad x = y$$

Podemos expandir essa igualdade também para as funções.

Assim,

$$\boldsymbol{\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad \leftrightarrow \quad f(x) = g(x)}$$

Alguns tipos de equações logarítmicas podem aparecer na sua prova.

Iremos enumerar **três tipos** e posteriormente comentar alguns exemplos que abordam os mais diversos modos de se resolver uma equação logarítmica. Depois dos exemplos, resolveremos algumas questões de concurso sobre o tema.

Lembre-se sempre de que, para cada tipo estudado, estamos adotando a **condição de existência do logaritmo**, isto é, base maior que 0 e diferente de 1 e logaritmando maior que 1.

logaritmando

$\log_a f(x)$ *Condição de existência:* $a > 0 \text{ e } a \neq 1 \text{ e } f(x) > 0$

base

I. Igualdade entre logaritmos de mesma base

É uma equação que apresenta igualdade de logaritmos do tipo:

$$\boldsymbol{\log_a f(x) = \log_a g(x)}$$

II. Igualdade entre um logaritmo e um número

Para resolver este tipo, aplicamos a definição de logaritmo.

$$\boldsymbol{\log_a f(x) = b \quad \rightarrow \quad f(x) = a^b}$$

III. Mudança para uma incógnita auxiliar

Para resolver este tipo de equação, tomaremos como artifício o uso de uma incógnita auxiliar para facilitar nossa solução.

São equações do tipo:

$$\boldsymbol{(\log_a x)^2 + \log_a x = b}$$

Vamos resolver alguns exemplos que abordam todos esses tipos para fixar a matéria. Atente-se que neste tópico, como falado acima, utilizaremos todo o conteúdo até aqui estudado.

As propriedades do logaritmo serão usadas exaustivamente, assim como a condição de existência do logaritmo, isto é, base maior que 0 e diferente de 1 e logaritmando maior que 1.

Também iremos utilizar a **definição de logaritmo** e as **consequências** decorrentes da definição.

Então é muito importante que você esteja familiarizado com cada propriedade do logaritmo para não se perder na resolução.

Exemplo 1: Obtenha o conjunto solução das equações abaixo:

a) $\log(4x - 9) = \log 71$

Observe que as bases são iguais, isto é, há igualdade entre dois logaritmos de mesma base (tipo I). Então,

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

$$f(x) = g(x)$$

$$4x - 9 = 71$$

$$4x = 80 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 20}$$

Conjunto Solução: $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{20}\}$

b) $\log_3(x + 17) = 5$

Igualdade entre um logaritmo e um número (tipo II).

Resolveremos pela definição de logaritmo:

$$\log_3(x + 7) = 5$$

$$x + 7 = 3^5$$

$$x + 7 = 243 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \mathbf{236}$$

Conjunto Solução: $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{236}\}$

c) $(\log_3 x)^2 - 5\log_3 x = -6$

Vamos utilizar uma incógnita auxiliar para solucionar esta equação (tipo III).

Chamaremos $\log_3 x$ de y.

$$y = \log_3 x$$

Substituindo na equação e calculando o valor de y.

$$(\log_3 x)^2 - 5\log_3 x = -6$$

$$y^2 - 5y = -6$$

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

Duas raízes que apresentam soma 5 e produto 6.

$$\boldsymbol{y_1} = \mathbf{2} \quad e \quad \boldsymbol{y_2} = \mathbf{3}$$

Iremos substituir na nossa igualdade auxiliar e calcular os valores de x que satisfazem a igualdade.

$$y = \log_3 x \begin{cases} 2 = \log_3 x \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 9} \\ 3 = \log_3 x \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 27} \end{cases}$$

Conjunto Solução: $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{9}\,,\mathbf{27}\}$

d) $\log_2(x-3) + \log_2 12 = \log_2(x+1)$

Aplicando a "volta" da <u>propriedade do logaritmo do produto</u> e desenvolvendo a equação teremos:

$$\log_2(x-3) + \log_2 12 = \log_2(x+1)$$

$$\log_2[(x-3) * 12] = \log_2(x+1)$$

$$[(x-3) * 12] = \ x + 1$$

$$12x - 36 = x + 1$$

$$11x = 37 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{37}}{\mathbf{11}}$$

Conjunto Solução: $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{37/11}\}$

Vejamos como esse assunto já foi <u>cobrado em prova</u>.

(FUNDATEC - 2019) A solução da equação logarítmica $\mathbf{\log_{10}(x-4) = 2}$ é:

a) $x = 6$
b) $x = 10$
c) $x = 50$
d) $x = 100$
e) $x = 104$

Comentários:

Perceba que é uma equação logarítmica onde há a igualdade entre um logaritmo e um número. Resolveremos pela definição de logaritmo.

$$\log_{10}(x-4)=2$$

$$x-4=10^2$$

$$x-4=100 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x=104}$$

Gabarito: Alternativa **E**

(CETREDE - 2019) Pode-se afirmar que o conjunto verdade da equação $\log x+\log(x+1)-\log 6=0$ é igual a:

a) $\{3\}$
b) $\{2\,,-3\}$
c) $\{2\}$
d) $\{-2\,,3\}$
e) $\{2\,,3\}$

Comentários:

Antes de começar a resolver, perceba que **não poderíamos jamais marcar as letras B ou D** como gabarito.

Observe o segundo fator da soma:

$$\log(x+1)$$

O logaritmando tem que ser maior que 0 como condição de existência. Assim,

$$x+1>0$$

$$\boldsymbol{x>-1}$$

Ou seja, x tem que ser maior que -1 e as letra B e D apresentam -2 e -3 como solução, o que é impossível para nossa condição de existência.

Vamos trabalhar algebricamente com a igualdade e calcular o valor de x. Acompanhe.

$$\log x+\log(x+1)-\log 6=0$$

$$\log(x^2+x)=\log 6$$

$$x^2 + x = 6$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

Resolvendo por Bhaskara:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 * 1 * (-6)}}{2 * 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1-5}{2} & \rightarrow \cancel{\boldsymbol{x_1 = -3}} \\ x_2 = \dfrac{-1+5}{2} & \rightarrow \boldsymbol{x_2 = 2} \end{cases}$$

Em um primeiro momento você poderia ir direto e marcar a letra B. Porém, vimos acima que para a condição de existência do logaritmo, x deve ser maior que -1.

Sendo assim, a solução $\boldsymbol{x_1 = -3}$ está **descartada**.

Nosso conjunto solução da equação será:

$$\boldsymbol{S = \{2\}}$$

Gabarito: Alternativa **C**

(AMAUC - 2019) Seja a equação logarítmica $(\log_2 x)^2 - 6 * \log_2 x + 8 = 0$. O conjunto solução é:

a) $\{6\ e\ 8\}$
b) $\{4\ e\ 16\}$
c) $\{2\ e\ 4\}$
d) $\{-6\ e\ 8\}$
e) $\{4\ e - 16\}$

Comentários:

Para esta questão, usamos o mesmo raciocínio inicial da questão acima. **Jamais poderíamos marcar a letra D ou a E** na prova.

A condição de existência do logaritmo nos impõe que o logaritmando deve ser maior que 0. Observe o seguinte fator da equação:

$$\log_2 x$$

O logaritmando tem que ser maior que 0, como condição de existência. Assim,

$$\boldsymbol{x > 0}$$

As letras D e E apresentam valores menores que 0 como solução. Ou seja, jamais poderiam ser marcadas.

Vamos utilizar uma incógnita auxiliar para solucionar esta equação.

Chamaremos $\log_2 x$ de y.

$$y = \log_2 x$$

Substituindo na equação e calculando o valor de y.

$$(\log_2 x)^2 - 6 * \log_2 x + 8 = 0$$

$$y^2 - 6y + 8 = 0$$

Duas raízes que apresentam soma 6 e produto 8.

$$y_1 = 4 \quad e \quad y_2 = 2$$

Mas, $y = \log_2 x$. Calculando x:

$$y = \log_2 x \begin{cases} 4 = \log_2 x & \rightarrow \boldsymbol{x = 16} \\ 2 = \log_2 x & \rightarrow \boldsymbol{x = 4} \end{cases}$$

Gabarito: Alternativa **B**

(CESPE - 2018) O número de Euler, nome dado em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, é um número irracional denotado por e, cuja representação decimal tem seus 4 primeiros algarismos dados por 2,718. Esse número é a base dos logaritmos naturais, cuja função $f(x) = \ln x = \log_e x$ tem inúmeras aplicações científicas.

A respeito desse assunto, julgue o item a seguir.

A equação $\ln x = -4$ tem uma única solução.

Comentários:

Perceba que é uma equação logarítmica onde há a igualdade entre um logaritmo e um número. Resolveremos pela definição de logaritmo.

$$\ln x = -4 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = e^{-4}}$$

Então, há sim **apenas uma única** solução.

Gabarito: **Correto**

(OBJETIVA - 2015) Assinalar a alternativa que apresenta os resultados possíveis para a equação logarítmica abaixo:

$$\boldsymbol{\log_{(10-x)}(x^2 + 2x) = 1}$$

a) $x = -5 \; e \; x = 2$
b) $x = -3 \; e \; x = 2$
c) $x = -5 \; e \; x = 1$
d) $x = -3 \; e \; x = 1$

Comentários:

Observe que é uma equação logarítmica onde há a igualdade entre um logaritmo e um número.

Resolveremos pela definição de logaritmo.

$$\log_{(10-x)}(x^2 + 2x) = 1$$

$$x^2 + 2x = 10 - x$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

Duas raízes que apresentam soma -3 e produto -10.

$$\boldsymbol{x_1 = -5} \; e \; \boldsymbol{x_2 = 2}$$

Gabarito: Alternativa **A**

(CPCON - 2019) O conjunto solução da equação $\log_2(x^2 - 9x + 18) - \log_2(x - 6) = \log_2 8$, é:

a) $S = \{12\}$
b) $S = \{7\}$
c) $S = \{9\}$
d) $S = \{3\}$
e) $S = \{11\}$

Comentários:

Vamos aplicar a "volta" da propriedade do logaritmo do quociente e calcular o valor de x.

$$\log_2(x^2 - 9x + 18) - \log_2(x - 6) = \log_2 8$$

$$\log_2\left(\frac{x^2 - 9x + 18}{x - 6}\right) = \log_2 8$$

$$\frac{x^2 - 9x + 18}{x - 6} = 8$$

$$x^2 - 9x + 18 = 8x - 48$$

$$x^2 - 17x + 66 = 0$$

Resolvendo por Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 * 1 * 66}}{2 * 1}$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 264}}{2}$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x = \frac{17 \pm 5}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{17 + 5}{2} \rightarrow \boldsymbol{x_1 = 11} \\ x_2 = \dfrac{17 - 5}{2} \rightarrow \cancel{\boldsymbol{x_2 = 6}} \end{cases}$$

Encontramos 2 valores possíveis para x. Mas observe o segundo fator da equação:

$$\log_2(x-6)$$

O logaritmando tem que ser maior que 0, como condição de existência. Assim,

$$x-6>0$$

$$\boldsymbol{x>6}$$

Observe que $x_2=6$ não pode ser solução para nossa equação pois, como calculamos pela condição de existência, x tem que ser maior que 6. Logo, $\boldsymbol{x_2}$ **está descartado**.

Sendo assim, o conjunto solução para nossa equação será:

$$\boldsymbol{S=\{11\}}$$

Gabarito: Alternativa **E**

(CESGRANRIO - 2017) Qual o maior valor de k na equação $\boldsymbol{\log(kx)=2\log(x+3)}$ para que ela tenha exatamente uma raiz?

a) 0
b) 3
c) 6
d) 9
e) 12

Comentários:

Vamos aplicar a "volta" da propriedade do logaritmo da potência e calcular o valor de k para que a equação tenha exatamente uma raiz.

Obs: Houve uma imprecisão terminológica. A banca quis dizer "duas raízes reais e iguais" no lugar de "uma raiz".

$$\log(kx)=2\log(x+3)$$

$$\log(kx)=\log(x+3)^2$$

$$kx=(x+3)^2$$

$$kx=x^2+6x+9$$

$$x^2 + (6 - k)x + 9 = 0$$

Para que a equação tenha exatamente uma raiz, o delta de Bhaskara tem que ser igual a 0.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

$$(6 - k)^2 - 4 * 1 * 9 = 0$$

$$36 - 12k + k^2 - 36 = 0$$

$$k^2 - 12k = 0$$

$$k(k - 12) = 0$$

$$k = 0 \quad ou \quad k = 12$$

Então, o maior valor para k será:

$$\boldsymbol{k = 12}$$

Gabarito: Alternativa **E**

Inequações Logarítmicas

São **desigualdades** que apresentam logaritmos em um dos seus termos.

Assim, como estudado nas equações logarítmicas, vamos dividir as inequações em três tipos:

I. Desigualdades entre logaritmos de mesma base

$$\boxed{\log_a f(x) > \log_a g(x)}$$

Neste item, 2 pontos (a depender do valor da base) devem ser considerados.

Estudamos que quando a base a do logaritmo é maior que 1 $(a > 1)$ a função é crescente e quando a base a está entre 0 e 1 $(0 < a < 1)$ a função é decrescente.

Relembrando:

- Se $\boldsymbol{a > 1}$, a função será **crescente** e dado $\boldsymbol{x_2 > x1 \rightarrow f(x_2) > f(x_1)}$.
- Se $\boldsymbol{0 < a < 1}$, a função será **decrescente** e dado $\boldsymbol{x_2 > x1 \rightarrow f(x_2) < f(x_1)}$.

1. $a > 1$

Quando a base é maior que 1, iremos **MANTER** o sentido da desigualdade.

$$Se\ a > 1 \quad , \quad \log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \rightarrow \quad f(x) > g(x)$$

2. $0 < a < 1$

Quando a base é um número entre 0 e 1, iremos **INVERTER** o sentido da desigualdade.

$$Se\ 0 < a < 1 \quad , \quad \log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \rightarrow \quad 0 < f(x) < g(x)$$

FIQUE ATENTO!

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \begin{cases} Se\ \boldsymbol{a > 1} \ \rightarrow\ f(x) > g(x) \quad \boldsymbol{mantém}\ a\ desigualdade \\ Se\ \boldsymbol{0 < a < 1} \ \rightarrow\ 0 < f(x) < g(x) \quad \boldsymbol{inverte}\ a\ desigualdade \end{cases}$$

II. Desigualdade entre um logaritmo e um número

$$\boxed{\log_a f(x) \lesseqgtr k}$$

Para resolver este tipo de desigualdade, utilizaremos a definição de logaritmo.

Porém, assim como estudado no item acima, iremos inverter ou não o sinal da desigualdade a depender do valor da base a do logaritmo.

Quando a **base for maior que 1**, iremos **MANTER** o sentido da desigualdade. Enquanto que, quando **a base for um número entre 0 e 1**, iremos **INVERTER** o sentido da desigualdade.

Sintetizando teremos:

$$\log_a f(x) > k \begin{cases} Se\ \boldsymbol{a > 1} \ \rightarrow\ f(x) > a^k \quad mantém\ o\ sinal \\ Se\ \boldsymbol{0 < a < 1} \ \rightarrow\ 0 < f(x) < a^k \quad inverte\ o\ sinal \end{cases}$$

Observe que podemos ter também o caso de $\log_a f(x) < k$. Mas a ideia permanece a mesma. Mantém o sinal quando a base é maior que 1 e inverte quando a base estiver entre 0 e 1.

Vejamos:

$$\log_a f(x) < k \begin{cases} Se\ \boldsymbol{a > 1} \ \rightarrow\ 0 < f(x) < a^k \quad mantém\ o\ sinal \\ Se\ \boldsymbol{0 < a < 1} \ \rightarrow\ f(x) > a^k \quad inverte\ \ sinal \end{cases}$$

III. Mudança para uma incógnita auxiliar

Para resolver este tipo de equação, assim como nas equações logarítmicas, tomaremos como artifício o uso de uma incógnita auxiliar para facilitar nossa solução.

Nas **inequações logarítmicas** iremos calcular também a **condição de existência de cada fator** que apresenta o logaritmo em seu termo.

Calcularemos o **intervalo solução** para cada logaritmando e também o intervalo solução da inequação.

E nossa **resposta** será a interseção desses intervalos.

Vejamos nos exemplos e nas questões de provas solucionadas abaixo como devemos proceder.

Exemplo 1: Calcule o conjunto solução das inequações abaixo:

a) $\log_5(2x+5) < 2$

Vamos fazer o estudo do logaritmando da função e depois o estudo da inequação para calcularmos o conjunto solução.

- $(I) - \log_5(2x+5)$

Estudamos na condição de existência do logaritmo que o logaritmando deve ser maior que 0. Logo,

$$2x + 5 > 0$$

$$2x > -5$$

$$\boldsymbol{x > -\frac{5}{2}}$$

- $(II) - \log_5(2x+5) < 2$

Observe que se trata de uma inequação do tipo II, isto é, desigualdade entre um logaritmo e um número.

Utilizaremos a definição de logaritmo para calcular o valor de x que satisfaz a inequação. E nesse caso, **a base é maior que 1**, ou seja, iremos **MANTER** o sinal da desigualdade.

Relembrando a teoria:

$$\log_a f(x) < k \begin{cases} Se\ \boldsymbol{a > 1} \rightarrow 0 < f(x) < a^k \quad mantém\ o\ sinal \\ Se\ \boldsymbol{0 < a < 1} \rightarrow f(x) > a^k \quad inverte\ sinal \end{cases}$$

Calculando x teremos:

$$\log_5(2x+5) < 2$$

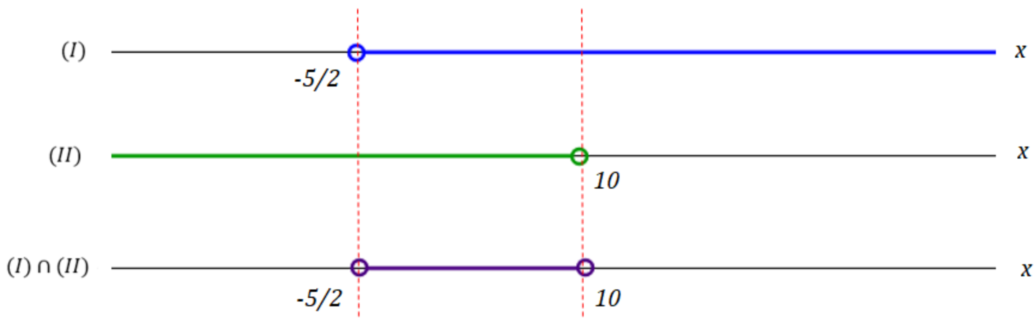
$$2x+5 < 5^2$$

$$2x+5 < 25$$

$$2x < 20$$

$$\boldsymbol{x < 10}$$

Vamos fazer o estudo das soluções na reta e calcular a interseção das duas soluções.



Sendo assim, o conjunto solução da inequação será:

$$\boldsymbol{S = -\frac{5}{2} < x < 10}$$

b) $\log_{1/2}(3x-2) < \log_{1/2} 7$

Vamos fazer o estudo do logaritmando da função e depois o estudo da inequação para calcularmos o conjunto solução.

- $(I) - \log_{1/2}(3x-2)$

Estudamos na condição de existência do logaritmo que o logaritmando deve ser maior que 0. Logo,

$$3x - 2 > 0$$

$$3x > 2$$

$$\boldsymbol{x > \frac{2}{3}}$$

- $(II) - \log_{1/2}(3x-2) < \log_{1/2} 7$

Observe que se trata de uma inequação do tipo I, isto é, desigualdade entre logaritmos de mesma base. E nesse caso, **a base do logaritmo está entre 0 e 1**. Logo, devemos **INVERTER** o sinal da desigualdade.

Relembrando a teoria:

$$\boldsymbol{\log_a f(x) > \log_a g(x)} \begin{cases} Se\ \boldsymbol{a > 1} \rightarrow f(x) > g(x) \quad mantém\ a\ desigualdade \\ Se\ \boldsymbol{0 < a < 1} \rightarrow 0 < f(x) < g(x) \quad inverte\ a\ desigualdade \end{cases}$$

Resolvendo a inequação:

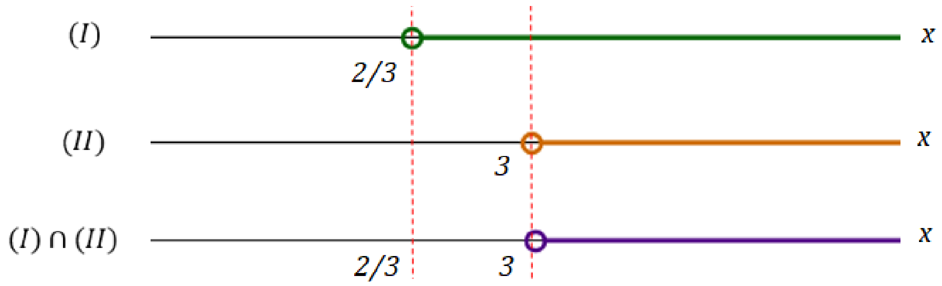
$$\log_{1/2}(3x-2) < \log_{1/2} 7$$

$$3x - 2 > 7$$

$$3x > 9$$

$$\boldsymbol{x > 3}$$

Vamos fazer o estudo das soluções na reta e calcular a interseção das duas soluções.



Sendo assim, o conjunto solução da inequação será:

$$\boldsymbol{S = x > 3}$$

c) $(\log_2(x))^2 - 5 * \log_2(x) + 6 > 0$

Mesmo procedimento dos outros dois exemplos. Vamos fazer o estudo do logaritmando da função e depois o estudo da inequação para calcularmos o conjunto solução.

Como os dois fatores que apresentam logaritmos são iguais, o estudo de um será igual ao do outro.

- $(I) - \log_2(x)$

Estudamos na condição de existência do logaritmo que o logaritmando deve ser maior que 0. Logo,

$$\boldsymbol{x > 0}$$

- $(II) - (\log_2(x))^2 - 5 * \log_2(x) + 6 > 0$

Observe que se trata de uma inequação do tipo III, isto é, necessitaremos de uma incógnita auxiliar para nos ajudar a encontrar o conjunto solução.

Vamos chamar $\log_2(x)$ de y e resolver para y.

$$y = \log_2(x)$$

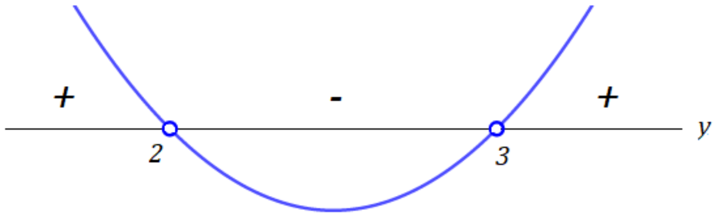
$$y^2 - 5y + 6 > 0$$

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

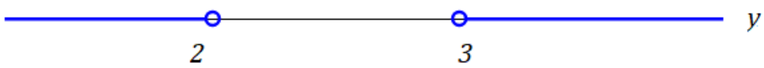
Duas raízes que a soma seja 5 e o produto 6.

$$\boldsymbol{y_1 = 2 \quad e \quad y_2 = 3}$$

Faremos o estudo de y na reta. Trata-se de uma parábola com concavidade voltada para cima e raízes em 2 e 3.



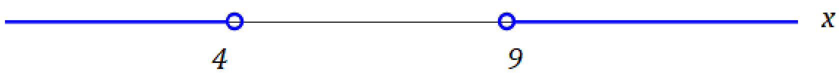
Para ser maior que 0, nosso intervalo será o intervalo positivo, isto é, o intervalo menor que 2 e o intervalo maior que 3.



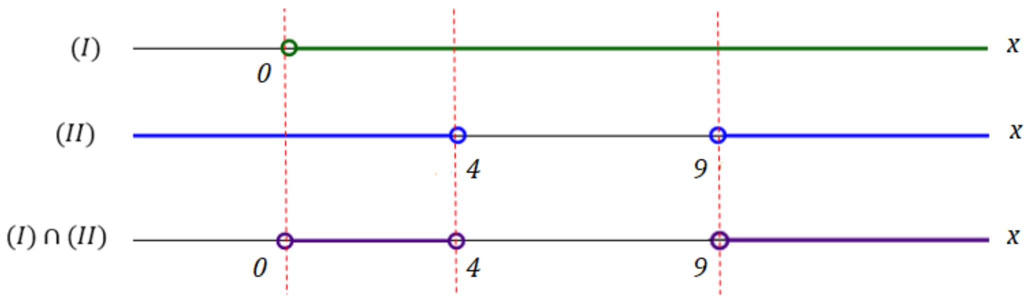
Porém, precisamos fazer o estudo da inequação em x. Sabemos que:

$$y = \log_2(x) \rightarrow \begin{cases} 2 = \log_2(x) & \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 4} \\ 3 = \log_2(x) & \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 9} \end{cases}$$

Logo, nossa reta em x será:



Vamos fazer o estudo das soluções na reta e calcular a interseção das duas soluções.



Sendo assim, o conjunto solução será igual a:

$$\boldsymbol{S = 0 < x < 4 \;\; ou \;\; x > 9}$$

Vamos analisar como este assunto é cobrado em prova.

(COTEC - 2020) Resolvendo-se a inequação $\log 2x > \log(x+1)$, obtemos:

a) $S = \{x \in R \mid x < -1\}$
b) $S = \{x \in R \mid x > -1\}$
c) $S = \{x \in R \mid x > 1\}$
d) $S = \{x \in R \mid x > 1/2\}$
e) $S = \{x \in R \mid x < 1/2\}$

Comentários:

Vamos fazer o estudo do logaritmando das duas funções e depois o estudo da inequação para calcularmos o conjunto solução.

- $(I) - \log 2x$

Estudamos na condição de existência do logaritmo que o logaritmando deve ser maior que 0. Logo,

$$2x > 0$$

$$\boldsymbol{x > 0}$$

- $(II) - \log(x+1)$

Sendo o logaritmando maior que 0:

$$x + 1 > 0$$

$$\boldsymbol{x > -1}$$

- $(III) - \log 2x > \log(x+1)$

Relembrando a teoria:

$$\boldsymbol{\log_a f(x) > \log_a g(x)} \begin{cases} Se\ \boldsymbol{a > 1} \ \rightarrow \ f(x) > g(x) \quad mantém\ a\ desigualdade \\ Se\ \boldsymbol{0 < a < 1} \ \rightarrow \ 0 < f(x) < g(x) \quad inverte\ a\ desigualdade \end{cases}$$

Como a base do logaritmo (10) é maior que 1, a desigualdade se mantém.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \rightarrow \quad f(x) > g(x)$$

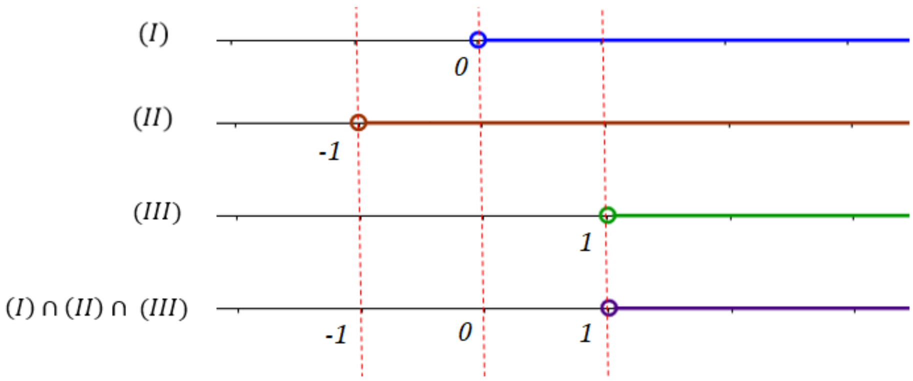
$$\log 2x > \log(x+1)$$

$$2x > x + 1$$

$$\boldsymbol{x > 1}$$

Então, chegamos a <u>três soluções distintas</u> para nosso valor de x.

Vamos fazer o estudo das soluções na reta e calcular a interseção das três soluções.



Sendo assim, o conjunto solução será igual a:

$$\boldsymbol{S = \{x \in R \mid \; x > 1\}}$$

Gabarito: Alternativa **C**

(FGV - 2013) Considere a desigualdade:

$$\boldsymbol{\log_{2013}(\log_{2014}(\log_{2015} x)) > 0}$$

O menor valor inteiro x que satisfaz essa desigualdade é:

a) $2013^{2014} + 1$
b) $2014^{2013} + 1$
c) $2014^{2015} + 1$
d) $2015^{2014} + 1$
e) 2016

Comentários:

Vamos resolver normalmente pela definição de logaritmo e, como as **bases são maiores que 1**, iremos **MANTER** o sinal da desigualdade.

$$\log_{2013}(\log_{2014}(\log_{2015} x)) > 0$$

$$\log_{2014}(\log_{2015} x) > 2013^0$$

$$\log_{2014}(\log_{2015} x) > 1$$

$$\log_{2015} x > 2014$$

$$\boldsymbol{x > 2015^{2014}}$$

Perceba que x tem que ser maior que esse número. O primeiro inteiro maior que esse número é igual a esse número somado a unidade.

Sendo assim, o conjunto solução pedido no enunciado será:

$$\boldsymbol{S = 2015^{2014} + 1}$$

Gabarito: Alternativa **D**

▪

(FUNCAB - 2014) Resolva a inequação abaixo:

$$\boldsymbol{\log_{0,5}(x-1) > 2}$$

a) $]1\,,5/4[$
b) $]1\,,+\infty[$
c) $]-\infty\,,5/4[$
d) $]-\infty\,,1[$
e) $]5/4\;,+\infty[$

Comentários:

Vamos fazer o estudo do logaritmando da função e posteriormente o estudo da inequação logarítmica.

- (I) - $\log_{0,5}(x-1)$

Estudamos que o logaritmando deve ser maior que 0. Logo,

$$x - 1 > 0$$

$$\boldsymbol{x > 1}$$

- (II) - $\log_{0,5}(x-1) > 2$

Vamos resolver pela definição de logaritmo. Porém, como **a base do logaritmo está entre 0 e 1**, iremos **INVERTER** o sinal da desigualdade.

Relembrando a teoria:

$$\boldsymbol{\log_a f(x) > k} \begin{cases} Se\ \boldsymbol{a > 1} \rightarrow f(x) > a^k \ \ mantém\ o\ sinal \\ Se\ \boldsymbol{0 < a < 1} \rightarrow 0 < f(x) < a^k \ \ inverte\ o\ sinal \end{cases}$$

Então,

$$\log_{0,5}(x-1) > 2$$

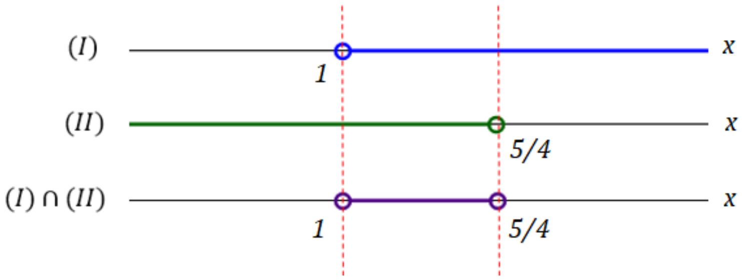
$$x - 1 < 0{,}5^2$$

$$x - 1 < \frac{1}{4}$$

$$x < \frac{1}{4} + 1$$

$$\boldsymbol{x < \frac{5}{4}}$$

Vamos fazer o estudo das duas soluções na reta e achar a interseção delas (que será nosso resultado).



Logo, o conjunto solução será igual a:

$$\boldsymbol{S = \left]1\,,\frac{5}{4}\right[}$$

Gabarito: Alternativa **A**

(MOURA MELO - 2011) Resolvendo em R a inequação logarítmica:

$$\log_2(x-3) - \log_2(x-4) < 3$$

Obtém-se:

a) $\{x \in R \mid x > 29/7\}$
b) $\{x \in R \mid 4 < x < 29/7\}$
c) $\{x \in R \mid 4 \leq x \leq 29/7\}$
d) $\{x \in R \mid x < 4\}$

Comentários:

Vamos fazer o estudo do logaritmando das duas funções e depois o estudo da inequação para calcularmos o conjunto solução.

- $\log_2(x-3)$

Estudamos que o logaritmando tem que ser maior que 0. Então,

$$x - 3 > 0$$

$$\boldsymbol{x > 3}$$

- $\log_2(x-4)$

Novamente, temos que o logaritmando deve ser maior que 0.

$$x - 4 > 0$$

$$\boldsymbol{x > 4}$$

- $\log_2(x-3) - \log_2(x-4) < 3$

Vamos resolver pela definição de logaritmo. A **base do logaritmo é maio que 1**, então, iremos **MANTER** o sinal da desigualdade.

Relembrando a teoria:

$$\boldsymbol{\log_a f(x) < k} \begin{cases} Se\ \boldsymbol{a > 1} \ \rightarrow \ 0 < f(x) < a^k \ \ mantém\ o\ sinal \\ Se\ \boldsymbol{0 < a < 1} \ \rightarrow \ f(x) > a^k \ \ inverte\ \ sinal \end{cases}$$

Iremos aplicar a "volta" da propriedade do logaritmo do quociente e resolver para x.

$$\log_2(x-3) - \log_2(x-4) < 3$$

$$\log_2\left(\frac{x-3}{x-4}\right) < 3$$

$$\frac{x-3}{x-4} < 2^3$$

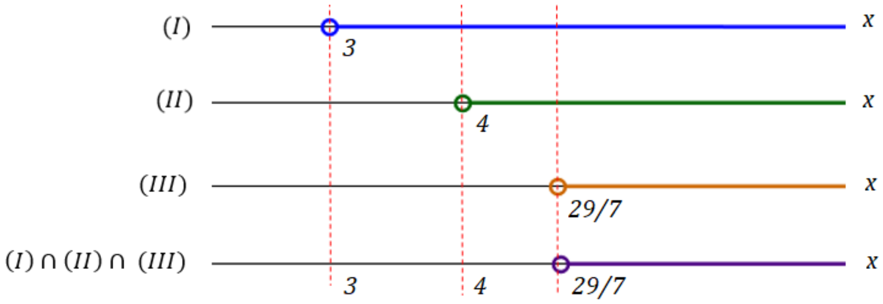
$$\frac{x-3}{x-4} < 8$$

$$x - 3 < 8x - 32$$

$$29 < 7x$$

$$\frac{29}{7} < x \;\; ou \; \boldsymbol{x} > \frac{\mathbf{29}}{\mathbf{7}}$$

Vamos fazer o estudo das três soluções na reta e achar a interseção delas (que será nosso resultado).



Sendo assim, o conjunto solução será igual a:

$$\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} \mid \; \boldsymbol{x} > \mathbf{29/7}\}$$

Gabarito: Alternativa **A**

Chegamos ao final da teoria. Iremos comentar agora uma **bateria de questões de concursos** que sintetizam todo o conteúdo estudado.

Vamos juntos!

QUESTÕES COMENTADAS - BANCAS DIVERSAS

Logaritmos

1. **(CRS / PM MG - 2022) Nas atividades de defesa civil é muito comum a utilização de sismógrafos para estimar as possibilidades de terremotos e sua magnitude e, assim, adotar medidas de contingência visando a redução de danos. A Escala de Magnitude de Momento (M_W) mede a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Ela é a escala mais utilizada na atualidade e é uma escala logarítmica em que M_W e M_0 se relacionam pela fórmula: $M_W = -10,7 + \frac{2}{3}\log(M_0)$. Nessa fórmula, M_0 é o momento sísmico (estimado com base nos registros de movimento da superfície por meio dos sismógrafos).**

Sabendo que um terremoto teve a magnitude M_W de 5,3 dina. cm qual foi o valor do seu momento sísmico M_0 registrado no sismógrafo?

a) $10^{-0,73}$
b) 10^{12}
c) 10^{24}
d) 10^{21}

Comentários:

Vamos substituir $M_W = 5{,}3$ na fórmula e calcular M_0:

$$M_W = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log(M_0)$$

$$5{,}3 = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log(M_0)$$

$$\frac{2}{3}\log(M_0) = 16$$

$$\log(M_0) = \frac{16 \times 3}{2}$$

$$\log(M_0) = 24 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M_0 = 10^{24}}$$

Gabarito: Alternativa **C**

2. (INEP / ENEM - 2019) A Hydrangea macrophylla é uma planta com flor azul ou cor-de-rosa, dependendo do pH do solo no qual está plantada. Em solo ácido (ou seja, com $pH < 7$) a flor é azul, enquanto que em solo alcalino (ou seja, com $pH > 7$) a flor é rosa. Considere que a Hydrangea cor-de-rosa mais valorizada comercialmente numa determinada região seja aquela produzida em solo com pH inferior a 8. Sabe-se que $pH = -\log_{10} x$, em que x é a concentração de íon hidrogênio (H +).

Para produzir a Hydrangea cor-de-rosa de maior valor comercial, deve-se preparar o solo de modo que x assuma

a) qualquer valor acima de 10^{-8}.
b) qualquer valor positivo inferior a 10^{-7}.
c) valores maiores que 7 e menores que 8.
d) valores maiores que 70 e menores que 80.
e) valores maiores que 10^{-8} e menores que 10^{-7}.

Comentários:

Observe que a Hydrangea cor-de-rosa mais valorizada é produzida em solo com pH inferior a 8. Porém, este não pode ser inferior a 7, uma vez que, se for, a flor será de cor azul.

Então, o pH para o preparo deve ser inferior a 8 mas também maior que 7.

$$\boxed{\mathbf{7 < pH < 8}}$$

A banca nos informa que $pH = -\log_{10} x$.

$$7 < pH < 8$$

$$7 < -\log_{10} x < 8$$

Vamos multiplicar por -1 e inverter o sinal da desigualdade:

$$7 < -\log_{10} x < 8 \quad \times(-1)$$

$$-7 > \log_{10} x > -8$$

$$\mathbf{10^{-7} > x > 10^{-8}}$$

Logo, deve-se preparar o solo de modo que **x assuma valores maiores que 10^{-8} e menores que 10^{-7}.**

Gabarito: Alternativa **E**

3. **(CEV / Pref. Brejo Santo) Considere a função $\boldsymbol{f}: (\mathbf{0}, +\infty) \to (\mathbf{0}, +\infty)$ dada por $\boldsymbol{f(x) = \log_7 x}$. Qual o valor de $\boldsymbol{\log_9 f(343)}$?**

a) 1
b) 2/3
c) 7
d) 1/2
e) 2

Comentários:

Primeiro, vamos calcular $f(343)$.

$$y = \log_7 x$$

$$f(343) = y = \log_7 343$$

$$7^y = 343 \quad \to \boxed{\boldsymbol{y = 3}}$$

Ou seja, $f(343) = 3$. De posse desse resultado, calculamos $\log_9 f(343)$.

$$\log_9 f(343) = \log_9 3$$

9 elevado a que número é igual a 3:

$$\log_9 f(343) = \log_9 3 \quad \to \boldsymbol{\log_9 f(343) = \frac{1}{2}}$$

Gabarito: Alternativa **D**

4. **(DECEx / EsPCEx - 2020) Seja $\boldsymbol{f}$ a função quadrática definida por $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 + \left(\log_{\frac{1}{3}} k\right) x + 2}$, com $\boldsymbol{k \in R}$ e $\boldsymbol{k > 0}$. O produto dos valores reais de $\boldsymbol{k}$ para os quais a função $\boldsymbol{f(x)}$ tem uma raiz dupla é igual a**

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Comentários:

Temos a função quadrática:

$$f(x) = 2x^2 + \left(\log_{\frac{1}{3}} k\right) x + 2$$

Em que os coeficientes são: $a = 2, b = \left(\log_{\frac{1}{3}} k\right)$ e $c = 2$.

Inicialmente, temos que ter em mente que, para uma função quadrática aprensentar uma raiz dupla, o delta de Bhaskara há de ser igual a zero.

$$\Delta = \mathbf{0}$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

Vamos então substituir os valores e constatar para quais valores de k ocorre a igualdade acima.

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$\left(\log_{\frac{1}{3}} k\right)^2 - 4(2)(2) = 0$$

$$\left(\log_{\frac{1}{3}} k\right)^2 - 16 = 0$$

$$\left(\log_{\frac{1}{3}} k\right)^2 = 16$$

$$\log_{\frac{1}{3}} k = \pm\sqrt{16}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} k = \pm 4 \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} k_1 = 4 \rightarrow k_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{k_1 = \frac{1}{3^4}}} \\ \log_{\frac{1}{3}} k_2 = -4 \rightarrow k_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{k_2 = 3^4}} \end{cases}$$

Esses são os valores de k que satisfazem a condição pedida no enunciado. Todavia, **a banca nos questiona qual é o produto dos valores de $\boldsymbol{k}$.**

$$k_1 \times k_2 = \frac{1}{3^4} \times 3^4 \rightarrow \boldsymbol{k_1 \times k_2 = 1}$$

Gabarito: Alternativa **A**

5. (PICSIS / São Leopoldo MANDIC - 2018) É sabido que a energia E liberada por um terremoto pode ser medida pela relação

$$M_L = \frac{2}{3} \cdot \log_{10}\left(\frac{100}{7} \cdot E\right)$$

sendo E medido em quilowatt-hora, e M_L a magnitude do terremoto na Escala Richter. Sendo assim, a energia que é liberada por um terremoto de magnitude 5 na Escala Richter, quando comparada à energia liberada por um terremoto de magnitude 3, na mesma Escala, é

a) 1000 vezes maior.
b) 500 vezes maior.
c) 100 vezes maior.
d) 50 vezes maior.
e) 10 vezes maior.

Comentários:

Vamos calcular a ernergia E para para os terremotos de magnitude $M_L = 3$ e $M_L = 5$ e constatar quantas vezes uma é maior que a outra.

- $\boldsymbol{M_L = 3}$

$$M_L = \frac{2}{3} \cdot \log_{10}\left(\frac{100}{7} \cdot E\right)$$

$$3 = \frac{2}{3} \cdot \log_{10}\left(\frac{100}{7} \cdot E_3\right)$$

Aplicando a propriedade do logaritmo do produto e do logaritmo do quociente:

$$\frac{9}{2} = \log_{10}(100) - \log_{10}(7) + \log_{10}(E_3)$$

$$\boldsymbol{\log_{10}(100) + \log_{10}(7) = \frac{9}{2} - \log_{10}(E_3)} \quad \text{equação I}$$

- $\boldsymbol{E = 5}$

$$M_L = \frac{2}{3} \cdot \log_{10}\left(\frac{100}{7} \cdot E\right)$$

$$5 = \frac{2}{3} \cdot \log_{10}\left(\frac{100}{7} \cdot E_5\right)$$

Aplicando a propriedade do logaritmo do produto e do logaritmo do quociente:

$$\frac{15}{2} = \log_{10}(100) - \log_{10}(7) + \log_{10}(E_5)$$

$$\mathbf{log_{10}(100) - log_{10}(7) = \frac{15}{2} - log_{10}(\boldsymbol{E_5})} \qquad \text{equação II}$$

Observe a equação I e a equação II. Ambas são **iguais** no lado esquerdo. Então, vamos igualá-las.

$$\frac{9}{2} - \log_{10}(E_3) = \frac{15}{2} - \log_{10}(E_5)$$

$$\frac{15}{2} - \frac{9}{2} = \log_{10}(E_5) - \log_{10}(E_3)$$

Aplicando a volta da propriedade do logaritmo do quociente:

$$\frac{6}{2} = \log_{10}\left(\frac{E_5}{E_3}\right)$$

$$3 = \log_{10}\left(\frac{E_5}{E_3}\right)$$

$$\frac{E_5}{E_3} = 10^3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{E_5 = 1.000E_3}$$

Ou seja, a energia que é liberada por um terremoto de magnitude 5 na Escala Richter é mil (1.000) vezes maior quando comparada à energia liberada por um terremoto de magnitude 3.

Gabarito: Alternativa **A**

6. (DECEx / ESA - 2019) Sejam $f: \{x \in R / x > 0\} \rightarrow R$ e $g: R \rightarrow R$, definidas por $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \frac{2^x}{4}$, respectivamente. O valor de $f \circ g(2)$ é:

a) 4
b) 2
c) -4
d) -2
e) 0

Comentários:

Primeiramente, vamos calcular $g(2)$ e, de posse do resultado, calculamos a f da $g(2)$, isto é, $f\big(g(2)\big)$.

$$g(x) = \frac{2^x}{4}$$

$$g(2) = \frac{2^2}{4}$$

$$g(2) = \frac{4}{4} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{g(2) = 1}}$$

Calculando $f\big(g(2)\big)$, sendo $g(2) = 1$:

$$f(x) = \log_2 x$$

$$f(1) = \log_2 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{f(1) = 0}$$

Logo, $f\big(g(2)\big) = 0$.

Gabarito: Alternativa **E**

7. **(STRIX / EBMSP - 2018) Considere-se que a altura de uma jovem com x anos de idade, $5 \leq x \leq 15$, pode ser modelada como um percentual da altura que terá na idade adulta por meio da função**

$$f(x) = 62 + 35\log(x - 4)$$

Nessas condições e utilizando, se necessário, $\log 2 = 0{,}30$, pode-se estimar que entre 8 e 12 anos de idade a variação na altura dessa jovem será de

a) 10,0%
b) 10,5%
c) 11,0%
d) 11,5%
e) 12,0%

Comentários:

Vamos calcular as alturas para as idades $x = 8$ e $x = 12$ e, posteriormente, encontrar diferença.

- $\boldsymbol{x = 8}$

$$f(x) = 62 + 35\log(x-4)$$

$$f(8) = 62 + 35\log(8-4)$$

$$f(8) = 62 + 35\log(4)$$

A banca nos fornece o valor de $\log 2$. Então, iremos *manipular algebricamente* o valor do logaritmo para ficar em função de $\log 2$.

$$f(8) = 62 + 35\log(2^2)$$

Aplicando a propriedade do logaritmo da potência:

$$f(8) = 62 + 35\log(2^2)$$

$$f(8) = 62 + 35 \times 2 \times \log(2)$$

$$f(8) = 62 + 35 \times 2 \times 0{,}3$$

$$f(8) = 62 + 21 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{f(8) = 83\%}}$$

- $\boldsymbol{x = 12}$

$$f(x) = 62 + 35\log(x-4)$$

$$f(12) = 62 + 35\log(12-4)$$

$$f(12) = 62 + 35\log(8)$$

$$f(12) = 62 + 35\log(2^3)$$

Aplicando a propriedade do logaritmo da potência:

$$f(12) = 62 + 35\log(2^3)$$

$$f(12) = 62 + 35 \times 3 \times \log(2)$$

$$f(12) = 62 + 35 \times 3 \times 0{,}3$$

$$f(12) = 62 + 31{,}5 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{f(12) = 93{,}5\%}}$$

Logo, a diferença entre as porcentagens foi de:

$$d = f(12) - f(8)$$

$$d = 93{,}5\% - 83\% \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{d = 10\%}$$

Gabarito: Alternativa **A**

8. **(CESPE / SEDUC AL – 2018) O número de Euler, nome dado em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, é um número irracional denotado por e, cuja representação decimal tem seus 4 primeiros algarismos dados por 2,718. Esse número é a base dos logaritmos naturais, cuja função $f(x) = \ln x = \log_e x$ tem inúmeras aplicações científicas.**

A respeito desse assunto, julgue o item a seguir.

Se $a > 0$ e $\ln a \in [10{,}20)$, então $\ln a^2 \in [100, +\infty)$.

Comentários:

Pela propriedade da <u>potência do logaritmo</u> temos que:

$$\ln a^2 = 2 \times \ln a$$

Então, se $\ln a \in [10{,}20)$, $\ln a^2$ pertencerá a este intervalo vezes 2, uma vez que, conforme calculamos, $\ln a^2 = 2 \times \ln a$.

Sendo assim, se $a > 0$ e $\ln a \in [10{,}20)$, então:

$$\boldsymbol{\ln a^2 \in [20, 40).}$$

Gabarito: **ERRADO**

9. **(CESPE / PREVIC – 2011) Com o objetivo de despertar mais interesse de seus alunos para a resolução das expressões algébricas que com frequência ocorrem nos problemas, um professor de matemática propôs uma atividade em forma de desafio. Os estudantes deveriam preencher retângulos dispostos em forma triangular de modo que cada retângulo fosse o resultado da soma das expressões contidas nos dois retângulos imediatamente embaixo dele, exceto para aqueles da base do triângulo. Portanto, na figura a seguir,**

$$D = A + B \;\; ; \;\; E = B + C \;\; ; \;\; F = D + E$$

	$F =$	
$D =$		$E = -x\sqrt{x} + 2\ln(2)$
$A = \ln(\frac{x}{2}) + x\sqrt{x}$	$B =$	$C = -5x\sqrt{x} + \ln(2)$

Com base nos dados acima, julgue o item que se segue.

Os estudantes que preencheram corretamente os retângulos em branco encontraram $F = \ln(4x) + 4x\sqrt{x}$

Comentários:

Nosso primeiro passo vai ser calcular o valor de $\boldsymbol{B}$.

Sabemos que: $E = B + C$. Então:

$$E = B + C$$

$$-x\sqrt{x} + 2\ln(2) = B + (-5x\sqrt{x} + \ln(2))$$

$$-x\sqrt{x} + 2\ln(2) = B - 5x\sqrt{x} + \ln(2)$$

$$B = -x\sqrt{x} + 5x\sqrt{x} + 2\ln(2) - \ln(2) \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{B = 4x\sqrt{x} + \ln(2)}}$$

De posse do valor da expressão de B, calculamos D:

$$D = A + B$$

$$D = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x\sqrt{x} + 4x\sqrt{x} + \ln(2) \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{D = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + 5x\sqrt{x} + \ln(2)}}$$

E, por fim, de posse de D, calculamos F, uma vez que $F = D + E$.

$$F = D + E$$

$$F = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + 5x\sqrt{x} + \ln(2) + (-x\sqrt{x} + 2\ln(2))$$

$$F = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + 5x\sqrt{x} + \ln(2) - x\sqrt{x} + 2\ln(2)$$

Reordenando:

$$F = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + 5x\sqrt{x} - x\sqrt{x} + 2\ln(2) + \ln(2)$$

$$F = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + 3\ln(2) + 4\,x\sqrt{x}$$

Observe que agora teremos que *manipular algebircamente* a expressão de F para tentar encontrar a função fornecida no enunciado.

Vamos usar a volta da propriedade da potência do logaritmo no termo do meio:

O logaritmo de uma **potência** é igual a esta **potência vezes o logaritmo**.

$$\boldsymbol{\log_a x^p = p \times \log_a x}$$

$$F = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + 3\ln(2) + 4\,x\sqrt{x}$$

$$F = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \ln(2^3) + 4\,x\sqrt{x}$$

$$F = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \ln(8) + 4\,x\sqrt{x}$$

Iremos utilizar a volta da propriedade do logaritmo do produto nos dois primeiros termos e encontrar nossa resposta final.

O logaritmo do **produto** é igual a **soma** de seus logaritmos.

$$\boldsymbol{\log_a(x \times y) = \log_a x + \log_a y}$$

$$F = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \ln(8) + 4\,x\sqrt{x}$$

$$F = \ln\left(\frac{x}{2} \times \mathbf{8}\right) + 4\,x\sqrt{x} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{F = \ln(4x) + 4\,x\sqrt{x}}$$

Ou seja, os estudantes que preencheram corretamente os retângulos em branco encontraram $F = \ln(4x) + 4x\sqrt{x}$.

Gabarito: **CERTO**

10. (CESPE / CEF – 2010) A população P de uma comunidade, t anos após determinado ano — considerado ano $t = 0$ —, pode ser calculada pela fórmula $P = P_0 e^{kt}$, em que k é uma constante positiva, P_0 é a quantidade de indivíduos na comunidade no ano $t = 0$ e "e" é a base do logaritmo neperiano. Nesse caso, considerando 0,63 como valor aproximado para $\ln 2/\ln 3$ e que a população P_0 triplique em 6 anos, então P_0 será duplicada em:

a) 3,38 anos
b) 3,48 anos
c) 3,58 anos
d) 3,68 anos
e) 3,78 anos

Comentários:

O enunciado nos informa que a população P_0 triplica em 6 anos. Vamos subsituir esses valores na equação:

$$P = P_0 e^{kt}$$

$$3 \times P_0 = P_0 e^{k6}$$

Observe que $P = 3 \times P_0$, isto é, a população inicial triplicou e $t = 6$.

$$3 \times \cancel{P_0} = \cancel{P_0} e^{k6}$$

$$3 = e^{6k}$$

$$6k = \ln 3 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{k = \frac{\ln 3}{6}}}$$

A banca quer saber em quanto tempo a população P_0 será duplicada.

$$P = P_0 e^{kt}$$

$$2 \times \cancel{P_0} = \cancel{P_0} e^{kt}$$

$$2 = e^{kt} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{kt = \ln 2}$$

Vamos substituir k que encontramos acima e calcular o tempo t para que a população dobre.

$$kt = \ln 2$$

$$\frac{\ln 3}{6} \times t = \ln 2$$

$$t = 6 \times \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

O enunciado nos informa que $\ln 2/\ln 3 = 0{,}63$.

$$t = 6 \times 0{,}63 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{t = 3{,}78}$$

Gabarito: Alternativa **E**

11. (CESPE / PM ES – 2010) Julgue o item que se seguem, a respeito de operações com logaritmos.

Se $\log_5 b = 0{,}1$, em que b é um número positivo, então $\log_b 25 = 0{,}01$.

Comentários:

O enunciado nos informa que:

$$\log_5 b = 0{,}1 \quad \rightarrow \quad b = 5^{0{,}1}$$

Vamos calcular o valor de $\log_b 25$. Iremos substituir o valor de b encontrado acima e manipular algebricamente a expressão com as propriedades que aprendemos na aula de hoje.

$$y = \log_b 25$$

$$y = \log_{5^{0{,}1}} 25$$

Aplicaremos a propriedade da base elevada a um exponte. Recordando:

Base elevada a um expoente

Quando a **base estiver elevada a um expoente**, o logaritmo é igual ao **produto do inverso da base vezes o logaritmo**.

$$\boldsymbol{\log_{a^p} x = \frac{1}{p} * \log_a x}$$

Aplicando a propriedadee para calcular o valor de y teremos:

$$y = \log_{5^{0{,}1}} 25$$

$$y = \frac{1}{0{,}1} \times \log_5 25$$

$$y = 10 \times \log_5 25$$

Sabemos que $\log_5 25 = 2$, pois $5^2 = 25$. Substituindo e calculando y.

$$y = 10 \times 2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = 20}$$

Ou seja, $\boldsymbol{\log_b 25 = 20}$ e não igual a $0{,}01$ conforme afirmado pela banca.

Gabarito: **ERRADO**

12. (CESPE / PM ES – 2010) Julgue o item que se seguem, a respeito de operações com logaritmos.

Tomando 0,301 e 0,477 como os valores aproximados de $\log_{10} 2$ e $\log_{10} 3$, respectivamente, é correto inferir que $\log_{10} 72 = 1{,}578$.

Comentários:

Iremos chamar o valor de $\log_{10} 72$ de y e saber se este será igual a $1{,}578$.

Observe que vamos ter que *manipular algebricamente* o número 72 para termos este número em função dos números forncedios pela banca, isto é, 2 e 3 (fizemos **diversos exemplos** desse na parte teórica da aula).

Vamos decompor o número 72.

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

Então,

$$y = \log_{10} 72$$

$$y = \log_{10}(\, 2^3 \times 3^2)$$

Aplicando a Propriedade do logaritmo do produto.

Logaritmo do Produto

O logaritmo do **produto** é igual a **soma** de seus logaritmos.

$$\boldsymbol{\log_a (x * y) = \log_a x + \log_a y}$$

$$y = \log_{10}(\, 2^3 \times 3^2)$$

$$y = \log_{10} 2^3 + \log_{10} 3^2$$

Trabalharemos agora com a propriedade do logaritmo da potência.

Logaritmo da Potência

O logaritmo de uma **potência** (base real positiva e expoente real) é igual a esta **potência vezes o logaritmo**.

$$\boldsymbol{\log_a x^p = p * \log_a x}$$

$$y = \log_{10} 2^3 + \log_{10} 3^2$$

$$y = 3 \times \log_{10} 2 + 2 \times \log_{10} 3$$

O enunciado nos informa que $\log_{10} 2 = 0{,}301$ e $\log_{10} 3 = 0{,}477$. Substituindo os valores e calculando y.

$$y = 3 \times \log_{10} 2 + 2 \times \log_{10} 3$$

$$y = 3 \times 0{,}301 + 2 \times 0{,}477$$

$$y = 0{,}903 + 0{,}954 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = 1{,}857}$$

Ou seja, $\log_{10} 72 = 1{,}857$.

Gabarito: **ERRADO**

13. (CESPE / PETROBRAS – 2008) Se $\log a = X$ e $\log b = Y$, então

a) $\log(a + b) = X + Y$

b) $\log(ab) = X \times Y$

c) $\log(a/b) = X/Y$

d) $\log(a^2 b) = 2X + Y$

e) $\log\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{X} + \frac{1}{Y}$

Comentários:

Vamos analisar item a item. Ótima questão para revisarmos as propriedades do logaritmo. Tema este que "despenca em provas".

a) $\log(a+b) = X + Y$

INCORRETO. A alternativa nos diz que $\log(a+b) = \log a + \log b$. Isto está incorreto. A propriedade do logaritmo do produto é:

O logaritmo do **produto** é igual a **soma** de seus logaritmos.

$$\log(a \times b) = \log a + \log b$$

Para a alternativa estar correta era preciso uma multiplicação dentro dos parênteses e não uma adição.

b) $\log(ab) = X \times Y$

INCORRETO. Acabamos de ver na propriedade acima que:

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

$$\log(ab) = X + Y$$

c) $\log(a/b) = X/Y$

INCORRETO. A propriedade do logaritmo do quociente nos diz que:

O logaritmo do **quociente** é igual a **diferença** dos seus logaritmos.

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = X - Y$$

d) $\log(a^2 b) = 2X + Y$

CORRETO. Vamos aplicar, primeiramente, a propriedade do logaritmo do produto:

$$\log(a^2 \times b) = \log a^2 + \log b$$

Secundariamente, iremos aplicar a propriedade do logartimo da potência no primeiro termo. O logaritmo de uma **potência** é igual a esta **potência vezes o logaritmo**.

$$\log(a^2 \times b) = \log a^2 + \log b$$

$$\log(a^2 \times b) = 2\log a + \log b$$

Substituindo $\log a = X$ e $\log b = Y$:

$$\log(a^2 \times b) = 2X + Y$$

e) $\log\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{X} + \frac{1}{Y}$

INCORRETO. Assim como vimos na alternativa A, a igualdade estaria correta se dentro do parênteses fosse multiplicação ao invés de adição.

Gabarito: Alternativa **D**

14. (UEFS / Vestibular – 2010) Em uma comunidade, o número aproximado de pessoas que toma conhecimento de determinado fato, t meses após ele ter ocorrido, pode ser estimado através do modelo matemático definido pela função

$$f(t) = \frac{1.800}{3 + 5 * 2^{-t}}$$

A partir dessa expressão, considerando-se log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48, para que 375 pessoas tomem conhecimento de um fato, após a sua ocorrência, estima-se que o número de dias necessários é igual a:

a) 19
b) 25
c) 36
d) 44
e) 58

Comentários:

A banca nos fornece a lei de formação da função logarítmica (que representa o número aproximado de pessoas que toma conhecimento de determinado fato) e nos questiona qual o valor de $t\ meses$ para que 375 pessoas tomem conhecimento de um fato.

Vamos então substituir $f(t)$ por 375 e calcular o valor de t.

$$f(t) = \frac{1.800}{3 + 5 * 2^{-t}}$$

$$375 = \frac{1.800}{3 + 5 * 2^{-t}}$$

$$3 + 5 * 2^{-t} = \frac{1.800}{375} = 4{,}8$$

$$3 + 5 * 2^{-t} = 4{,}8 \quad \rightarrow \quad 5 * 2^{-t} = 1{,}8$$

Vamos aplicar log dos dois lados e desenvolver para t.

$$5 * 2^{-t} = 1{,}8$$

$$\log(5 * 2^{-t}) = \log 1{,}8$$

Relembrando as **propriedades do logaritmo da potência, do produto e do quociente**:

$$\log_a x^b = b * \log x$$

$$\log_a(x * y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$$

Aplicando as propriedades e calculando t, teremos (vou desenvolver a equação passo a passo. Observe a aplicação das propriedades acima):

$$\log(5 * 2^{-t}) = \log 1{,}8$$

$$\log 5 + \log 2^{-t} = \log\left(\frac{18}{10}\right)$$

$$\log\left(\frac{10}{2}\right) - t * \log 2 = \log 18 - \log 10$$

Perceba que estamos manipulando algebricamente os logaritmos, pois a banca nos fornece o valor de log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48. Então temos que <u>escrever toda essa expressão em função desses dados</u>. Continuando:

$$\log\left(\frac{10}{2}\right) - t * \log 2 = \log 18 - \log 10$$

$$\log 10 - \log 2 - t * \log 2 = \log(3^2 * 2) - \log 10$$

$$\log 10 - \log 2 - t * \log 2 = 2 * \log 3 + \log 2 - \log 10$$

Toda a igualdade agora está em função dos dados fornecidos no enunciado. Vamos substituir os valores e calcular t.

$$\log 10 - \log 2 - t * \log 2 = 2 * \log 3 + \log 2 - \log 10$$

$$1 - 0{,}3 - t * 0{,}3 = 2 * 0{,}48 + 0{,}3 - 1$$

$$0{,}3 * t = 0{,}44 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{t \approx 1,46}}$$

Calculamos o tempo em meses e a banca nos questiona o valor em dias. Ou seja, devemos multiplicar o resultado encontrado por 30, uma vez que em 1 mês há 30 dias.

$$t \approx 1{,}46 * 30 \quad \rightarrow \boldsymbol{t \approx 44\ dias}$$

Gabarito: Alternativa **D**

15. (CESPE / UNCISAL – 2019) A Escala Richter, utilizada para medir a magnitude dos terremotos, foi proposta em 1935 pelo sismólogo Charles Francis Richter, que pretendia, inicialmente, empregá-la apenas para medir abalos que ocorressem no sul da Califórnia. A equação proposta por Richter pode ser formulada de várias formas, conforme as variáveis que se adotem para compor a equação. No caso da energia mecânica liberada por um terremoto — E —, em kWh, a magnitude do terremoto — M — é expressa por

$$M = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

, em que $E_0 = 7 \times 10^{-3}\ kWh$.

Disponível em: http://brasilescola.uol.com.br.Acesso em: 3 nov. 2018 (adaptado).

Sabendo-se que, em 2014, um terremoto de magnitude 8 foi registrado no litoral do Alasca, qual é o valor da energia mecânica liberada nesse terremoto?

a) $7 \times 10^4\ kWh$
b) $7 \times 10^9\ kWh$
c) $7 \times 10^{10}\ kWh$

d) $7 \times 10^{14}\ kWh$
e) $7 \times 10^{15}\ kWh$

Comentários:

O enunciado nos questiona o valor da Energia Mecânica E para uma Magnitude M de 8 graus. Vamos substituir os valores e calcular E.

$$M = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

$$8 = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{7 \times 10^{-3}}\right)$$

$$\log_{10}\left(\frac{E}{7 \times 10^{-3}}\right) = \frac{8 \times 3}{2}$$

$$\log_{10}\left(\frac{E}{7 \times 10^{-3}}\right) = 12$$

Então, pela definição de logaritmo ($\log_{a} x = y \ \leftrightarrow\ a^{y} = x$) temos que:

$$\frac{E}{7 \times 10^{-3}} = 10^{12}$$

$$E = 7 \times 10^{-3} \times 10^{12}$$

$$E = 7 \times 10^{-3+12} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{E = 7 \times 10^{9}}$$

Gabarito: Alternativa **B**

16. (CESPE / INSS – 2003) Os números da previdência social

A previdência social fechou o ano de 2002 com um déficit primário em suas contas de R$ 17 bilhões. O déficit aumentou 32% em relação aos R$ 13 bilhões de 2001. De acordo com os dados da Secretaria do Tesouro Nacional, a arrecadação liquida da previdência em 2002 foi de R$ 71 bilhões, superando o resultado de 2001, quando a arrecadação liquida havia sido de R$ 62 bilhões. Os gastos com beneficios previdenciários acabaram sendo maiores. Em 2001, a previdência social tinha gasto R$ 75 bilhões com o pagamento de beneficios. Em 2002. essa despesa subiu para R$ 88 bilhões.

Além disso. houve um aumento no número de beneficios concedidos - no ano de 2002, foram 750 mil a mais do que os concedidos em 2001. Somente em dezembro. a previdência social teve um déficit primário de R$ 3 bilhões.

Agência de Noticiárias Radiobrás (com adaptações)

A partir dos dados do texto acima, suponha que a arrecadação líquida e os gastos da previdência com beneficios, em bilhões de reais, sejam dados respectivamente pelas funções $f(t) = ml + n$ e $g(l) = c2^{kl}$, em que l é o numero de anos transcorridos desde 2000, m, n, c e k são constantes reais.

Nessa situação julgue o item.

Considerando $\log_2 3 = 1{,}58$; $\log_2 5 = 2{,}32$; $\log_2 11 = 3{,}46$, conclui-se que o valor de k na definição da função g é igual a $0{,}24$.

Comentários:

Os gastos da previdência com beneficios, em bilhões de reais, são obtidos pela função $g(l) = c2^{kl}$.

- Em 2001, a previdência social tinha gasto R$ 75 bilhões com o pagamento de beneficios. Então:

$$g(l) = c2^{kl}$$

$$75 = c2^{k1}$$

Observe que l é o numero de anos transcorridos desde 2000. Logo, no ano de 2001, $l = 1$.

$$75 = c2^{k} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{c = \frac{75}{2^k}}}$$

- Em 2002, essa despesa subiu para R$ 88 bilhões.

$$g(l) = c2^{kl}$$

$$88 = c2^{k2} \quad \rightarrow \quad 88 = c2^{2k}$$

Vamos substituis o valor de c na igualdade acima e calcular o valor de k.

$$88 = c2^{2k}$$

$$88 = \frac{75}{2^k} \times 2^{2k}$$

$$88 = 75 \times 2^{2k-k}$$

$$88 = 75 \times 2^{k}$$

$$2^k = \frac{88}{75}$$

Então, pela definição de logaritmo ($\log_a x = y \leftrightarrow a^y = x$) temos que:

$$k = \log_2\left(\frac{88}{75}\right)$$

Agora, vamos manipular algebricamente decompondo os números e aplicando as propriedades que aprendemos do logaritmo para achar o valor de k. Iremos passo a passo.

$$k = \log_2\left(\frac{88}{75}\right)$$

Aplicando a propriedade do logaritmo do quociente.

$$k = \log_2(88) - \log_2(75)$$

Decompondo os números 88 e 75.

$$k = \log_2(88) - \log_2(75)$$

$$k = \log_2(2^3 \times 11) - \log_2(3 \times 5^2)$$

Iremos aplicar a propriedade do logaritmo do produto (olha a **importância** de ter decorado TODAS as propriedades).

$$k = \log_2(2^3 \times 11) - \log_2(3 \times 5^2)$$

$$k = \log_2(2^3) + \log_2 11 - \log_2(3) - \log_2(5^2)$$

Utilizando a propriedade do logaritmo da potência teremos:

$$k = \log_2(2^3) + \log_2 11 - \log_2(3) - \log_2(5^2)$$

$$k = 3 \times \log_2(2) + \log_2 11 - \log_2(3) - 2 \times \log_2(5)$$

O enunciado nos informa que: $\log_2 3 = 1{,}58$; $\log_2 5 = 2{,}32$; $\log_2 11 = 3{,}46$. Substituindo os valores e calculando k:

$$k = 3 \times 1 + 3{,}46 - 1{,}58 - 2 \times 2{,}32$$

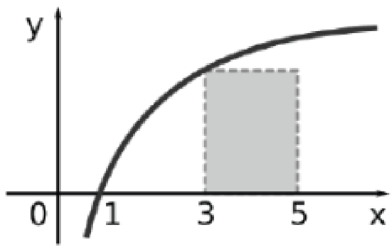
$$k = 3 + 3{,}46 - 1{,}58 - 4{,}64 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{k = 0{,}24}$$

Gabarito: **CERTO**

QUESTÕES COMENTADAS - BANCAS DIVERSAS

Função Logarítmica

1. **(IBFC / CBM AC - 2022) O gráfico da figura representa a função $f(x) = \log x$ (Logaritmo de x na base 10) para um valor positivo de $x(x > 0)$.**



Assinale a alternativa que apresenta o valor da área hachurada do gráfico.

a) $\log 5$
b) $\log 3$
c) $\log 9$
d) $\log 2$

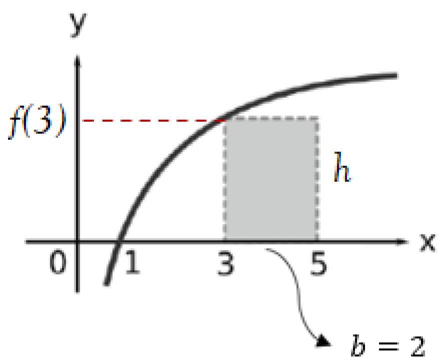
Comentários:

O valor da área hachurada será igual ao valor da **área do retângulo**, isto é, será igual a:

$$A = b \times h$$

A base já nos foi fornecida. É igual a $b = 5 - 3 = 2$.

Vamos calcular a altura. Para isso, iremos calcular o valor de y para $x = 3$.



Então teremos:

$$h = f(3)$$

$$h = \log 3$$

Sendo assim, **a área hachurada será**:

$$A = b \times h$$

$$A = 2 \times \log 3$$

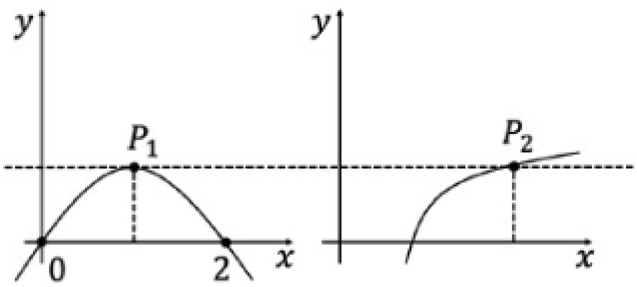
Aplicando a volta da propriedade do logaritmo da potência teremos:

$$A = 2 \times \log 3$$

$$A = \log 3^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A = \log 9}$$

Gabarito: Alternativa **C**

2. (FUNDATEC / Pref. Flores da Cunha - 2022) Analise os gráficos de funções a seguir:



O gráfico da esquerda é de uma função do segundo grau dada por $-x^2 + 2x$. O gráfico da direita é da função $\log_b x$. Se os pontos P_1 e P_2 possuem ordenada de mesmo tamanho, então a abcissa de P_2 é:

a) 1
b) 2
c) $2b$
d) bx
e) b

Comentários:

Observe que P_1 é o y do vértice da parábola $-x^2 + 2x$, em que $a = -1, b = 2$ e $c = 0$.

$$P_1 = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$P_1 = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

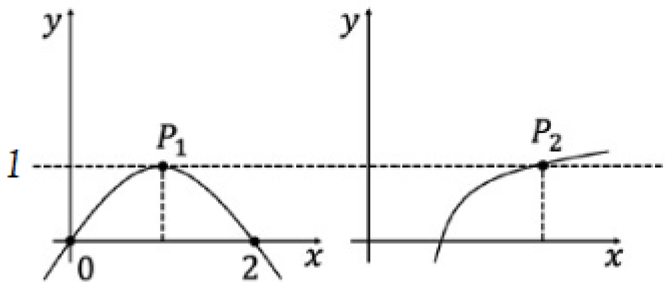
$$P_1 = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$P_1 = \frac{-\left(2^2 - 4(-1)(0)\right)}{4(-1)}$$

$$P_1 = \frac{-4}{-4} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{P_1 = 1}}$$

Você também poderia raciocinar da seguinte maneira. O x do vértice da parábola é o ponto médio das raízes. Ponto médio de 0 e 2 é igual a 1. E, substituindo $x = 1$ na função, você encontraria o valor do y do vértice, isto é, o valor de P_1 (que seria igual a 1). Aprendemos tudo isso na aula de função quadrática. Continuando.

A banca nos questiona <u>qual o valor de x do segundo gráfico</u> que retorna o valor de $y = P_2 = P_1 = 1$.



$$y = 1$$

$$\log_b x = 1$$

$$b^1 = x \rightarrow b = x$$

Gabarito: Alternativa **E**

3. (FUNDATEC / Pref. Panambi - 2021) Considere as afirmações abaixo sobre funções exponenciais e logarítmicas.

I. A função $\log x$ é a inversa de 10^x.

II. $\log_2(x^3) = 3\log x$

III. $2^{x-y} > 0$ para x e y pertencentes aos números reais.

Quais estão corretas?

a) Apenas I.
b) Apenas II.
c) Apenas I e II.
d) Apenas I e III.
e) I, II e III.

Comentários:

Vamos analisar item a item.

I. A função $log\, x$ é a inversa de 10^x.

CORRETO. Aprendemos (e também demonstramos na teoria) que a função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é a inversa da função exponencial $g(x) = a^x$.

Então, para $a = 10$, teremos que $\log x$ é a inversa de 10^x.

II. $log_2(x^3) = 3\, log\, x$

INCORRETO. Vamos aplicar a propriedade do logaritmo da potência.

$$\log_2(x^3) = 3\log_2 x$$

Então, $\log_2(x^3)$ é igual a $3\log_2 x$ e não $3\log x$.

III. $2^{x-y} > 0$ para x e y pertencentes aos números reais.

CORRETO. 2 (que é um número positivo) elevado a qualquer número, seja ele positivo ou negativo, resultará em um valor maior que 0.

Você pode ter ficado na dúvida se y fosse maior que x resultaria em um número positivo. Se estiver com essa dúvida, arbitre valores para x e y.

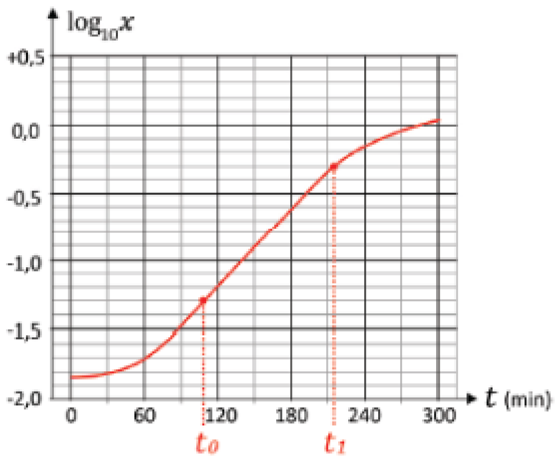
Por exemplo, $x = 1$ e $y = 2$.

$$2^{x-y} = 2^{1-2} = 2^{-1} = \frac{1}{2} > 0$$

Então, mesmo com y maior que x, a potência resultará em um número maior que 0.

Gabarito: Alternativa **D**

4. **(FUVEST / USP - 2022) A quantidade de bactérias em um líquido é diretamente proporcional à medida da turbidez desse líquido. O gráfico mostra, em escala logarítmica, o crescimento da turbidez x de um líquido ao longo do tempo t (medido em minutos), isto é, mostra $\log x$ em função de t. Os dados foram coletados de 30 em 30 minutos, e uma curva de interpolação foi obtida para inferir valores intermediários.**



Disponível em https://fankhauserblog.wordpress.com/.

Com base no gráfico, em quantas vezes a população de bactérias aumentou, do instante t_0 para o instante t_1?

a) 2
b) 4
c) 5
d) 10
e) 100

Comentários:

Inicialmente, perceba que **a escala logarítmica decai de $0,1$ em $0,1$**. Observe então que em $t_0, \log x = -1{,}3$ e que em $t_1, \log x = -0{,}3$.

Vamos calcular x, que é o crescimento da turbidez, para os instantes t_0 e t_1.

- t_0

$$\log x_{t_0} = -1{,}3 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{x_{t_0} = 10^{-1,3}}}$$

- t_1

$$\log x_{t_1} = -0{,}3 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{x_{t_1} = 10^{-0,3}}}$$

O enunciado nos questiona em quantas vezes foi este aumento, isto é, em quantas vezes aumentou de $x_{t_0} = 10^{-1,3}$ para $x_{t_1} = 10^{-0,3}$.

$$x_{t_0} \times k = x_{t_1}$$

$$10^{-1,3} \times k = 10^{-0,3}$$

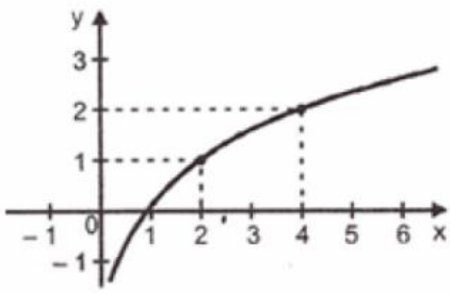
$$k = \frac{10^{-0,3}}{10^{-1,3}}$$

$$k = 10^{-0,3-(-1,3)} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{k = 10^1}$$

Logo, a população de bactérias aumentou, do instante t_0 para o instante t_1 em 10 vezes.

Gabarito: Alternativa **D**

5. (GUALIMP / Pref. Areal - 2020) Considere a função $f: R \rightarrow R$ cujo o gráfico está esboçado abaixo.



Qual é a lei de formação da função f?

a) $y = \log_2(x+1)$
b) $y = \log_2 x$
c) $y = \log x$
d) $y = \log x + 1$

Comentários:

Ao invés de descobrirmos as fórmulas, vamos testar os dados nas fórmulas fornecidas nas alternativas que assim chegaremos mais rápido à resposta.

Observe, inicialmente, que para $x = 1, y = 0$.

Vamos substituir $x = 1$ na alternativa A:

$$y = \log_2(x+1)$$

$$y = \log_2(1+1)$$

$$y = \log_2(2) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = 1}$$

Ou seja, y era para ser igual a zero e, na alternativa A, foi igual a um. Logo, esta **não é a alternativa correta**.

Substituiremos agora $x = 1$ na alternativa D:

$$y = \log x + 1$$

$$y = \log 1 + 1$$

$$y = 0 + 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = 1}$$

Ou seja, y era para ser igual a zero e, na alternativa D, foi igual a um. Logo, esta **não é a alternativa correta**.

De fato, você "de cabeça" conseguiria eliminar as alternativas A e D. Para $y = 0$ o logartimando tem que ser igual a 1. Nessas alternativas, em uma o logaritmando era igual a 2 e na outra, apesar do logartimando ser igual a 1, há uma soma, o que impossibilita a resposta ser 0.

Ficamos entre a B e C. Vamos substituir o ponto $x = 2$. Perceba pelo gráfico que para $x = 2, y = 1$.

Conferindo a alternativa C:

$$y = \log x$$

$$\boldsymbol{y = \log 2}$$

Que, certamente, não será igual a 1. Logo, esta **não é a alternativa correta**.

Substituindo na alternativa B:

$$y = \log_2 x$$

$$y = \log_2 2 \quad \rightarrow \boldsymbol{y = 1}$$

Sendo assim, **a alternativa B será nosso gabarito**.

Gabarito: Alternativa **B**

6. (CONSULPLAN / UNIFAGOC - 2021) Uma empresa farmacêutica calculou a dosagem indicada de um medicamento, em mililitros, em função da idade do paciente, obtendo a seguinte função: $f(x) = \log_2 x^{1,15}$. De acordo com essa função, com que idade o paciente terá uma dosagem que corresponde ao dobro da dosagem de um paciente de 4 anos?

a) 5 anos
b) 8 anos
c) 12 anos
d) 16 anos

Comentários:

Um paciente de 4 anos terá a dosagem igual a:

$$f(x) = \log_2 x^{1,15}$$

$$f(4) = \log_2 4^{1,15}$$

O dobro desta dosagem será:

$$\boldsymbol{2 \times \log_2 4^{1,15}}$$

Aplicando a volta da propriedade do logaritmo da potência teremos:

$$2 \times \log_2 4^{1,15} = \log_2 (4^{1,15})^2 = \log_2 (4^2)^{1,15} = \log_2 16^{1,15}$$

O enunciado nos questiona com que idade o paciente terá esta dosagem acima:

$$f(x) = \log_2 x^{1,15} = \log_2 16^{1,15} \quad \rightarrow \boldsymbol{x = 16}$$

Ou seja, $\boldsymbol{x = 16}$.

Gabarito: Alternativa **D**

7. **(INSTITUTO EXCELÊNCIA / Pref. Tremembé - 2019) Funções exponenciais e logarítmicas tem comportamentos gráficos por vezes confundidos e, para serem identificadas, incumbem ao estudante um bom conhecimento matemático. Considere os dois gráficos a seguir:**

Gráfico 1

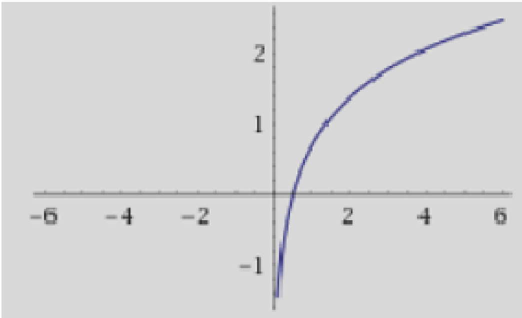
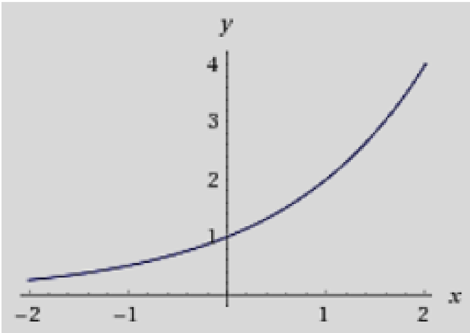


Gráfico 2



Sobre os gráficos apresentados e sobre os conceitos de funções exponenciais e logarítmicas, é CORRETO afirmar que:

a) É possível afirmar que a função que representa o gráfico 1 é $f(x) = \log(2x)$ e a função que representa o gráfico 2 é $g(x) = 2^x$.
b) É possível afirmar que a função que representa o gráfico 1 é $f(x) = \log(-2x)$ e a função que representa o gráfico 2 é $g(x) = 2^{-x}$.
c) É possível afirmar que a função que representa o gráfico 1 é $f(x) = 2^x$ e a função que representa o gráfico 2 é $g(x) = \log(2x)$.
d) É possível afirmar que a função que representa o gráfico 1 é $f(x) = 2^{-x}$ e a função que representa o gráfico 2 é $g(x) = \log(-2x)$.

Comentários:

Na teoria, estudamos o comportamente da função logarítimica e também da exponencial (aprofundado na aula passada). Vamos revisar:

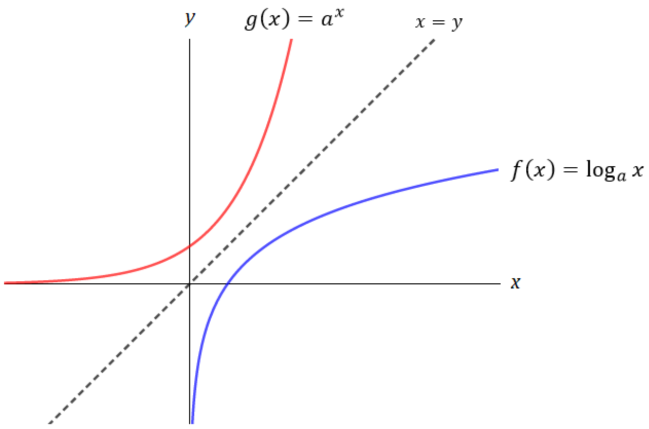
A função logarítmica $f(x)$ é <u>inversa</u> da função exponencial $g(x)$, ou seja, tais funções são simétricas em relação à reta xy (bissetriz dos quadrantes ímpares).

$$f(x) = \log_a x$$

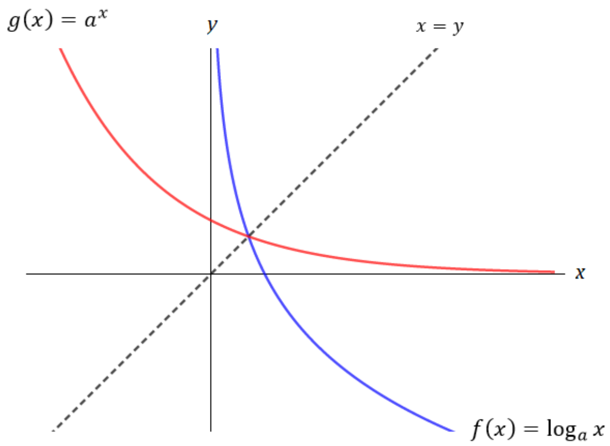
$$g(x) = a^x$$

Vamos analisar o gráfico dessas duas funções **em função da base a** do logaritmo.

1. $a > 1$



2. $0 < a < 1$



Observe que a base do logaritmo é maior que 1. Logo, **teremos a primeira figura** como embasamento para a resposta.

Logo, o gráfico 1 é o gráfico da função logarítmica e o gráfico 2, da exponencial. Ficamos entre a A e a B.

Agora, é escolher um ponto do gráfico e testar rapidamente nas alternativas. Perceba que, pelo gráfico 2, quando $\boldsymbol{x = 1}$, $\boldsymbol{y = 2}$.

Na alternativa A, ela nos diz que a função do gráfico 2 é $g(x) = 2^x$:

$$g(x) = 2^x$$

$$g(1) = 2^1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{g(1) = 2}$$

Já na alternativa B, que a função é $g(x) = 2^{-x}$, substituindo $x = 1$, encontraremos:

$$g(x) = 2^{-x}$$

$$g(1) = 2^{-1} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{g(1) = -\frac{1}{2}}$$

Sendo assim, **nosso gabrito será a alternativa A**. Você poderia fazer também a mesma verificação para a função logarítmica. Porém, acredito que seja mais fácil e rápido testar os pontos na função exponencial.

Dito isto,

Gabarito: Alternativa **A**

8. (FUNRIO / Pref. Alta Floresta - 2019) Dada função $f(x) = \log_2 x^2$, determine o valor de x quando sua representação gráfica possui imagem igual à zero.

a) 2
b) -2
c) -1
d) 0
e) 1

Comentários:

A **imagem** de uma função é representada pelos **possíveis valores de y ou $f(x)$** resultantes da aplicação de x na lei de formação da função.

Então, a banca quer saber para qual valor de x, $y = 0$.

$$\log_2 x^2 = 0$$

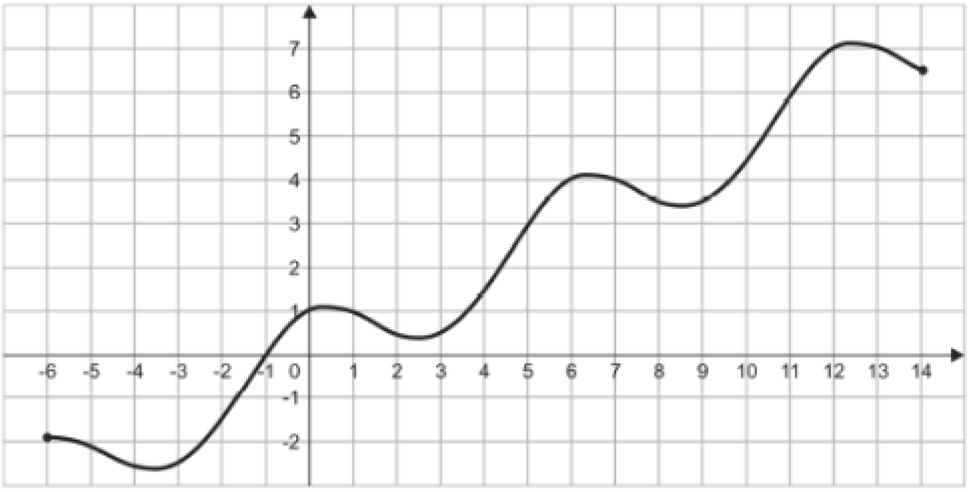
$$x^2 = 2^0$$

$$x^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = \pm 1}$$

Observe que não gabarito que abarque 1 e -1 como resposta.

Gabarito: **Anulada**

9. (FCC / UNIPAR - 2020) Considere a função f, de domínio $[-6;\ 14]$, cujo gráfico é mostrado na figura abaixo.

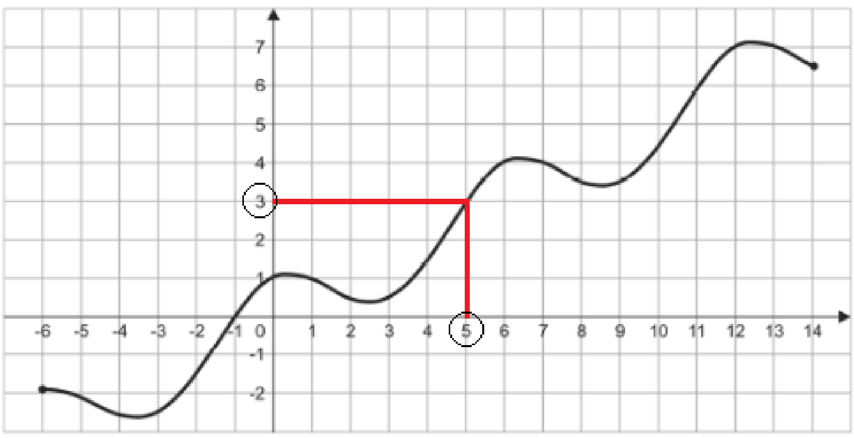


Se g é a função definida, para todo número real positivo x, pela lei $g(x) = \log_2 x$ e b é o número real tal que $f(g(b)) = 3$, então o valor de b é igual a:

a) 2
b) 16
c) 8
d) 4
e) 32

Comentários:

Observe que, pelo gráfico, para f ser igual a 3, a abscissa deve ser igual a 5.



Então, temos que $\boldsymbol{f(5) = 3}$.

Se, $f(5) = 3$ e $f\left(g(b)\right) = 3$, é porque $g(b) = 5$.

Vamos substituir esse valor na função de g:

$$g(x) = \log_2 x$$

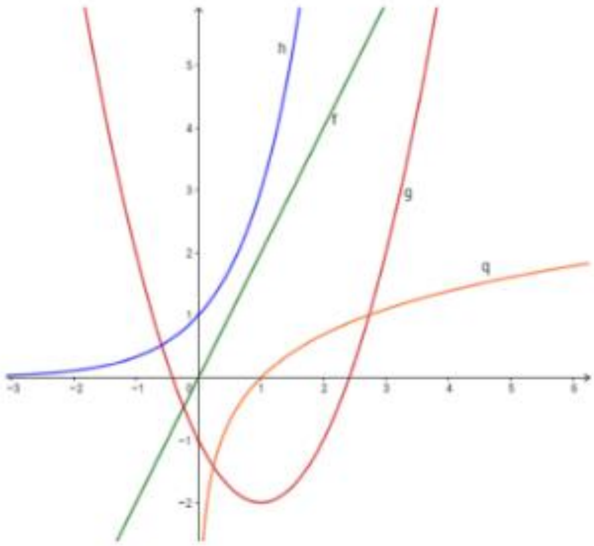
$$g(b) = \log_2 b$$

$$5 = \log_2 b$$

$$b = 2^5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{b = 32}$$

Gabarito: Alternativa **E**

10. (UFMT / Pref. Várzea Grande - 2018) A figura apresenta o gráfico de quatro funções $\boldsymbol{f(x), g(x), h(x)}$ e $\boldsymbol{q(x)}$.



Com base no comportamento de cada curva, as funções f, g, h e q podem respectivamente ser:

a) 1.º grau, exponencial, 2.º grau e logarítmica.
b) 1.º grau, logarítmica, 2.º grau e exponencial.
c) 1.º grau, 2.º grau, exponencial e logarítmica.
d) logarítmica, 2.º grau, exponencial e 1.º grau.

Comentários:

Estudamos, em aulas pretéritas, o comportamento do gráfico da função de 1º e de 2º grau.

- **Função 1º grau:** RETA → função f

- **Função 2º grau:** PARÁBOLA → função g

Sendo assim, já poderíamos assinalar a alterntiva C. Todavia, vamos relembrar o comportamento das funções logarítmica e exponencial (estudado nessa aula).

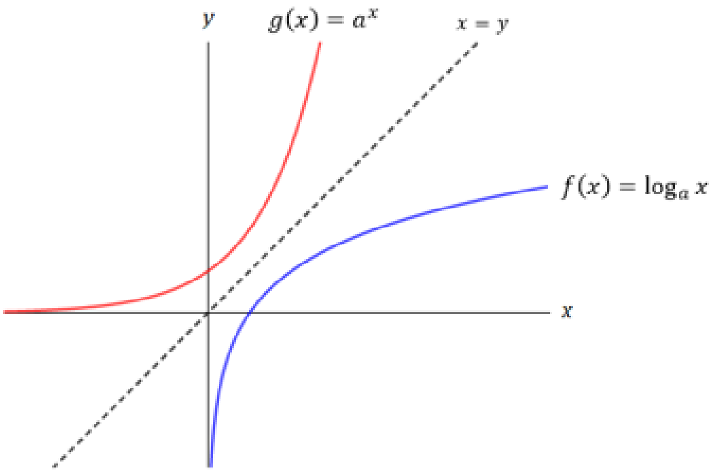
A função logarítmica $f(x)$ é inversa da função exponencial $g(x)$, ou seja, tais funções são simétricas em relação à reta xy (bissetriz dos quadrantes ímpares).

$$f(x) = \log_a x$$

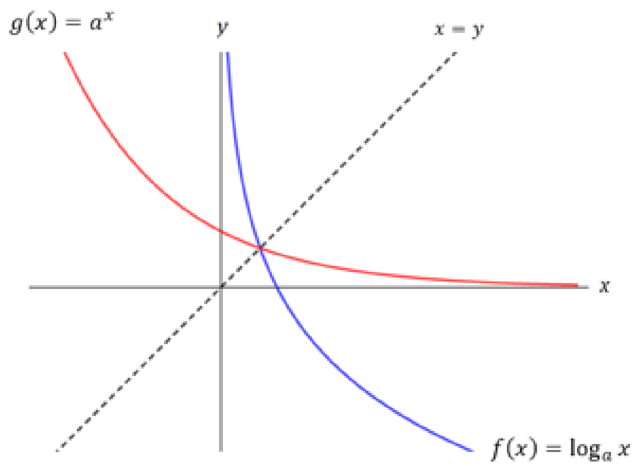
$$g(x) = a^x$$

Vamos analisar o gráfico dessas duas funções **em função da base $\boldsymbol{a}$** do logaritmo.

1. $a > 1$



2. $0 < a < 1$



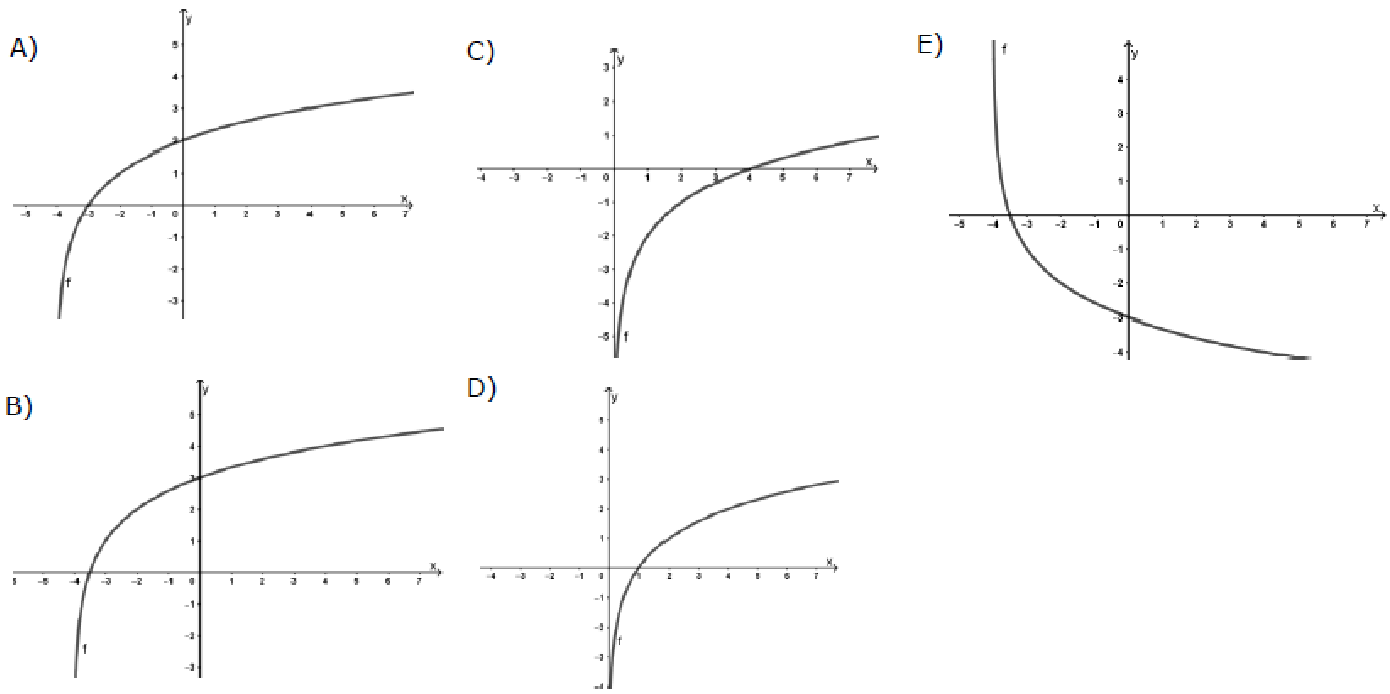
No enunciado a base é maior que 1. Logo, teremos:

- $\boldsymbol{h}$ → **exponencial**

- $\boldsymbol{q}$ → **logarítmica**

Gabarito: Alternativa **C**

11. (FUNDATEC / Pref. Mampituba - 2018) O gráfico da função $y = f(x) = \log_2(2x + 8)$ é:



Comentários:

Vamos substituir valores de x na função para constatar qual é o gráfico a ser assinalado.

- $\boldsymbol{x = 0}$

$$f(x) = \log_2(2x + 8)$$

$$f(0) = \log_2(2(0) + 8)$$

$$f(0) = \log_2(8) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{f(0) = 3}$$

Ou seja, quando $\boldsymbol{x = 0, y = 3}$. Observe que a única alternativa que nos traz essa condição é a alternativa B.

Gabarito: Alternativa **B**

12. (QUADRIX / SESC DF - 2018) Dado um número real $\boldsymbol{a > 1}$, sabe-se que $\boldsymbol{f(x) = \log_a x}$ é uma função cujo gráfico contém os pontos

a) $(1,0)\ e\ (1, a)$
b) $(1,0)\ e\ (a, 1)$
c) $(0,1)\ e\ (1, a)$
d) $(0,1)\ e\ (a, 1)$

e) $(1{,}0)\ e\ (a, 0)$

Comentários:

Com nossa teoria e com as resoluções de exercícios feitos, já podemos chegar a uma conclusão "de cara". Automaticamente já podemos **eliminar as alternativas C e D**. Gostaria que antes de continuar você me respondesse o porquê.

"Professor, nas alternativas C e D a banca diz que a função logarítmica passa no ponto $(0{,}1)$. E, pelo que eu aprendi na sua aula, é impossível tal função passar em $x = 0$, pois como aprendemos o logaritmando há de ser maior que zero. Em nenhuma hipótese um número elevado a outro é igual a zero."

Justamente, caro Aluno. Perfeita resposta.

Então, ficamos entre as alternativas **A, B e E** e todas elas passam pelo ponto $(1{,}0)$. Vamos calcular então o valor do segundo ponto. Iremos encontrar o valor de y quando $x = a$.

$$y = \log_a x$$

$$y = \log_a a$$

$$a^y = a \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = 1}$$

Ou seja, a função $f(x) = \log_a x$ contém o ponto $(\boldsymbol{a}, \mathbf{1})$. Sendo assim, a alternativa B é nosso gabarito.

Gabarito: Alternativa **B**

13. (EsPCEx / Cadete – 2013) Na figura abaixo, está representado o gráfico da função $y = \log x$. Nesta representação estão destacados três retângulos cuja soma das áreas é igual a:

a) $\log 2 + \log 3 + \log 5$
b) $\log 30$
c) $1 + \log 30$
d) $1 + 2 * \log 15$
e) $1 + 2 * \log 30$

Comentários:

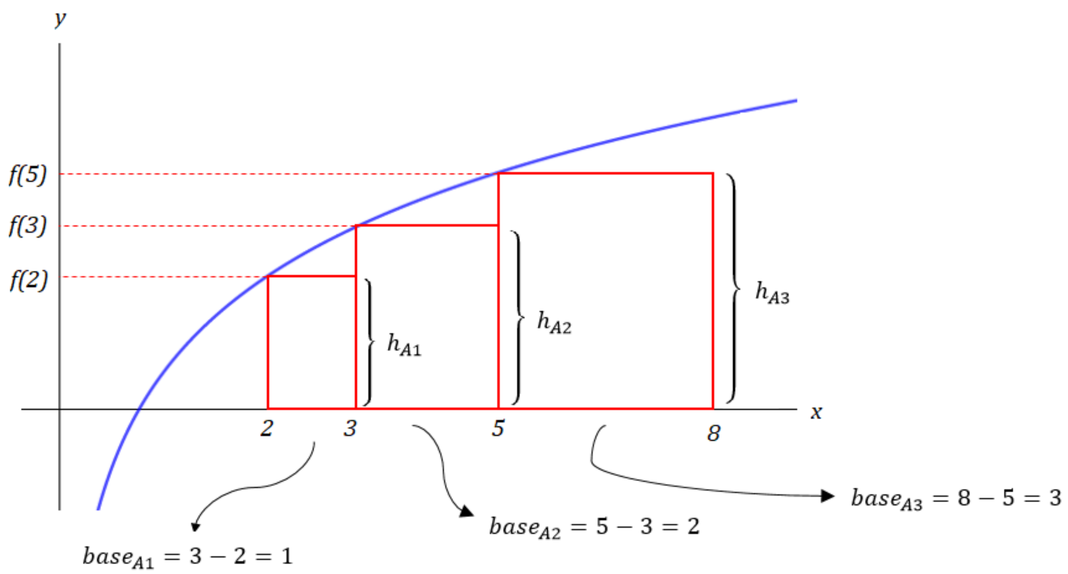
Observe que a **soma das áreas** será a igual a **soma das áreas dos retângulos A1, A2 e A3**.

A área de um retângulo é dada pela multiplicação da base vezes a altura. Em termos matemáticos a área será igual a:

$$A = base * altura$$

Perceba que a base é dada pela diferença entre os valores de x e a altura é dada pela diferença entre $f(x)$.

Vejamos mais uma vez no gráfico.



Então, a **área total dos três retângulos** será igual a:

$$A_{Total} = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A_{Total} = 1 * f(2) + 2 * f(3) + 3 * f(5)$$

$$A_{Total} = \log 2 + 2 * \log 3 + 3 * \log 5$$

A partir de agora é <u>manipular algebricamente</u> esta soma para encontrar o gabarito. Acompanhe:

$$A_{Total} = \log 2 + \log 5 + 2 * \log 3 + 2 * \log 5$$

$$A_{Total} = \log(2 * 5) + 2 * (\log 3 + \log 5)$$

$$A_{Total} = \log 10 + 2 * \log(3 * 5) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{Total} = 1 + 2 * \log 15}$$

Gabarito: Alternativa **D**

14. (IMA / Prefeitura de Tuntum (MA) – 2019) Dada a função logarítmica $f(t) = \log(t + 4)$, qual das alternativas apresenta o dobro de t quando $f(t) = 2$?

a) 104
b) 208
c) 96
d) 192

Comentários:

A banca nos fornece a lei de formação da função logarítmica que é dada por:

$$\boldsymbol{f(t) = \log(t + 4)}$$

e nos questiona **o valor do dobro de t** quando a função $f(t)$ tiver valor igual a 2.

Para isso, vamos substituir o valor da função por 2 e calcular o valor de $\boldsymbol{t}$ que nos irá remeter a este resultado.

$$f(t) = \log(t + 4)$$

$$2 = \log(t + 4)$$

$$10^2 = t + 4$$

$$t = 100 - 4 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{t = 96}$$

Observe, porém, que **a banca quer como resposta o valor do dobro de t**. Então,

$$Resposta = 2 * t$$

$$Resposta = 2 * 96 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{Resposta = 192}$$

Gabarito: Alternativa **D**

15. (BIO RIO / Prefeitura de São Gonçalo – 2016) Considere a função cuja regra é: $f(x) = \log_2(x+k)$, na qual k é uma constate. O gráfica de $f(x)$ intercepta o eixo das ordenadas em $(0,2)$. Dessa forma, o valor de $f(x)$ para $x = 28$ é igual a:

a) 8
b) 7
c) 6
d) 5
e) 4

Comentários:

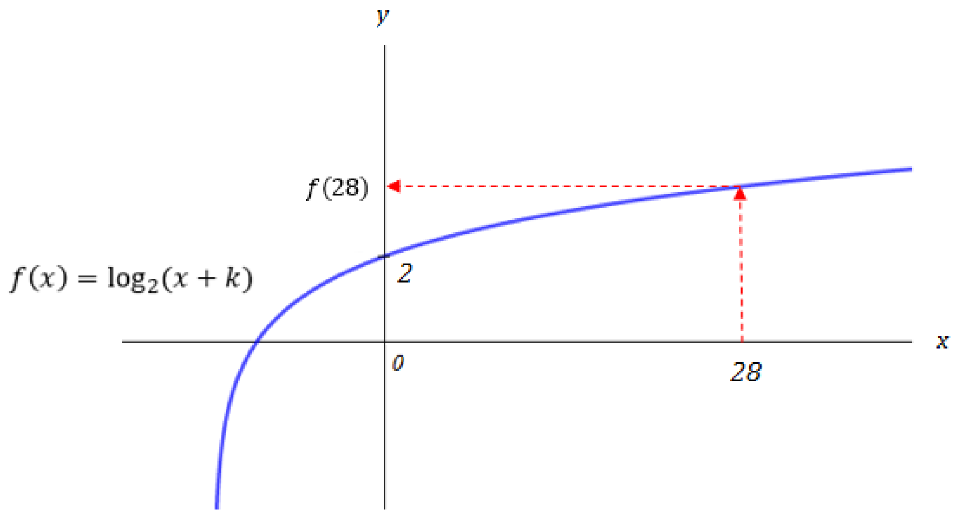
O enunciado nos fornece a função logarítmica que é dada por:

$$f(x) = \log_2(x+k)$$

Perceba que a base do logaritmo (2) é maior que 1. E como visto na teoria a função será **crescente**.

Sabemos também que a função $f(x)$ "corta" o eixo das ordenadas (eixo y) em $(0,2)$.

Sendo assim, o gráfico da função será da seguinte forma:



A banca nos questiona qual será o valor de $f(28)$, isto é, o valor da função quando $x = 28$.

Para isso, primeiro devemos **calcular o valor de k**.

Como a função intercepta o eixo y no ponto $(x = 0, y = 2)$, iremos substituir esse ponto na função e calcular o valor de k.

$$f(x) = \log_2(x + k)$$

$$2 = \log_2(0 + k)$$

$$2 = \log_2 k \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{k = 4}}$$

Logo, a lei de formação da função será igual a:

$$f(x) = \log_2(x + 4)$$

Por fim, iremos substituir o valor de $x = 28$ e calcular a resposta final.

$$f(x) = \log_2(x + 4)$$

$$f(28) = \log_2(28 + 4)$$

$$f(28) = \log_2(32) \quad \rightarrow \boldsymbol{f(28) = 5}$$

Gabarito: Alternativa **D**

16. (FADESP / IFE – 2018) Um experimento realizado em laboratório aprontou que, ao administrar uma nova substância no organismo de um camundongo, a população de bactérias que ali se desenvolvera diminuiu com o passar do tempo, segundo o modelo:

$$\boldsymbol{P(t) = P_i * e^{kt}}$$

Com P_i é a população inicial, t é o tempo (em dias) e k, uma constate real. Observou-se que após o primeiro dia, a contar do momento da administração da substância, a população era de aproximadamente, $120x10^3$ bactérias, equanto que, no segundo dia, a população era de aproximadamente $15x10^3$ bactérias. Com esses dados, o valor da constante real k, obtido pelo pesquisador é:

a) $-8\ ln2$
b) $-2\ ln3$
c) $-5\ ln3$
d) $-3\ ln2$
e) $-4\ ln2$

Comentários:

A banca nos fornece a <u>lei de formação da função logarítmica</u> e o valor desta após o primeiro dia (a contar do momento da administração da substância) e o valor no segundo dia. Em termos matemáticos teremos:

$$P(t) = P_i * e^{kt} \quad , \text{ sendo que:}$$

$$\text{Para } t = 1 \ \rightarrow \ P(t) = 120x10^3$$

$$\text{Para } t = 2 \ \rightarrow \ P(t) = 15x10^3$$

Substituiremos, então, os valores de t na função $P(t)$:

- $t = 1 \ \rightarrow \ P(t) = 120x10^3$:

$$P(t) = P_i * e^{kt}$$

$$120x10^3 = P_i * e^{k*1}$$

$$120x10^3 = P_i * e^k$$

$$120x10^3 = P_i * e^k$$

Isolando $\boldsymbol{P_i}$, ficamos com:

$$\boxed{\boldsymbol{P_i = \frac{120x10^3}{e^k}}}$$

- $t = 2 \ \rightarrow \ P(t) = 15x10^3$:

$$P(t) = P_i * e^{kt}$$

$$15x10^3 = P_i * e^{k*2}$$

Substituindo P_i e calculando o valor de k:

$$15x10^3 = P_i * e^{k*2}$$

$$15x10^3 = \frac{120x10^3}{e^k} * e^{2k}$$

$$\frac{15x10^3}{120x10^3} = \frac{e^{2k}}{e^k}$$

$$\frac{1}{8} = e^{2k-k} \quad \rightarrow \quad e^k = \frac{1}{8}$$

Logo, $\boldsymbol{k}$ **será igual a**:

$$e^k = \frac{1}{8} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{k = \ln \frac{1}{8}}$$

Perceba, porém, que as respostas não estão idênticas ao resultado encontrado acima. Devemos manipular algebricamente o valor de k. Acompanhe passo a passo.

$$k = \ln \frac{1}{8}$$

$$k = \ln \frac{1}{2^3}$$

$$k = \ln 2^{-3} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{k = -3 \ln 2}$$

Esta última passagem é a aplicação da propriedade do logaritmo da potência visto na teoria. Vamos relembrar:

$$\log_a x^b = b * \log x$$

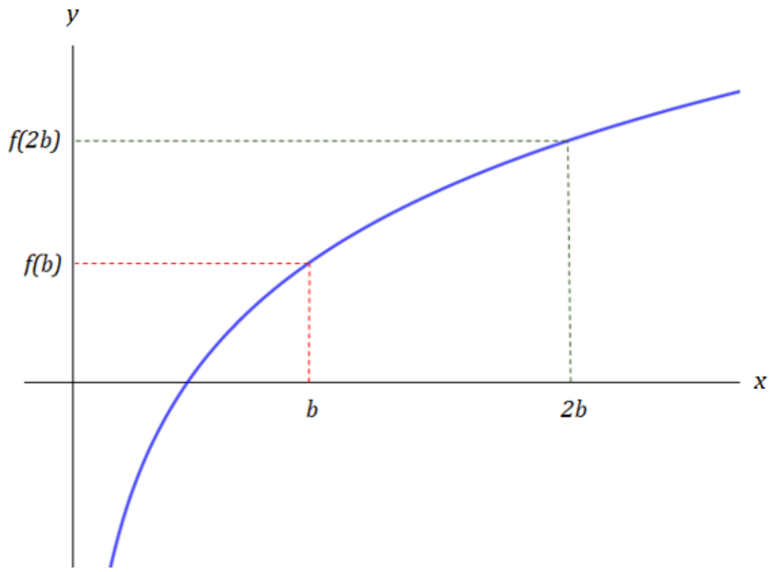
Gabarito: Alternativa **D**

17. (COTEC / Prefeitura de Horizonte (MG) – Professor – 2015) Considere $\boldsymbol{f:]0, +\infty[\rightarrow R}$ uma função definida por $\boldsymbol{f(x) = \log x}$ e $\boldsymbol{b}$ um número real maior do que 1. Com base nas informações é CORRETO afirmar que a área do retângulo de vértices $\boldsymbol{(b, f(b)), (2b, f(b)), (2b, f(2b))}$ e $\boldsymbol{(b, f(2b))}$ vale:

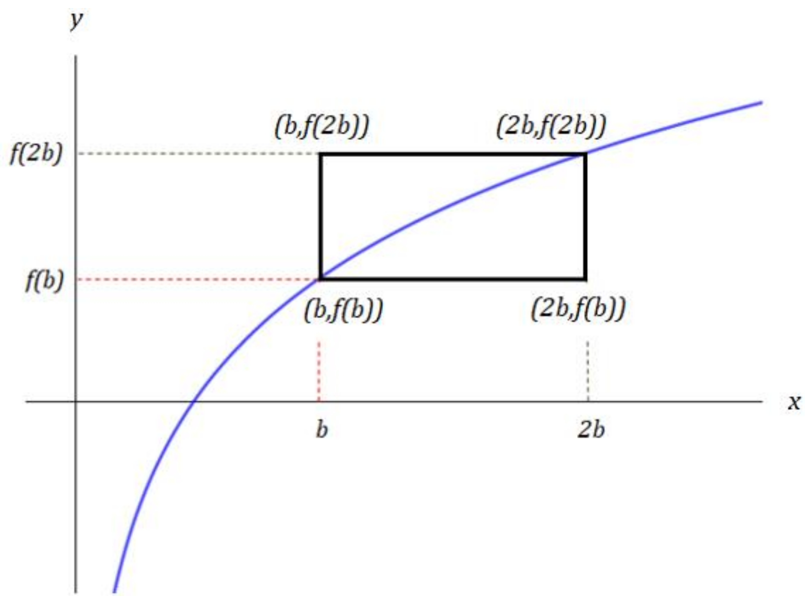
a) $b \log b$
b) $\log 2$
c) $b \log 2$
d) $\log b$

Comentários:

O enunciado nos fornece a função logarítmica $f(x) = \log x$. Vamos esboçar o gráfico dessa função. A base do logaritmo vale 10, logo, maior que 1 e com isso a função será **crescente**. Indicaremos no gráfico, genericamente, os pontos b e $2b$ e os respectivos valores no eixo y.



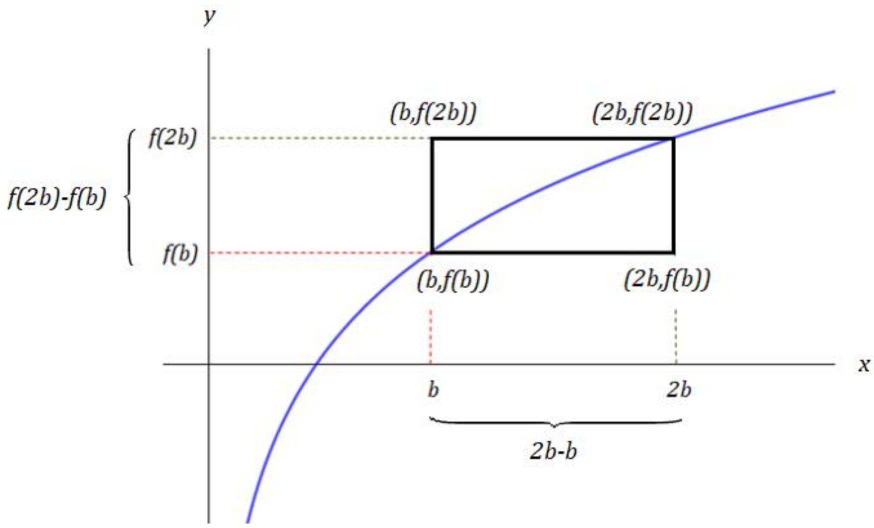
A banca nos questiona o valor da área do retângulo de vértices $(b, f(b)), (2b, f(b)), (2b, f(2b))\ e\ (b, f(2b))$. Vamos assinalar esses pontos no gráfico e representar o retângulo indicado.



A área de um retângulo é dada pela multiplicação da base vezes a altura. Em termos matemáticos a área será igual a:

$$A = base * altura$$

Perceba que **a base é dada pela diferença entre $2b - b$** e a **altura é dada pela diferença entre $f(2b) - f(b)$**. Vejamos mais uma vez no gráfico.



Então,

$$A = base * altura$$

$$A = (2b - b) * (f(2b) - f(b))$$

Iremos substituir agora o valor de $2b$ e b na função e calcular o valor da área.

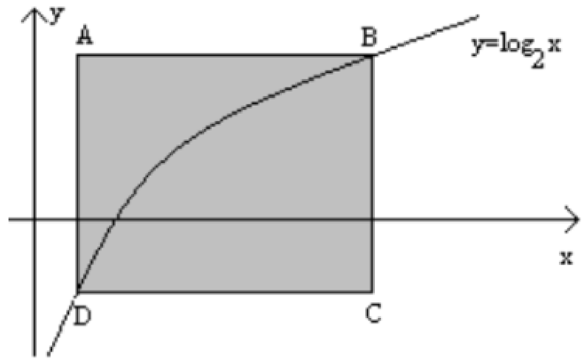
$$A = (2b - b) * (f(2b) - f(b))$$

$$A = b * (\log 2b - \log b)$$

$$A = b * \log\left(\frac{2b}{b}\right) \quad \rightarrow \mathbf{A = b * \log 2}$$

Gabarito: Alternativa **C**

18. (CONPASS / Prefeitura de Carnaíba – Professor – 2012) O gráfico da função $y = \log_2 x$ e o retângulo ABCD, cujos lados são paralelos aos eixos coordenados, estão representados abaixo.



Considere que:

- Os pontos B e D pertencem ao gráfico da função $y = \log_2 x$

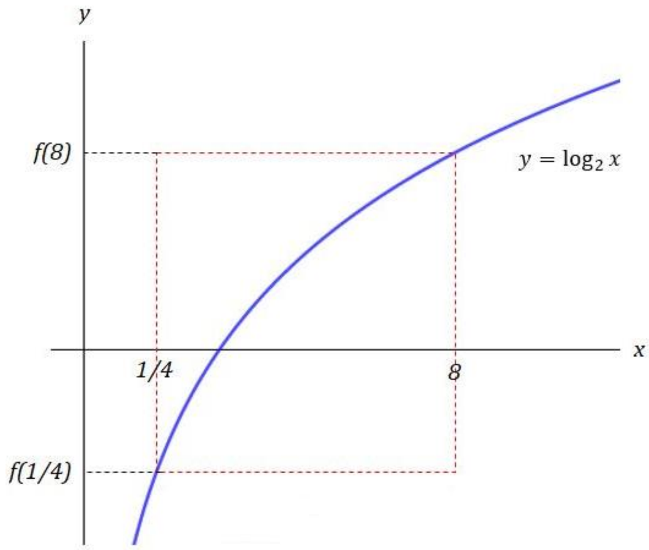
- Os pontos A e B têm abscissas 1/4 e 8, respectivamente.

A área do retângulo ABCD é igual a:

a) 38
b) 38,25
c) 38,5
d) 37
e) 38,75

Comentários:

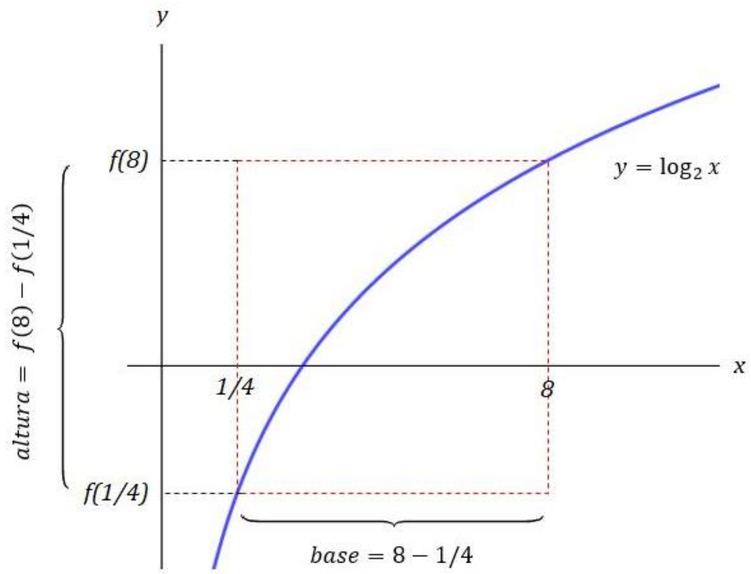
Vamos redesenhar o gráfico e assinalar os pontos fornecidos no enunciado. Lembrando que abscissa se refere ao eixo x.



A área de um retângulo é dada pela multiplicação da base vezes a altura. Em termos matemáticos a área será igual a:

$$A = base * altura$$

Perceba que a **base é dada pela diferença entre $\mathbf{8 - 1/4}$** e a **altura é dada pela diferença entre $\boldsymbol{f(8) - f(1/4)}$.** Vejamos mais uma vez no gráfico.



Então,

$$A = base * altura$$

$$A = (8 - 1/4) * (f(8) - f(1/4))$$

Iremos substituir agora o valor de 8 e 1/4 na função e calcular o valor da área.

$$A = (8 - 1/4) * (f(8) - f(1/4))$$

$$A = (8 - 0{,}25) * (\log_2 8 - \log_2 1/4)$$

$$A = 7{,}75 * \big(3 - (-2)\big)$$

$$A = 7{,}75 * (3 + 2)$$

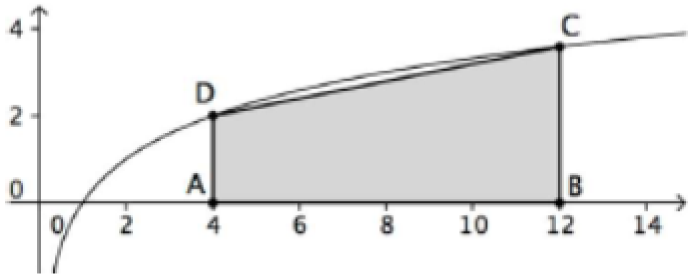
$$A = 7{,}75 * 5 \quad \rightarrow \boldsymbol{A = 38{,}75\ u.a.}$$

Gabarito: Alternativa **E**

19. (FGV / ALRO – 2018) A figura a seguir mostra o gráfico da função

$$f(x) = \log_2 x$$

e os pontos $A = (4, 0)$, $B = (12, 0)$, $C = \left(12, f(12)\right)$ e $D = (4, f(4))$.



Considerando $f(3) = 1,585$ a área do quadrilátero ABCD é:

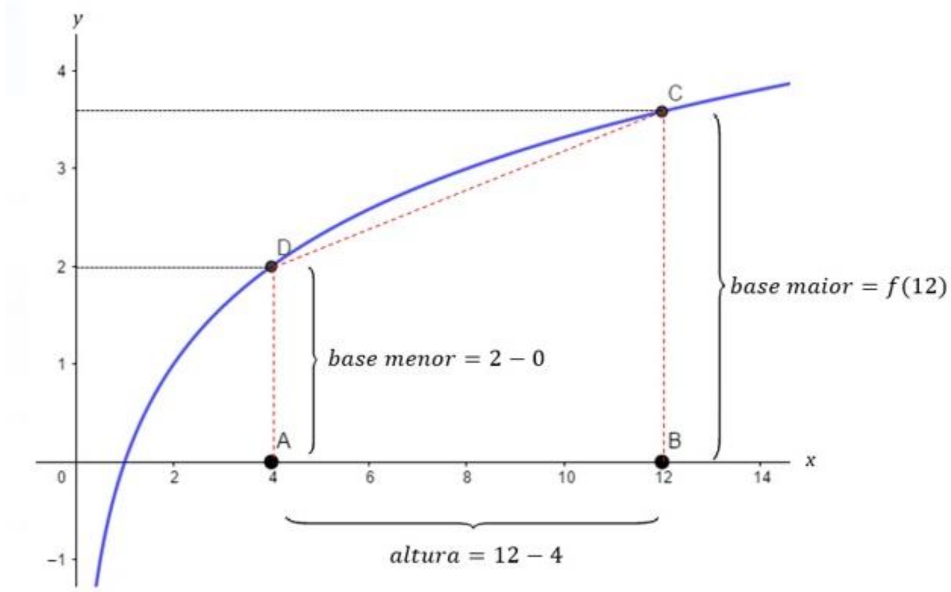
a) 20,16
b) 21,52
c) 22,34
d) 23,60
e) 24,88

Comentários:

Observe que o quadrilátero ABCD é um <u>trapézio retângulo "deitado".</u> Sua área é dada pela multiplicação da altura pela soma da base maior com a base menor divididos por dois. Em termos matemáticos:

$$A = \frac{(base\ maior + base\ menor) * altura}{2}$$

Vamos analisar o gráfico e os pontos do quadrilátero.



Perceba que a única dimensão que nos resta calcular para a fórmula da área é a base maior que equivale ao valor de y quando $x = 12$, isto é, $f(12)$.

$$f(x) = \log_2 x$$

$$f(12) = \log_2 12 = \log_2(4 * 3)$$

Relembrando a **propriedade do logaritmo do produto** visto na teoria:

$$\log_a(x * y) = \log_a x + \log_a y$$

Aplicando a propriedade e calculando $f(12)$:

$$f(12) = \log_2(4 * 3)$$

$$f(12) = \log_2 4 + \log_2 3$$

$$f(12) = 2 + 1{,}585 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{f(12) = 3{,}585}}$$

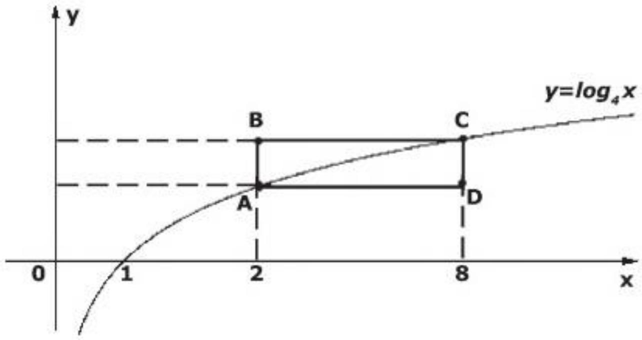
Sendo assim, a área do quadrilátero ABCD será igual a:

$$A = \frac{(B + b) * h}{2}$$

$$A = \frac{(3{,}585 + 2) * (12 - 4)}{2} = \frac{5{,}585 * 4}{2} \rightarrow \boldsymbol{A = 22,34\ u.a.}$$

Gabarito: Alternativa **C**

20. (EsPCEx / Cadete – 2017) A curva do gráfico representa a função $f(x) = \log_4 x$



A área do retângulo ABCD é:

a) 12
b) 6
c) 3
d) $6\log_4(3/2)$
e) $\log_4 6$

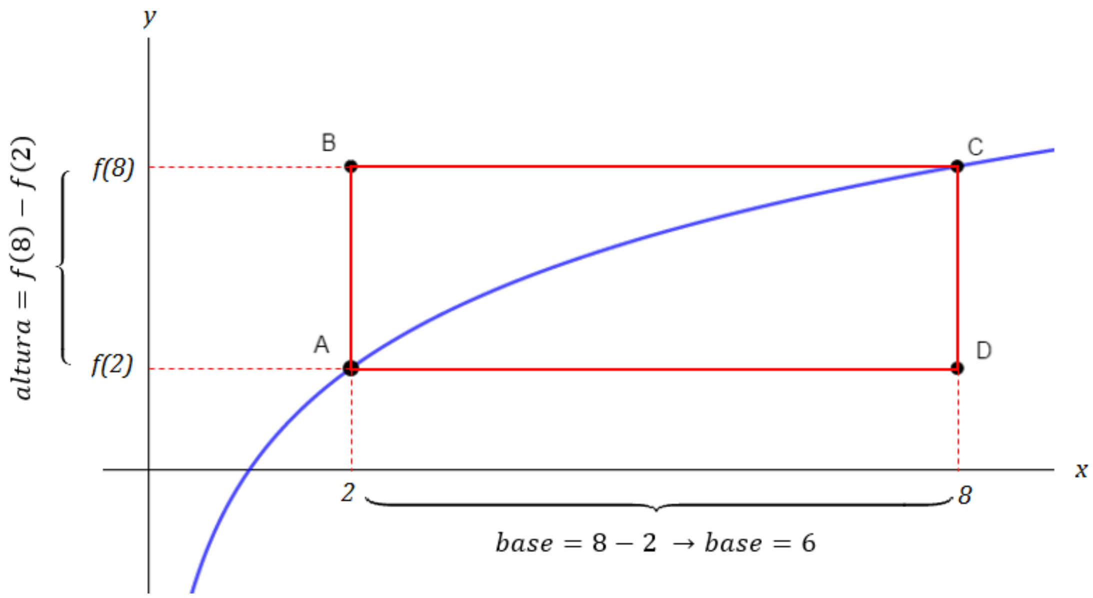
Comentários:

A banca nos fornece a <u>lei de formação da função logarítmica</u> e nos questiona o valor da área do retângulo ABCD.

A área de um retângulo é dada pela multiplicação da base vezes a altura. Em termos matemáticos a área será igual a:

$$A = base * altura$$

Perceba que a base é dada pela diferença entre $8 - 2$ e a altura é dada pela diferença entre $f(8) - f(2)$. Vejamos mais uma vez no gráfico.



Então, a área do quadrilátero será igual a:

$$A = base * altura$$

$$A = 6 * \big(f(8) - f(2)\big)$$

$$A = 6 * (\log_4 8 - \log_4 2)$$

Relembrando a **propriedade do logaritmo do quociente** visto na teoria:

$$\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$$

Aplicando a "volta" da propriedade e calculando a área:

$$A = 6 * (\log_4 8 - \log_4 2) = 6 * \log_4 \left(\frac{8}{2}\right)$$

$$A = 6 * \log_4 4 = 6 * 1 \quad \rightarrow \boldsymbol{A = 6\, u.a.}$$

Gabarito: Alternativa **B**

21. (EsPCEx / Cadete – 2011) Na figura abaixo, dois vértices do trapézio sombreado estão no eixo x e os outros dois vértices estão sobre o gráfico da função real $f(x) = \log_k x$, com $k > 0$ e $k \neq 1$.

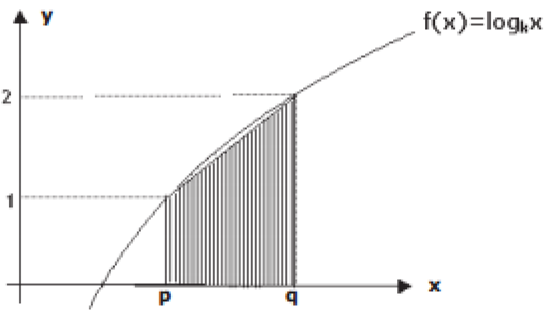


Gráfico fora de escala

Sabe-se que o trapézio sombreado tem 30 unidades de área; assim, o valor de $k + p - q$ é igual a:

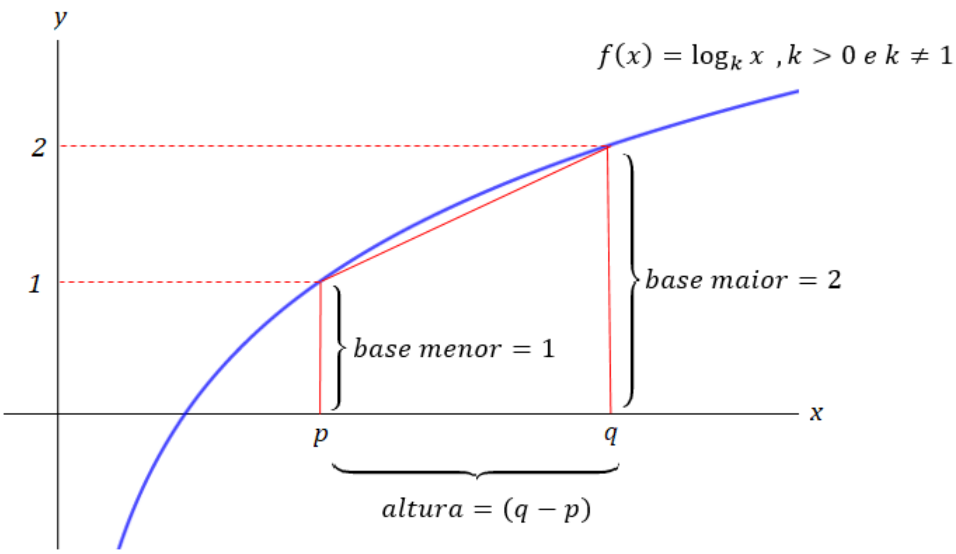
a) -20
b) -15
c) 10
d) 15
e) 20

Comentários:

Observe que o quadrilátero é um trapézio retângulo "deitado". E sua área é dada pela multiplicação da altura pela soma da base maior com a base menor divididos por dois. Em termos matemáticos:

$$A = \frac{(base\ maior + base\ menor) * altura}{2}$$

Vamos analisar o gráfico e os pontos do quadrilátero.



Igualando a área a 30 teremos:

$$30 = \frac{(2+1)*(q-p)}{2}$$

$$60 = 3*(q-p) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{q-p=20} \;\; equação\ (I)$$

Vamos calcular q e p em função de k. Observe no gráfico que os pontos $(p, 1)$ e $(q, 2)$ pertencem a função.

- Para o ponto $(p, 1)$:

$$y = \log_k x$$

$$1 = \log_k p \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{p = k}}$$

- Para o ponto $(q, 2)$:

$$y = \log_k x$$

$$2 = \log_k q \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{q = k^2}}$$

Substituindo na equação (I) e calculando o valor de k:

$$q - p = 20$$

$$k^2 - k = 20 \quad \rightarrow \quad k^2 - k - 20 = 0$$

Resolvendo a função do segundo grau por Bhaskara:

$$k = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$k = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4*1*(-20)}}{2*1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2}$$

$$k_1 = \frac{1+9}{2} = \frac{10}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{k_1 = 5}$$

$$k_2 = \frac{1-9}{2} = \frac{-8}{2} \quad \rightarrow \quad \cancel{\boldsymbol{k_2 = -4}}$$

Perceba, porém, que o enunciado nos afirma que $\boldsymbol{k > 0}$, logo, dos valores acima o único aceitável é $\boldsymbol{k = 5.}$

De posse de k, calculamos o questionamento feito pela banca.

$$k + p - q$$

$$k + k - k^2 = 5 + 5 - 5^2 = 10 - 25 = -15$$

$$\boldsymbol{k + p - q = -15}$$

Gabarito: Alternativa **B**

22. (IMA / Prefeitura de Anísio de Abreu (PI) – Professor – 2015) O domínio da função abaixo em R é igual a:

$$\boldsymbol{f(x) = \log_{(x-1)}(x^2 + 4)}$$

a) $-2 < x < 2 \;\; e \;\; x \neq 1$
b) $1 < x \neq 2$
c) $-2 < x < 2$
d) $0 < x \neq 1$

Comentários:

O enunciado nos fornece a lei de formação da função logarítmica e nos questiona o **domínio** desta função.

O **domínio** de uma função representa o conjunto dos **possíveis valores de x** onde a função é definida. Na função logarítmica o domínio é composto por duas condições.

- ✓ A primeira é a **base do logaritmo** ser **maior que 0** e também **diferente de 1**.
- ✓ A segunda é o **logaritmando ser maior que 0**.

Em termos matemáticos:

$$\log_a x \quad \rightarrow \quad x > 0 \quad e \quad a > 0 \; e \; a \neq 1$$

Vamos então dividir nosso problema em dois.

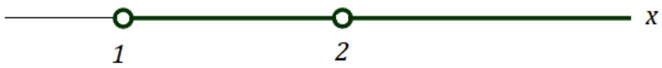
A primeira parte vai ser encontrar a condição de existência para a base $a > 0 \; e \; a \neq 1$. E a segunda parte, encontrar o intervalo de existência para o logaritmando $f(x) > 0$.

- (I) – base maior que zero e diferente de 1.

$$f(x) = \log_{(x-1)}(x^2 + 4)$$

$$x-1>0 \;\; e \;\; x-1\neq 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x>1 \;\; e \;\; x\neq 2}$$

Representando os valores de x na reta:



Observe que representamos na reta os valores maiores que 1 (intervalo aberto) e utilizamos a representação também aberta em 2, pois o como vimos $x>1 \;\; e \;\; x\neq 2$.

- (II) – Logaritmando maior que zero.

$$f(x)=\log_{(x-1)}(x^2+4)$$

$$x^2+4>0$$

Observe que, para qualquer valor de x, seja ele positivo ou negativo, elevado ao quadrado terá como resultado um número positivo, que somado a 4, também será positivo.

Então, nessa segunda condição de existência, todo e qualquer valor de x irá satisfazer a inequação. Logo, a condição de existência da função será a condição de existência da primeira parte, pois, repetindo, todo e qualquer valor de x irá satisfazer a inequação na segunda condição.

Sendo assim, o **domínio** da função será igual a:

$$\boldsymbol{x>1 \;\; e \;\; x\neq 2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{1<x\neq 2}$$

Gabarito: Alternativa **B**

23. (CESPE / Pref. São Cristóvão – 2019) Julgue o item, relativo a funções exponenciais.

Para $x>0$, a função $f(x)=\ln x$, em que a inversa é $g(x)=e^x$, é tal que $x=e^{f(x)}=\ln g(x)$.

Comentários:

Vamos calcular separadamente as duas funções e constatar se são iguais a x.

- $e^{f(x)}$

$$e^{f(x)}=e^{\ln x}$$

Estudamos nas consequências da definição que:

A potência de base a e expoente $\log_a x$ será **igual a x**.

$$\boldsymbol{a^{\log_a x} = x}$$

Então,

$$\boldsymbol{e^{f(x)} = e^{\ln x} = x}$$

- $\ln g(x)$

$$ln\, g(x) = ln\, e^x$$

Aplicando a propriedade da potência do logaritmo:

$$ln\, g(x) = ln\, e^x$$

$$ln\, g(x) = x \times ln\, e$$

$$ln\, g(x) = x$$

Logo,

$$\boldsymbol{e^{f(x)} = \ln g(x) = x}$$

Gabarito: **CERTO**

24. (CESPE / PM AL – 2018) Julgue o item subsequente, relativo à função $f(x) = 30 - \log_2(x)$.

O domínio da função $f(x)$ é o conjunto dos números reais positivos e $f(8) = 27$.

Comentários:

O **domínio** de uma função representa o conjunto dos **possíveis valores de x** onde a função é definida. Na função logarítmica o domínio é composto por duas condições.

✓ A primeira é a **base do logaritmo** ser **maior que 0** e também **diferente de 1**. No nosso caso a base é 2 que é maior que 0 e diferente de 1. Condição satisfeita.

✓ A segunda é o **logaritmando ser maior que 0**.

Então,

$$x > 0$$

Ou seja, o domínio da função $f(x)$ é o conjunto dos números reais maiores que zero, isto é, positivos.

A primeira parte do enunciado está correta. Vamos agora calcular o valor de $f(8)$.

$$f(x) = 30 - \log_2(x)$$

$$f(8) = 30 - \log_2(8)$$

$\log_2(8)$ é igual a 3, uma vez que $2^3 = 8$.

$$f(8) = 30 - \log_2(8)$$

$$f(8) = 30 - 3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{f(8) = 27}$$

Gabarito: **CERTO**

25. (CESPE / SEDUCA AM – 2011) A respeito de funções, julgue o item a seguir.

Se $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_{10} x$, então $f(x) \times \ln 10 = g(x) \times \ln 2$, em que $\ln k$ denota o logaritmo neperiano de k.

Comentários:

Vamos chamar cada função de y, calculá-las separadamente e constatar se serão iguais.

- $f(x) \times \ln 10$

$$y = f(x) \times \ln 10$$

$$y = \log_2 x \times \ln 10$$

Fazendo a mudança de base para a base e:

$$y = \log_2 x \times \ln 10$$

$$y = \frac{\ln x}{\ln 2} \times \ln 10$$

Aplicando a volta da propriedade do quociente e do produto teremos:

$$y = \ln\left(\frac{10x}{2}\right) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = \ln(5x)}$$

- $g(x) \times \ln 2$

$$y = g(x) \times \ln 2$$

$$y = \log_{10} x \times \ln 2$$

Fazendo a mudança de base para a base e:

$$y = \log_{10} x \times \ln 2$$

$$y = \frac{\ln x}{\ln 10} \times \ln 2$$

Aplicando a volta da propriedade do quociente e do produto teremos:

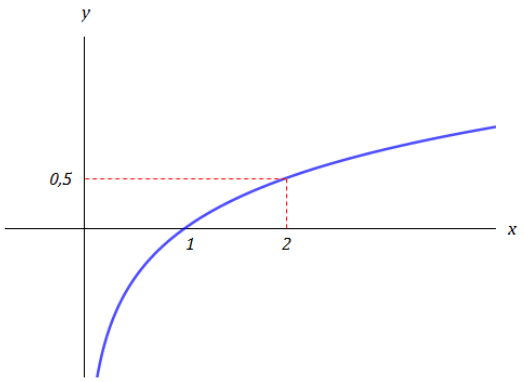
$$y = \ln\left(\frac{2x}{10}\right) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = \ln\left(\frac{x}{5}\right)}$$

Observe que **as funções são diferentes**. O primeiro y encontrado é diferente do segundo. Logo, a igualdade não se mantém.

Gabarito: **ERRADO**

26. (CONPASS - Adaptada / Prefeitura de Brejinho - 2016) Na figura está parte da representação gráfica da função f definida por

$$f(x) = \log_a x \quad , \quad a \in R - \{1\}$$



O valor de a é igual a:

a) $^3/_2$
b) 2
c) $^5/_2$
d) 4

Comentários:

A banca nos fornece a lei de formação da função logarítmica que é dada por:

$$f(x) = \log_a x$$

e pelo gráfico constatamos que o ponto $(x = 2\,;\ y = 0{,}5)$ pertence à função. Iremos substituir, então, o valor deste ponto na função e calcular o valor de a.

$$f(x) = \log_a x$$

$$0{,}5 = \log_a 2$$

$$\frac{1}{2} = \log_a 2$$

$$a^{1/2} = 2 \ \rightarrow\ \sqrt{a} = 2 \ \rightarrow \boldsymbol{a = 4}$$

Gabarito: Alternativa **D**

27. (UNIUV / Prefeitura Municipal de Irineópolis (SC) – Professor – 2015) Dada a função $f(x) = \log(x)$, é correto afirmar que $f(0,001)$ é igual a:

a) -3
b) 3
c) -6
d) 5
e) 0

Comentários:

A banca nos questiona qual o valor de $f(0{,}001)$, isto é, qual o valor da função quando $x = 0{,}001$.

$$f(x) = \log(x)$$

$$f(0{,}001) = \log 0{,}001$$

$$f(0{,}001) = \log 10^{-3}$$

Iremos aplicar a propriedade do logaritmo da potência e encontrar o valor da função. Então,

$$f(0{,}001) = \log 10^{-3} = -3 * \log 10$$

$$\boldsymbol{f(0,001) = -3}$$

Gabarito: Alternativa **A**

28. (SIGMA / Prefeitura de Maurilândia (GO) – Professor – 2015) Considere as funções reais abaixo:

$$\boldsymbol{f(x) = \log x}$$

$$\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{10^x}}$$

O valor de $\boldsymbol{g\big(f(100)\big)}$ é igual a:

a) $0{,}1$
b) $0{,}01$
c) $0{,}001$
d) -2
e) 2

Comentários:

A banca nos fornece a <u>lei de formação</u> das duas funções e nos questiona o resultado da função composta $g\big(f(x)\big)$.

Primeiro vamos calcular o valor entre parênteses "mais interno" e depois calculamos o valor dos parênteses "de fora".

Então, calculando $f(x)$ para $x = 100$, teremos:

$$f(x) = \log x$$

$$f(100) = \log 100 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{f(100) = 2}}$$

Substituindo agora o resultado na função $g(x)$ e calculando $g\big(f(x)\big)$ para $x = 100$:

$$g(f(x)) = g(f(100)) = g(2)$$

$$g(x) = \frac{1}{10^x}$$

$$g(2) = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} \rightarrow \boldsymbol{g(2) = 0,01}$$

Gabarito: Alternativa **B**

29. (ACAPLAM / Prefeitura de Arcoverde (PE) – Agente de Fiscalização de Trânsito – 2015) Um satélite será conduzido ao espaço por um foguete que tem seu consumo de combustível calculado pela função:

$$\boldsymbol{C(t) = \log_2(3t^2+5)^2 + 2 * \log_2 \frac{1}{10}}$$

em que C é o consumo em tonelada e t é o tempo em hora. Para colocar o satélite em órbita, o foguete deverá percorrer uma distância de 45.000 km a uma velocidade média de 9.000 km/h. Com base nos dados, qual o consumo de combustível, em toneladas, para o foguete cumprir a missão?

a) 5
b) 7
c) 4
d) 8
e) 6

Comentários:

O primeiro passo é **calcular o tempo em horas** que o foguete levará para percorrer a distância de 45.000km.

Observe que o foguete tem uma velocidade média de 9.000 km/h. Então, fazendo uma regra de três simples, calculamos o tempo gasto.

$$Velocidade \quad - \quad tempo$$

$$9.000 \qquad 1h$$

$$45.000 \qquad t$$

Multiplicando cruzado (produto do meio é igual ao produto dos extremos):

$$9.000 * t = 45.000$$

$$t = \frac{45.000}{9.000}$$

$$\boxed{\boldsymbol{t = 5h}}$$

O enunciado nos fornece a <u>lei de formação da função logarítmica</u> e nos questiona o valor dela para $t = 5h$ (que acabamos de calcular).

Então, substituindo $t = 5h$ na função e calculando $C(5)$ teremos:

$$C(t) = \log_2 (3t^2 + 5)^2 + 2 * \log_2 \frac{1}{10}$$

$$C(5) = \log_2 (3 * 5^2 + 5)^2 + 2 * \log_2 \frac{1}{10}$$

$$C(t) = \log_2 (3 * 25 + 5)^2 + 2 * \log_2 \frac{1}{10}$$

$$C(t) = \log_2 80^2 + 2 * \log_2 \frac{1}{10}$$

Recordando a **propriedade do logaritmo da potência** visto na teoria:

$$\log_a x^b = b * \log_a x$$

Aplicando a propriedade e continuando a solução:

$$C(t) = \log_2 80^2 + 2 * \log_2 \frac{1}{10}$$

$$C(t) = 2 * \log_2 80 + 2 * \log_2 \frac{1}{10}$$

$$C(t) = 2 * \left(\log_2 80 + \log_2 \frac{1}{10}\right)$$

Recordando a propriedade do logaritmo do produto:

$$\log_a (x * y) = \log_a x + \log_a y$$

Então ficamos com:

$$C(t) = 2 * \left(\log_2 80 + \log_2 \frac{1}{10}\right)$$

$$C(t) = 2 * \log_2 8$$

$$C(t) = 2 * 3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{C(t) = 6}$$

Gabarito: Alternativa **E**

30. (Makiyama / CPTM – Médico do Trabalho – 2011) Uma bactéria se espalhava no ambiente em que estava seguindo uma função logarítmica $F(x) = \log_2 x, (x > 1)$ em que x é o tempo medido em minutos e $F(x)$ é a área que possui a presença da bactéria em m². Após 32 minutos, a área ocupada será de:

a) $1m^2$
b) $2m^2$
c) $3m^2$
d) $4m^2$
e) $5m^2$

Comentários:

A banca nos fornece a <u>lei de formação da função logarítmica</u> e nos questiona o valor dessa quando $x = 32$.

Então,

$$F(x) = \log_2 x$$

$$F(32) = \log_2 32 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{F(32) = 5}$$

Gabarito: Alternativa **E**

31. (Instituto Excelência / Prefeitura de São Carlos – Médico – 2018) Uma função logarítmica de base a é definida por $f(x) = \log_a x$, com $a \neq 1$ e $a > 0$. É possível compor funções logarítmicas juntamente com funções polinomiais. Para a função

$$\boldsymbol{f(x) = \log_{10}\left(\frac{x^2 + x - 1}{x + 12}\right)}$$

O valor de $\boldsymbol{f(-2)}$ é igual a:

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

Comentários:

O enunciado nos fornece a lei de formação da função logarítmica e nos questiona o valor desta quando $x = -2$.

Iremos substituir o valor na função e calcular $f(-2)$.

$$f(x) = \log_{10}\left(\frac{x^2 + x - 1}{x + 12}\right)$$

$$f(-2) = \log_{10}\left(\frac{(-2)^2 + (-2) - 1}{-2 + 12}\right)$$

$$f(-2) = \log_{10}\left(\frac{4 - 2 - 1}{10}\right)$$

$$f(-2) = \log_{10}\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$f(-2) = \log_{10} 10^{-1} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{f(-2) = -1}$$

Gabarito: Alternativa **B**

32. (Fundatec / Prefeitura de Quaraí (RS) – Professor – 2019) O valor de $\boldsymbol{f(13)}$ em $\boldsymbol{f(x) = \log_2(x + 3)}$ é:

a) 4
b) 3
c) 2
d) 1

e) 0

Comentários:

A banca nos fornece a lei de formação da função logarítmica e nos questiona o valor desta quando $x = 13$.

Iremos substituir o valor na função e calcular $f(13)$.

$$f(x) = \log_2(x + 3)$$

$$f(13) = \log_2(13 + 3)$$

$$f(13) = \log_2 16 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{f(13) = 4}$$

Gabarito: Alternativa **A**

33. (IFF / Professor Matemática – 2018) Se $f(x) = \ln(5x - 4)$, então sua função inversa $f^{-1}(x)$ é igual a:

a) $[\ln(5x - 4)]^{-1}$
b) $[\ln(5x - 4)]$
c) $5/[(e^x + 4)]$
d) $(e^x + 4)/5$
e) e^{5x-4}

Comentários:

O enunciado nos forneceu a <u>lei de formação da função logarítmica</u> dada por:

$$y = \ln(5x - 4)$$

Para achar a função inversa seguiremos alguns passos.

- **Primeiro passo**: Inverta a posição de x e y na função.

$$y = \ln(5x - 4)$$

$$x = \ln(5y - 4)$$

- **Segundo passo**: Chame y de y^{-1}.

$$x = \ln(5y - 4)$$

$$x = \ln(5y^{-1} - 4)$$

- **Por fim**, isole y^{-1} que será a função inversa de y.

$$x = \ln(5y^{-1} - 4)$$

$$5y^{-1} - 4 = e^x$$

$$5y^{-1} = e^x + 4 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y^{-1} = \frac{e^x + 4}{5}}$$

Gabarito: Alternativa **D**

34. (EEAR / Sargento – 2013) Se $f(x) = \log x$ e $a * b = 1$, então $f(a) + f(b)$ é igual a:

a) 0
b) 1
c) 10
d) 100

Comentários:

A banca nos fornece a lei de formação da função logarítmica e nos questiona o valor de $f(a) + f(b)$.

Vamos desenvolver essa soma:

$$f(x) = \log x$$

$$f(a) + f(b) = \log a + \log b$$

Relembrando a **propriedade do logaritmo do produto** visto na teoria:

$$\log_a(x * y) = \log_a x + \log_a y$$

Aplicando a "volta" da propriedade e desenvolvendo a soma das funções teremos:

$$f(a) + f(b) = \log a + \log b$$

$$f(a) + f(b) = \log(a * b)$$

O enunciado nos informou que $a * b = 1$, então:

$$f(a) + f(b) = \log 1 \quad \rightarrow \boldsymbol{f(a) + f(b) = 0}$$

Recorde-se de que o logaritmo de 1 em qualquer base é igual a 0.

Gabarito: Alternativa **A**

35. (Cesgranrio / Petrobras – 2011) Sendo a função:

$$\boldsymbol{f(x) = 2 * \log_5\left(\frac{3x}{4}\right)}$$

em que x é um número real positivo, $f(17)$ é um número real compreendido entre:

a) 1 e 2
b) 2 e 3
c) 3 e 4
d) 4 e 5
e) 5 e 6

Comentários:

Dada a lei de formação da função logarítmica, vamos substituir $x = 17$ e calcular o intervalo em que está inserido o valor da função.

$$f(x) = 2 * \log_5\left(\frac{3x}{4}\right)$$

$$f(17) = 2 * \log_5\left(\frac{3 * 17}{4}\right) \quad \rightarrow \quad f(17) = 2 * \log_5 12{,}75$$

Recordando a **propriedade do logaritmo da potência** visto na teoria:

$$\log_a x^b = b * \log_a x$$

Aplicando a "volta" da propriedade teremos:

$$f(17) = 2 * \log_5 12{,}75 = \log_5 12{,}75^2$$

Nessa altura da prova, temos que ter um pouco de experiência. Perceba que a questão nos pede o intervalo. Não precisaríamos fazer 12,75 vezes 12,75. Vamos arredondar. Trabalharemos com 13.

$$f(17) \approx \log_5 13^2 \approx \log_5 169$$

Observe que o valor de $f(17)$ é aproximadamente igual ao logaritmo de 169 na base 5. Vamos entender o intervalo em que está inserido este log.

Sabemos que:

$$\log_5 125 = 3$$

$$\log_5 625 = 4$$

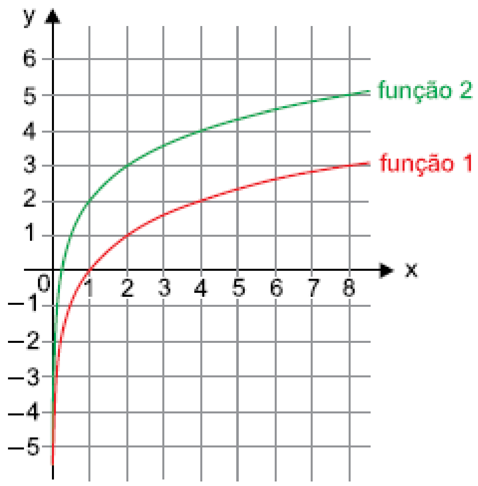
Perceba que $\log_5 169$ certamente estará entre o $\log_5 125$ e o $\log_5 625$.

$$\log_5 125 < \log_5 169 < \log_5 625$$

$$\mathbf{3 < f(17) < 4}$$

Gabarito: Alternativa **C**

36. (VUNESP / Vestibular – 2015) A imagem indica o gráfico das funções 1 e 2, ambas definidas para x real e maior do que zero.



De acordo com o gráfico, as funções 1 e 2 podem ser, respectivamente,

a) $y = \log_{\frac{1}{2}} x \ e \ y = \log_{\frac{1}{2}} 2x$
b) $y = 2^{x-2} \ e \ y = 2^{2x}$
c) $y = \sqrt{x} - 1 \ e \ y = \sqrt{x} + 1$
d) $y = \log_2 x \ \ e \ y = \log_2 4x$
e) $y = \sqrt{x} \ e \ y = \sqrt{4x}$

Comentários:

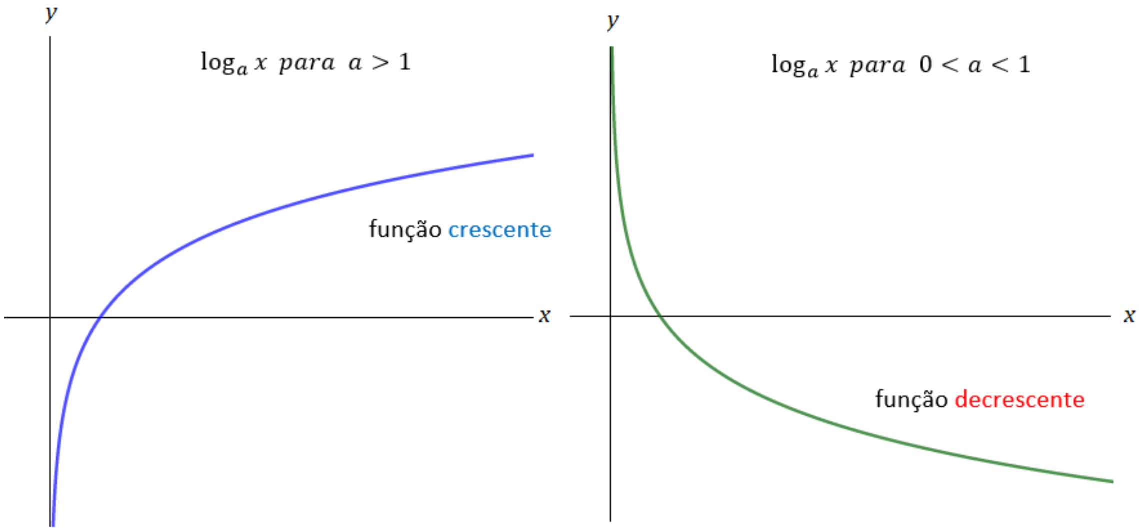
Esta questão nos mostra a importância de estarmos **familiarizados com o gráfico das funções**. Se você soubesse o comportamento da função, não precisaria fazer uma conta sequer na hora da prova.

Vamos recordar o comportamento do **gráfico da função logarítmica** em função da base do logaritmo. Lembrando que a base do logaritmo tem que ser maior que zero e diferente de um.

Em termos genéricos temos:

$$f(x) = \log_a x \quad , \quad a > 0 \ e \ a \neq 1$$

O gráfico da função pode assumir dois formatos. Vejamos:

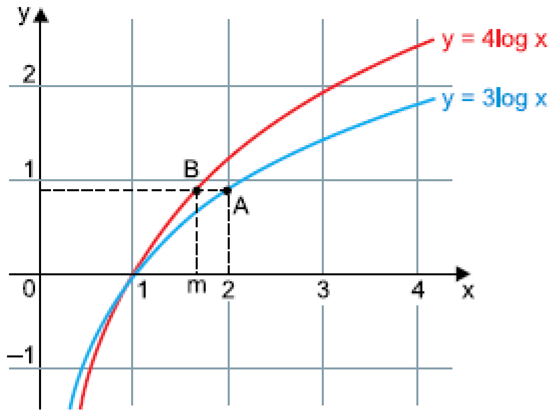


Observe que os gráficos fornecidos pela banca possuem **comportamento similar à função crescente**, isto é, com base maior que 1.

A **única** opção dentre as alternativas que apresenta uma **função logarítmica com base maior que 1** é a letra D.

Gabarito: Alternativa **D**

37. (VUNESP / FAMERP – 2018) A figura indica os gráficos das funções f e g, definidas de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$, cujas leis são, respectivamente, f(x) = 4log x e g(x) = 3log x.



O valor de m, indicado na figura, é igual a:

a) $\log 12$
b) $2^{0,75}$
c) $\log 7$
d) $2^{0,25}$
e) $2^{1,25}$

Comentários:

A banca nos fornece a lei de formação das duas funções logarítmicas e nos questiona o valor de m.

Observe o gráfico da função vermelha e veja que quando $x = m \ \rightarrow y = 1$.

$$y = 4 * \log x$$

$$\mathbf{1 = 4 * \log m}$$

E na função azul, quando $x = 2 \ \rightarrow y = 1$.

$$y = 3 * \log x$$

$$\mathbf{1 = 3 * \log 2}$$

Já que as duas igualdades apresentam como resultado o mesmo valor, podemos proceder com a igualdade.

$$4 * \log m = 3 * \log 2$$

$$\log m = \frac{3}{4} * \log 2 \quad \rightarrow \quad \log m = 0{,}75 * \log 2$$

Recordando a **propriedade do logaritmo da potência** visto na teoria:

$$\log_a x^b = b * \log_a x$$

Aplicando a "volta" da propriedade e calculando m teremos:

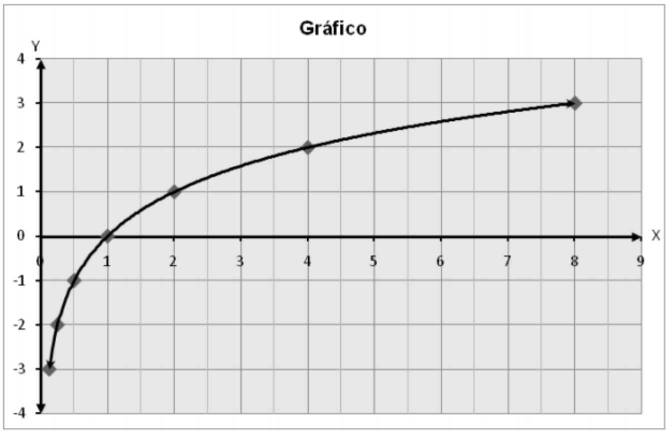
$$\log m = 0{,}75 * \log 2$$

$$\log m = \log 2^{0{,}75}$$

$$m = 10^{\log 2^{0{,}75}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{m = 2^{0{,}75}}$$

Gabarito: Alternativa **B**

38. (UNESPAR / Vestibular – 2016) Com base no gráfico abaixo, assinale a alternativa correta.



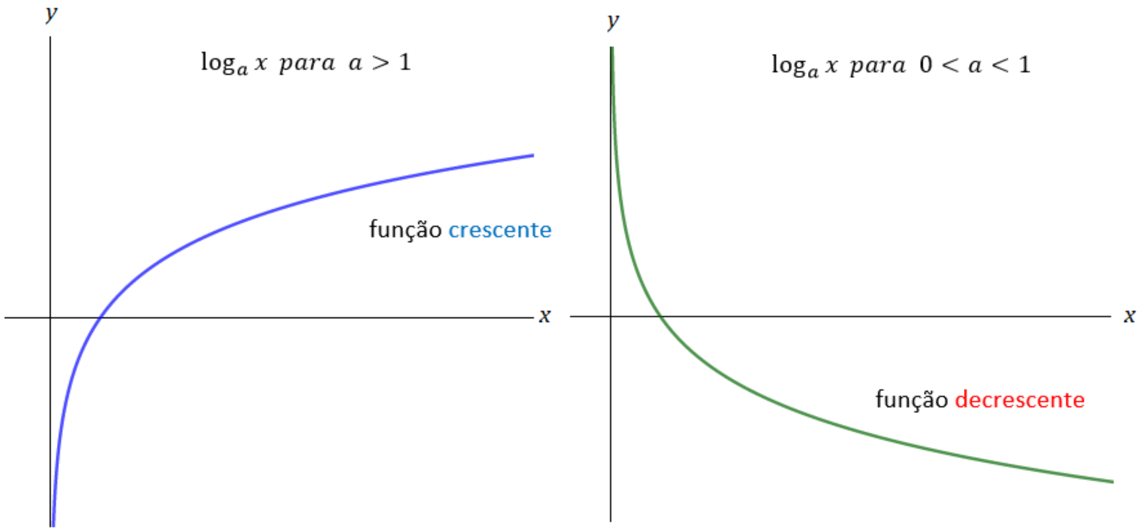
a) O gráfico acima pode representar a função $f(x) = \log_{10} x$;
b) O gráfico acima pode representar a função $f(x) = 2x$;
c) O gráfico acima pode representar a função $f(x) = \log_3 x$;
d) O gráfico acima pode representar a função $f(x) \log_2 x$;
e) O gráfico acima pode representar a função $f(x) = (1/2)^2$.

Comentários:

A banca nos fornece o gráfico de uma função e nos questiona qual alternativa apresenta como lei de formação a curva representada.

Perceba que **o comportamento do gráfico é similar a uma função logarítmica com base maior que 1**.

Vamos relembrar o comportamento da função logarítmica em função da sua base a.



Então, já sabemos que é uma função logarítmica e que a base é maior que 1. Logo, podemos **descartar as letras B e E**.

A lei de formação genérica da função logarítmica que passa pelo ponto (1,0) é dada por:

$$f(x) = \log_a x$$

Precisamos substituir algum ponto da função na equação acima para encontrarmos a base do logaritmo.

Observe que quando $x = 4 \ \rightarrow y = 2$. Iremos substituir este ponto e encontrar o valor de a.

$$f(x) = \log_a x$$

$$2 = \log_a 4$$

$$a^2 = 4 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a = \pm 2}$$

Encontramos como resposta $a = +2$ ou $a = -2$. Todavia, como a representa a base do logaritmo, sabemos que esta deve ser maior que zero ($a > 0$). Sendo assim,

$$\boxed{\boldsymbol{a = +2}}$$

E a lei de formação da função será dada por:

$$f(x) = \log_a x \quad \rightarrow \mathbf{f(x) = \log_2 x}$$

Gabarito: Alternativa **B**

39. (UECE / Vestibular – 2016) Seja $f: R \rightarrow R$ a função definida por

$$\mathbf{f(x) = 10^{1-\ln x}}$$

Então, o valor de $\log(f(e))$ será igual a:

a) $1/2$
b) 0
c) $1/3$
d) 1

Comentários:

Para calcular o logaritmo pedido pela banca, vamos primeiro calcular o valor da função interna a ele, isto é, o valor de $f(e)$.

$$f(x) = 10^{1-\ln x}$$

$$f(e) = 10^{1-\ln e} = 10^{1-1} = 10^0 \quad \rightarrow \boxed{\mathbf{f(e) = 1}}$$

Calculando o valor de $\log(f(e))$:

$$\log(f(e)) = \log 1$$

$$\mathbf{\log(f(e)) = 0}$$

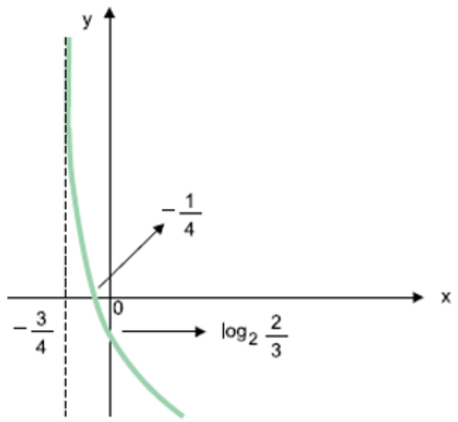
Lembrando que o logaritmo de 1 em qualquer base é igual a 0.

Gabarito: Alternativa **B**

40. (VUNESP / Vestibular – 2018) Uma função logarítmica real é dada por

$$\boldsymbol{f(x) = 2 - \log_2(ax + b)}$$

sendo a e b constantes reais. O gráfico dessa função é:



Nas condições dadas, $a + b$ é igual a

a) 12
b) 13
c) 15
d) 14
e) 11

Comentários:

O enunciado nos fornece a lei de formação da função logarítmica com duas constates a e b. Para calcularmos esses valores, vamos substituir os pontos dados no gráfico na função.

Observe que quando $x = 0 \;\rightarrow y = \log_2\left(\frac{2}{3}\right)$ e que quando $y = 0 \;\rightarrow x = -\frac{1}{4}$.

Iremos substituir esses dois pontos na função e calcular o valor das duas constantes.

- Para $x = 0 \;\rightarrow y = \log_2\left(\frac{2}{3}\right)$:

$$f(x) = 2 - \log_2(ax + b)$$

$$\log_2\left(\frac{2}{3}\right) = 2 - \log_2(a * 0 + b)$$

$$\log_2\left(\frac{2}{3}\right) = 2 - \log_2 b \quad \rightarrow \quad \log_2\left(\frac{2}{3}\right) + \log_2 b = 2$$

Relembrando a **propriedade do logaritmo do produto** visto na teoria:

$$\log_a(x * y) = \log_a x + \log_a y$$

Aplicando a “volta” da propriedade e calculando b teremos:

$$\log_2\left(\frac{2}{3}\right) + \log_2 b = 2$$

$$\log_2\left(\frac{2b}{3}\right) = 2$$

$$\frac{2b}{3} = 4 \quad \rightarrow \quad b = \frac{4 * 3}{2} \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{b = 6}}$$

- Para $y = 0 \ \rightarrow x = -\frac{1}{4}$:

$$f(x) = 2 - \log_2(ax + b)$$

$$0 = 2 - \log_2\left(a * \frac{-1}{4} + 6\right)$$

$$\log_2\left(-\frac{a}{4} + 6\right) = 2$$

$$-\frac{a}{4} + 6 = 4 \quad \rightarrow \quad \frac{a}{4} = 2 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{a = 8}}$$

Sendo assim, a soma de $a + b$ será igual a:

$$a + b = 6 + 8 \quad \rightarrow \boldsymbol{a + b = 14}$$

Gabarito: Alternativa **D**

QUESTÕES COMENTADAS - BANCAS DIVERSAS

Equações Logarítmicas

1. **(CESPE / BNB – 2018) A respeito de números reais e de funções de variáveis reais, julgue o item que se segue.**

As únicas soluções da equação $(\log_3 x)^2 = \log_3 x + 6$ são $x = 1/9$ e $x = 27$.

Comentários:

Vamos utilizar uma incógnita auxiliar para solucionar esta equação.

Chamaremos $\mathbf{\log_3 x}$ **de** $\boldsymbol{y}$.

$$(\log_3 x)^2 = \log_3 x + 6$$

$$y^2 = y + 6$$

$$y^2 - y - 6 = 0$$

Duas raízes que apresentam soma 1 e produto -6.

$$\boldsymbol{y_1 = 3} \quad e \quad \boldsymbol{y_2 = -2}$$

Ou, você poderia calcular por Bhakasra.

Calculando y por Bhaskara:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times (1) \times (-6)}}{2 \times 1}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$y = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$y = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} y_1 = \dfrac{1+5}{2} = \dfrac{6}{2} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{y_1 = 3}} \\ \\ y_2 = \dfrac{1-5}{2} = \dfrac{-4}{2} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{y_2 = -2}} \end{cases}$$

Iremos substituir na nossa igualdade auxiliar e calcular os valores de x que satisfazem a igualdade.

$$y = \log_3 x \begin{cases} 3 = \log_3 x \rightarrow x = 3^3 \rightarrow \boldsymbol{x = 27} \\ -2 = \log_3 x \rightarrow x = 3^{-2} \rightarrow \boldsymbol{x = \frac{1}{9}} \end{cases}$$

Ou seja, as raízes da equação são $x = \frac{1}{9}$ e $x = 27$.

Gabarito: **CERTO**

2. (IFRS / Professor – 2015) Considere a função cuja lei é:

$$\boldsymbol{y = \ln \sqrt{\frac{2x}{(x+1)^3}}}$$

A derivada desta função no ponto em que $x = 2$ é igual a:

a) $-1/2$
b) $1/4$
c) 2
d) $-1/4$
e) 0

Comentários:

Esta questão exige <u>conhecimentos avançados de matemática</u>. Certifique-se antes se em seu edital consta **"limites e derivadas"** como assunto a serem cobrados na prova.

A banca nos fornece a lei de formação da função logarítmica e nos questiona o valor da derivada desta quando $x = 2$.

Antes de derivarmos, vamos manipular algebricamente esta função para torná-la mais fácil na hora de derivar. Acompanhe.

$$y = \ln\sqrt{\frac{2x}{(x+1)^3}}$$

$$y = \ln\frac{(2x)^{1/2}}{(x+1)^{3/2}} = \ln(2x)^{1/2} - \ln(x+1)^{3/2} = \frac{1}{2}\ln 2x - \frac{3}{2}\ln(x+1)$$

Então, a função manipulada ficou igual a:

$$\boxed{y = \frac{1}{2}\ln 2x - \frac{3}{2}\ln(x+1)}$$

Vamos proceder agora com a **derivada**:

$$y = \frac{1}{2}\ln 2x - \frac{3}{2}\ln(x+1)$$

$$y' = \frac{1}{2} * \frac{1}{2x} * 2 - \frac{3}{2} * \frac{1}{x+1} * 1$$

$$\boldsymbol{y' = \frac{1}{2x} - \frac{3}{2} * \frac{1}{x+1}}$$

No ponto $x = 2$ a derivada terá seu valor igual a:

$$y'(x) = \frac{1}{2x} - \frac{3}{2} * \frac{1}{x+1}$$

$$y'(2) = \frac{1}{2*2} - \frac{3}{2} * \frac{1}{2+1}$$

$$y'(2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \rightarrow \boldsymbol{y'(2) = -\frac{1}{2}}$$

Gabarito: Alternativa **A**

3. (IBADE / Prefeitura de Cujubim (RO) – 2018) Assinale a alternativa que apresenta o domínio da solução da equação:

$$\boldsymbol{f(x) = \log_{(x-1)}(4x - x^2)}$$

a) $\{x \in R \mid 0 < x < 4\}$
b) $\{x \in R \mid -1 < x < 4\}$
c) $\{x \in R \mid x < 0 \; e \; x > 4\}$
d) $\{x \in R \mid 1 < x < 4\}$
e) $\{x \in R \mid 2 < x < 4\}$

Comentários:

O enunciado nos fornece a lei de formação da função logarítmica e nos questiona o domínio desta função.

O **domínio** de uma função representa o conjunto dos **possíveis valores de x** onde a função é definida. Na função logarítmica o domínio é composto por duas condições.

✓ A primeira é a **base do logaritmo** ser **maior que 0** e também **diferente de 1**.

✓ A segunda é o **logaritmando ser maior que 0**.

Em termos matemáticos:

$$\log_a f(x) \quad \rightarrow \quad f(x) > 0 \quad e \quad a > 0 \; e \; a \neq 1$$

Vamos então dividir nosso problema em dois.

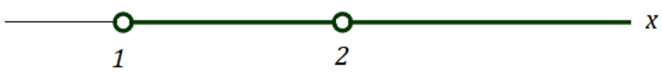
A primeira parte vai ser encontrar a condição de existência para a base $a > 0 \; e \; a \neq 1$. E a segunda parte, encontrar o intervalo de existência para o logaritmando $x > 0$.

- (I) – base maior que zero e diferente de 1.

$$f(x) = \log_{(x-1)}(4x - x^2)$$

$$x - 1 > 0 \quad e \quad x - 1 \neq 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x > 1 \quad e \quad x \neq 2}$$

Representando os valores de x na reta:



Observe que representamos na reta os valores maiores que 1 (intervalo aberto) e utilizamos a representação também aberta em 2, pois o como vimos $x > 1 \;\; e \;\; x \neq 2$.

- (II) – Logaritmando maior do que zero.

$$f(x) = \log_{(x-1)}(4x - x^2)$$

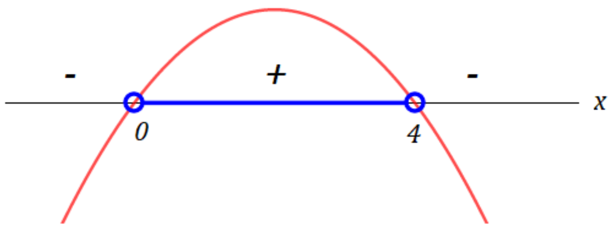
$$4x - x^2 > 0$$

Desenvolvendo a equação do segundo grau e encontrando suas raízes:

$$4x - x^2 = 0$$

$$x(4 - x) = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 0 \;\; ou \;\; x = 4}$$

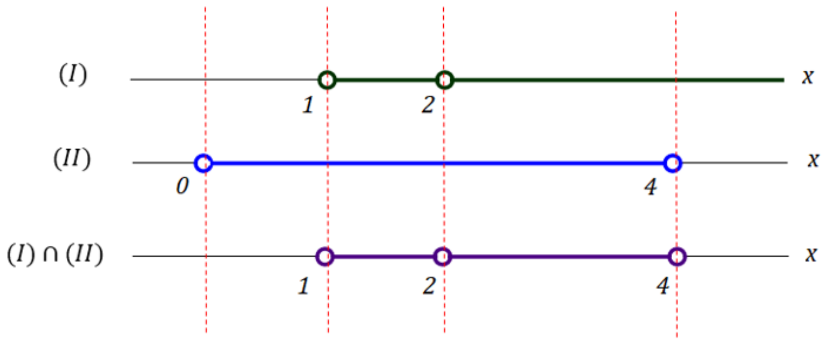
Fazendo o estudo da inequação $4x - x^2 > 0$ na reta:



Observe que queremos os valores de x onde a função é maior do que zero, isto é, a função é positiva. Como a parábola em questão tem concavidade voltada para baixo, os valores positivos são os valores entre as raízes da função.

O intervalo aberto em 0 e também em 4 deve-se ao fato que queremos os valores apenas maiores que zero e não maiores e iguais a zero.

Vamos agora fazer a interseção da condição (I) com a condição (II).



Perceba então que a interseção é dada pelo intervalo $1 < x < 4$ como está na letra D. Todavia, devemos excluir o "2" do resultado, uma vez que o intervalo é aberto em 2.

Conforme calculamos na condição (I), se $x = 2$ a base será igual a 1 e isso invalida nossa condição de existência.

Ou seja, a banca forneceu o intervalo correto na alternativa D, mas não excluiu o número 2.

A questão **deveria ter sido anulada** e a resposta correta é:

$$\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} \mid \mathbf{1} < \boldsymbol{x} < \mathbf{4}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{x} \neq \mathbf{2}\}$$

4. **(AOCP / IFE – 2017) Um pesquisador estuda uma espécie de inseto e, a partir de um mesmo instante, iniciou o estudo de duas populações de colônias, C_1 e C_2, dessa espécie.**

Decorridos alguns meses de observação, apresentou as funções $f(x)$ e $g(x)$ definidas por $f(x) = \log_3(2x+50)$ e $g(x) = 1 + \log_3 \frac{(x+40)}{2}$ que representam, aproximadamente, o número de insetos das colônias C_1 e C_2, respectivamente, após x semanas do início do estudo. Assinale a alternativa que apresenta o intervalo que contém o tempo, em semanas, após o início do estudo, tal que as populações C_1 e C_2 atinjam o mesmo número de insetos.

a) $10 < t \leq 15$
b) $15 < t \leq 20$
c) $20 < t \leq 25$
d) $25 < t \leq 30$
e) $30 < t \leq 35$

Comentários:

A banca nos questiona o intervalo de tempo, em semanas, tal que as populações C_1 e C_2 atinjam o mesmo número de insetos, isto é, **o tempo em que $C_1 = C_2$.**

Para isto, iremos igualar as funções representativas de C_1 e C_2.

$$C_1 = C_2$$

$$f(x) = g(x)$$

$$\log_3(2x+50) = 1 + \log_3 \frac{(x+40)}{2}$$

$$\log_3(2x+50) - \log_3 \frac{(x+40)}{2} = 1$$

Aplicaremos a “volta” da propriedade do logaritmo do quociente.

$$\log_3\left(\frac{2x+50}{\frac{x+40}{2}}\right)=1$$

$$(2x+50)*\frac{2}{(x+40)}=3$$

$$4x+100=3x+120$$

$$4x-3x=120-100 \quad \rightarrow \boldsymbol{x=20}$$

Atente para as letras B e C que apresentam, ambas, o numeral 20. Todavia, a letra C exclui o resultado 20 ao determinar que o intervalo é aberto em 20. Logo, o nosso gabarito é a Alternativa B.

Gabarito: Alternativa **B**

QUESTÕES COMENTADAS - BANCAS DIVERSAS

Inequações Logarítmicas

1. **(CESPE / TELEBRAS - 2022) A respeito das funções e suas propriedades, julgue o item subsecutivo.**

O domínio da função $L(x) = \log(3 - 2x)$ é o conjunto $D = \{x \in R: x < 3/2\}$.

Comentários:

Vamos revisar o conceito de domínio de uma função logarítmica.

O **domínio** de uma função representa o conjunto dos **possíveis valores de x** onde a função é definida. Na função logarítmica o domínio é composto por duas condições.

- ✓ A primeira é a **base do logaritmo** ser **maior que 0** e também **diferente de 1**.
- ✓ A segunda é o **logaritmando ser maior que 0**.

logaritmando

$$\log_a x = f(x) \qquad \text{Condição de existência: } a > 0 \text{ e } a \neq 1 \text{ e } x > 0$$

base

Observe que a base do logaritmo da função dada é igual a 10. Sendo assim, a condição da base ser maior que 0 e diferente de 1 já está satisfeita.

Precisamos averiguar a segunda condição. O logaritmando ser maior que 0.

$$3 - 2x > 0$$

$$3 > 2x \quad \rightarrow \quad \boxed{x < \frac{3}{2}}$$

Ou seja, o domínio da $L(x) = \log(3 - 2x)$ é:

$$D = \left\{x \in R: x < \frac{3}{2}\right\}$$

Gabarito: **CERTO**

2. (COTEC / Pref. Brasília de Minas - 2020) Resolvendo-se a inequação

$$\log 2x > \log(x+1)$$

obtemos

a) $S = \{x \in R \ / \ x < -1\}$
b) $S = \{x \in R \ / \ x > -1\}$
c) $S = \{x \in R \ / \ x > 1\}$
d) $S = \{x \in R \ / \ x > -1/2\}$
e) $S = \{x \in R \ / \ x < 1/2\}$

Comentários:

Vamos revisar a deseguildade entre logaritmos de mesma base.

$$\boxed{\log_a f(x) > \log_a g(x)}$$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \begin{cases} Se\ a > 1 \ \rightarrow \ f(x) > g(x) \quad \textit{mantém a desigualdade} \\ Se\ 0 < a < 1 \ \rightarrow \ 0 < f(x) < g(x) \quad \textit{inverte a desigualdade} \end{cases}$$

Como no exercício a base é igual a 10, isto é, maior que 1, vamos manter a igualdade. Então:

$$\log 2x > \log(x+1)$$

$$2x > x + 1$$

$$2x - x > 1 \ \rightarrow \ \boldsymbol{x > 1}$$

Gabarito: Alternativa **C**

3. (CEV / URCA - 2020) O conjunto solução da inequação

$$\log_{\frac{1}{10}} x^2 > \log_{\frac{1}{10}} (2x - 1)$$

Em R é:

a) $S = \{x \in R \,/\, x > 1\}$
b) $S = \{x \in R \,/\, 0 < x < 1\}$
c) $S = \{x \in R \,/\, x \neq 1\}$
d) $S = \{x \in R \,/\, x > 1/2\}$
e) $S = \emptyset$

Comentários:

Observe que estamos diante de uma desigualdade logarítmica em que a base do logaritmo está compreendida entre 0 e 1.

Quando a base é um número entre 0 e 1, iremos **INVERTER** o sentido da desigualdade.

Então, teremos:

$$\log_{\frac{1}{10}} x^2 > \log_{\frac{1}{10}} (2x - 1)$$

$$\boldsymbol{x^2 > 2x - 1}$$

Vamos fazer o estudo do sinal dessa inequação.

$$x^2 > 2x - 1$$

$$x^2 - 2x + 1 > 0$$

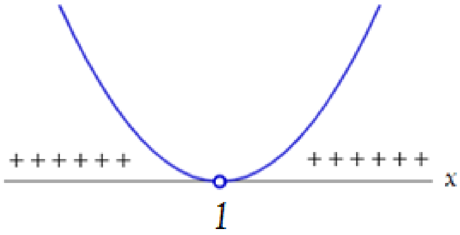
Em que $a = 1, b = -2$ e $c = 1$. Calculando as raízes por Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 0}{2} = \frac{2}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 1}$$



Observe que a função é positiva (maior que zero) para todos os valores de x do domínio, **EXCETO** quando $x = 1$ (que a função será zero).

Sendo assim, o conjunto solução será:

$$\boldsymbol{S = \{x \in R \; / \; x \neq 1\}}$$

Gabarito: Alternativa **C**

4. (FCC / IBMEC - 2019) O conjunto das soluções reais da inequação $(\log_3 x)^2 < 4$ é

a) $\{x \in R \; / \; x > 1/9\}$
b) $\{x \in R \; / \; x < 9\}$
c) $\{x \in R \; / \; 1/9 < x < 9\}$
d) $\{x \in R \; / \; x < 1/9 \text{ ou } x > 9\}$
e) $\{x \in R \; / \; x > 9\}$

Comentários:

FIQUE ATENTO!

Cuidado com o termo $(\log_3 x)^2$. Nesse caso **NÃO** podemos aplicar a propriedade do logaritmo da potência. Poderíamos aplicar se fosse $\log_3 x^2$.

Porém, no termo $(\log_3 x)^2$ todo o fator está elevado ao quadro e não só o logaritmando.

Então, iremos fazer o uso da incógnita auxiliar. Chamaremos $\boldsymbol{y = \log_3 x}$ e nossa desigualdade será:

$$(\log_3 x)^2 < 4$$

$$y^2 < 4$$

$$\boldsymbol{y^2 - 4 < 0}$$

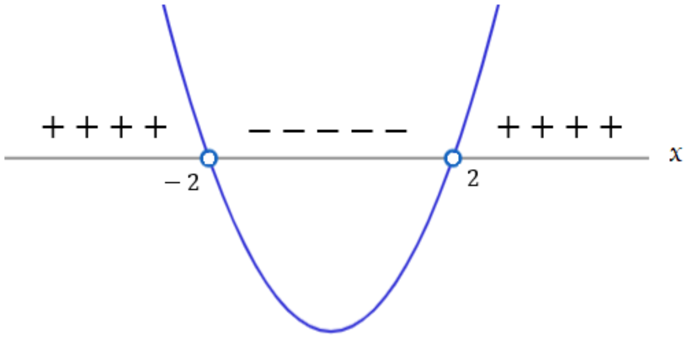
Vamos encontrar as raízes dessa função do segundo grau e, posteriormente, faremos o estudo do sinal.

$$y^2 - 4 = 0$$

$$y^2 = 4$$

$$y = \pm\sqrt{4} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = \pm 2}$$

Queremos os valores para os quais a função seja negativa, isto é, $y^2 - 4 < 0$.



Ou seja, para y ser menor que 0, ele **deve estar entre -2 e 2.**

$$-2 < y < 2$$

Vamos voltar com a substituição, já que y é apenas uma incógnita auxiliar.

$$-2 < y < 2$$

$$-2 < \log_3 x < 2$$

$$3^{-2} < x < 3^2$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{1}{9} < x < 9}}$$

Logo, o conjunto das soluções reais da inequação $(\log_3 x)^2 < 4$ é

$$\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} \ / \ \boldsymbol{1/9 < x < 9}\}$$

Gabarito: Alternativa **C**

5. **(FUNDATEC / Pref. Tapejara - 2019) O conjunto imagem da função $f(x) = \log_2 x$ é:**

a) $[0,1]$
b) $[1, +\infty]$
c) $[-\infty, 1]$
d) $(-\infty, +\infty)$
e) $\emptyset$

Comentários:

Muito cuidado com essa questão. A banca pede o conjunto **IMAGEM**.

Se ela estivesse pedindo o domínio, faríamos todo aquele estudo que já estamos acostumados, isto é, a **base do logaritmo** ser **maior que 0** e também **diferente de 1** e o **logaritmando ser maior que 0.**

A **função logarítmica** apresenta como **imagem todos os números reais**.

$$\boldsymbol{I = R} \quad ou \quad \boldsymbol{I} =]-\infty, +\infty[$$

Gabarito: Alternativa **D**

6. **(IDHTEC / Prefeitura de Itaíba (PE) – Professor – 2020) A função:**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\log_4 x - \log_{16} 25}}$$

está definida para que valores reais de x?

a) $x \neq 0$
b) $x > 5$
c) $x \geq 5$
d) $x \leq 1$
e) $x \leq 0$

Comentários:

Perceba que o denominador da função é uma **raiz quadrada**. E, para tal existir, os valores dentro da radiciação devem ser maiores ou iguais a zero.

Todavia, se a raiz for zero a função $f(x)$ será igual a $1/_0$, isto é, será indefinida.

Logo, para a função ser **definida**, **o valor da raiz quadrada deve ser maior que 0**.

$$\log_4 x - \log_{16} 25 > 0$$

Vamos desenvolver a inequação e encontrar os valores de x que satisfazem a desigualdade.

$$\log_4 x - \log_{16} 25 > 0$$

$$\log_4 x - \log_{4^2} 5^2 > 0$$

Recordando a propriedade do **logaritmo da potência e da base elevada a um expoente** visto na teoria:

$$\text{(I)} \quad \log_a x^b = b * \log_a x$$

$$(II) \quad \log_{a^b} x = \frac{1}{b} * \log x$$

Aplicando em conjunto as duas propriedades e resolvendo para x teremos:

$$\log_4 x - \log_{4^2} 5^2 > 0$$

$$\log_4 x - 2 * \frac{1}{2} * \log_4 5 > 0$$

$$\log_4 x - \log_4 5 > 0$$

$$\log_4 x > \log_4 5 \quad \rightarrow \boldsymbol{x > 5}$$

Gabarito: Alternativa **B**

7. (CRS / PMMG Aspirante – 2010) O domínio da função:

$$\boldsymbol{f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 5x - 14)}$$

está no intervalo:

a) $]7, +\infty[$
b) $]-2,7[$
c) $]-1, +\infty[$

d) $]0, +\infty[$

Comentários:

O enunciado nos fornece a <u>lei de formação da função logarítmica</u> e nos questiona o **domínio** desta função.

O **domínio** de uma função representa o conjunto dos **possíveis valores de x** onde a função é <u>definida</u>. Na função logarítmica o <u>domínio é composto por duas condições</u>.

- ✓ A primeira é a **base do logaritmo** ser **maior que 0** e também **diferente de 1**.
- ✓ A segunda é o **logaritmando ser maior que 0**.

Em termos matemáticos:

$$\log_a f(x) \quad \rightarrow \quad f(x) > 0 \quad e \quad a > 0 \; e \; a \neq 1$$

Vamos então dividir nosso problema em dois.

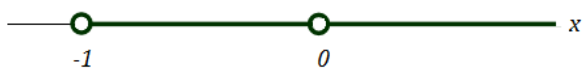
A primeira parte vai ser encontrar a condição de existência para a base $a > 0 \; e \; a \neq 1$. E a segunda parte, encontrar o intervalo de existência para o logaritmando $f(x) > 0$.

- (I) – base maior que zero e diferente de 1.

$$f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 5x - 14)$$

$$x + 1 > 0 \;\; e \;\; x + 1 \neq 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x > -1 \;\; e \;\; x \neq 0}$$

Representando os valores de x na reta:



Observe que representamos na reta os valores maiores que -1 (intervalo aberto) e utilizamos a representação também aberta em 0, pois o como vimos $x > -1 \;\; e \;\; x \neq 0$.

- (II) – Logaritmando maior que zero.

$$f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 5x - 14)$$

$$x^2 - 5x + 14 > 0$$

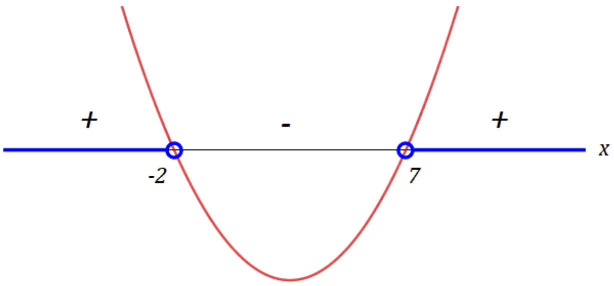
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 * 1 * (-14)}}{2 * 1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{5 \pm 9}{2}$$

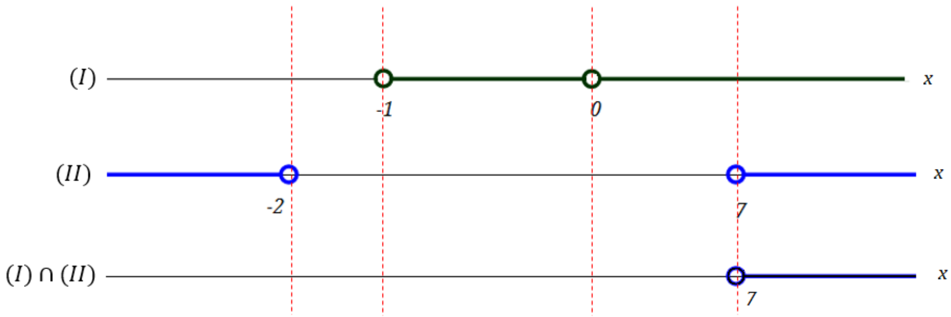
$$x_1 = \frac{5 + 9}{2} \rightarrow \boldsymbol{x_1 = 7} \quad e \quad x_2 = \frac{5 - 9}{2} \rightarrow \boldsymbol{x_2 = -2}$$

Fazendo o estudo da inequação na reta:



Perceba que queremos os valores de x onde a **função é maior que zero**, isto é, a função é **positiva**. O intervalo aberto em -2 e também em 7 deve-se ao fato que queremos os valores apenas maiores que zero e não maiores e iguais a zero.

Vamos agora fazer a interseção da condição (I) com a condição (II).



A interseção será determinada pelo intervalo**:**

$$]7, +\infty[$$

Gabarito: Alternativa **A**

Lista de Questões - Bancas Diversas

Logaritmos

1. **(CRS / PM MG - 2022) Nas atividades de defesa civil é muito comum a utilização de sismógrafos para estimar as possibilidades de terremotos e sua magnitude e, assim, adotar medidas de contingência visando a redução de danos. A Escala de Magnitude de Momento (M_W) mede a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Ela é a escala mais utilizada na atualidade e é uma escala logarítmica em que M_W e M_0 se relacionam pela fórmula: $M_W = -10,7 + \frac{2}{3}\log(M_0)$. Nessa fórmula, M_0 é o momento sísmico (estimado com base nos registros de movimento da superfície por meio dos sismógrafos).**

Sabendo que um terremoto teve a magnitude M_W de 5,3 dina. cm qual foi o valor do seu momento sísmico M_0 registrado no sismógrafo?

a) $10^{-0,73}$
b) 10^{12}
c) 10^{24}
d) 10^{21}

2. **(INEP / ENEM - 2019) A Hydrangea macrophylla é uma planta com flor azul ou cor-de-rosa, dependendo do pH do solo no qual está plantada. Em solo ácido (ou seja, com $pH < 7$) a flor é azul, enquanto que em solo alcalino (ou seja, com $pH > 7$) a flor é rosa. Considere que a Hydrangea cor-de-rosa mais valorizada comercialmente numa determinada região seja aquela produzida em solo com pH inferior a 8. Sabe-se que $pH = -\log_{10} x$, em que x é a concentração de íon hidrogênio (H +).**

Para produzir a Hydrangea cor-de-rosa de maior valor comercial, deve-se preparar o solo de modo que x assuma

a) qualquer valor acima de 10^{-8}.
b) qualquer valor positivo inferior a 10^{-7}.
c) valores maiores que 7 e menores que 8.
d) valores maiores que 70 e menores que 80.
e) valores maiores que 10^{-8} e menores que 10^{-7}.

3. **(CEV / Pref. Brejo Santo) Considere a função $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ dada por $f(x) = \log_7 x$. Qual o valor de $\log_9 f(343)$?**

a) 1
b) 2/3
c) 7
d) 1/2
e) 2

4. **(DECEx / EsPCEx - 2020) Seja f a função quadrática definida por $f(x) = 2x^2 + \left(\log_{\frac{1}{3}} k\right) x + 2$, com $k \in R$ e $k > 0$. O produto dos valores reais de k para os quais a função $f(x)$ tem uma raiz dupla é igual a**

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

5. **(PICSIS / São Leopoldo MANDIC - 2018) É sabido que a energia E liberada por um terremoto pode ser medida pela relação**

$$M_L = \frac{2}{3} \cdot \log_{10}\left(\frac{100}{7} \cdot E\right)$$

sendo E medido em quilowatt-hora, e M_L a magnitude do terremoto na Escala Richter. Sendo assim, a energia que é liberada por um terremoto de magnitude 5 na Escala Richter, quando comparada à energia liberada por um terremoto de magnitude 3, na mesma Escala, é

a) 1000 vezes maior.
b) 500 vezes maior.
c) 100 vezes maior.
d) 50 vezes maior.
e) 10 vezes maior.

6. **(DECEx / ESA - 2019) Sejam $f: \{x \in R / x > 0\} \to R$ e $g: R \to R$, definidas por $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \frac{2^x}{4}$, respectivamente. O valor de $f \circ g(2)$ é:**

a) 4
b) 2
c) -4
d) -2
e) 0

7. **(STRIX / EBMSP - 2018) Considere-se que a altura de uma jovem com x anos de idade, $5 \leq x \leq 15$, pode ser modelada como um percentual da altura que terá na idade adulta por meio da função**

$$f(x) = 62 + 35\log(x - 4)$$

Nessas condições e utilizando, se necessário, $\log 2 = 0{,}30$, pode-se estimar que entre 8 e 12 anos de idade a variação na altura dessa jovem será de

a) 10,0%
b) 10,5%
c) 11,0%
d) 11,5%
e) 12,0%

8. **(CESPE / SEDUC AL – 2018) O número de Euler, nome dado em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, é um número irracional denotado por e, cuja representação decimal tem seus 4 primeiros algarismos dados por 2,718. Esse número é a base dos logaritmos naturais, cuja função $f(x) = \ln x = \log_e x$ tem inúmeras aplicações científicas.**

A respeito desse assunto, julgue o item a seguir.

Se $a > 0$ e $\ln a \in [10{,}20)$, então $\ln a^2 \in [100, +\infty)$.

9. **(CESPE / PREVIC – 2011) Com o objetivo de despertar mais interesse de seus alunos para a resolução das expressões algébricas que com frequência ocorrem nos problemas, um professor de matemática propôs uma atividade em forma de desafio. Os estudantes deveriam preencher retângulos dispostos em forma triangular de modo que cada retângulo fosse o resultado da soma das expressões contidas nos dois retângulos imediatamente embaixo dele, exceto para aqueles da base do triângulo. Portanto, na figura a seguir,**

$$D = A + B \ ; \ E = B + C \ ; \ F = D + E$$

F =

D = | E $= -x\sqrt{x} + 2\ln(2)$

A $= \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x\sqrt{x}$ | B = | C $= -5x\sqrt{x} + \ln(2)$

Com base nos dados acima, julgue o item que se segue.

Os estudantes que preencheram corretamente os retângulos em branco encontraram $F = \ln(4x) + 4x\sqrt{x}$

10. (CESPE / CEF – 2010) A população P de uma comunidade, t anos após determinado ano — considerado ano $t = 0$ —, pode ser calculada pela fórmula $P = P_0 e^{kt}$, em que k é uma constante positiva, P_0 é a quantidade de indivíduos na comunidade no ano $t = 0$ e "e" é a base do logaritmo neperiano. Nesse caso, considerando 0,63 como valor aproximado para $\ln 2/\ln 3$ e que a população P_0 triplique em 6 anos, então P_0 será duplicada em:

a) 3,38 anos
b) 3,48 anos
c) 3,58 anos
d) 3,68 anos
e) 3,78 anos

11. (CESPE / PM ES – 2010) Julgue o item que se seguem, a respeito de operações com logaritmos.

Se $\log_5 b = 0{,}1$, em que b é um número positivo, então $\log_b 25 = 0{,}01$.

12. (CESPE / PM ES – 2010) Julgue o item que se seguem, a respeito de operações com logaritmos.

Tomando 0,301 e 0,477 como os valores aproximados de $\log_{10} 2$ e $\log_{10} 3$, respectivamente, é correto inferir que $\log_{10} 72 = 1{,}578$.

13. (CESPE / PETROBRAS – 2008) Se $\log a = X$ e $\log b = Y$, então

a) $\log(a+b) = X + Y$

b) $\log(ab) = X \times Y$

c) $\log(a/b) = X/Y$

d) $\log(a^2 b) = 2X + Y$

e) $\log\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{X} + \frac{1}{Y}$

14. (UEFS / Vestibular – 2010) Em uma comunidade, o número aproximado de pessoas que toma conhecimento de determinado fato, t meses após ele ter ocorrido, pode ser estimado através do modelo matemático definido pela função

$$\boldsymbol{f(t) = \frac{1.800}{3 + 5 * 2^{-t}}}$$

A partir dessa expressão, considerando-se log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48, para que 375 pessoas tomem conhecimento de um fato, após a sua ocorrência, estima-se que o número de dias necessários é igual a:

a) 19
b) 25
c) 36
d) 44
e) 58

15. (CESPE / UNCISAL – 2019) A Escala Richter, utilizada para medir a magnitude dos terremotos, foi proposta em 1935 pelo sismólogo Charles Francis Richter, que pretendia, inicialmente, empregá-la apenas para medir abalos que ocorressem no sul da Califórnia. A equação proposta por Richter pode ser formulada de várias formas, conforme as variáveis que se adotem para compor a equação. No caso da energia mecânica liberada por um terremoto — E —, em kWh, a magnitude do terremoto — M — é expressa por

$$M = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

, em que $E_0 = 7 \times 10^{-3}\ kWh$.

Disponível em: http://brasilescola.uol.com.br.Acesso em: 3 nov. 2018 (adaptado).

Sabendo-se que, em 2014, um terremoto de magnitude 8 foi registrado no litoral do Alasca, qual é o valor da energia mecânica liberada nesse terremoto?

a) $7 \times 10^4\ kWh$
b) $7 \times 10^9\ kWh$
c) $7 \times 10^{10}\ kWh$
d) $7 \times 10^{14}\ kWh$
e) $7 \times 10^{15}\ kWh$

16. (CESPE / INSS – 2003) Os números da previdência social

A previdência social fechou o ano de 2002 com um déficit primário em suas contas de R$ 17 bilhões. O déficit aumentou 32% em relação aos R$ 13 bilhões de 2001. De acordo com os dados da Secretaria do Tesouro Nacional, a arrecadação liquida da previdência em 2002 foi de R$ 71 bilhões, superando o resultado de 2001, quando a arrecadação liquida havia sido de R$ 62 bilhões. Os gastos com beneficios previdenciários acabaram sendo maiores. Em 2001 , a previdência social tinha gasto R$ 75 bilhões com o pagamento de beneficios. Em 2002. essa despesa subiu para R$ 88 bilhões.

Além disso. houve um aumento no número de beneficios concedidos - no ano de 2002, foram 750 mil a mais do que os concedidos em 2001. Somente em dezembro. a previdência social teve um déficit primário de R$ 3 bilhões.

Agência de Noticiárias Radiobrás (com adaptações)

A partir dos dados do texto acima, suponha que a arrecadação líquida e os gastos da previdência com beneficios, em bilhões de reais, sejam dados respectivamente pelas funções $f(t) = ml + n$ e $g(l) = c2^{kl}$, em que l é o numero de anos transcorridos desde 2000, m, n, c e k são constantes reais.

Nessa situação julgue o item.

Considerando $\log_2 3 = 1{,}58$; $\log_2 5 = 2{,}32$; $\log_2 11 = 3{,}46$, conclui-se que o valor de k na definição da função g é igual a $0{,}24$.

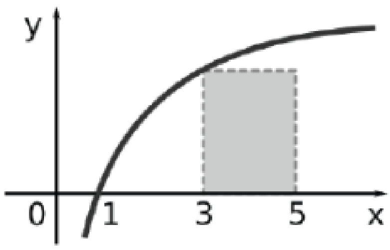
Gabarito

1. C
2. E
3. D
4. A
5. A
6. E
7. A
8. ERRADO
9. CERTO
10. E
11. ERRADO
12. ERRADO
13. D
14. D
15. B
16. CERTO

LISTA DE QUESTÕES - BANCAS DIVERSAS

Função Logarítmica

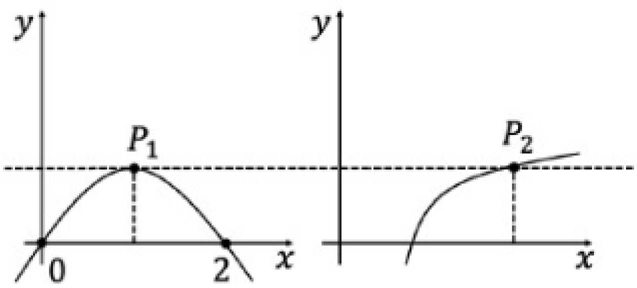
1. **(IBFC / CBM AC - 2022) O gráfico da figura representa a função $f(x) = \log x$ (Logaritmo de x na base 10) para um valor positivo de $x (x > 0)$.**



Assinale a alternativa que apresenta o valor da área hachurada do gráfico.

a) $\log 5$
b) $\log 3$
c) $\log 9$
d) $\log 2$

2. **(FUNDATEC / Pref. Flores da Cunha - 2022) Analise os gráficos de funções a seguir:**



O gráfico da esquerda é de uma função do segundo grau dada por $-x^2 + 2x$. O gráfico da direita é da função $\log_b x$. Se os pontos P_1 e P_2 possuem ordenada de mesmo tamanho, então a abcissa de P_2 é:

a) 1
b) 2
c) $2b$
d) bx
e) b

3. **(FUNDATEC / Pref. Panambi - 2021) Considere as afirmações abaixo sobre funções exponenciais e logarítmicas.**

I. A função $\log x$ é a inversa de 10^x.

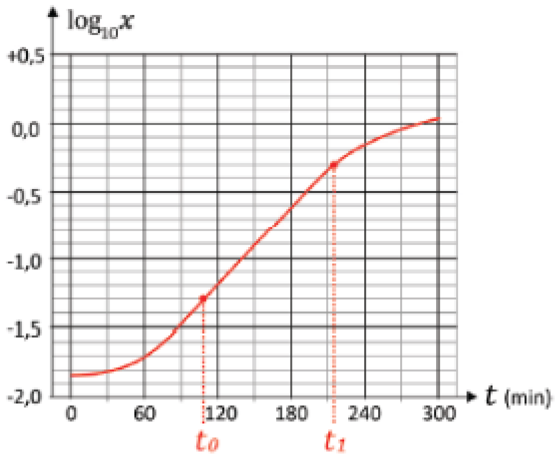
II. $\log_2(x^3) = 3\log x$

III. $2^{x-y} > 0$ para x e y pertencentes aos números reais.

Quais estão corretas?

a) Apenas I.
b) Apenas II.
c) Apenas I e II.
d) Apenas I e III.
e) I, II e III.

4. **(FUVEST / USP - 2022) A quantidade de bactérias em um líquido é diretamente proporcional à medida da turbidez desse líquido. O gráfico mostra, em escala logarítmica, o crescimento da turbidez x de um líquido ao longo do tempo t (medido em minutos), isto é, mostra $\log x$ em função de t. Os dados foram coletados de 30 em 30 minutos, e uma curva de interpolação foi obtida para inferir valores intermediários.**



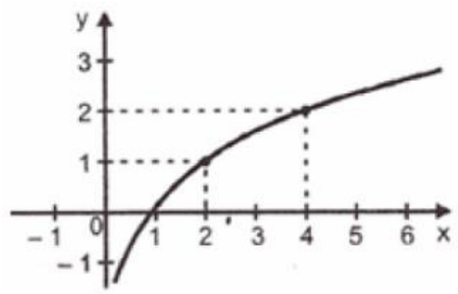
Disponível em https://fankhauserblog.wordpress.com/.

Com base no gráfico, em quantas vezes a população de bactérias aumentou, do instante t_0 para o instante t_1?

a) 2
b) 4
c) 5

d) 10
e) 100

5. (GUALIMP / Pref. Areal - 2020) Considere a função $f: R \rightarrow R$ cujo o gráfico está esboçado abaixo.



Qual é a lei de formação da função f?

a) $y = \log_2(x + 1)$
b) $y = \log_2 x$
c) $y = \log x$
d) $y = \log x + 1$

6. (CONSULPLAN / UNIFAGOC - 2021) Uma empresa farmacêutica calculou a dosagem indicada de um medicamento, em mililitros, em função da idade do paciente, obtendo a seguinte função: $f(x) = \log_2 x^{1,15}$. De acordo com essa função, com que idade o paciente terá uma dosagem que corresponde ao dobro da dosagem de um paciente de 4 anos?

a) 5 anos
b) 8 anos
c) 12 anos
d) 16 anos

7. (INSTITUTO EXCELÊNCIA / Pref. Tremembé - 2019) Funções exponenciais e logarítmicas tem comportamentos gráficos por vezes confundidos e, para serem identificadas, incumbem ao estudante um bom conhecimento matemático. Considere os dois gráficos a seguir:

Gráfico 1

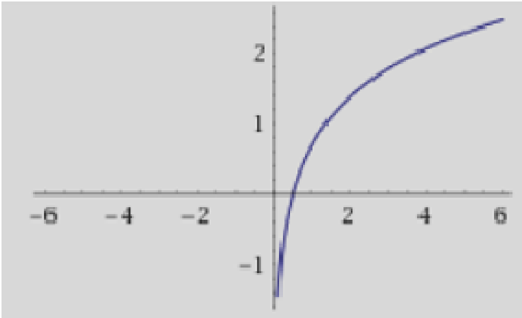
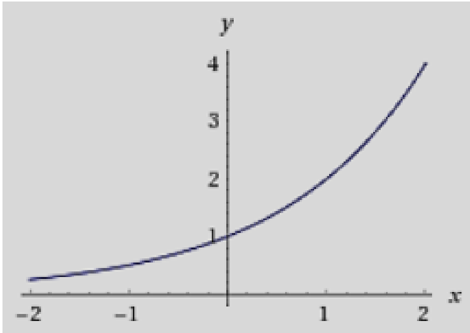


Gráfico 2



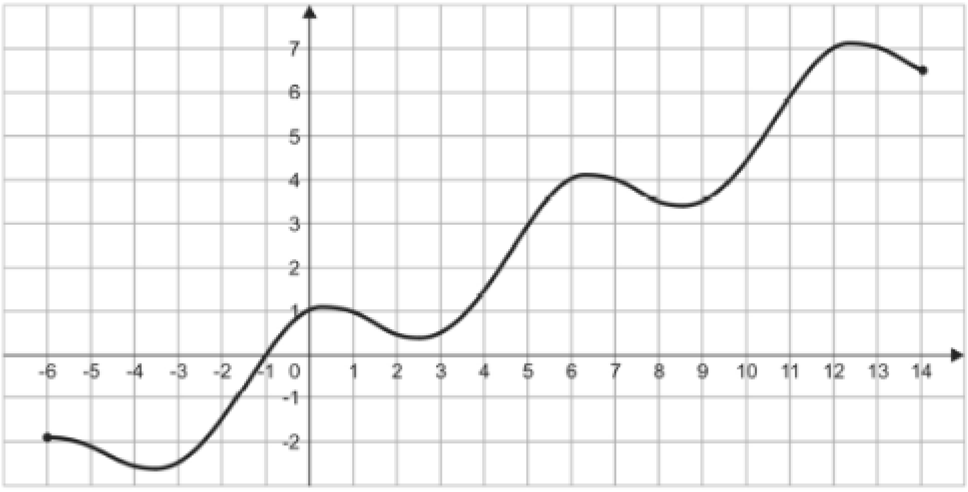
Sobre os gráficos apresentados e sobre os conceitos de funções exponenciais e logarítmicas, é CORRETO afirmar que:

a) É possível afirmar que a função que representa o gráfico 1 é $f(x) = \log(2x)$ e a função que representa o gráfico 2 é $g(x) = 2^x$.
b) É possível afirmar que a função que representa o gráfico 1 é $f(x) = \log(-2x)$ e a função que representa o gráfico 2 é $g(x) = 2^{-x}$.
c) É possível afirmar que a função que representa o gráfico 1 é $f(x) = 2^x$ e a função que representa o gráfico 2 é $g(x) = \log(2x)$.
d) É possível afirmar que a função que representa o gráfico 1 é $f(x) = 2^{-x}$ e a função que representa o gráfico 2 é $g(x) = \log(-2x)$.

8. (FUNRIO / Pref. Alta Floresta - 2019) Dada função $f(x) = \log_2 x^2$, determine o valor de x quando sua representação gráfica possui imagem igual à zero.

a) 2
b) -2
c) -1
d) 0
e) 1

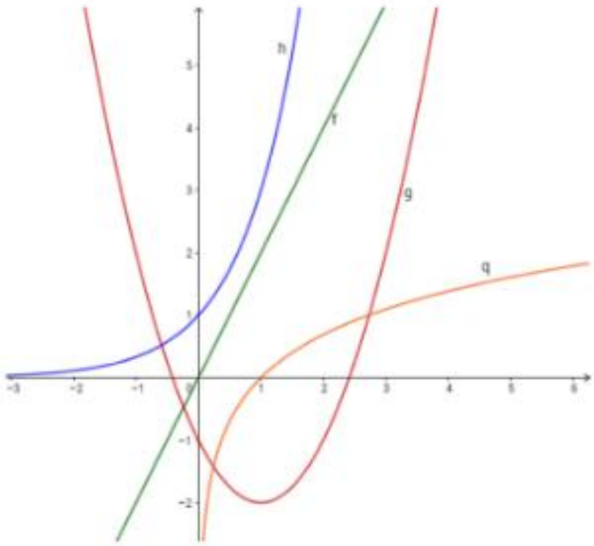
9. (FCC / UNIPAR - 2020) Considere a função f, de domínio $[-6;\ 14]$, cujo gráfico é mostrado na figura abaixo.



Se g é a função definida, para todo número real positivo x, pela lei $g(x) = \log_2 x$ e b é o número real tal que $f(g(b)) = 3$, então o valor de b é igual a:

a) 2
b) 16
c) 8
d) 4
e) 32

10. (UFMT / Pref. Várzea Grande - 2018) A figura apresenta o gráfico de quatro funções $f(x), g(x), h(x)$ e $q(x)$.

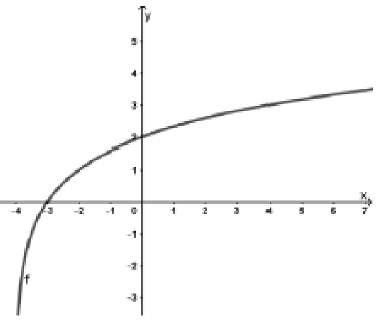


Com base no comportamento de cada curva, as funções f, g, h e q podem respectivamente ser:

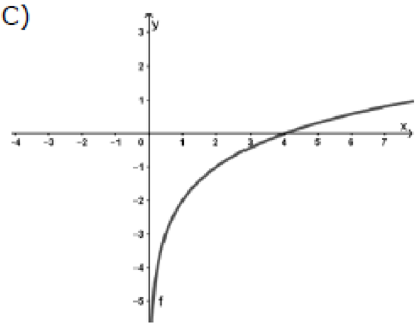
a) 1.º grau, exponencial, 2.º grau e logarítmica.
b) 1.º grau, logarítmica, 2.º grau e exponencial.
c) 1.º grau, 2.º grau, exponencial e logarítmica.
d) logarítmica, 2.º grau, exponencial e 1.º grau.

11. (FUNDATEC / Pref. Mampituba - 2018) O gráfico da função $y = f(x) = \log_2(2x + 8)$ é:

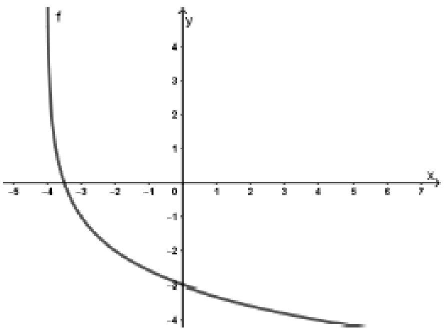
A)



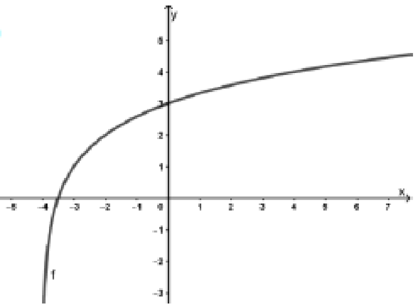
C)



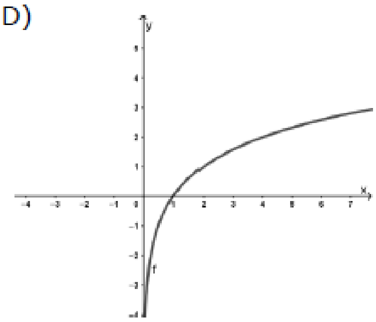
E)



B)



D)



12. (QUADRIX / SESC DF - 2018) Dado um número real $a > 1$, sabe-se que $f(x) = \log_a x$ é uma função cujo gráfico contém os pontos

a) $(1,0)\ e\ (1, a)$
b) $(1,0)\ e\ (a, 1)$
c) $(0,1)\ e\ (1, a)$
d) $(0,1)\ e\ (a, 1)$
e) $(1,0)\ e\ (a, 0)$

13. (EsPCEx / Cadete – 2013) Na figura abaixo, está representado o gráfico da função $y = \log x$. Nesta representação estão destacados três retângulos cuja soma das áreas é igual a:

a) $\log 2 + \log 3 + \log 5$
b) $\log 30$
c) $1 + \log 30$
d) $1 + 2 * \log 15$
e) $1 + 2 * \log 30$

14. (IMA / Prefeitura de Tuntum (MA) – 2019) Dada a função logarítmica $f(t) = \log(t + 4)$, qual das alternativas apresenta o dobro de t quando $f(t) = 2$?

a) 104
b) 208
c) 96
d) 192

15. (BIO RIO / Prefeitura de São Gonçalo – 2016) Considere a função cuja regra é: $f(x) = \log_2(x + k)$, na qual k é uma constate. O gráfica de $f(x)$ intercepta o eixo das ordenadas em $(0, 2)$. Dessa forma, o valor de $f(x)$ para $x = 28$ é igual a:

a) 8
b) 7
c) 6
d) 5
e) 4

16. **(FADESP / IFE – 2018) Um experimento realizado em laboratório aprontou que, ao administrar uma nova substância no organismo de um camundongo, a população de bactérias que ali se desenvolvera diminuiu com o passar do tempo, segundo o modelo:**

$$P(t) = P_i * e^{kt}$$

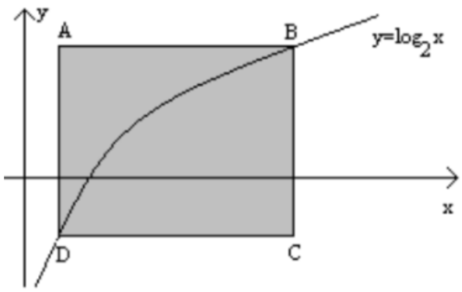
Com P_i é a população inicial, t é o tempo (em dias) e k, uma constate real. Observou-se que após o primeiro dia, a contar do momento da administração da substância, a população era de aproximadamente, $120x10^3$ bactérias, equanto que, no segundo dia, a população era de aproximadamente $15x10^3$ bactérias. Com esses dados, o valor da constante real k, obtido pelo pesquisador é:

a) $-8\ ln2$
b) $-2\ ln3$
c) $-5\ ln3$
d) $-3\ ln2$
e) $-4\ ln2$

17. **(COTEC / Prefeitura de Horizonte (MG) – Professor – 2015) Considere $f:]0, +\infty[\rightarrow R$ uma função definida por $f(x) = \log x$ e b um número real maior do que 1. Com base nas informações é CORRETO afirmar que a área do retângulo de vértices $(b, f(b)), (2b, f(b)), (2b, f(2b))\ e\ (b, f(2b))$ vale:**

a) $b \log b$
b) $\log 2$
c) $b \log 2$
d) $\log b$

18. **(CONPASS / Prefeitura de Carnaíba – Professor – 2012) O gráfico da função $y = \log_2 x$ e o retângulo ABCD, cujos lados são paralelos aos eixos coordenados, estão representados abaixo.**



Considere que:

- Os pontos B e D pertencem ao gráfico da função $y = \log_2 x$

- Os pontos A e B têm abscissas 1/4 e 8, respectivamente.

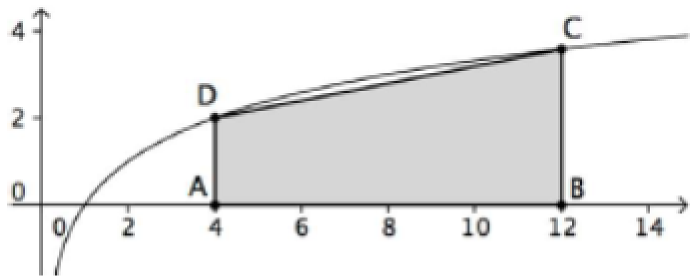
A área do retângulo ABCD é igual a:

a) 38
b) 38,25
c) 38,5
d) 37
e) 38,75

19. (FGV / ALRO – 2018) A figura a seguir mostra o gráfico da função

$$f(x) = \log_2 x$$

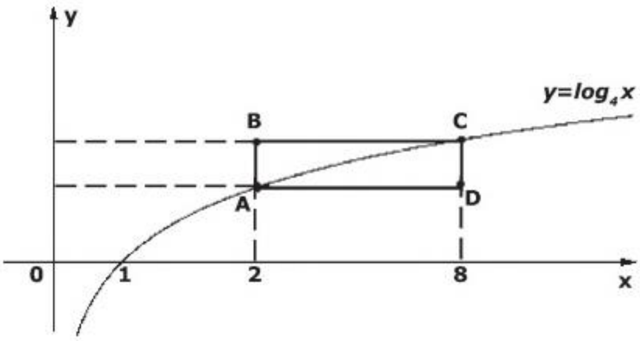
e os pontos $A = (4, 0)$, $B = (12, 0)$, $C = (12, f(12))$ e $D = (4, f(4))$.



Considerando $f(3) = 1,585$ a área do quadrilátero ABCD é:

a) 20,16
b) 21,52
c) 22,34
d) 23,60
e) 24,88

20. (EsPCEx / Cadete – 2017) A curva do gráfico representa a função $f(x) = \log_4 x$



A área do retângulo ABCD é:

a) 12
b) 6
c) 3
d) $6\log_4(3/2)$
e) $\log_4 6$

21. (EsPCEx / Cadete – 2011) Na figura abaixo, dois vértices do trapézio sombreado estão no eixo x e os outros dois vértices estão sobre o gráfico da função real $f(x) = \log_k x$, com $k > 0$ e $k \neq 1$.

▪

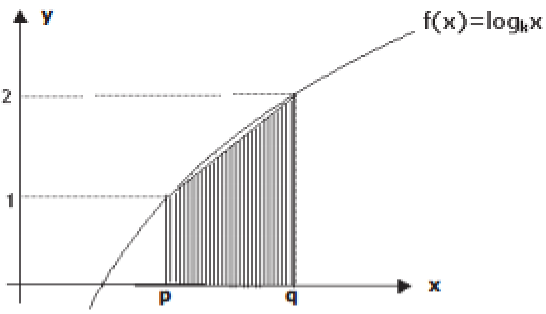


Gráfico fora de escala

Sabe-se que o trapézio sombreado tem 30 unidades de área; assim, o valor de $k + p - q$ é igual a:

a) -20
b) -15
c) 10
d) 15
e) 20

22. (IMA / Prefeitura de Anísio de Abreu (PI) – Professor – 2015) O domínio da função abaixo em R é igual a:

$$f(x) = \log_{(x-1)}(x^2 + 4)$$

a) $-2 < x < 2 \;\; e \;\; x \neq 1$
b) $1 < x \neq 2$
c) $-2 < x < 2$
d) $0 < x \neq 1$

23. (CESPE / Pref. São Cristóvão – 2019) Julgue o item, relativo a funções exponenciais.

Para $x > 0$, a função $f(x) = \ln x$, em que a inversa é $g(x) = e^x$, é tal que $x = e^{f(x)} = \ln g(x)$.

24. (CESPE / PM AL – 2018) Julgue o item subsequente, relativo à função $f(x) = 30 - \log_2(x)$.

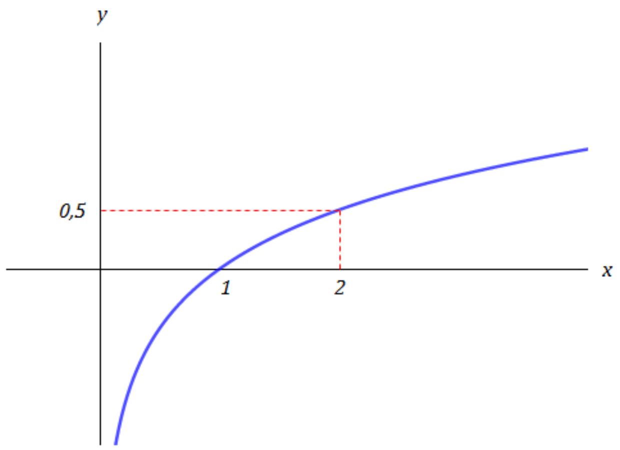
O domínio da função $f(x)$ é o conjunto dos números reais positivos e $f(8) = 27$.

25. (CESPE / SEDUCA AM – 2011) A respeito de funções, julgue o item a seguir.

Se $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_{10} x$, então $f(x) \times \ln 10 = g(x) \times \ln 2$, em que $\ln k$ denota o logaritmo neperiano de k.

26. (CONPASS - Adaptada / Prefeitura de Brejinho - 2016) Na figura está parte da representação gráfica da função f definida por

$$f(x) = \log_a x \quad , \quad a \in R - \{1\}$$



O valor de a é igual a:

a) $^3/_2$
b) 2
c) $^5/_2$
d) 4

27. (UNIUV / Prefeitura Municipal de Irineópolis (SC) – Professor – 2015) Dada a função $f(x) = \log(x)$, é correto afirmar que $f(0,001)$ é igual a:

a) -3
b) 3
c) -6
d) 5
e) 0

28. (SIGMA / Prefeitura de Maurilândia (GO) – Professor – 2015) Considere as funções reais abaixo:

$$f(x) = \log x$$

$$g(x) = \frac{1}{10^x}$$

O valor de $g\big(f(100)\big)$ é igual a:

a) $0,1$

b) $0{,}01$
c) $0{,}001$
d) -2
e) 2

29. (ACAPLAM / Prefeitura de Arcoverde (PE) – Agente de Fiscalização de Trânsito – 2015) Um satélite será conduzido ao espaço por um foguete que tem seu consumo de combustível calculado pela função:

$$\boldsymbol{C(t) = \log_2 (3t^2 + 5)^2 + 2 * \log_2 \frac{1}{10}}$$

em que C é o consumo em tonelada e t é o tempo em hora. Para colocar o satélite em órbita, o foguete deverá percorrer uma distância de 45.000 km a uma velocidade média de 9.000 km/h. Com base nos dados, qual o consumo de combustível, em toneladas, para o foguete cumprir a missão?

a) 5
b) 7
c) 4
d) 8
e) 6

30. (Makiyama / CPTM – Médico do Trabalho – 2011) Uma bactéria se espalhava no ambiente em que estava seguindo uma função logarítmica $\boldsymbol{F(x) = \log_2 x, (x > 1)}$ em que $\boldsymbol{x}$ é o tempo medido em minutos e $\boldsymbol{F(x)}$ é a área que possui a presença da bactéria em m². Após 32 minutos, a área ocupada será de:

a) $1m^2$
b) $2m^2$
c) $3m^2$
d) $4m^2$
e) $5m^2$

31. (Instituto Excelência / Prefeitura de São Carlos – Médico – 2018) Uma função logarítmica de base $\boldsymbol{a}$ é definida por $\boldsymbol{f(x) = \log_a x}$, com $\boldsymbol{a \neq 1}$ e $\boldsymbol{a > 0}$. É possível compor funções logarítmicas juntamente com funções polinomiais. Para a função

$$f(x) = \log_{10}\left(\frac{x^2 + x - 1}{x + 12}\right)$$

O valor de $f(-2)$ é igual a:

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

32. (Fundatec / Prefeitura de Quaraí (RS) – Professor – 2019) O valor de $f(13)$ em $f(x) = \log_2(x + 3)$ é:

a) 4
b) 3
c) 2
d) 1
e) 0

33. (IFF / Professor Matemática – 2018) Se $f(x) = \ln(5x - 4)$, então sua função inversa $f^{-1}(x)$ é igual a:

a) $[\ln(5x - 4)]^{-1}$
b) $[\ln(5x - 4)]$
c) $5/[(e^x + 4)]$
d) $(e^x + 4)/5$
e) e^{5x-4}

34. (EEAR / Sargento – 2013) Se $f(x) = \log x$ e $a * b = 1$, então $f(a) + f(b)$ é igual a:

a) 0
b) 1
c) 10
d) 100

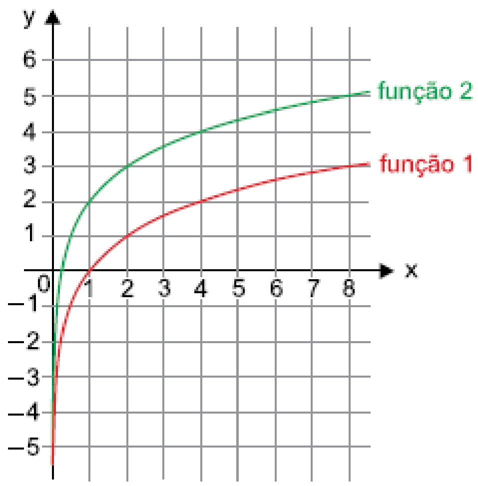
35. (Cesgranrio / Petrobras – 2011) Sendo a função:

$$\boldsymbol{f(x) = 2 * \log_5\left(\frac{3x}{4}\right)}$$

em que x é um número real positivo, $f(17)$ é um número real compreendido entre:

a) 1 e 2
b) 2 e 3
c) 3 e 4
d) 4 e 5
e) 5 e 6

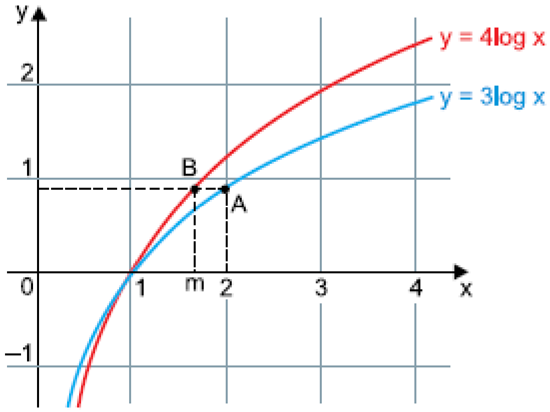
36. (VUNESP / Vestibular – 2015) A imagem indica o gráfico das funções 1 e 2, ambas definidas para x real e maior do que zero.



De acordo com o gráfico, as funções 1 e 2 podem ser, respectivamente,

a) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ e $y = \log_{\frac{1}{2}} 2x$
b) $y = 2^{x-2}$ e $y = 2^{2x}$
c) $y = \sqrt{x} - 1$ e $y = \sqrt{x} + 1$
d) $y = \log_2 x$ e $y = \log_2 4x$
e) $y = \sqrt{x}$ e $y = \sqrt{4x}$

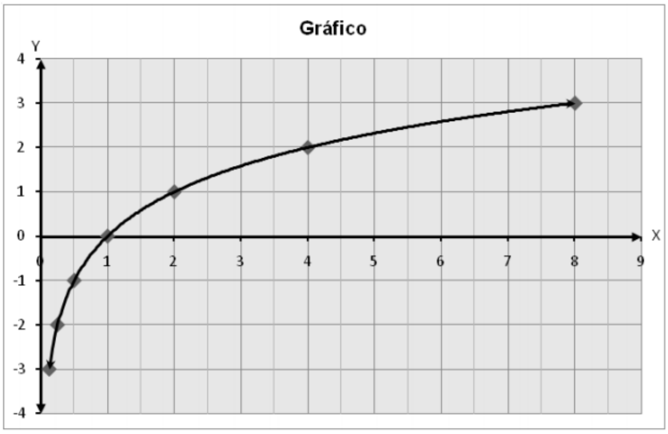
37. (VUNESP / FAMERP – 2018) A figura indica os gráficos das funções f e g, definidas de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$, cujas leis são, respectivamente, f(x) = 4log x e g(x) = 3log x.



O valor de m, indicado na figura, é igual a:

a) $\log 12$
b) $2^{0,75}$
c) $\log 7$
d) $2^{0,25}$
e) $2^{1,25}$

38. (UNESPAR / Vestibular – 2016) Com base no gráfico abaixo, assinale a alternativa correta.



a) O gráfico acima pode representar a função $f(x) = \log_{10} x$;
b) O gráfico acima pode representar a função $f(x) = 2x$;
c) O gráfico acima pode representar a função $f(x) = \log_3 x$;
d) O gráfico acima pode representar a função $f(x) \log_2 x$;

e) O gráfico acima pode representar a função $f(x) = (1/2)^2$.

39. (UECE / Vestibular – 2016) Seja $f: R \to R$ a função definida por

$$\boldsymbol{f(x) = 10^{1-\ln x}}$$

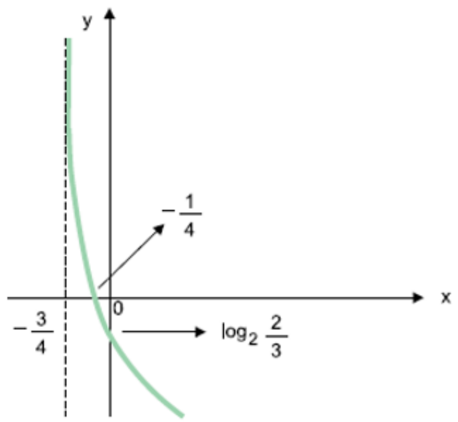
Então, o valor de $\log(f(e))$ será igual a:

a) $1/2$
b) 0
c) $1/3$
d) 1

40. (VUNESP / Vestibular – 2018) Uma função logarítmica real é dada por

$$\boldsymbol{f(x) = 2 - \log_2(ax+b)}$$

sendo a e b constantes reais. O gráfico dessa função é:



Nas condições dadas, $a + b$ é igual a

a) 12
b) 13
c) 15
d) 14
e) 11

Gabarito

1. C
2. E
3. D
4. D
5. B
6. D
7. A
8. Anulada
9. E
10. C
11. B
12. B
13. D
14. D
15. D
16. D
17. C
18. E
19. C
20. B
21. B
22. B
23. CERTO
24. CERTO
25. ERRADO
26. D
27. A
28. B
29. E
30. E
31. B
32. A
33. D
34. A
35. C
36. D
37. B
38. B
39. B
40. D

Lista de Questões - Bancas Diversas

Equações Logarítmicas

1. **(CESPE / BNB – 2018) A respeito de números reais e de funções de variáveis reais, julgue o item que se segue.**

As únicas soluções da equação $(\log_3 x)^2 = \log_3 x + 6$ são $x = 1/9$ e $x = 27$.

2. **(IFRS / Professor – 2015) Considere a função cuja lei é:**

$$\boldsymbol{y = \ln\sqrt{\frac{2x}{(x+1)^3}}}$$

A derivada desta função no ponto em que $x = 2$ é igual a:

a) $-1/2$
b) $1/4$
c) 2
d) $-1/4$
e) 0

3. **(AOCP / IFE – 2017) Um pesquisador estuda uma espécie de inseto e, a partir de um mesmo instante, iniciou o estudo de duas populações de colônias, C_1 e C_2, dessa espécie.**

Decorridos alguns meses de observação, apresentou as funções $f(x)$ e $g(x)$ definidas por $f(x) = \log_3(2x+50)$ e $g(x) = 1 + \log_3\frac{(x+40)}{2}$ que representam, aproximadamente, o número de insetos das colônias C_1 e C_2, respectivamente, após x semanas do início do estudo. Assinale a alternativa que apresenta o intervalo que contém o tempo, em semanas, após o início do estudo, tal que as populações C_1 e C_2 atinjam o mesmo número de insetos.

a) $10 < t \leq 15$
b) $15 < t \leq 20$
c) $20 < t \leq 25$
d) $25 < t \leq 30$
e) $30 < t \leq 35$

GABARITO

1. CERTO
2. A
3. D (ANULADA)
4. B

Lista de Questões - Bancas Diversas

Inequações Logarítmicas

1. **(CESPE / TELEBRAS - 2022) A respeito das funções e suas propriedades, julgue o item subsecutivo.**

O domínio da função $L(x) = \log(3 - 2x)$ é o conjunto $D = \{x \in R: x < 3/2\}$.

2. **(COTEC / Pref. Brasília de Minas - 2020) Resolvendo-se a inequação**

$$\log 2x > \log(x + 1)$$

obtemos

a) $S = \{x \in R \ / \ x < -1\}$
b) $S = \{x \in R \ / \ x > -1\}$
c) $S = \{x \in R \ / \ x > 1\}$
d) $S = \{x \in R \ / \ x > -1/2\}$
e) $S = \{x \in R \ / \ x < 1/2\}$

3. **(CEV / URCA - 2020) O conjunto solução da inequação**

$$\log_{\frac{1}{10}} x^2 > \log_{\frac{1}{10}}(2x - 1)$$

Em R é:

a) $S = \{x \in R \ / \ x > 1\}$
b) $S = \{x \in R \ / \ 0 < x < 1\}$
c) $S = \{x \in R \ / \ x \neq 1\}$
d) $S = \{x \in R \ / \ x > 1/2\}$
e) $S = \emptyset$

4. **(FCC / IBMEC - 2019) O conjunto das soluções reais da inequação $(\log_3 x)^2 < 4$ é**

a) $\{x \in R \ / \ x > 1/9\}$
b) $\{x \in R \ / \ x < 9\}$
c) $\{x \in R \ / \ 1/9 < x < 9\}$
d) $\{x \in R \ / \ x < 1/9 \text{ ou } x > 9\}$

e) $\{x \in R \;/\; x > 9\}$

5. (FUNDATEC / Pref. Tapejara - 2019) O conjunto imagem da função $f(x) = \log_2 x$ é:

a) $[0,1]$
b) $[1, +\infty]$
c) $[-\infty, 1]$
d) $(-\infty, +\infty)$
e) $\emptyset$

6. (IDHTEC / Prefeitura de Itaíba (PE) – Professor – 2020) A função:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\log_4 x - \log_{16} 25}}$$

está definida para que valores reais de x?

a) $x \neq 0$
b) $x > 5$
c) $x \geq 5$
d) $x \leq 1$
e) $x \leq 0$

7. (CRS / PMMG Aspirante – 2010) O domínio da função:

$$f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 5x - 14)$$

está no intervalo:

a) $]7, +\infty[$
b) $]-2,7[$
c) $]-1, +\infty[$
d) $]0, +\infty[$

Gabarito

1. CERTO
2. C
3. C
4. C
5. D
6. B
7. A

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.