RACIOCÍNIO LÓGICO

Probabilidade

Livro Eletrônico

GRAN CURSOS ONLINE

SUMÁRIO

Apresentação

Olá, aluno(a), seja bem-vindo(a) a mais uma aula do nosso curso de Matemática. Nesta aula, falaremos sobre a Teoria de Probabilidades.

Neste capítulo, nós nos deteremos apenas nos conceitos fundamentais. Não estudaremos as Distribuições de Probabilidade, que são estudadas somente no curso de Estatística, nem temas específicos da Análise Combinatória, que são estudados no capítulo apropriado de Análise Combinatória, caso haja necessidade.

Portanto, você precisará dar atenção especial à parte final desta aula. No mais, seguem meus contatos. Lembre-se também de que eu estou disponível pelo Fórum de Dúvidas.

E-mail: thiagofernando.pe@gmail.com

WhatsApp: (11) 961 678 986

PROBABILIDADE

1. Probabilidade

O conceito de Probabilidade é talvez um dos mais importantes da Matemática e, se bem compreendido, mudará sua forma de ver o mundo.

O fato é que, na vida, na maioria das vezes, lidamos com incertezas. Todos os eventos possuem certa probabilidade de ocorrer. E é conhecendo essas probabilidades que poderemos tomar decisões mais racionais.

1.1. Noções sobre Conjuntos

Antes de adentrarmos no estudo da Teoria de Probabilidades, precisamos saber algumas noções básicas de conjuntos.

Considere o conjunto de eventos possíveis no lançamento de um dado. Nesse caso, temos:

Espaço Amostral de Eventos (Ω): representa todo o conjunto de eventos possíveis.

Exemplo: se estamos falando de um lançamento de um dado de seis faces, teríamos o espaço amostral $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Evento (A): é um evento qualquer para o qual se deseja calcular a probabilidade de ocorrência.

Exemplo: se queremos saber qual a probabilidade de o lançamento ser maior ou igual a 5, temos que A = {5, 6}. Além disso, temos algumas operações importantes. Vamos a elas.

Intersecção (∩) é representada pela conjunção E.

Por exemplo, considere dois eventos distintos. A é o evento anterior, ou seja, A = {5,6}. Já o evento B é o lançamento resultar em número ímpar, portanto tem-se B = {1,3,5}.

A intersecção, representada por A ∩ B, corresponde ao evento de acontecer A e B **simultaneamente.** Para isso, precisamos tomar os elementos comuns entre esses dois conjuntos.

$$A \cap B = \{5\}$$

União ($\cup$): é representada pela conjunção OU.

A união, representada por A ∪ B, corresponde ao evento de acontecer, pelo menos, um dos dois eventos A ou B. Para isso, basta agrupar os elementos de ambos os conjuntos, sem repetir os elementos em comum.

$$A \cup B = \{1,3,5,6\}$$

1.2. Axiomas de Kolmogorov

Os axiomas de Kolgomorov são um conjunto de definições básicas para a função que define a probabilidade de ocorrência de um evento.

São muito importantes no âmbito da Matemática Pura, porém, em concursos, eles só são cobrados literalmente – ou seja, uma questão bem decoreba.

Agora, vejamos quais são esses tais axiomas.

Primeiro Axioma: a probabilidade de um evento qualquer é um número real não negativo:

$$P(A) \geq 0$$

Segundo Axioma: a probabilidade de todo o espaço amostral é igual a 1:

$$P(\Omega) = 1$$

O segundo axioma define a probabilidade total. Para Kolmogorov, a probabilidade deve ocupar sempre valores entre 0 e 1 (ou 0% e 100%). Dessa forma, o conjunto universo, que corresponde ao máximo da probabilidade, será a situação correspondente à probabilidade igual a 1.

Terceiro Axioma: para eventos disjuntos, a probabilidade da união é a soma das probabilidades:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \text{ quando } A \cap B = \phi$$

O terceiro axioma é o mais importante para questões de prova. Trata sobre a união de eventos mutuamente exclusivos, que são fruto de conjuntos disjuntos.

Dois eventos mutuamente exclusivos são aqueles, cuja intersecção é nula. Ou seja, a probabilidade de eles acontecerem simultaneamente é nula.

Uma palavra-chave para a união de dois eventos $(A \cup B)$ é o operador OU. Guarde-o muito bem.

Quando dizemos "Qual a probabilidade de o dado dar 5 ou 6?", na verdade, temos dois eventos.

$$A = \{5\}, B = \{6\}$$

Como esses eventos são mutuamente exclusivos – o dado não pode dar 5 e 6 ao mesmo tempo –, temos que a probabilidade de dar 5 ou 6 é igual à soma das probabilidades.

Na sua preparação para concursos públicos, não faz sentido divagar sobre a importância desses axiomas. Há muita matemática envolvida nisso.

Portanto, caso alguma questão nesse sentido seja cobrada, isso requererá que você os tenha memorizados.

Direto do Concurso

001. (FGV/IBGE/2016/TECNOLOGIA/ESTATÍSTICO) A teoria das probabilidades está apoiada em um conjunto de três axiomas, atribuídos a Kolmogorov. Sendo S o espaço amostral, A e B dois eventos, Ø do vazio e P(.) a medida de probabilidade, os axiomas estabelecem que:
a) P(S) = 1, P(A) ≥ 0 e P(A∩B) = P(A).P(B);
b) P(Ø) = 0, P(A) ≤ 1 e P(A U B) = P(A) + P(B);
c) P(A) ≥ 0; P(A) = 1 – P(A^C) e P(S) = 1, A^C = Complementar de A;
d) P(A) ≥ 0; P(S) = 1 e P(A U B) = P(A) + P(B) com A∩B = Ø;
e) P(A) ≤ 1; P(S) = 1 e P(A U B) = P(A) + P(B) – P(A∩B).

Talvez você tenha notado meu tom de melancolia ao pedir para que você decorasse os três axiomas de Kolgomorov. Mas, realmente, é triste quando uma Matemática tão bonita tem que ser empurrada goela abaixo.
Bom, vamos repeti-los para que você não se esqueça.
Primeiro Axioma: a probabilidade de um evento qualquer é um número real não negativo:

$$P(A) \geq 0$$

Segundo Axioma: a probabilidade de todo o espaço amostral é igual a 1:

$$P(\Omega) = 1$$

Terceiro Axioma: para eventos disjuntos, a probabilidade da união é a soma das probabilidades:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \text{ quando } A \cap B = \phi$$

Gostaria de acrescentar que muitas alternativas apresentam consequências dos axiomas. Por exemplo, $P(A) \leq 1$ é uma consequência direta dos dois primeiros axiomas, pois, como a probabilidade de qualquer evento é não negativa e a probabilidade do universo é 1, então, a probabilidade de qualquer evento será menor que a probabilidade do universo.
No entanto, a questão não perguntou o que se poderia afirmar, mas, sim, o que estava escrito nos axiomas. Por isso, só há um gabarito.
Letra d.

1.3. Conceitos

Agora, começamos com a parte mais interessante do estudo de Probabilidade.

1.3.1. Conceito Clássico

Você precisa saber que, no conceito clássico, as probabilidades de todos os eventos são iguais.

Por isso, a probabilidade é dada por:

Obs.: $P = \dfrac{\#Eventos\ Favoráveis}{\#Total\ de\ Possibilidades}$

Na Matemática, em especial, no estudo de conjuntos, é comum o uso do símbolo "#",que significa "número (de)".

Por exemplo, considere que temos um dado não viciado de seis faces. Qual é a probabilidade de obtermos, em um lançamento, o número maior ou igual a 5?

Ora, nesse caso, o total de possibilidades são 6, pois o nosso espaço amostral é $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. No entanto, apenas dois desses eventos são favoráveis (5 ou 6). Assim, temos:

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

O conceito clássico é o mais importante para a sua prova, porque frequentemente utiliza conceitos de Análise Combinatória, ou seja, a contagem para o cálculo de probabilidades.

Em questões de prova, é muito comum ser útil calcular apenas os eventos não favoráveis. Nesse caso, tem-se uma interessante expressão.

Pelo Princípio da Inclusão e Exclusão, o número de eventos favoráveis será igual ao total de eventos menos os não favoráveis.

$$P = \frac{\#Eventos\ Favoráveis}{\#Total\ de\ Possibilidades} = \frac{\#Total - \#NãoFavoráveis}{\#Total}$$

Obs.: $P = 1 - \dfrac{\#Eventos\ NãoFavoráveis}{\#Total\ de\ Possibilidades}$

1.3.2. Conceito Frequencial

Em muitos casos, não é possível fazer a suposição de que os vários eventos são equiprováveis. Por exemplo, qual a probabilidade de uma pessoa nascer loira?

Suponha que tenhamos o seguinte espaço amostral de eventos para a cor do cabelo:

Ω = {loiro, ruivo, castanho, preto}

Não faz sentido nenhum dizer que a probabilidade de uma pessoa nascer ruiva é a mesma de ela nascer de cabelo castanho, não acha?

Por isso, nesses casos, utilizamos o conceito frequencial. Para isso, simplesmente fazemos observações sobre quantas pessoas nasceram com cada cor de cabelo e calculamos a probabilidade pela razão entre o número de pessoas loiras e o total. Vejamos um exemplo:

Na Tabela 2, temos dados fictícios a respeito da coloração dos olhos e dos cabelos das pessoas em uma cidade.

	Cor dos cabelos				
Cor dos olhos	Loiro	Castanho	Preto	Ruivo	Total
Azul	1.768	807	189	47	2.811
Verde	946	1.387	746	53	3.132
Castanho	115	438	288	16	857
Total	2.829	2.632	1.223	116	6.800

Tabela 2: Dados a Respeito da Cor dos Olhos e Cabelos de Pessoas

Agora, suponha que queremos calcular:

1) a probabilidade de que uma pessoa da amostra tenha olhos azuis.

Basta pegar a frequência relativa de pessoas de olhos azuis em relação ao total.

$$P(A) = \frac{2811}{6800} = 0{,}413 = 41{,}3\%$$

2) a probabilidade de que uma pessoa seja loira de olhos azuis.

Fazemos o mesmo procedimento, mas, dessa vez, com as pessoas loiras de olhos azuis.

$$P(L \cap A) = \frac{1768}{6800} = 0{,}26 = 26\%$$

Direto do Concurso

002. (CESPE/MINISTÉRIO DA ECONOMIA/2020/TECNOLOGIA DE INFORMAÇÃO/SEGURANÇA DA INFORMAÇÃO E PROTEÇÃO DE DADOS) O setor de gestão de pessoas de determinada empresa realiza regularmente a análise de pedidos de férias e de licenças dos seus funcionários. Os pedidos são feitos em processos, em que o funcionário solicita apenas férias, apenas licença ou ambos (férias e licença). Em determinado dia, 30 processos foram analisados, nos quais constavam 15 pedidos de férias e 23 pedidos de licenças.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item que se seguem.

Se todos os processos foram analisados individualmente nesse dia, então a probabilidade de um processo específico ter sido o primeiro a ser analisado é superior a 1/10.

Como foram analisados 30 processos naquele dia, a chance de um processo qualquer ser o primeiro a ser analisado é:

$$P = \frac{1}{30}$$

Essa probabilidade é inferior a 1/10, porque, quanto maior o denominador, menor a fração.

Errado.

---

003. (FCC/2017/ARTESP/ESPECIALISTA EM REGULAÇÃO DE TRANSPORTE/ADMINISTRAÇÃO DE EMPRESAS) Em um trecho de pedágio de uma rodovia no interior do Estado passam, pelas cabines, um total de 2.300 carretas de dois e três eixos, onde 1.725 são carretas de dois eixos. A probabilidade de passar uma carreta de três eixos pelas cabines é de

a) 30%.
b) 20%.
c) 33%.
d) 15%.
e) 25%.

Vamos obter o número de carretas de três eixos encontradas no trecho de pedágio.

$$\#(Três) = 2300 - 1725 = 575$$

Pela definição frequencial de probabilidades, temos:

$$P(Três) = \frac{\#Três}{\#Total} = \frac{575}{2300} = 0{,}25 = 25\%$$

Letra e.

---

004. (CESPE/BNB/2018/ANALISTA DE SISTEMA) Um tabuleiro quadrado e quadriculado, semelhante a um tabuleiro de xadrez, com 12 linhas e 12 colunas, e, portanto, com 12 × 12 = 144 quadradinhos pintados: 54, na cor azul; 30, na cor marrom; 40, na cor amarela; e 20, na cor verde. A cada quadradinho é associado um cartão com dois números, que indicam a posição do quadradinho no tabuleiro; o primeiro número corresponde ao número da linha, e o segundo corresponde ao número da coluna. Por exemplo, o cartão com os números 5,10 corresponde ao quadradinho posicionado na linha 5 e na coluna 10. Esses cartões estão em uma urna, da qual podem ser retirados aleatoriamente.

A respeito desse tabuleiro e desses cartões, julgue o item a seguir. A probabilidade de retirar dessa caixa, de maneira aleatória, um cartão correspondente a um quadrado pintado na cor azul é superior a 1/3.

Existem 54 quadradinhos azuis que podem ser selecionados dentre o total de

$$P = \frac{\#favoráveis}{\#totais} = \frac{54}{144} = 0{,}375 > \frac{1}{3}$$

Certo.

1.4. Categorias Especiais de Eventos

1.4.1. Eventos Independentes

Dois eventos são independentes quando a ocorrência de um deles não influencia na ocorrência do outro. Nesse caso, aplica-se diretamente o Princípio Fundamental da Contagem (PFC).

Se A e B são dois eventos independentes, tem-se que:

Obs.: $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Como exemplo, temos o lançamento consecutivo de dois dados não viciados.

Por exemplo, qual é a probabilidade de, em dois lançamentos de um dado, obtermos dois números iguais a 6?

1/6	X	1/6	= 1/6 . 1/6
1º Dado		2º Dado	Total

$$P = \frac{1}{6}.\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Considerando que o dado é não viciado, os resultados dos lançamentos são independentes. Por isso, podemos simplesmente aplicar o teorema que acabamos de ver.

1.4.2. Eventos Mutuamente Exclusivos

Por outro lado, dois eventos são **mutuamente exclusivos** quando não podem acontecer simultaneamente.

É o caso de A: fazer sol e B: chover. Chover e fazer sol são dois eventos mutuamente exclusivos, ou seja, a probabilidade de ocorrerem simultaneamente é igual a zero.

Obs.: $P(A \cap B) = 0$

1.4.3. Eventos Complementares

Dois eventos são complementares quando:

- a probabilidade de ocorrência simultânea é nula. Assim, a probabilidade da intersecção é igual a zero;
- a união entre eles corresponde ao próprio conjunto universo.

Exemplo: no lançamento de uma moeda, podemos definir dois eventos: "cara" e "coroa". Eles são eventos complementares, porque é impossível que o lançamento seja simultaneamente cara e coroa, e, ao mesmo tempo, não existe outra possibilidade – o conjunto universo de lançamento é formado por esses dois elementos.

Podemos visualizar também na forma de conjuntos. Considere o lançamento de um dado, cujo conjunto universo é representado por:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Agora, considere o evento **A** como o lançamento de um dado retornar um número par. Dessa forma, podemos definir:

$$A = \{2,4,6\}$$

Por outro lado, o complementar de A será:

$$\bar{A} = A^C = \{1,3,5\}$$

Uma forma simples de obter um evento complementar é por meio da **negação.**, o complementar da probabilidade de "ser sorteada uma bola azul" é igual a "não ser sorteada uma bola azul".

A técnica dos eventos complementares pode ser muito útil em diversas questões, porque, em muitos casos, é mais fácil calcular a probabilidade complementar que calcular a probabilidade pedida diretamente. Veremos exemplos.

Direto do Concurso

005. (CESPE/BNB/2018/ANALISTA DE SISTEMA) Um tabuleiro quadrado e quadriculado, semelhante a um tabuleiro de xadrez, com 12 linhas e 12 colunas, e, portanto, com 12 × 12 = 144 quadradinhos pintados: 54, na cor azul; 30, na cor marrom; 40, na cor amarela; e 20, na cor verde. A cada quadradinho é associado um cartão com dois números, que indicam a posição do quadradinho no tabuleiro; o primeiro número corresponde ao número da linha, e o segundo corresponde ao número da coluna. Por exemplo, o cartão com os números 5,10 corresponde ao quadradinho posicionado na linha 5 e na coluna 10. Esses cartões estão em uma urna, da qual podem ser retirados aleatoriamente.

A probabilidade de retirar dessa caixa, de maneira aleatória, um cartão correspondente a um quadrado que não tenha sido pintado na cor marrom é inferior a 0,72.

Observe que, dos 144 quadradinhos, 30 deles são marrons. Portanto, o número de quadradinhos que não são marrons é:

$$\#(M^C) = 144 - 30 = 114$$

Como o total de quadrados existentes no tabuleiro é igual a 144, podemos escrever pela definição clássica de probabilidade:

$$P = \frac{\#favoráveis}{\#totais} = \frac{114}{144} \cong 0{,}79 > 0{,}72$$

Errado.

006. (FGV/TJ-BA/2015/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICO) Na teoria das probabilidades, os conceitos de eventos independentes e eventos mutuamente exclusivos, apesar de distintos, guardam entre si uma estreita relação. Quando dois eventos são independentes:

a) são também mutuamente exclusivos;
b) não podem ser mutuamente exclusivos;
c) podem não ser mutuamente exclusivos, mas sua interseção deve ter probabilidade nula de ocorrência;
d) serão também mutuamente exclusivos se as probabilidades condicionais, de cada um dado o outro, forem idênticas;
e) os complementares devem ser mutuamente exclusivos.

Perceba que os conceitos de eventos independentes e mutuamente exclusivos não são compatíveis.

Se dois eventos são mutuamente exclusivos, a ocorrência de um implica a não ocorrência do outro, portanto eles não são independentes.

Letra b.

1.5. Probabilidade da União

Trata-se de um assunto amplamente explorado em provas.

Para entender melhor a expressão que vai ser deduzida, vamos representar os eventos A e B por meio de diagramas.

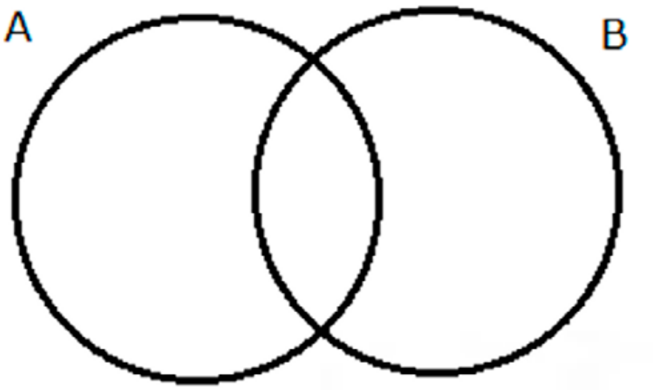


Figura 9: Diagrama da União de Dois Eventos

Para calcular a probabilidade da união de dois eventos, devemos calcular o número de elementos dessa união.

Podemos começar somando os elementos de A com os elementos de B. Marcaremos os elementos de A com linhas diagonais azuis e os de B com linhas diagonais vermelhas.

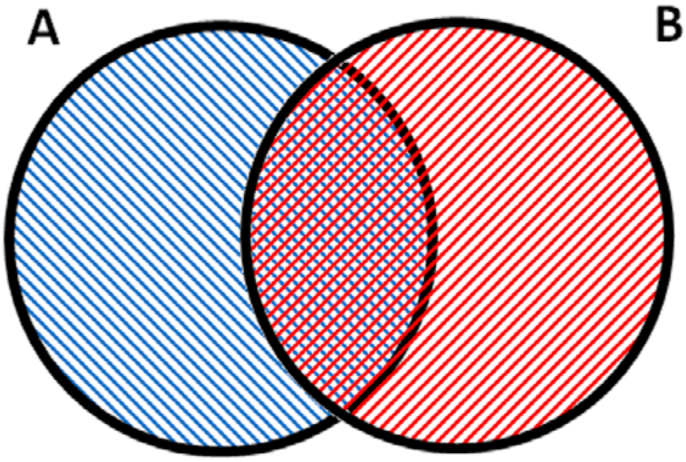


Figura 10: União entre dois Conjuntos

Perceba, no entanto, que os elementos da intersecção foram contados duas vezes. Por isso, precisamos retirar suas repetições, de modo que eles sejam contados apenas uma vez.

Dessa maneira, temos que o número de elementos da união é:

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

Agora, podemos calcular a probabilidade do evento união dividindo pelo número de elementos do espaço amostral.

$$P(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{\#\Omega} = \left(\frac{\#A}{\#\Omega}\right) + \left(\frac{\#B}{\#\Omega}\right) - \left(\frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega}\right)$$

Sabemos que essas razões representam probabilidades. Portanto, chegamos a uma importantíssima expressão:

Obs.: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Podemos generalizar essa expressão para três eventos. Caso tenha curiosidade, você poderá tentar deduzir, porém isso vai dar um pouco de trabalho.

Obs.:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Há uma lógica relativamente simples para lembrar essa expressão. Perceba que:

Obs.:

$$P(A \cup B \cup C) = Soma\ das\ Probabilidades\ Um\ a\ Um - Probabilidades\ Dois\ a\ Dois + Probabilidades\ Três\ a\ Três$$

É só você se lembrar de que o sinal vai alternando. 1 a 1 é positivo; as probabilidades 2 a 2 entram com sinal negativo; 3 a 3 positivo; e assim por diante. Eu nunca vi em provas de concurso, mas, se a questão colocar uma união de quatro ou mais eventos, você pode continuar: as intersecções 4 a 4 entram com sinal negativo, as 5 a 5 com sinal positivo e por aí vai.

E, agora, vamos treinar?

Direto do Concurso

007. (FCC/2019/SEFAZ-BA/AUDITOR-FISCAL/ADMINISTRAÇÃO TRIBUTÁRIA/PROVA II) Uma sala contém 20 homens e 30 mulheres em que todos são funcionários de uma empresa. Verifica-se que metade desses homens e metade dessas mulheres possuem nível superior. Escolhendo aleatoriamente uma pessoa dessa sala para realizar uma tarefa, a probabilidade de ela ser mulher ou possuir nível superior é igual a:

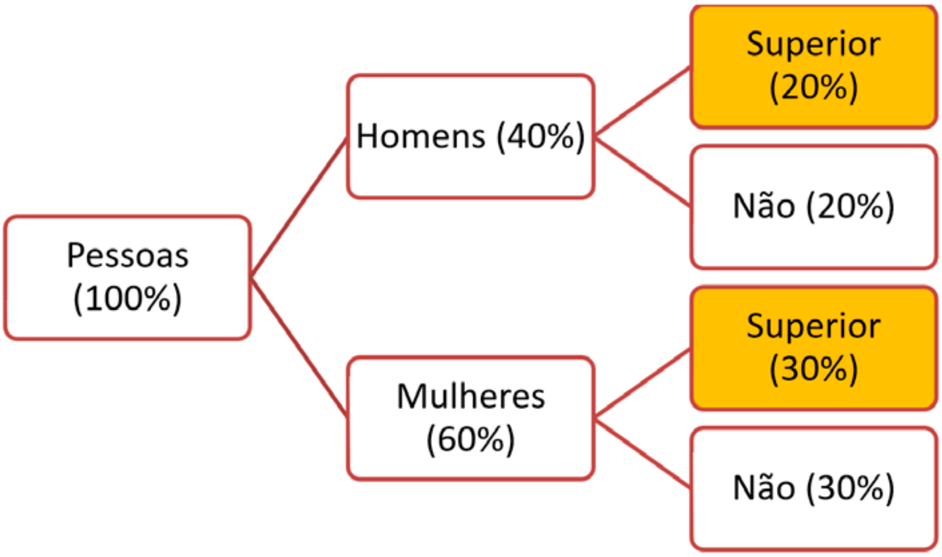
a) 2/3.
b) 3/10.
c) 5/6.
d) 3/4.
e) 4/5.

Vamos montar a árvore de probabilidades. Para isso, vamos obter as probabilidades de que uma pessoa da sala seja homem e de que ela seja mulher

$$P(H) = \frac{\#Homens}{\#total} = \frac{20}{50} = 0{,}40 = 40\%$$

$$P(M) = \frac{\#Mulheres}{\#total} = \frac{30}{50} = 0{,}60 = 60\%$$

A seguir, sabemos que metade dos homens e metade das mulheres possuem nível superior. Vamos montar a árvore de probabilidades, destacando as pessoas que possuem nível superior.



Por fim, basta utilizar a probabilidade da união.

$$P(M \cup S) = P(M) + P(S) - P(M \cap S)$$

$$P(M \cup S) = 60\% + 50\% - 30\%$$

$$P(M \cup S) = 60\% + 20\% = 80\% = \frac{4}{5}$$

Letra e.

1.6. Probabilidade Condicional

A probabilidade condicional trata da **dependência de eventos.** A definição da Probabilidade Condicional é:

Obs.: $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Como vimos no estudo de Eventos Independentes, se dois eventos são independentes, podemos escrever que a probabilidade de intersecção entre eles é igual ao produto das duas probabilidades.

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

$$\therefore P(A|B) = \frac{P(A).P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Obs.: $P(A|B) = P(A)$

Pense, por exemplo, que você seja o dono de uma empresa de informática e deseja estudar o número de tarefas concluídas com sucesso entre os seus funcionários.

Suponha que 1.000 tarefas foram disponibilizadas na sua empresa. Dessas tarefas, 900 foram concluídas com sucesso e 100 tiveram falhas. Dessa forma, a probabilidade de falha nas suas equipes é:

$$P(falha) = \frac{100}{1000} = 0{,}10 = 10\%$$

Agora, suponha que você deseja estudar a relação entre o departamento que recebeu a tarefa, quantas tarefas ele recebeu e quantas falharam. Considere que os três departamentos sejam: biscoito, macarrão e farinha.

Departamento	Número de Tarefas	Número de Falhas
Biscoito	800	50
Macarrão	150	30
Farinha	50	20
Total	1000	100

Tabela 3: Número de Falhas e Tarefas por Departamento

Podemos, agora, calcular algumas probabilidades. A primeira de grande interesse é a probabilidade de falha na empresa inteira, que corresponde à razão entre o total de falhas e o total de tarefas.

$$P(Falha) = \frac{\#Falha}{\#Total} = \frac{100}{1000} = 10\%$$

Podemos calcular algumas probabilidades condicionais. Primeiramente, queremos saber qual é a probabilidade de falha, sabendo que a tarefa foi designada ao setor de biscoitos.

$$P(Falha|Biscoito) = \frac{\#(Falha \cap Biscoito)}{\#(Biscoito)} = \frac{50}{800} = 6{,}25\%$$

Podemos também calcular a probabilidade de falha, dado que a tarefa foi designada ao setor de macarrão.

$$P(Falha|Macarrão) = \frac{\#(Falha \cap Macarrão)}{\#Macarrão} = \frac{30}{150} = 20\%$$

E, por fim, a probabilidade de falha, dado que a tarefa foi entregue ao setor de farinha.

$$P(Falha|Farinha) = \frac{\#(Falha \cap Farinha)}{\#Farinha} = \frac{20}{50} = 40\%$$

Perceba que o fato de a tarefa ter sido entregue a um departamento influencia na probabilidade de falha nessa tarefa. Sendo assim, **não são eventos independentes.**

Podemos construir a árvore de probabilidades com base nas que foram calculadas anteriormente.

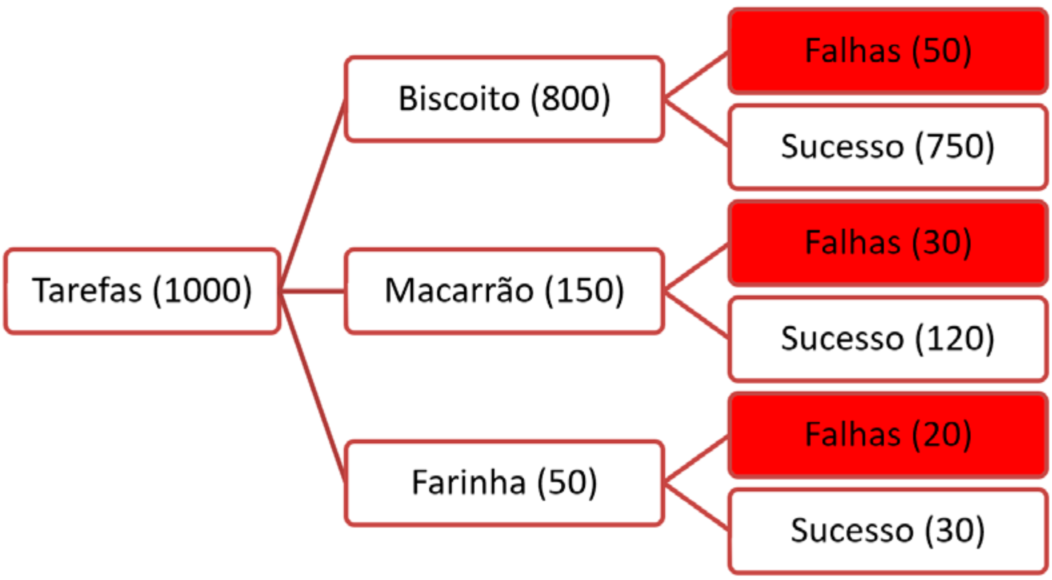


Figura 7: Árvore de Probabilidades

Na Figura 7, destacamos os projetos falhos. Outro ponto interessante que podemos querer saber é: dado que houve falha, qual a probabilidade de que ela tenha vindo do setor de biscoitos?

Observe que é uma probabilidade condicional inversa ao que calculamos anteriormente.

$$P(Biscoito|Falha) = \frac{\#(Biscoito \cap Falha)}{\#Falha} = \frac{50}{100} = 50\%$$

É interessante essa conta. Embora o percentual de falhas no setor de biscoito seja baixo (6,25%), a maior parte das falhas (50%) vem desse setor.

A explicação para isso é que o número de tarefas no setor de biscoitos é muito maior, correspondendo a 80% do total de tarefas.

É por isso que, se o dono da empresa quiser atuar para reduzir o número de falhas, deve dar uma atenção especial ao setor de biscoitos. Embora ele seja o que tenha o menor percentual de falhas, a maior parte das falhas vêm desse setor.

Podemos calcular também as outras probabilidades condicionais. Sabendo que ocorreu uma falha, qual a probabilidade de que a tarefa tenha sido designada ao setor de macarrão? E ao setor de farinha?

$$P(Macarrão|Falha) = \frac{\#(Falha \cap Macarrão)}{\#Falha} = \frac{30}{100} = 30\%$$

$$P(Farinha|Falha) = \frac{\#(Falha \cap Farinha)}{\#Falha} = \frac{20}{100} = 20\%$$

1.6.1. Teorema de Bayes

O Teorema de Bayes é uma forma de calcular as probabilidades condicionais quando todos os dados forem fornecidos na forma de percentuais, e não de valores absolutos, como mostrado na Tabela 3.

Suponha que os diversos valores da Tabela 3 tivessem sido fornecidos em percentuais.

Departamento	Percentual de Tarefas	Índice de Falhas
Biscoito	80%	6,25%
Macarrão	15%	20%
Farinha	5%	40%
Total	100%	?

Tabela 4: Número de Falhas e Tarefas por Departamento em Percentual

Observe que, na Tabela 4, foram fornecidos dados equivalentes aos dados da Tabela 3. Além disso, note que foram fornecidas nas tabelas os índices de falha por departamento. Esses índices correspondem às probabilidades condicionais: a probabilidade de falha, sabendo que a tarefa é do setor de biscoito, na primeira linha; na segunda linha, a probabilidade de falha, dado que o setor da tarefa é o de biscoitos; na terceira linha, a probabilidade de falha, dado que o setor da tarefa é o de farinha.

O primeiro ponto que precisamos saber é como calcular o total de falhas em toda a empresa. Para isso, podemos montar a árvore de probabilidades.

$$P(Falhas \cap Biscoitos) = P(Biscoito).P(Falhas|Biscoito) = 0{,}80.0{,}0625 = 0{,}05 = 5\%$$

$$P(Falhas \cap Macarrão) = P(Macarrão).P(Falhas|Macarrão) = 0{,}15.0{,}20 = 0{,}03 = 3\%$$

$$P(Falhas \cap Farinha) = P(Farinha).P(Falhas|Farinha) = 0{,}05.0{,}40 = 0{,}02 = 2\%$$

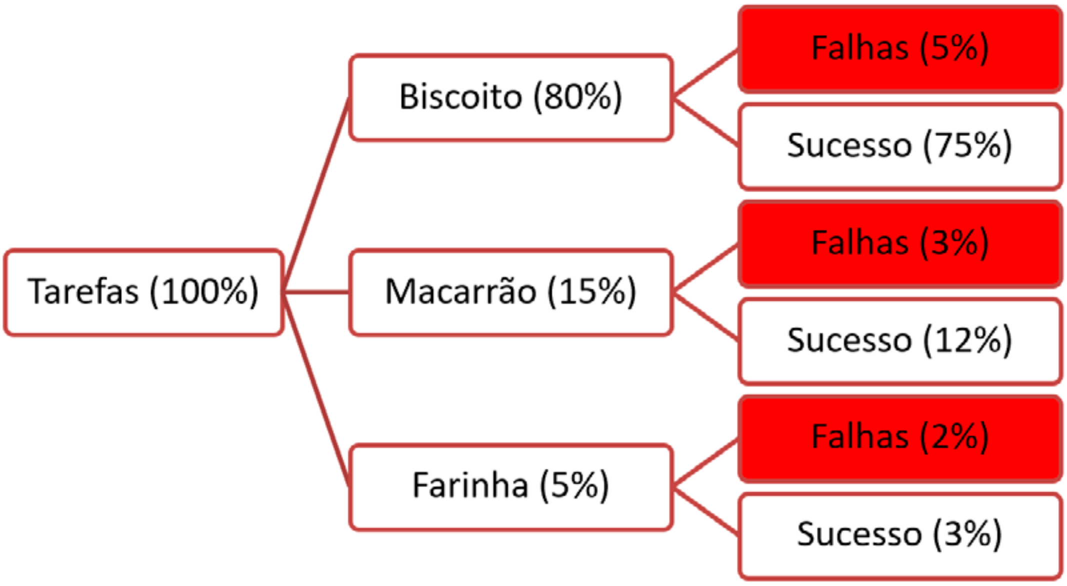


Figura 8: Árvore de Probabilidades em Percentuais

Podemos calcular as probabilidades condicionais inversas. Assim, dado que uma falha ocorreu:

- Qual a probabilidade de que ela tenha vindo do setor de biscoitos?

$$P(Biscoito|Falha) = \frac{\#(Biscoito \cap Falha)}{\#Falha} = \frac{50}{100} = 50\%$$

- Qual a probabilidade de que ela tenha vindo do setor de macarrão?

$$P(Macarrão|Falha) = \frac{\#(Falha \cap Macarrão)}{\#Falha} = \frac{30}{100} = 30\%$$

- Qual a probabilidade de que ela tenha vindo do setor de farinha?

$$P(Farinha|Falha) = \frac{\#(Falha \cap Farinha)}{\#Falha} = \frac{20}{100} = 20\%$$

Poderíamos, também, fazer essas contas sem usar a árvore de probabilidades. Para isso, poderíamos utilizar o seguinte teorema:

Obs.: **Teorema:** a probabilidade de um evento A qualquer submetido a várias condições C_1, C_2, ..., C_n, todas mutuamente excludentes entre si, é igual ao somatório de todas as probabilidades das condicionantes $P(C_1)$, $P(C_2)$, ..., $P(C_n)$ pelas respectivas probabilidades condicionais $P(A|C_1)$, $P(A|C_2)$, ..., $P(A|C_n)$.

Em linguagem matemática, podemos escrever:

Obs.: $P(A) = P(C_1).P(A|C_1) + P(C_2).P(A|C_2) + \cdots + P(C_n).P(A|C_n)$

Vamos aplicar essa expressão para calcular a probabilidade de falha.

$$P(Falha) = 0{,}80.0{,}0625 + 0{,}15.0{,}20 + 0{,}05.0{,}40$$

$$P(Falha) = 0{,}05 + 0{,}03 + 0{,}02 = 0{,}10 = 10\%$$

Podemos também calcular as condicionantes inversas. Para isso, utilizamos o Teorema de Bayes.

Obs.: **Teorema de Bayes:** considere um evento A, submetido a diversas condições C_1, C_2, ..., C_n, todas mutuamente excludentes entre si. Sabendo que o evento A aconteceu, a probabilidade

$$P(C_i|A) = \frac{P(C_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(C_i \cap A)}{P(C_1).P(A|C_1) + \cdots + P(C_n).P(A|C_n)}$$

Essa expressão é bem complicada, eu sei. Porém, você não precisa decorá-la. O mais simples que você pode fazer é utilizar a árvore de probabilidades mostrada na Figura 8. O Teorema de Bayes já está implícito nesse diagrama.

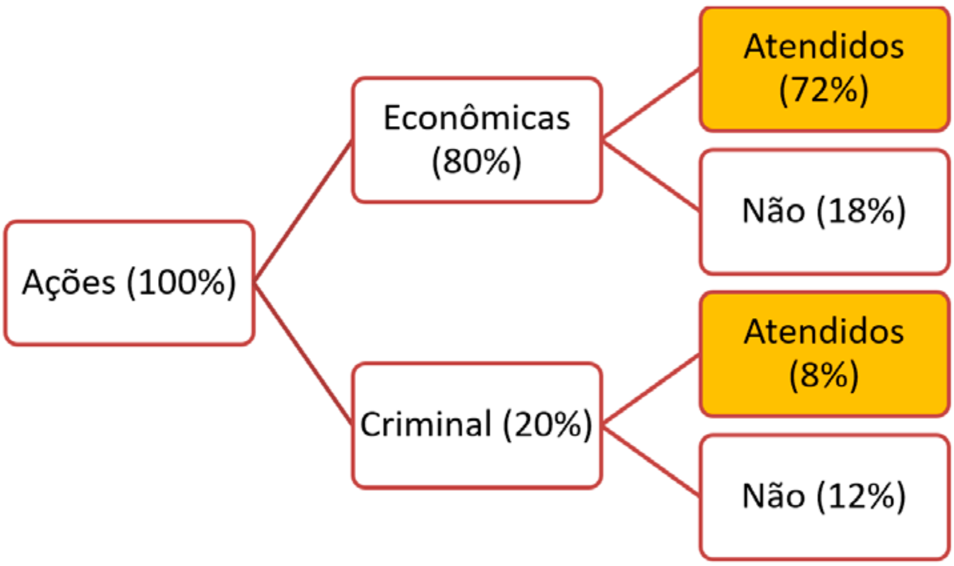
Direto do Concurso

008. (FGV/2019/DPE-RJ/TÉCNICO SUPERIOR ESPECIALIZADO/ESTATÍSTICA) A abrangência do atendimento da Defensoria Pública depende da condição econômica do cidadão e também do tipo de causa envolvida. Sabe-se que 80% das demandas surgem em função da hipossuficiência econômica, e os outros 20% devem-se a causas no âmbito criminal. Entre aqueles que não dispõem de recursos, 90% têm suas necessidades atendidas, enquanto entre os envolvidos em ações criminais, só 40% são beneficiados com a gratuidade.
Suponha que um indivíduo do cadastro dos que procuram a Defensoria seja sorteado ao acaso, verificando-se tratar-se de alguém atendido gratuitamente.
Então, a probabilidade de que o sorteado seja um dos que procuraram a Defensoria por causa de questões criminais é igual a:
a) 1/10;
b) 2/10;
c) 6/10;
d) 7/10;
e) 9/10.

Vamos montar a árvore de probabilidades sobre os pedidos de gratuidade. Note que 80% dos pedidos têm razões econômicas, dos quais 90% são atendidos. Logo, o percentual de causas econômicas atendidas é, em relação ao total:

$$P(E \cap A) = 0{,}80.0{,}90 = 0{,}72 = 72\%$$

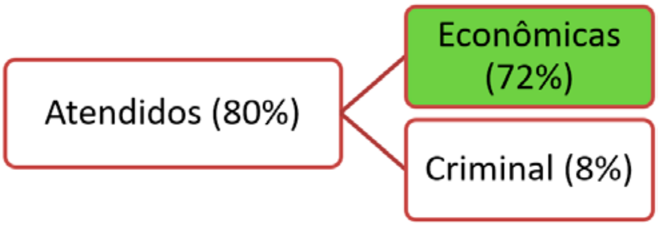
$$P(C \cap A) = 0{,}20.0{,}40 = 0{,}08 = 8\%$$



Dessa forma, 80% dos pedidos são atendidos. Esse percentual foi obtido somando-se os 72% de ações econômicas atendidas e 8% de ações criminais atendidas. Queremos saber qual a probabilidade de que ele tenha sido de origem criminal.

$$P(Criminal|Atendido) = \frac{P(Criminal \cap Atendido)}{P(Atendido)} = \frac{0{,}08}{0{,}80} = 0{,}10 = 10\%$$

Podemos também visualizar essa probabilidade pelo seguinte diagrama.



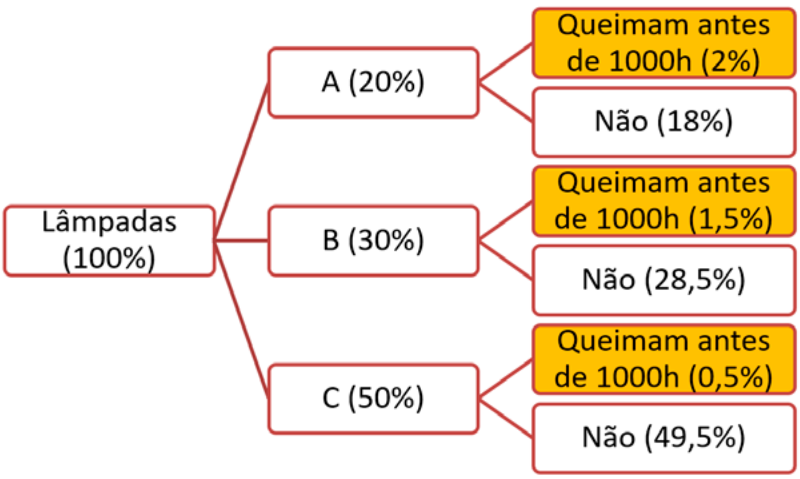
Letra a.

---

009. (FGV/2018/AL-RO/ANALISTA LEGISLATIVO/ESTATÍSTICA) 10% das lâmpadas fabricadas pela empresa A queimam antes de 1000h de funcionamento. Das fabricadas pela empresa B, 5% queima antes de 1000h de funcionamento. Das fabricadas pela empresa C, 1% queima antes de 1000h de funcionamento. Em uma grande loja de varejo, 20% das lâmpadas em estoque são da marca A, 30% são da marca B e 50% são da marca C.
Uma lâmpada é escolhida ao acaso do estoque dessa loja. A probabilidade de que ela não queime antes de 1000h de funcionamento é igual a:

a) 0,76.
b) 0,84.
c) 0,92.
d) 0,96.
e) 0,98.

Vamos montar a árvore de probabilidades.



Dessa forma, pelo Teorema de Bayes, podemos calcular a probabilidade de que a lâmpada queime antes de 1.000h.

$$P(Queima) = 0{,}20.0{,}10 + 0{,}30.0{,}05 + 0{,}50.0{,}01$$

$$P(Queima) = 0{,}02 + 0{,}015 + 0{,}005 = 0{,}04$$

Por fim, a probabilidade de que a lâmpada não queime é a probabilidade complementar.

$$P(não\ Queima) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$$

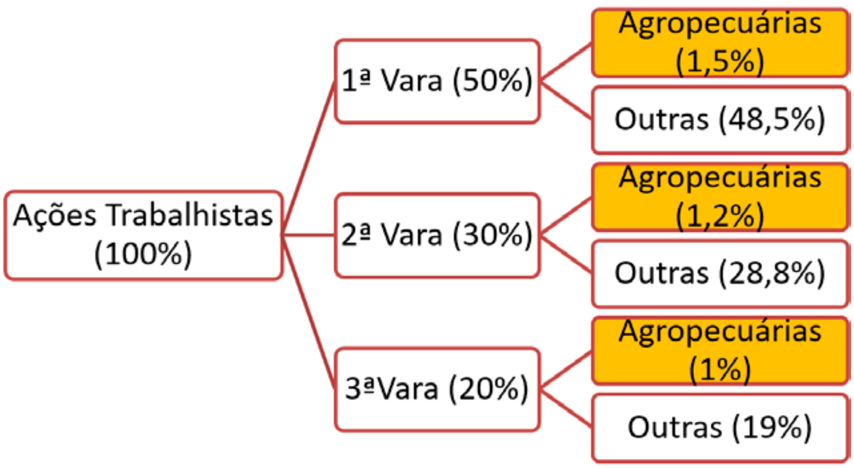
Letra d.

---

010. (FCC/2018/TRT-14ª REGIÃO/RO E AC/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Uma cidade sede do interior possui três varas trabalhistas. A 1ª Vara comporta 50% das ações trabalhistas, a 2ª Vara comporta 30% e a 3ª Vara as 20% restantes. As porcentagens de ações trabalhistas oriundas da atividade agropecuária são 3%, 4% e 5% para a 1ª, 2ª e 3ª Varas, respectivamente. Escolhe-se uma ação trabalhista aleatoriamente e constata-se ser originária da atividade agropecuária. A probabilidade dessa ação ser da 1ª Vara trabalhista é, aproximadamente:

a) 0,5312.
b) 0,3332.
c) 0,1241.
d) 0,4909.
e) 0,4054.

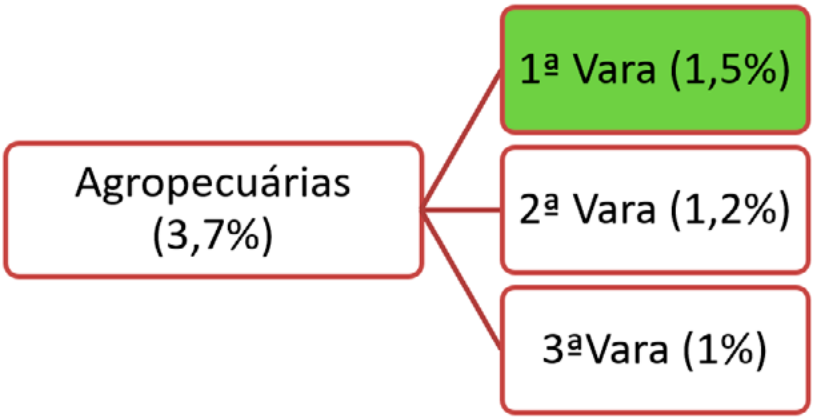
Vamos montar a árvore de probabilidades das ações trabalhistas considerando as que vieram da atividade agropecuária.



Com base nesse diagrama, podemos calcular a probabilidade de uma ação trabalhista qualquer ser da agropecuária.

$$P(Agropecuárias) = 0{,}50.0{,}03 + 0{,}30.0{,}04 + 0{,}20.0{,}05 = 0{,}015 + 0{,}012 + 0{,}01 = 0{,}037$$

Por fim, já sabemos que a ação trabalhista foi oriunda da agropecuária. Podemos, então, calcular a probabilidade de que ela seja oriunda da 1ª Vara. Portanto, queremos a probabilidade condicional, que podemos encontrar pelo seguinte diagrama:



Pelo Teorema de Bayes, basta efetuar a divisão.

$$P(1^a\ Vara\ |Agropecuária) = \frac{P(1^a\ Vara \cap Agropecuária)}{P(Agropecuária)} = \frac{0{,}015}{0{,}037} \cong 0{,}4054$$

Letra e.

---

011. (FCC/2018/TRT-14ª REGIÃO/RO E AC/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Uma turma julgadora da segunda instância tem 400 processos para serem julgados agravos ou embargos, sendo que 140 são processos iniciados na 1ª Vara do tribunal, 200 são processos iniciados na 2ª Vara para julgamento de agravo e 30 são processos iniciados na 1ª Vara para julgamento de embargos.

Ao selecionar aleatoriamente um processo, e sabendo-se que foi iniciado na 1ª Vara, a probabilidade do processo se referir a um julgamento de agravo é

a) 11/14.
b) 11/40.
c) 10/13.
d) 5/14.
e) 1/2.

Segundo o enunciado, 140 processos foram iniciados na 1ª Vara, dos quais 30 são embargos. Portanto, 110 processos da 1ª Vara são agravos.

	1ª Vara	2ª Vara
Agravos	110	200
Embargos	30	

Agora, vamos utilizar a definição de probabilidade condicional para calcular a probabilidade de que o processo seja um agravo, sabendo que ele tenha sido iniciado na 1ª Vara.

$$P(Agravo|1^{a}\,Vara) = \frac{P(Agravo \cap \ 1^{a}\,Vara)}{P(1^{a}\,Vara)} = \frac{110}{140} = \frac{11}{14}$$

Obs.: Poderíamos ter calculado o número de embargos na 2ª Vara. Para isso, basta notar que o total de processos foi fornecido no enunciado e é igual a 400. Até o momento, já temos 340 (110 + 200 + 30 = 340) processo alocados. Portanto, os demais 60 processos são embargos na 2ª Vara.

	1ª Vara	2ª Vara
Agravos	110	200
Embargos	30	60

Porém, essa conta era desnecessária para responder ao que foi pedido pelo enunciado.

Letra a.

RESUMO

Palavras-Chaves

OU	E	NÃO
União	**Intersecção**	**Complementar**

Axiomas de Kolgomorov

Primeiro Axioma: a probabilidade de um evento qualquer é um número real não negativo:

$$P(A) \geq 0$$

Segundo Axioma: a probabilidade de todo o espaço amostral é igual a 1:

$$P(\Omega) = 1$$

Terceiro Axioma: para eventos disjuntos, a probabilidade da união é a soma das probabilidades:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \text{ quando } A \cap B = \phi$$

Classificações Especiais

Eventos Independentes: a probabilidade da intersecção é igual ao produto das probabilidades

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Eventos Mutuamente Exclusivos: a probabilidade de intersecção é nula

$$P(A \cap B) = 0$$

Eventos Complementares: a soma das probabilidades é igual a 1

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

Em muitas questões, podemos calcular com mais facilidade a probabilidade do evento complementar.

Probabilidade da União de Dois Conjuntos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidade da União de Três Conjuntos:

$$P(A \cup B \cup C) = Soma\ das\ Probabilidades\ Um\ a\ Um$$

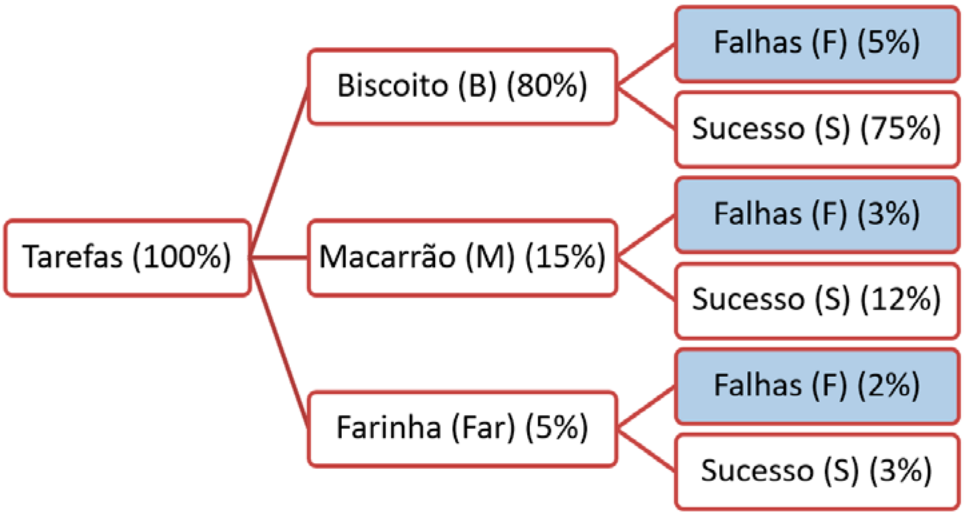
$$-Probabilidades\ Dois\ a\ Dois + Probabilidade\ Três\ a\ Três$$

Probabilidade Condicional:

Palavras-chaves: dado que, sabendo que **definição** é a razão da probabilidade da intersecção pela probabilidade do condicionante.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Árvore de Probabilidades: lembre-se sempre de montá-la.



Probabilidade Total: é a soma dos produtos das probabilidades condicionais pela probabilidade do condicionante.

$$P(F) = P(F|B).P(B) + P(F|M).P(M) + P(F|Farinha).P(Farinha) \ldots$$

QUESTÕES COMENTADAS EM AULA

001. (FGV/IBGE/2016/TECNOLOGIA/ESTATÍSTICO) A teoria das probabilidades está apoiada em um conjunto de três axiomas, atribuídos a Kolmogorov. Sendo S o espaço amostral, A e B dois eventos, Ø do vazio e P(.) a medida de probabilidade, os axiomas estabelecem que:
a) $P(S) = 1$, $P(A) \geq 0$ e $P(A \cap B) = P(A).P(B)$;
b) $P(Ø) = 0$, $P(A) \leq 1$ e $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
c) $P(A) \geq 0$; $P(A) = 1 - P(AC)$ e $P(S) = 1$, AC = Complementar de A;
d) $P(A) \geq 0$; $P(S) = 1$ e $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ com $A \cap B = Ø$;
e) $P(A) \leq 1$; $P(S) = 1$ e $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

002. (CESPE/MINISTÉRIO DA ECONOMIA/2020/TECNOLOGIA DE INFORMAÇÃO/SEGURANÇA DA INFORMAÇÃO E PROTEÇÃO DE DADOS) O setor de gestão de pessoas de determinada empresa realiza regularmente a análise de pedidos de férias e de licenças dos seus funcionários. Os pedidos são feitos em processos, em que o funcionário solicita apenas férias, apenas licença ou ambos (férias e licença). Em determinado dia, 30 processos foram analisados, nos quais constavam 15 pedidos de férias e 23 pedidos de licenças.
Com base nessa situação hipotética, julgue o item que se seguem.
Se todos os processos foram analisados individualmente nesse dia, então a probabilidade de um processo específico ter sido o primeiro a ser analisado é superior a 1/10.

003. (FCC/2017/ARTESP/ESPECIALISTA EM REGULAÇÃO DE TRANSPORTE/ADMINISTRAÇÃO DE EMPRESAS) Em um trecho de pedágio de uma rodovia no interior do Estado passam, pelas cabines, um total de 2.300 carretas de dois e três eixos, onde 1.725 são carretas de dois eixos. A probabilidade de passar uma carreta de três eixos pelas cabines é de
a) 30%.
b) 20%.
c) 33%.
d) 15%.
e) 25%.

004. (CESPE/BNB/2018/ANALISTA DE SISTEMA) Um tabuleiro quadrado e quadriculado, semelhante a um tabuleiro de xadrez, com 12 linhas e 12 colunas, e, portanto, com 12 × 12 = 144 quadradinhos pintados: 54, na cor azul; 30, na cor marrom; 40, na cor amarela; e 20, na cor verde. A cada quadradinho é associado um cartão com dois números, que indicam a posição do quadradinho no tabuleiro; o primeiro número corresponde ao número da linha, e o segundo corresponde ao número da coluna. Por exemplo, o cartão com os números 5,10 corresponde ao quadradinho posicionado na linha 5 e na coluna 10. Esses cartões estão em uma urna, da qual podem ser retirados aleatoriamente.

A respeito desse tabuleiro e desses cartões, julgue o item a seguir. A probabilidade de retirar dessa caixa, de maneira aleatória, um cartão correspondente a um quadrado pintado na cor azul é superior a 1/3.

005. (CESPE/BNB/2018/ANALISTA DE SISTEMA) Um tabuleiro quadrado e quadriculado, semelhante a um tabuleiro de xadrez, com 12 linhas e 12 colunas, e, portanto, com 12 × 12 = 144 quadradinhos pintados: 54, na cor azul; 30, na cor marrom; 40, na cor amarela; e 20, na cor verde. A cada quadradinho é associado um cartão com dois números, que indicam a posição do quadradinho no tabuleiro; o primeiro número corresponde ao número da linha, e o segundo corresponde ao número da coluna. Por exemplo, o cartão com os números 5,10 corresponde ao quadradinho posicionado na linha 5 e na coluna 10. Esses cartões estão em uma urna, da qual podem ser retirados aleatoriamente.
A probabilidade de retirar dessa caixa, de maneira aleatória, um cartão correspondente a um quadrado que não tenha sido pintado na cor marrom é inferior a 0,72.

006. (FGV/TJ-BA/2015/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICO) Na teoria das probabilidades, os conceitos de eventos independentes e eventos mutuamente exclusivos, apesar de distintos, guardam entre si uma estreita relação. Quando dois eventos são independentes:
a) são também mutuamente exclusivos;
b) não podem ser mutuamente exclusivos;
c) podem não ser mutuamente exclusivos, mas sua interseção deve ter probabilidade nula de ocorrência;
d) serão também mutuamente exclusivos se as probabilidades condicionais, de cada um dado o outro, forem idênticas;
e) os complementares devem ser mutuamente exclusivos.

007. (FCC/2019/SEFAZ-BA/AUDITOR-FISCAL/ADMINISTRAÇÃO TRIBUTÁRIA/PROVA II), Uma sala contém 20 homens e 30 mulheres em que todos são funcionários de uma empresa. Verifica-se que metade desses homens e metade dessas mulheres possuem nível superior. Escolhendo aleatoriamente uma pessoa dessa sala para realizar uma tarefa, a probabilidade de ela ser mulher ou possuir nível superior é igual a:
a) 2/3.
b) 3/10.
c) 5/6.
d) 3/4.
e) 4/5.

008. (FGV/2019/DPE-RJ/TÉCNICO SUPERIOR ESPECIALIZADO/ESTATÍSTICA) A abrangência do atendimento da Defensoria Pública depende da condição econômica do cidadão e também do tipo de causa envolvida. Sabe-se que 80% das demandas surgem em função da hipossuficiência econômica, e os outros 20% devem-se a causas no âmbito criminal. Entre aqueles que não dispõem de recursos, 90% têm suas necessidades atendidas, enquanto entre os envolvidos em ações criminais, só 40% são beneficiados com a gratuidade.

Suponha que um indivíduo do cadastro dos que procuram a Defensoria seja sorteado ao acaso, verificando-se tratar-se de alguém atendido gratuitamente.

Então, a probabilidade de que o sorteado seja um dos que procuraram a Defensoria por causa de questões criminais é igual a:

a) 1/10;
b) 2/10;
c) 6/10;
d) 7/10;
e) 9/10.

009. (FGV/2018/AL-RO/ANALISTA LEGISLATIVO/ESTATÍSTICA) 10% das lâmpadas fabricadas pela empresa A queimam antes de 1000h de funcionamento. Das fabricadas pela empresa B, 5% queima antes de 1000h de funcionamento. Das fabricadas pela empresa C, 1% queima antes de 1000h de funcionamento. Em uma grande loja de varejo, 20% das lâmpadas em estoque são da marca A, 30% são da marca B e 50% são da marca C.

Uma lâmpada é escolhida ao acaso do estoque dessa loja. A probabilidade de que ela não queime antes de 1000h de funcionamento é igual a:

a) 0,76.
b) 0,84.
c) 0,92.
d) 0,96.
e) 0,98.

010. (FCC/2018/TRT-14ª REGIÃO/RO E AC/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Uma cidade sede do interior possui três varas trabalhistas. A 1ª Vara comporta 50% das ações trabalhistas, a 2ª Vara comporta 30% e a 3ª Vara as 20% restantes. As porcentagens de ações trabalhistas oriundas da atividade agropecuária são 3%, 4% e 5% para a 1ª, 2ª e 3ª Varas, respectivamente. Escolhe-se uma ação trabalhista aleatoriamente e constata-se ser originária da atividade agropecuária. A probabilidade dessa ação ser da 1ª Vara trabalhista é, aproximadamente:

a) 0,5312.
b) 0,3332.
c) 0,1241.
d) 0,4909.
e) 0,4054.

011. (FCC/2018/TRT-14ª REGIÃO/RO E AC/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Uma turma julgadora da segunda instância tem 400 processos para serem julgados agravos ou embargos, sendo que 140 são processos iniciados na 1ª Vara do tribunal, 200 são processos iniciados na 2ª Vara para julgamento de agravo e 30 são processos iniciados na 1ª Vara para julgamento de embargos.

Ao selecionar aleatoriamente um processo, e sabendo-se que foi iniciado na 1ª Vara, a probabilidade do processo se referir a um julgamento de agravo é

a) 11/14.

b) 11/40.

c) 10/13.

d) 5/14.

e) 1/2.

QUESTÕES DE CONCURSO

012. (CESPE/BNB/2018/ANALISTA DE SISTEMA) Um tabuleiro quadrado e quadriculado, semelhante a um tabuleiro de xadrez, com 12 linhas e 12 colunas, e, portanto, com 12 × 12 = 144 quadradinhos pintados: 54, na cor azul; 30, na cor marrom; 40, na cor amarela; e 20, na cor verde. A cada quadradinho é associado um cartão com dois números, que indicam a posição do quadradinho no tabuleiro; o primeiro número corresponde ao número da linha, e o segundo corresponde ao número da coluna. Por exemplo, o cartão com os números 5,10 corresponde ao quadradinho posicionado na linha 5 e na coluna 10. Esses cartões estão em uma urna, da qual podem ser retirados aleatoriamente.
A probabilidade de retirar dessa caixa, de maneira aleatória, um cartão correspondente a um quadrado pintado na cor amarela ou na cor verde é superior a 0,44.

Quando o enunciado fala em quadrado pintado "na cor amarela **OU** na cor verde", o termo **OU** é um indicativo da união entre dois conjuntos: o conjunto dos quadrados pintados na cor amarela (A) e o conjunto dos quadrados pintados na cor verde (V).
Como são 40 quadradinhos na cor amarela e 20 na cor verde, não há a probabilidade de haver uma intersecção, ou seja, é impossível que um quadradinho seja simultaneamente das duas cores. Portanto, o número de elementos da união é:

$$\#(A \cup E) = \#A + \#E - \#(A \cap E)$$

$$\#(A \cup E) = 40 + 20 - 0 = 60$$

Como o total de quadrados existentes no tabuleiro é igual a 144, podemos escrever pela definição clássica de probabilidade:

$$P = \frac{\#favoráveis}{\#totais} = \frac{60}{144} \cong 0{,}41 < 0{,}44$$

Logo, a probabilidade desejada é inferior a 0,44.
Errado.

Enunciado referente às questões 13 e 14.

(CESPE/PREFEITURA DE SÃO CRISTÓVÃO-SE/2019/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) A sorte de ganhar ou perder, num jogo de azar, não depende da habilidade do jogador, mas exclusivamente das probabilidades dos resultados. Um dos jogos mais populares no Brasil é a Mega Sena, que funciona da seguinte forma: de 60 bolas, numeradas de 1 a 60, dentro de um globo, são sorteadas seis bolas. À medida que uma bola é retirada, ela não volta para dentro do globo. O jogador pode

apostar de 6 a 15 números distintos por volante e receberá o prêmio se acertar os seis números sorteados. Também são premiados os acertadores de 5 números ou de 4 números.
A partir dessas informações, julgue o item que se segue.

013. (CESPE/PREFEITURA DE SÃO CRISTÓVÃO-SE/2019/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) A probabilidade de a primeira bola sorteada ser um número múltiplo de 8 é de 10%.

Vamos contar quantos números são múltiplos de 8 entre 1 e 6:

$$B = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56\}$$

Agora, vamos utilizar o conceito clássico de probabilidade para obter a probabilidade de sortear uma bola com número múltiplo de 8.

$$P = \frac{\#favoráveis}{\#totais} = \frac{7}{60} \cong 0{,}117 \cong 11{,}7\%$$

Se você já estudou progressão aritmética, a forma mais simples de calcular o número de pessoas na fila é com o uso da fórmula da progressão aritmética.

$$60 > 8 + (n - 1).8$$

$$60 > 8n$$

$$\therefore n < \frac{60}{8} = 7{,}5$$

Dessa forma, são apenas 7 números possíveis.
Errado.

---

014. (CESPE/PREFEITURA DE SÃO CRISTÓVÃO-SE/2019/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) A cada número sorteado, a probabilidade de determinado número dos restantes ser sorteado aumenta.

A cada sorteio, uma bola é retirada. Dessa forma, o número total de bolas diminui. Por exemplo, no primeiro sorteio, a chance de uma bola qualquer ser retirada é 1/60. No segundo sorteio, essa probabilidade já aumenta para 1/59. No terceiro sorteio, passa a ser 1/58.
Certo.

---

015. (CESPE/PGE-PE/2019/ANALISTA ADMINISTRATIVO DE PROCURADORIA/CALCULISTA) A União tem, hoje, 138 estatais sob sua gestão, entre elas o Banco do Brasil S.A., a PETROBRAS e a CAIXA. Dessas 138, somente três devem permanecer sob a gestão da União; as demais serão privatizadas.

Considerando essa afirmação, julgue o próximo item.

Supondo-se que a PETROBRAS e o Banco do Brasil S.A. sejam estatais já escolhidas para permanecerem sob a gestão da União, se a terceira estatal for escolhida ao acaso, a chance de a CAIXA ser privatizada será superior a 99%.

Observe que a Petrobras e o Banco do Brasil já ocuparam duas das vagas entre as estatais que devem permanecer sob o comando da União.

As demais 136 estatais disputam a última vaga. Uma delas é a Caixa. A probabilidade de a Caixa permanecer sob o comando da União é:

$$\bar{P} = \frac{1}{136} \cong 0{,}00735 = 0{,}735\%$$

Portanto, a probabilidade de a Caixa ser privatizada é o complementar dessa probabilidade calculada logo acima.

$$P = 1 - \bar{P} = 100\% - 0{,}735\% = 99{,}265\% > 99\%$$

Certo.

016. (CESPE/POLÍCIA FEDERAL/2018/AGENTE DA POLÍCIA FEDERAL) Em um aeroporto, 30 passageiros que desembarcaram de determinado voo e que estiveram nos países A, B ou C, nos quais ocorre uma epidemia infecciosa, foram selecionados para ser examinados. Constatou-se que exatamente 25 dos passageiros selecionados estiveram em A ou em B, nenhum desses 25 passageiros esteve em C e 6 desses 25 passageiros estiveram em A e em B.

Com referência a essa situação hipotética, julgue o item que segue.

Se 2 dos 30 passageiros selecionados forem escolhidos ao acaso, então a probabilidade de esses 2 passageiros terem estado em 2 desses países é inferior a **1/30**.

Como mostrado anteriormente, não é possível que um passageiro tenha visitado A e C nem B e C ao mesmo tempo. Portanto, os únicos passageiros que visitaram dois países foram os 6 passageiros que visitaram A e B.

Logo, ao selecionar dois passageiros, eles devem ser escolhidos entre os 6 passageiros que visitaram A e B. O número de formas favoráveis de escolher é:

$$\#favoráveis = 6.5 = 30$$

Nesse cálculo, usamos o princípio fundamental da contagem. O primeiro passageiro pode ser qualquer um dos 6. O segundo passageiro pode ser qualquer um, exceto o que já foi escolhido – são 5 possibilidades.

Por outro lado, o número total de formas possíveis de escolher dois passageiros entre os 30 selecionados é:

$$\#totais = 30.29$$

Por fim, a probabilidade pode ser calculada pela definição clássica.

$$P = \frac{\#favoráveis}{\#totais} = \frac{30}{30.29} = \frac{1}{29} > \frac{1}{30}$$

Observe que 1/29 é inferior a 1/30, porque, quanto maior o denominador, menor a fração.

Errado.

---

017. (CESPE/TJ-PA/2020/ANALISTA JUDICIÁRIO/ANÁLISE DE SISTEMAS) Em um sistema informatizado, as senhas são formadas por três letras distintas, em uma ordem específica. Esse sistema bloqueia a conta do usuário a partir da quinta tentativa errada de inserção da senha. Abel fez seu cadastro no sistema, mas, após certo tempo sem utilizá-lo, esqueceu-se da senha, lembrando-se apenas de que ela era formada com as letras do seu nome, sem repetição. Nessa situação hipotética, a probabilidade de Abel, inserindo senhas com base apenas nas informações de que ele se lembra, conseguir acessar a sua conta sem bloqueá-la é igual a:

a) 3/192.
b) 3/72.
c) 3/24.
d) 3/18.
e) 3/4.

Como o nome Abel tem 4 letras e a senha deve ter 3 letras distintas, temos 4 opções para a primeira letra, 3 opções para a segunda (já que não podemos repetir) e 2 opções para a terceira letra.

4	x	3	X	3	=24
1ª Letra		**2ª Letra**		**3ª Letra**	**Total**

Abel pode realizar 4 tentativas antes de bloquear a senha. Assim, concluímos que a probabilidade de ele acertar a sua senha é:

$$P = \frac{\#favoráveis}{\#totais} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} = \frac{3}{18}$$

Letra d.

---

018. (CESPE/POLÍCIA FEDERAL/2018/PAPILOSCOPISTA) O resultado de uma pesquisa acerca da satisfação de 200 papiloscopistas, no que diz respeito às tarefas por eles executadas de identificação de vítimas e de descobertas de crimes de falsificação, foi o seguinte:

- 30 papiloscopistas sentem-se igualmente satisfeitos ao executar qualquer uma dessas tarefas;
- 180 papiloscopistas sentem-se satisfeitos ao executar pelo menos uma dessas tarefas.

Considerando que todos os 200 papiloscopistas responderam à pesquisa, julgue o item seguinte.
A probabilidade de que um papiloscopista, escolhido ao acaso, tenha se dito igualmente satisfeito ao executar qualquer uma entre as duas tarefas mencionadas, dado que se sente satisfeito ao executar pelo menos uma das duas tarefas, é inferior a 0,15.

A probabilidade condicional pode ser obtida como a razão entre a probabilidade da intersecção dividida pela probabilidade total.
Note que o conjunto das pessoas igualmente satisfeitas ao executar qualquer uma das tarefas é um subconjunto das pessoas que se sentem satisfeitas ao executar pelo menos uma.
Dessa forma, o número de elementos da intersecção é exatamente igual a 30.

$$P = \frac{P(intersecção)}{P\ (total)} = \frac{30}{180} = 0{,}167 > 0{,}15$$

Errado.

019. (CESPE/POLÍCIA FEDERAL/2018/PAPILOSCOPISTA) Julgue o próximo item, acerca da seguinte proposição:
P: “A nomeação do novo servidor público ocorre para reposição de vacância em área essencial, ou o candidato aprovado não será nomeado”.
Escolhendo aleatoriamente uma linha da tabela verdade da proposição P, a probabilidade de que todos os valores dessa linha sejam F é superior a **1/3**.

Vamos destacar a quantidade de proposições atômicas que constituem a proposição composta P.
“A nomeação do novo servidor público ocorre para reposição de vacância em área essencial¹, OU o candidato aprovado não será nomeado²”
Dessa forma, como são duas proposições atômicas, o número de linhas da tabela-verdade é igual a $2^2 = 4$.
Somente existe uma linha da tabela-verdade em que todos os valores são iguais a F. Dessa forma, a probabilidade é igual a 1/4, que é inferior a 1/3.
Errado.

020. (CESPE/BRB/2010/ESCRITURÁRIO) A senha de um cartão de crédito possui quatro dígitos, que são algarismos entre 0 e 9, e a administradora desse cartão veda senhas em que todos os quatro algarismos sejam iguais, ou que os algarismos correspondam ao dia e mês de aniversário do titular do cartão. Por exemplo, se um indivíduo nasceu no dia 4 de março, a senha de seu cartão não pode ser 0403. É possível que diferentes cartões de crédito tenham a mesma senha.

A senha é solicitada sempre que o titular realizar algum pagamento; se o portador do cartão errar ao informar a senha por três vezes consecutivas, o cartão é bloqueado imediatamente.
Com base no texto acima, julgue os itens a seguir.
Se um indivíduo nasceu no primeiro semestre do ano, então um número de quatro dígitos, escolhido aleatoriamente, tem mais de 99,9% de chance de ser uma senha possível para ele.

Se o indivíduo nasceu no primeiro semestre, isso significa que os dois dígitos que representam seu mês de nascimento são diferentes – 01, 02, 03, 04, 05 e 06 apresentam essa característica. Trata-se de uma informação relevante.
Nesse caso, o indivíduo terá um total de 11 senhas proibidas: as 10 senhas envolvendo algarismos todos iguais 0000, 1111, ..., 9999 e seu próprio aniversário.
O total de senhas possíveis é dado pelo PFC:

$$\underline{10} \times \underline{10} \times \underline{10} \times \underline{10} \quad \underset{\textbf{Total}}{\underline{=10^4}}$$

Agora, podemos calcular a probabilidade usando o princípio da inclusão e exclusão:

$$N = 1 - \frac{11}{10^4} = 1 - 0{,}0011 = 0{,}9989 = 99{,}89\% < 99{,}9\%$$

Errado. Parte superior do formulário

---

021. (FGV/TJ-BA/2015/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Considere um jogo que consiste no lançamento de um dado, honesto, uma ou duas vezes. O objeto só será utilizado pela segunda vez se o resultado do primeiro lançamento for um número ímpar. Assim sendo, a probabilidade de que o total de pontos obtidos seja igual a seis é:

a) 1/12
b) 1/18
c) 7/12
d) 5/18
e) 1/4

A FGV sempre nos brinda com questões interessantes.
Precisamos dividir o problema em dois casos.
Se o primeiro lançamento resultar em um número par, o jogo acabará ali. Portanto, a única possibilidade de a soma dos dados ser igual a 6 é se realmente

$$P_1 = \frac{1}{6}$$

O segundo caso é se o primeiro dado for ímpar. Nesse caso, para a soma ser igual a 6, o segundo dado é determinado pelo primeiro. Se o primeiro dado for 1, o segundo terá que ser 5. Se o primeiro dado for 3, o segundo terá que ser 3 também. E, se o primeiro dado for 5, o segundo terá que ser igual a 1.

Como os lançamentos de dados são eventos independentes, podemos usar:

3/6	x	1/6	
1º Dado Ímpar		**2º Dado Conveniente**	**Total**

$$P_2 = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Sendo assim, temos duas possibilidades para acontecer o nosso evento desejado – a soma dos dados ser igual a 6: o primeiro lançamento é igual a 6 ou as combinações 1+5, 3+3 e 5+1. Como temos o operador OU, devemos somar as probabilidades.

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{2+1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Letra e.

---

022. (FCC/ALAP/2020/ANALISTA LEGISLATIVO/ECONOMIA) Em determinado setor de um órgão público foi realizado um levantamento com relação aos cargos de nível superior. A tabela abaixo apresenta a distribuição dos respectivos funcionários segundo o cargo e sexo.

Cargo	Homens	Mulheres	Total
Economista	30	20	50
Administrador	40	40	80
Contador	70	50	120
Total	140	110	250

Um funcionário é escolhido aleatoriamente neste setor para realizar uma tarefa. Seja E o evento indicando que o funcionário escolhido é economista e seja H o evento indicando que o funcionário escolhido é homem. Considerando, então, os eventos E H, a probabilidade de que pelo menos um destes dois eventos ocorra é igual a

a) 64%.
b) 76%.
c) 56%.
d) 80%.
e) 48%.

Quando a questão falou em pelo menos um dos dois eventos, ela pediu a probabilidade da união. Para isso, precisamos calcular as probabilidades dos dois eventos isolados e a probabilidade da intersecção, como mostrado a seguir:

$$P(E) = \frac{\#economistas}{\#total} = \frac{50}{250} = \frac{1}{5} = 0{,}20$$

$$P(H) = \frac{\#homens}{\#total} = \frac{140}{250} = 0{,}56$$

$$P(E \cap H) = \frac{\#homens\ economistas}{\#total} = \frac{30}{250} = 0{,}12$$

Agora, vamos utilizar a fórmula da probabilidade da união.

$$P(E \cup H) = P(E) + P(H) - P(E \cap H)$$

$$P(E \cup H) = 0{,}20 + 0{,}56 - 0{,}12 = 0{,}64 = 64\%$$

Letra a.

023. (CESPE/IFF/2018/CONHECIMENTOS GERAIS) Dos 45 alunos de uma sala de aula, apenas 10 praticam algum tipo de esporte. Se dois alunos dessa sala forem escolhidos aleatoriamente, então a probabilidade de que ambos pratiquem algum tipo de esporte será igual a:

a) 1/90.
b) 1/45.
c) 2/45.
d) 1/22.
e) 1/5.

Para o primeiro aluno, temos 10 possibilidades de escolha no total de 45. Para o segundo, teremos 9 possibilidades de escolha no total de 44, pois um já foi escolhido na primeira etapa.

$\frac{10}{45}$	x	$\frac{9}{44}$	$= \frac{10}{45} \cdot \frac{9}{44}$
1º Aluno		**2º Aluno**	**Total**

Como os dois eventos são independentes, a probabilidade de ocorrência simultânea é dada pelo produto das probabilidades.

$$P = \frac{10}{45} \cdot \frac{9}{44} = \frac{90}{45.44} = \frac{2}{44} = \frac{1}{22}$$

Letra d.

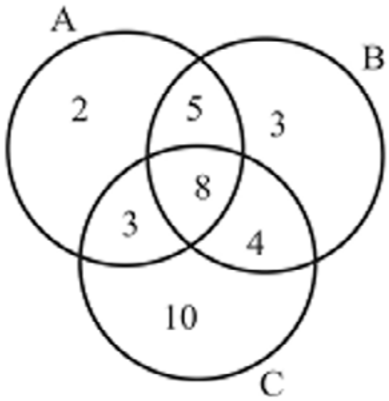
024. (CESPE/EBSERH/2018/ÁREA MÉDICA) Uma pesquisa revelou características da população de uma pequena comunidade composta apenas por casais e seus filhos. Todos os casais dessa comunidade são elementos do conjunto A∪B∪C, em que:

A = {casais com pelo menos um filho com mais de 20 anos de idade};

B = {casais com pelo menos um filho com menos de 10 anos de idade};

C = {casais com pelo menos 4 filhos}.

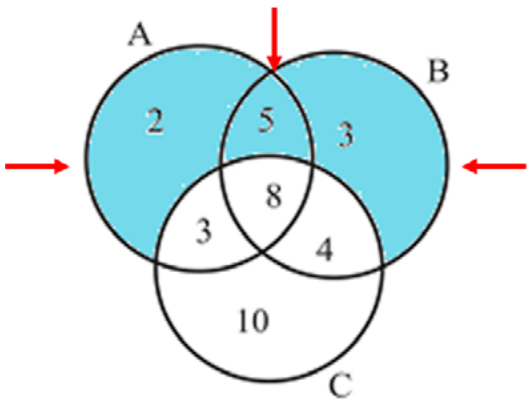
Considerando que n(P) indique a quantidade de elementos de um conjunto P, suponha que n(A) = 18; n(B) = 20; n(C) = 25; n(A∩B) = 13; n(A∩C) = 11; n(B∩C) = 12 e n(A∩B∩C) = 8. O diagrama a seguir mostra essas quantidades de elementos.



Com base nas informações e no diagrama precedentes, julgue o item a seguir.

Se um casal dessa comunidade for escolhido ao acaso, então a probabilidade de ele ter menos de 4 filhos será superior a 0,3.

Os casais que têm menos de 4 filhos são aqueles que não pertencem ao conjunto C. Para isso, basta somar o número de elementos nas regiões fora de C. Essas regiões correspondem às três regiões superiores que estão assinaladas no gráfico.



$$\#\bar{C} = 2 + 5 + 3 = 10$$

Agora, devemos calcular o número de elementos pertencentes ao conjunto universo, ou seja, à união dos três conjuntos. Para isso, basta somar o número de elementos de C com o número de elementos do seu complementar.

$$S = \#C + \#\bar{C} = 10 + 25 = 35$$

Dessa forma, a probabilidade de selecionar um casal com menos de três filhos pode ser calculada pelo conceito frequencial. São 10 casais que se enquadram nessa situação e um total de 35 casais na amostra em estudo.

$$P = \frac{\#favoráveis}{\#totais} = \frac{10}{35} \cong 0{,}285 < 0{,}3$$

Errado.

---

025. (CESPE/SEDUC-AL/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Considere que fichas numeradas de 11 a 99 sejam colocadas em uma urna e que uma delas seja retirada aleatoriamente. Nesse caso, a probabilidade de o número da ficha retirada ter o algarismo das dezenas menor que o algarismo das unidades é inferior a 35%.

Podemos separar os números de 11 a 99 em três conjuntos:

- **A:** os que possuem o algarismo das dezenas superior ao das unidades. **Ex.:** 54, 63, 92.
- **B:** os que possuem o algarismo das dezenas inferior ao das unidades. **Ex.:** 45, 36, 29.
- **C:** os que possuem o algarismo das dezenas igual ao das unidades. **Ex.:** 44, 33, 22.

Observe que os dois primeiros conjuntos possuem o mesmo número de elementos. Já o terceiro conjunto possui exatamente 9 elementos: {11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99}.
Já o total de elementos {11, 12, ..., 99} é igual a 89. Dessa forma, podemos calcular o número de elementos que pertencem ao conjunto A.

$$\#A = \frac{89 - 9}{2} = \frac{80}{2} = 40$$

Portanto, a probabilidade pode ser calculada pela razão entre o número de eventos favoráveis e o total.

$$P = \frac{\#A}{\#totais} = \frac{40}{89} \cong 0{,}45 = 45\% > 35\%$$

Errado.

---

026. (FCC/2019/SEFAZ-BA/AUDITOR-FISCAL/ADMINISTRAÇÃO, FINANÇAS E CONTROLE INTERNO/PROVA I), Um instituto de pesquisa foi contratado para realizar um censo em uma cidade com somente dois clubes (Alfa e Beta). Verificou-se que, com relação a essa cidade, o número de habitantes que são sócios de Alfa é igual a 3/4 do número de habitantes que são sócios de Beta. Sabe-se ainda que, dos habitantes desta cidade, 8% são sócios dos dois clubes e 24% não são sócios de qualquer clube. Escolhendo aleatoriamente um habitante dessa cidade, tem-se que a probabilidade de ele ser sócio somente do clube Alfa é:

a) 30%.
b) 32%.
c) 20%.
d) 28%.
e) 34%.

Vamos escrever a expressão da probabilidade da união de dois conjuntos.

$$P\ (A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Segundo o enunciado, 24% não são sócios de nenhum dos dois clubes. Portanto, 76% dos habitantes são sócios de pelo menos um dos dois, ou seja, pertence à união $A \cup B$. Além disso, 8% dos habitantes são sócios dos dois clubes e que $P(A) = \frac{3}{4}P(B)$.

$$76\% = \frac{3}{4}P(B) + P(B) - 8\%$$

Vamos calcular a probabilidade P(B).

$$76\% + 8\% = \frac{3}{4}P(B) + P(B)$$

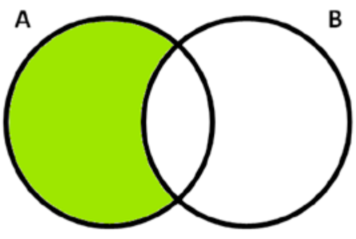
$$84\% = \frac{7}{4}P(B)$$

$$\therefore P(B) = \frac{4}{7} \cdot 84\% = 4.12\% = 48\%$$

Dessa forma, a probabilidade de a pessoa ser sócia do clube A é 3/4 da probabilidade de ser sócia do clube B.

$$P(A) = \frac{3}{4} \cdot 48\% = 36\%$$

O enunciado pediu a probabilidade da região exclusiva de A, ou seja, as pessoas que são sócias do clube A, mas não são sócias do clube B.



Como mostrado acima, essa probabilidade corresponde à diferença entre P(A) e a probabilidade da intersecção P(A∩B).

$$P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B) = 36\% - 8\% = 28\%$$

Letra d.

---

027. (CESPE/SEDUC-AL/2018/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Considere que de uma urna com 10 bolas numeradas de 1 a 10, uma pessoa deva retirar, aleatoriamente, duas bolas ao mesmo tempo. Nesse caso, a probabilidade de que seja 12 a soma dos números das bolas retiradas é superior a 9%.

Observe que, se a primeira bola retirada for 1, não há chance de se somar 12 com as duas bolas retiradas. Porém, se o primeiro número for qualquer outro, é possível somar 12 com duas bolas. Vejamos exemplos: (2, 10); (3,9); … (10,2).

Também não seria possível atingir a soma 12 caso a primeira bola retirada fosse a bola de número 6, tendo em vista que não seria possível retirar duas bolas iguais a 6.

Portanto, para o primeiro número retirado, temos 8 opções favoráveis dentre as 10 bolas possíveis – devemos excluir as bolas 1 e 6.

Já a segunda bola está automaticamente determinada pela primeira que foi retirada, pois a soma das duas é necessariamente igual a 12. Portanto, para a segunda bola, temos apenas 1 opção favorável. Como uma das bolas já foi retirada, são apenas 9 possíveis.

Agora, considerando que retirar as duas bolas são eventos independentes, temos que a probabilidade desejada é:

$\frac{8}{10}$	x	$\frac{1}{9}$	$= \frac{8}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{90} \cong 0,089 = 8,9\%$
1ª Bola		**2ª Bola**	**Total**

Portanto, a probabilidade desejada é ligeiramente inferior a 9%.

Errado.

---

028. (FCC/BANRISUL/2018) Seja P(X) a probabilidade de ocorrência de um evento X. Dados 2 eventos A e B, a probabilidade de ocorrer pelo menos um dos dois eventos é igual a 4/5 e a probabilidade de ocorrer o evento A e o evento B é igual a 1/10. Se P(A) é igual a 1/2, então P(B) é igual a

a) 1/4.

b) 2/5.

c) 3/10.

d) 1/3.
e) 1/2.

Pelos dados do enunciado, temos:

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = ?$$

$$P(E \cap H) = \frac{1}{10}$$

Agora, vamos utilizar a fórmula da probabilidade da união.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + P(B) - \frac{1}{10}$$

$$\therefore P(B) = \frac{4}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{2}$$

Podemos tirar o mínimo múltiplo comum para fazer essa soma de frações. Teremos:

$$P(B) = \frac{4}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{2} = \frac{2.4 + 1 - 5.1}{10} = \frac{8 + 1 - 5}{10} = \frac{9 - 5}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Letra b.

029. (FCC/PREFEITURA DE CAMPINAS-SP/2016) Uma máquina pode funcionar apenas quando há eletricidade na rede elétrica. Por razões técnicas da própria máquina (nada tendo a ver com o fornecimento de energia na rede), a probabilidade de que ela funcione quando acionada é de 99,9%. De acordo com a concessionária que fornece energia para a rede elétrica, a probabilidade de faltar energia na rede amanhã é de 3%. De acordo com os dados, a probabilidade dessa máquina NÃO funcionar amanhã ao ser acionada é de

a) 0,097%.
b) 2,997%.
c) 3,097%.
d) 3,127%.
e) 3,970%.

Observe que a máquina pode não funcionar por:

- outras razões:

$$P(F) = 1 - 0{,}999 = 0{,}001$$

- falha no abastecimento de energia:

$$P(E) = 0{,}03$$

Como esses eventos são independentes, a probabilidade de intersecção é igual ao produto das probabilidades.

$$P(E \cap F) = 0{,}03.0{,}001 = 0{,}00003$$

Dessa forma, podemos escrever que a probabilidade da união dos dois eventos possíveis para a falha da máquina é:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

$$P(E \cup F) = 0{,}03 + 0{,}001 - 0{,}00003 = 0{,}03097 = 3{,}097\%$$

Letra c.

---

030. (CESPE/PREFEITURA DE SÃO CRISTÓVÃO-SE/2019/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) A sorte de ganhar ou perder, num jogo de azar, não depende da habilidade do jogador, mas exclusivamente das probabilidades dos resultados. Um dos jogos mais populares no Brasil é a Mega Sena, que funciona da seguinte forma: de 60 bolas, numeradas de 1 a 60, dentro de um globo, são sorteadas seis bolas. À medida que uma bola é retirada, ela não volta para dentro do globo. O jogador pode apostar de 6 a 15 números distintos por volante e receberá o prêmio se acertar os seis números sorteados. Também são premiados os acertadores de 5 números ou de 4 números.
A partir dessas informações, julgue o item que se segue.
A probabilidade de se acertar os 6 números sorteados na Mega Sena com a aposta de um volante com 6 números é igual a 54!/60!

Essa questão requer alguns conhecimentos de Análise Combinatória, incluindo Combinações, Arranjos e Permutações.
Como a pessoa escolheu apenas 6 números, só existe uma combinação de 6 números que será favorável a ela.

$$\#favoráveis = 1$$

Agora, vamos calcular o total de combinações que seria possível de se obter durante o sorteio da mega-sena. Para isso, devemos escolher 6 números dentre 60, sem importar a ordem. Por isso, utilizamos o conceito de combinação.

$$\#totais = \binom{60}{6} = \frac{60!}{54!\,6!}$$

Usamos a combinação porque, se a pessoa marcar {1, 2, 3, 4, 5, 6} e o sorteio resultar em {6, 5, 4, 3, 2, 1}, ela será contemplada, pois não importa a ordem. Importa apenas que ela escolha os números que foram sorteados.

Por fim, vamos utilizar o conceito clássico de probabilidade:

$$P = \frac{\#favoráveis}{\#totais} = \frac{1}{\frac{60!}{54!\,6!}} = \frac{54!\,6!}{60!}$$

Errado.

---

031. (CESPE/PREFEITURA DE SÃO CRISTÓVÃO-SE/2019/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Se p for a probabilidade de se acertar na Mega Sena com a aposta de um volante com 6 números distintos, então, apostando-se 8 números, a probabilidade de acerto será igual a 28p.

Essa questão requer alguns conhecimentos de Análise Combinatória, incluindo Combinações, Arranjos e Permutações.

Como a pessoa escolheu 8 números, o número de combinações de 6 deles que é possível de criar com sua cartela é:

$$\#favoráveis = \binom{8}{6} = \frac{8!}{6!\,2!} = \frac{8.7.6!}{6!\,.2.1} = \frac{8.7}{2.1} = 4.7 = 28$$

Qualquer uma dessas 28 combinações seria favorável ao apostador, ou seja, ele receberia o prêmio. Portanto, o número de combinações favoráveis é 28 vezes maior do que seria se o apostador tivesse escolhido apenas 1 número. Dessa forma, a probabilidade de ele acertar aumenta realmente em 28 vezes.

Certo.

---

032. (CESPE/FUB/2018/ASSISTENTE EM ADMINISTRAÇÃO) Considerando que 4 livros de matemática e 6 livros de física devam ser acomodados em uma estante, de modo que um fique ao lado do outro, julgue o item seguinte.

Se dois livros forem escolhidos aleatoriamente entre os 10, então a probabilidade de pelo menos um deles ser de matemática será igual a 2/3.

Podemos utilizar a ideia de probabilidade complementar. Sendo assim, vamos excluir os casos que não nos interessam, que consistem na probabilidade de não ser escolhido nenhum livro de matemática. Dessa forma, a probabilidade desejada é:

$$P = 1 - P(nenhum\ livro\ de\ matemática)$$

Ao retirar o primeiro livro, a chance de ele não ser de matemática é de 6 livros em um total de 10. Porém, ao retirar o segundo, restaram 5 opções de livros que não são de matemática dentre um total de 9 livros, tendo em vista que o livro não pode ser repetido.

$\frac{6}{10}$	x	$\frac{5}{9}$	$= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9}$
1º Livro		**2º Livro**	**Total**

Agora, vamos calcular a probabilidade complementar:

$$P = 1 - \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = 1 - \frac{30}{90} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$$

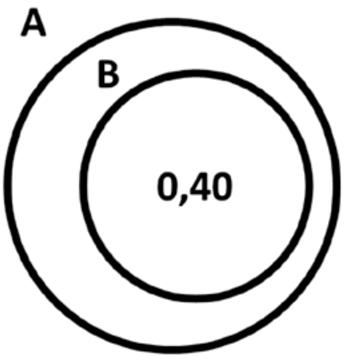
Certo.

033. (FGV/2018/AL-RO/ANALISTA LEGISLATIVO/ESTATÍSTICA) A e B são dois eventos tais que P[A] = 0,4 e P[B] = 0,8.

Os valores mínimo e máximo da probabilidade condicional P[A|B] são, respectivamente,

a) 0 e 0,4.
b) 0,25 e 0,5.
c) 0,2 e 0,4.
d) 0,4 e 0,5.
e) 0,15 e 0,4.

O máximo da possibilidade de intersecção acontece quando o conjunto A está contido no conjunto B.



$$P_{max}\,(A \cap B) = 0{,}40$$

Agora, vamos calcular o valor mínimo da probabilidade de intersecção. Para isso, vamos calcular a probabilidade da união dos dois conjuntos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

O valor máximo da probabilidade da união é igual a 1. Esse valor é registrado quando a probabilidade da intersecção é mínima.

$$1 = 0{,}4 + 0{,}8 - P_{min}(A \cap B)$$

$$1 = 1{,}2 - P_{min}(A \cap B)$$

Logo, o menor valor possível para a probabilidade de intersecção:

$$P_{min}(A \cap B) = 1{,}2 - 1 = 0{,}2$$

Agora, vamos utilizar a expressão da probabilidade condicional para calcular seus valores mínimo e máximo.

$$P_{min}(A|B) = \frac{P_{min}(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}2}{0{,}8} = 0{,}25$$

$$P_{max}(A|B) = \frac{P_{max}(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}4}{0{,}8} = 0{,}50$$

Letra b.

---

034. (FGV/2018/AL-RO/CONSULTOR LEGISLATIVO/ASSESSORAMENTO EM ORÇAMENTOS) Dois eventos A e B ocorrem, respectivamente, com 40% e 30% de probabilidade. A probabilidade de que A ocorra ou B ocorra é 50%. Assim, a probabilidade de que A e B ocorram é igual a

a) 10%.

b) 20%.

c) 30%.
d) 40%.
e) 50%.

Vamos utilizar a expressão da probabilidade da união de dois conjuntos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Podemos substituir os valores fornecidos no enunciado.

$$50\% = 40\% + 30\% - P(A \cap B)$$

$$50\% = 70\% - P(A \cap B)$$

$$\therefore P(A \cap B) = 70\% - 50\% = 20\%$$

Letra b.

---

035. (FGV/2019/DPE-RJ/TÉCNICO SUPERIOR ESPECIALIZADO/ESTATÍSTICA) A partir dos axiomas da Teoria das Probabilidades, algumas proposições podem ser estabelecidas, para quaisquer eventos não vazios, dentre as quais estão:
a) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$
b) Se $A \subset B$ então $P(A) \cdot P(B) < P(\bar{A}) \cdot P(B)$
c) Se $P(A) \cdot P(\bar{A}) = 0,25$ então $P(A) \neq P(\bar{A})$
d) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B)$
e) Se $A \subset B$ e $A \neq B$ então $P(B) > P(A)$

Vamos avaliar as afirmações.
a) A probabilidade da união de dois eventos é dada pela expressão:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Observe que $P(A \cap B)$ pode ser maior, igual ou menor que o produto das probabilidades. Será exatamente igual quando os eventos A e B forem independentes. Afirmação incorreta.
b) Observe que, se $P(A) > P(\bar{A})$, a desigualdade ficará falsa. E, para isso, basta que $P(A) > 50\%$. O fato de A estar contido em B não implica necessariamente que $P(A) < 50\%$.
Por exemplo, podemos ter $P(B) = 80\%$, $P(A) = 60\%$, sendo A contido em B. Nesse caso, teríamos a desigualdade mostrada no enunciado seria falsa.

$$P(A).P(B) < P(\bar{A}).P(B)$$

$$0{,}60.0{,}80 < 0{,}40.0{,}80$$

$$0{,}48 < 0{,}32\ falso$$

Afirmação incorreta.

c) Observe que, se P(A) = 0,50, teríamos P(Ā) = 0,50. Nesse caso, temos:

$$P(A).P(\bar{A}) = 0{,}50.0{,}50 = 0{,}25$$

Afirmação incorreta.

d) Essa relação é válida quando A e B são independentes. Se A e B são independentes, certamente Ā e B serão também independentes. Portanto, a mesma relação será também válida. Afirmação correta.

e) Embora isso esteja correto, não está prescrito pelos axiomas de Kolgomorov.

Letra d.

---

036. (FGV/2018/AL-RO/ANALISTA LEGISLATIVO/ESTATÍSTICA) X e Y são variáveis aleatórias discretas cm função de probabilidade conjunta dada por:

		x	
		0	1
y	-1	0,2	0,2
	0	0,1	0,2
	1	0,2	0,1

Assim, por exemplo, P[X = 1; Y = 0] = 0,2.

A probabilidade condicional P[Y = 0 | X = 0] é igual a

a) 0,20.
b) 0,25.
c) 0,30.
d) 0,35.
e) 0,40.

Pela definição de probabilidade condicional, temos:

$$P(Y = 0 \mid X = 0) = \frac{P(Y = 0 \cap X = 0)}{P(X = 0)}$$

Para calcular a probabilidade P(X = 0), basta somar todas as probabilidades:

$$P(X = 0) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}5$$

Dessa forma, a probabilidade condicional é:

$$(Y = 0 \mid X = 0) = \frac{P(Y = 0 \cap X = 0)}{P(X = 0)} = \frac{0{,}1}{0{,}5} = 0{,}20$$

Letra a.

---

037. (FCC/SABESP/2018/ESTAGIÁRIO DE NÍVEL MÉDIO) Um desses onze números da lista a seguir será sorteado.
(10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20)
A probabilidade desse número sorteado ser múltiplo de 3 ou de 5 é igual a
a) 5/11
b) 1/11
c) 4/11
d) 7/11
e) 3/11

Quando o enunciado fala em "múltiplos de 3 OU 5", ele está pedindo o número de elementos da união entre o conjunto dos múltiplos de 3 e o dos múltiplos de 5. Podemos obter esses conjuntos diretamente da lista citada, como mostrado a seguir:

- **múltiplos de 3:** {12, 14, 18};
- **múltiplos de 5:** {10, 15, 20};
- **múltiplos de 3 e 5:** {15}.

Assim, podemos escrever que a probabilidade da união é a soma das probabilidades dos dois conjuntos menos a probabilidade da intersecção.

$$P(Três \cup Cinco) = P(Três) + P(Cinco) - P(Três \cap Cinco)$$

$$P(Três \cup Cinco) = \frac{3}{11} + \frac{3}{11} - \frac{1}{11} = \frac{5}{11}$$

Letra a.

---

038. (CESPE/SERES-PE/2017/AGENTE DE SEGURANÇA PENITENCIÁRIA/ADAPTADA) De uma urna que continha 20 bolas idênticas, identificadas por números de 1 a 20, foi extraída aleatoriamente uma bola. Esse evento define o espaço amostral Ω = {1, 2, 3,..., 20}.
Considere os seguintes eventos:
A = {a bola retirada da urna é identificada por um número múltiplo de 4};

B = {a bola retirada da urna é identificada por um número múltiplo de 5}.
A probabilidade do evento $P(A \cup B) = 9/20$

Vamos calcular a probabilidade dos eventos A e B separadamente.
A = {4, 8, ..., 20}
Perceba que os elementos de A formam uma progressão aritmética de razão 4. Portanto, podemos calcular o número de termos por:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \therefore 20 = 4 + (n_A - 1).4$$

$$\therefore 20 - 4 = (n_A - 1).4 \therefore \frac{16}{4} = n_A - 1 \therefore n_A = 4 + 1 = 5$$

Nesta questão, você não precisaria ter feito uma PA, porque o conjunto A era pequeno. Bastava você ir completando A = {4, 8, 12, 16, 20}. Porém, é bom você aprender a fazer por meio de uma PA, porque, caso a questão desse que o espaço amostral fosse até um número muito grande, como 1.000, você também saberia fazê-la.
Façamos o mesmo procedimento com o evento B = {5, 10, 15, 20}, que possui quatro elementos. Agora, precisamos saber também o número de elementos da intersecção. Ser múltiplo de 4 e de 5 ao mesmo tempo significa ser múltiplo do MMC entre 4 e 5, que é 20. Dessa maneira, temos que:

$$A \cap B = \{20\}$$

Agora, vamos ao cálculo da probabilidade da união:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{20} + \frac{4}{20} - \frac{1}{20} = \frac{8}{20} = \frac{4}{10} = 0{,}40$$

Errado.

---

039. (FGV/SEFAZ-RJ/2010/FISCAL DE RENDAS) Se A e B são eventos independentes com probabilidades P[A] = 0,4 e P[B] = 0,5 então P[A ∪ B] é igual a:
a) 0,2
b) 0,4
c) 0,5
d) 0,7
e) 0,9

Quando o assunto é probabilidade, não existe banca melhor que a FGV. Mais uma questão muito inteligente. A probabilidade da união é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Como os eventos são independentes, temos:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0{,}4.0{,}5 = 0{,}2$$

Agora, basta substituir:

$$P(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}7$$

Letra d.

---

040. (FGV/SEFAZ-RJ/2008/AGENTE FISCAL DE RENDAS) Sejam A, B e C três eventos quaisquer definidos em um espaço amostral S. Então, $P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$ refere-se à probabilidade de ocorrência de:

a) Um ou dois eventos
b) Exatamente um dos eventos
c) Pelo menos um dos eventos
d) No máximo um dos eventos
e) Pelo menos dois eventos

Vamos desmembrar a expressão da união de três conjuntos:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

A expressão fornecida no enunciado foi:

$$P(A \cup B \cup C) - P(A \cap B \cap C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$$

Perceba, portanto, que a soma fornecida no enunciado é equivalente a:

$$P(A \cup B \cup C) - P(A \cap B \cap C)$$

Agora, precisamos entender o significado de cada uma dessas probabilidades:

- $P(A \cup B \cup C)$: ocorrência de, pelo menos, um evento.
- $P(A \cap B \cap C)$: ocorrência dos três eventos simultaneamente.

Temos, portanto, que a diferença dessas duas probabilidades corresponde à probabilidade de ocorrer, pelo menos, um evento, mas não ocorrer os três simultaneamente. Portanto, é a probabilidade de ocorrer um ou dois eventos.

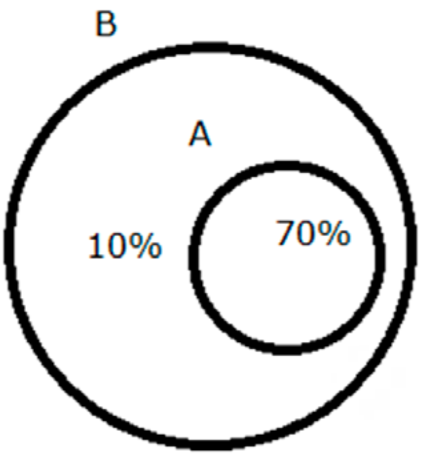
Letra a.

---

041. (FGV/SEFIN-RO/2018/AUDITOR-FISCAL) Dois eventos A e B têm probabilidades iguais a 70% e 80%. Os valores mínimo e máximo da probabilidade da intersecção de A e B são:

a) 20% e 50%
b) 20% e 70%
c) 50% e 70%
d) 0% e 70%
e) 30% e 50%

Sagaz como sempre a FGV. O caso em que a intersecção entre os dois eventos é máxima acontece quando A está inteiramente contido em B.



Nesse caso, tem-se que:

$$P_{max}(A \cap B) = P(A) = 70\%$$

Por outro lado, precisamos ter em mente que a união entre esses dois conjuntos não pode exceder o espaço amostral, portanto a probabilidade da união não pode exceder 100%. Assim, tem-se:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 100\%$$

$$70\% + 80\% - P(A \cap B) \leq 100\%$$

$$150\% - P(A \cap B) \leq 100\%$$

$$150\% - 100\% \leq P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) \geq 50\%$$

Em outras palavras, temos que o valor mínimo da probabilidade de intersecção é:

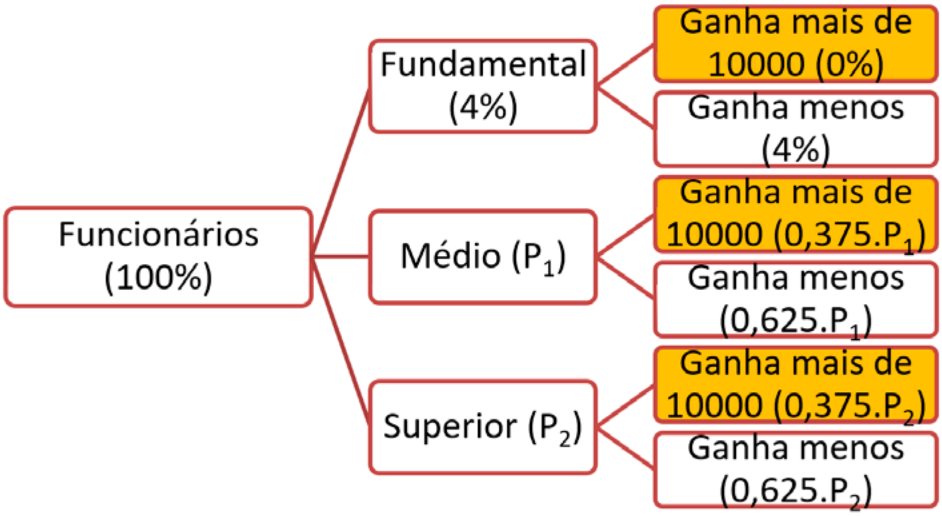
$$P_{min}(A \cap B) = 50\%$$

Letra c.

---

042. (FCC/TRT-2ª REGIÃO/SP/2018/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Em um censo realizado em um órgão público observou-se que:
I – 60% dos funcionários têm salário superior a R$ 10.000,00.
II – 62,5% dos funcionários com nível médio não têm salário superior a R$ 10.000,00.
III – 75% dos funcionários com nível superior têm salário superior a R$ 10.000,00.
IV – 4% dos funcionários possuem apenas o nível fundamental e nenhum deles ganha acima de R$ 10.000,00.
Sejam F o conjunto dos funcionários com nível fundamental, M o conjunto dos funcionários com nível médio e S o conjunto dos funcionários com nível superior. F, M e S são disjuntos dois a dois e o número de funcionários deste órgão é exatamente igual à soma dos números de elementos destes 3 conjuntos. Sorteando um funcionário ao acaso, a probabilidade de ele ter um curso superior dado que não ganha mais que R$ 10.000,00 é de:
a) 25%.
b) 16%.
c) 50%.
d) 40%.
e) 64%.

Questão bem interessante. Vamos montar a árvore de probabilidades dos salários dos funcionários.



Primeiramente, devemos saber que a soma das probabilidades de que um funcionário seja de nível fundamental, nível médio ou nível superior é igual a 100%.

$$4\% + P_1 + P_2 = 100\%$$

$$\therefore P_1 + P_2 = 100\% - 4\%$$

$$P_1 + P_2 = 96\% = 0{,}96$$

A seguir, devemos nos lembrar de que 60% dos funcionários possuem salário superior a R$10.000. Essa soma corresponde aos funcionários destacados em laranja.

$$0{,}60 = 0 + 0{,}375P_1 + 0{,}75P_2$$

Agora, chegamos a um sistema com duas equações e duas incógnitas. Podemos multiplicar a primeira por 0,75.

$$0{,}75.P_1 + 0{,}75.P_2 = 0{,}75.0{,}96$$

$$0{,}75.P_1 + 0{,}75.P_2 = 0{,}72$$

Podemos utilizar o método da adição para calcular a probabilidade P_1.

$$\mathbf{0,75.P_1 + 0,75.P_2 = 0,72}$$

$$(-)\quad 0{,}375P_1 + 0{,}75P_2 = 0{,}60$$

$$0{,}75P_1 - 0{,}375P_1 = 0{,}72 - 0{,}60$$

Com base nisso, podemos calcular a probabilidade P_1.

$$0{,}75P_1 - 0{,}375P_1 = 0{,}72 - 0{,}60$$

$$0{,}375P_1 = 0{,}12$$

$$\therefore P_1 = \frac{0{,}12}{0{,}375} = \frac{0{,}96}{3} = 0{,}32$$

Com isso, podemos calcular também a probabilidade P_1 usando qualquer uma das equações deduzidas anteriormente.

$$P_1 + P_2 = 0{,}96$$

$$P_2 + 0{,}32 = 0{,}96$$

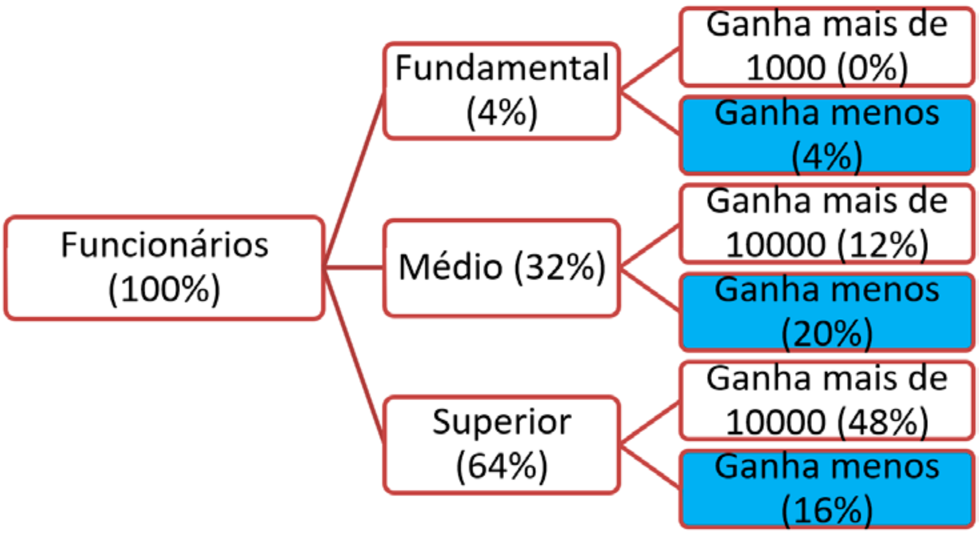
$$\therefore P_2 = 0{,}96 - 0{,}32 = 0{,}64$$

Podemos, agora, completar a árvore de probabilidades, observando que deixamos algumas contas para fazer.

$$0{,}375.P_1 = 0{,}375.0{,}32 = 0{,}12$$

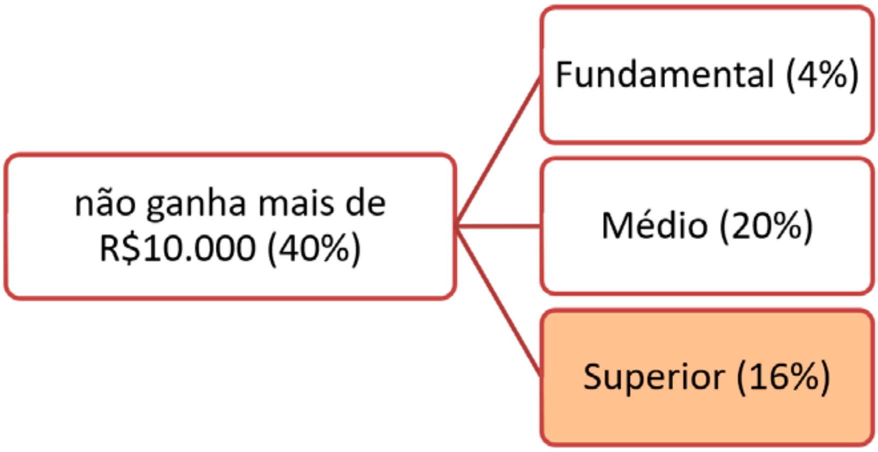
$$0{,}75.P_2 = 0{,}75.0{,}64 = 0{,}48$$

Segue a árvore de probabilidades montada.



Conseguimos explicar exatamente os 60% de funcionários que possuem salários superiores a R$10.000.

Porém, note que foi pedido no enunciado a probabilidade de uma pessoa ter ensino superior, sabendo que ela não ganha mais de R$10.000. Logo, tem nível fundamental ou médio (68%).



Pela definição de probabilidade condicional, temos:

$$P(Superior \mid menos\ de\ R\$10.000\ ) = \frac{P(menos\ de\ R\$10.000 \cap Superior)}{P(menos\ de\ R\$10.000)} = \frac{16\%}{40\%}$$

$$P = \frac{0{,}16}{0{,}40} = 0{,}40 = 40\%$$

Letra d.

---

043. (FGV/2018/AL-RO/ANALISTA LEGISLATIVO/ESTATÍSTICA/QUESTÃO DESAFIO) Uma urna I contém inicialmente 4 bolas azuis e 6 bolas vermelhas; nessa ocasião, a urna II contém 5 bolas azuis e 4 bolas vermelhas, e a urna III, 2 azuis e 7 vermelhas.

Uma bola é sorteada da urna I e colocada na urna II. Em seguida, uma bola é sorteada da urna II e colocada na urna III. Por fim, uma bola é sorteada da urna III.

A probabilidade de que a bola sorteada da urna III seja azul é igual a

a) 0,166.

b) 0,182.

c) 0,254.

d) 0,352.

e) 0,368.

Trata-se de uma questão bem sofisticada. Observe que a bola colocada na urna III pode ser azul ou vermelha.

- Se a urna III receber uma bola azul, ela passará a ter 3 bolas azuis e 7 vermelhas. Nesse caso, a probabilidade de que a bola sorteada seja azul é igual a 30%.
- Se a urna III receber uma bola vermelha, ela passará a ter 2 bolas azuis e 8 vermelhas. Nesse caso, a probabilidade de que a bola sorteada seja azul é igual a 20%.

Pelo Teorema de Bayes, podemos calcular a soma das probabilidades condicionais.

$$P = P(3\ Azuis).P(Sortear\ Azul|3\ Azuis) + P(2\ Azuis).P(Sortear\ Azul\ |2\ Azuis)$$

Na expressão dada, P(3 Azuis) representa a probabilidade de que a urna III tenha 3 bolas azuis no momento do sorteio.

Para isso, vimos que ela precisa ter recebido uma bola azul vinda da urna II. Agora, precisamos, então, calcular a probabilidade de que a urna III receba uma bola azul.

Como a urna I tem 4 bolas azuis e 6 bolas vermelhas, a probabilidade de que a bola repassada dela para a urna II seja uma bola azul é igual a 40%.

Além disso, devemos notar que:

- Se a urna II tiver recebido uma bola azul (probabilidade 40%), ela passará a ter 6 bolas azuis e 4 bolas vermelhas. Nesse caso, a probabilidade de que a bola repassada à urna III seja azul é igual a 60%;

$$P_1 = 0{,}40.0{,}60 = 0{,}24$$

- Se a urna II tiver recebido uma bola vermelha (probabilidade 60%), ela passará a ter 5 bolas azuis e 5 bolas vermelhas. Nesse caso, a probabilidade de que a bola sorteada seja azul é igual a 50%;

$$P_2 = 0{,}60.0{,}50 = 0{,}30$$

Dessa forma, a probabilidade de a urna II repassar uma bola azul para a urna III é:

$$P(urna\ II\ Repassar\ Bola\ Azul) = 0{,}24 + 0{,}30 = 0{,}54$$

Essa é a mesma probabilidade de a urna III apresentar 3 bolas azuis no momento do sorteio final, que representamos anteriormente como P (3 Azuis).

$$P = P(3\ Azuis).P(Sortear\ Azul|3\ Azuis) + P(2\ Azuis).P(Sortear\ Azul\ |2\ Azuis)$$

$$P = 0{,}54.0{,}30 + 0{,}46.\,0{,}20$$

$$P = 0{,}162 + 0{,}092 = 0{,}254$$

Letra c.

---

044. (FGV/2016/IBGE/ANALISTA/QUESTÃO DESAFIO) Suponha que, de um baralho normal, contendo 52 cartas de quatro naipes, é extraído, sem reposição e aleatoriamente, um total de quatro cartas. Se a carta "Ás" é equivalente a uma figura (ou seja, são 4 figuras e 9 números de cada naipe), é correto afirmar que a probabilidade de que todas sejam:

a) Do mesmo naipe é igual a $\left(\frac{13}{52}\right)\left(\frac{12}{51}\right)\left(\frac{11}{50}\right)\left(\frac{10}{49}\right)$

b) Figuras é igual a $\left(\frac{10}{52}\right)\left(\frac{9}{51}\right)\left(\frac{8}{50}\right)\left(\frac{7}{49}\right)$

c) Do mesmo número é igual a $\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{3}{51}\right)\left(\frac{2}{50}\right)\left(\frac{1}{49}\right)$

d) Números é igual a $\left(\frac{36}{52}\right)\left(\frac{35}{51}\right)\left(\frac{34}{50}\right)\left(\frac{33}{49}\right)$

e) De naipes diferentes é igual a $4.\left(\frac{16}{52}\right)\left(\frac{12}{51}\right)\left(\frac{8}{50}\right)\left(\frac{4}{49}\right)$

Essa é daquelas questões que são horríveis quando aparecem na prova. Porém, no material, é uma questão bastante educativa, pois te ensina a calcular várias probabilidades diferentes.

A escolha de duas cartas diferentes são eventos independentes. Porém, é importante frisar que, como o baralho é extraído sem repetição, o número de cartas vai diminuindo à medida que elas são retiradas.

Analisemos as alternativas individualmente.

Em primeiro lugar, calculemos a probabilidade de que todas as cartas sejam do mesmo naipe.

A primeira carta removida pode ser qualquer uma das 52 cartas presentes no baralho.

$\frac{52}{52}$	X		X		X		
1ª Carta		**2ª Carta**		**3ª Carta**		**4ª Carta**	**Total**

A segunda carta, porém, deve ser do mesmo naipe da primeira. Restaram 51 cartas no baralho e 12 cartas do mesmo naipe da primeira. Portanto, a probabilidade de que a segunda carta seja do mesmo naipe da primeira é 12/51.

$\frac{52}{52}$	X	$\frac{12}{51}$	X		X		
1ª Carta		**2ª Carta**		**3ª Carta**		**4ª Carta**	**Total**

Fazendo o mesmo raciocínio para as demais cartas, na terceira carta, restaram 11 cartas do mesmo naipe e 50 cartas no baralho. Depois, na quarta carta, restaram 10 cartas do mesmo naipe e 49 cartas no baralho.

$\frac{52}{52}$	x	$\frac{12}{51}$	x	$\frac{11}{50}$	x	$\frac{10}{49}$	$4.\frac{13}{52}.\frac{12}{51}.\frac{11}{50}.\frac{10}{49}$
1ª Carta		**2ª Carta**		**3ª Carta**		**4ª Carta**	**Total**

Portanto, a letra “a” está errada. A probabilidade real é quatro vezes maior que a sugerida no enunciado.

Agora, vamos calcular a probabilidade de que todas as cartas sejam figuras. Para isso, a primeira carta deve ser uma figura. Tem-se 4 figuras de cada 4 naipes, um total de 16 figuras no baralho. Portanto, a primeira carta deve ser uma das 16 figuras do total de 52 cartas no baralho.

$\frac{16}{52}$	x		x		x		
1ª Carta		**2ª Carta**		**3ª Carta**		**4ª Carta**	**Total**

A segunda carta deve ser uma das 15 figuras que sobraram no total de 51 cartas do baralho e assim por diante. Na terceira carta, sobraram 14 figuras no total de 50 cartas e, na quarta, sobraram 13 figuras no total de 49 cartas.

Aplicando o conceito de eventos independentes, tem-se:

$\frac{16}{52}$	x	$\frac{15}{51}$	x	$\frac{14}{50}$	x	$\frac{13}{49}$	$=\frac{16}{52}.\frac{15}{51}.\frac{14}{50}.\frac{13}{49}$
1ª Carta		**2ª Carta**		**3ª Carta**		**4ª Carta**	**Total**

Vemos, portanto, que a letra “b” está errada.

Vamos calcular agora a probabilidade de que todas as cartas sejam do mesmo número. Para isso, a primeira carta deve ser um número. Há 9 números de cada um dos 4 naipes, portanto um total de 36 números no baralho.

A primeira carta pode ser qualquer uma dessas 36 no total de 52 cartas do baralho.

$\frac{36}{52}$	x		x		x		
1ª Carta		**2ª Carta**		**3ª Carta**		**4ª Carta**	**Total**

A segunda carta deve ser do mesmo número da primeira. Sobraram apenas 3 cartas com o mesmo número, que são as cartas dos outros naipes. Por exemplo, se tirarmos 10 de paus, as cartas que podem ser selecionadas são 10 de copas, 10 de espadas ou 10 de ouros. São apenas 3 cartas num total de 51 no baralho.

$\frac{36}{52}$	x	$\frac{3}{51}$	x		x		
1ª Carta		**2ª Carta**		**3ª Carta**		**4ª Carta**	**Total**

Para a terceira carta, sobraram apenas duas opções no total de 50 cartas do baralho. Para a quarta, somente sobrou o último naipe dentre as 49 cartas restantes do baralho.

$\frac{36}{52}$	x	$\frac{3}{51}$	x	$\frac{2}{50}$	x	$\frac{1}{49}$	$=\frac{36}{52}\cdot\frac{34}{51}\cdot\frac{34}{50}\cdot\frac{33}{49}$
1ª Carta		**2ª Carta**		**3ª Carta**		**4ª Carta**	**Total**

Mais um erro. Vejamos, agora, a probabilidade de que sejam todas cartas de números. Já vimos que o baralho tem um total de 36 números dentre as 52 cartas.

Portanto, a primeira carta pode ser qualquer um dos 36 números. Para a segunda, sobraram 35 números dentre 51 cartas de baralho. Para a terceira, sobraram 34 números dentre 50 cartas de baralho. E, para a última, sobraram 33 números dentre 49 cartas.

$\frac{36}{52}$	x	$\frac{35}{51}$	X	$\frac{34}{50}$	x	$\frac{33}{49}$	$=\frac{36}{52}\cdot\frac{34}{51}\cdot\frac{34}{50}\cdot\frac{33}{49}$
1ª Carta		**2ª Carta**		**3ª Carta**		**4ª Carta**	**Total**

Chegamos ao nosso gabarito. Porém, vamos calcular a probabilidade de que as cartas sejam de naipes diferentes.

Para isso, a primeira carta pode ser qualquer uma das 52. Não há nenhuma restrição aqui. Para a segunda carta, podemos escolher apenas 3 naipes, pois um deles já foi retirado na primeira carta. Como cada naipe tem 13 cartas (4 números e 9 figuras), restaram 39 opções dentre o total de 51 cartas.

Para a terceira, já foram eliminados 2 naipes, sobrando apenas 2, o que equivale a 26 cartas em um total de 50 cartas. Por fim, para a última carta, só restam 13 cartas a serem escolhidas, correspondentes ao único naipe que ainda não foi sorteado, num total de 49 cartas.

$\frac{52}{52}$	x	$\frac{39}{51}$	X	$\frac{26}{50}$	x	$\frac{13}{49}$	$=\frac{52}{52}\cdot\frac{39}{51}\cdot\frac{26}{50}\cdot\frac{13}{49}$
1ª Carta		**2ª Carta**		**3ª Carta**		**4ª Carta**	**Total**

Letra d.

GABARITO

1. d
2. E
3. e
4. C
5. E
6. b
7. e
8. a
9. d
10. e
11. a
12. E
13. E
14. C
15. C
16. E
17. d
18. E
19. E
20. E
21. e
22. a
23. d
24. E
25. E
26. d
27. E
28. b
29. c
30. E
31. C
32. C
33. b
34. b
35. d
36. a
37. a
38. E
39. d
40. a
41. c
42. d
43. c
44. d

Thiago Cardoso

Engenheiro eletrônico formado pelo ITA com distinção em Matemática, analista-chefe da Múltiplos Investimentos, especialista em mercado de ações. Professor desde os 19 anos e, atualmente, leciona todos os ramos da Matemática para concursos públicos.


LEI Nº 8.666/1993 - LICITAÇÃO
Avaliação
Comentário
Seu feedback é valioso. Você gostaria de deixar um comentário e assim nos ajudar a melhorar nossos produtos e serviços?
Obs: A avaliação da aula em pdf é exclusivamente pedagógica. Clique aqui para relatar problemas técnicos, pois serão desconsiderados deste canal.
Sim, salvar comentário.
Não, obrigado.
NÃO SE ESQUEÇA DE AVALIAR ESTA AULA!
SUA OPINIÃO É MUITO IMPORTANTE PARA MELHORARMOS AINDA MAIS NOSSOS MATERIAIS.
ESPERAMOS QUE TENHA GOSTADO DESTA AULA!
PARA AVALIAR, BASTA CLICAR EM LER A AULA E, DEPOIS, EM AVALIAR AULA.
AVALIAR