Aula 17

BNB (Analista Bancário) Matemática - 2023 (Pré-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

12 de Julho de 2023

Índice

Olá, amigos! Como estão os estudos de Estatística?

Nesta aula, vamos estudar **análise combinatória**, que são ferramentas de **contagem**.

Como assim? Uma aula sobre contagem? 1, 2, 3, ...?

Sim e não! Sim, porque, de fato, você pode *contar* os eventos, simplesmente. Essa é uma boa estratégia quando há **poucos** eventos.

Mas, quando há muitos eventos, essa contagem se torna muito trabalhosa, você se perde no meio do caminho, ... Então, a ideia dessas ferramentas é ajudá-lo a "contar" os eventos com **eficiência**!

Algumas questões de concursos cobram a análise combinatória, puramente; e outras cobram no cálculo de **probabilidades**. Então, esse é um assunto bem importante.

Até já!

Luana Brandão

*Posso te contar um pouquinho sobre a minha **trajetória**? Sou Doutora em Engenharia de Produção, pela Universidade Federal Fluminense, e Auditora Fiscal da SEFAZ-RJ. Sou professora de Estatística do Estratégia porque quero muito te ajudar na sua trajetória, rumo à aprovação!*

Se tiver alguma dúvida, entre em **contato** comigo!

professoraluanabrandao@gmail.com

@professoraluanabrandao

"Lute e conquiste, supere seus medos. Acredite em seus sonhos."

Aislan Dlano

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Introdução

A Análise Combinatória, ou simplesmente combinatória, estuda **técnicas de contagem**, para que você não precise efetivamente *contar* todos os elementos.

Por exemplo, quantos números de 3 algarismos podemos formar com o conjunto {1, 3, 4}, sem repetir os algarismos, em um mesmo número?

Bem, as possibilidades são:

i) 134; ii) 143; iii) 314;

iv) 341; v) 413; vi) 431.

Portanto, são 6 números distintos.

Para resolver esse problema, não precisamos de nenhuma técnica específica. Só precisamos raciocinar e **contar** todas as possibilidades.

Mas, e se o conjunto de algarismos fosse de todos os números de 1 a 9? Perderíamos muito tempo para relacionar todas as possibilidades, e talvez nos perderíamos em algum momento.

A análise combinatória facilita justamente a **contagem** das possibilidades, em conjuntos finitos.

Ela também permite efetuar contagens de **subconjuntos** com determinadas características. Por exemplo, poderíamos estar interessados apenas nos números pares ou nos números primos.

Princípios Fundamentais da Contagem

Nesta seção, veremos os princípios fundamentais de contagem, que você vai utilizar muito. Eles permeiam as ferramentas da análise combinatória e são requisitados em praticamente todas as questões sobre o assunto, desde as mais simples, até as mais complexas.

Princípio Multiplicativo

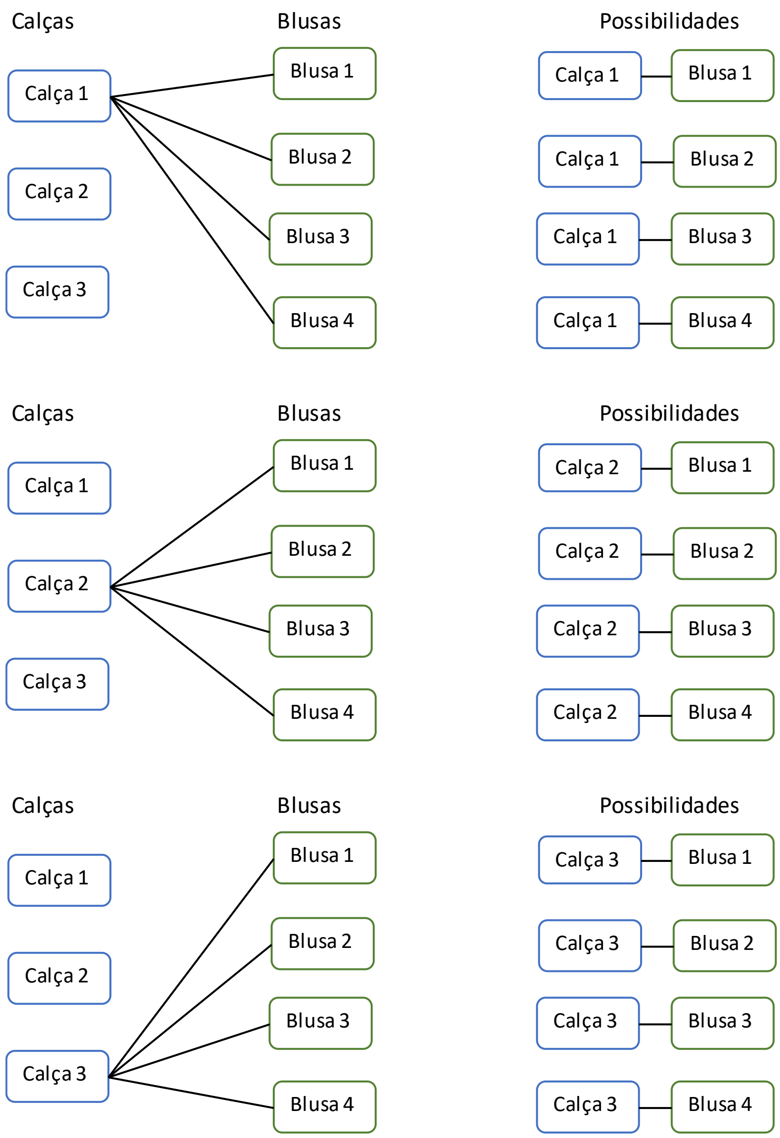
Esse princípio enuncia o seguinte:

> *Se um evento A ocorre de **m** maneiras diferentes **e** se, para cada uma dessas maneiras, um outro evento B ocorre de **n** maneiras diferentes, então o número de maneiras diferentes de **ambos** os eventos (A **e** B) ocorrerem é **m x n**.*

Para ilustrar, vamos considerar que João precisa se vestir com uma calça e uma blusa e que ele tem **3 calças** e **4 blusas**. Nesse caso, o evento A corresponde a vestir uma calça, com ***m* = 3** possibilidades, e o evento B corresponde a vestir uma blusa, com ***n* = 4** possibilidades.

Segundo o princípio multiplicativo, o número de maneiras distintas de João se vestir é:

$$m \times n = 3 \times 4 = 12$$



Observe que, para cada calça, há 4 possibilidades de blusas. Portanto, são 4 blusas possíveis para a calça 1; 4 blusas possíveis para a calça 2; e 4 blusas possíveis para a calça 3. Somando todas essas possibilidades, temos **4 + 4 + 4 = 3 x 4 = 12**.

Obtemos o mesmo resultado se pensarmos que há 3 possibilidades de calça para cada blusa.

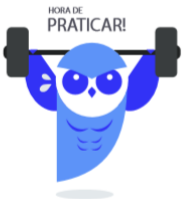
Podemos **extrapolar** esse princípio para **qualquer número de eventos**. Ou seja, se tivermos um terceiro evento **C** que ocorre de **p** maneiras diferentes, então o número de maneiras diferentes de os eventos A, B e **C** ocorrerem é **m x n x p**.

Utilizando o mesmo exemplo, considerando que João precisa utilizar um cinto e que ele tem **p = 2** cintos distintos, então o número de maneiras distintas de João colocar uma calça, uma blusa e um cinto é:

$$m \times n \times p = 3 \times 4 \times 2 = 24$$

Generalizando para n eventos, com $\mathbf{p_1}$ possibilidades para o evento A_1, $\mathbf{p_2}$ possibilidades para o evento A_2, ... e $\mathbf{p_n}$ possibilidades para o evento A_n, então o número de maneiras de **todos** os n eventos ocorrerem é:

$$P(A_1 \textbf{ e } A_2 \textbf{ e } \ldots \textbf{ e } A_n) = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$$



(VUNESP/2019 – Prefeitura de dois Córregos/SP) Em um grupo de pessoas, há 12 homens e 13 mulheres. Com essas pessoas, uma dupla será aleatoriamente formada, com um homem e uma mulher, para participar de um concurso. O número total de possibilidades para a formação dessa dupla é

a) 12.

b) 144.

c) 156.

d) 168.

e) 288.

Comentários:

Havendo 12 homens e 13 mulheres, o número de possibilidades de selecionar um homem **E** uma mulher é, pelo princípio multiplicativo:

$$12 \times 13 = 156$$

Gabarito: C

(2019 – Prefeitura de Jacutinga/MG) Assinale a alternativa que contém a quantidade de vezes que é possível usar de maneiras diferentes duas blusas, três calças e quatro meias:

a) 24 maneiras diferentes.

b) 28 maneiras diferentes.

c) 32 maneiras diferentes.

d) 36 maneiras diferentes.

Comentários:

Há **2** blusas para cada uma das **3** calças.

Além disso, para cada possível combinação de uma blusa e uma calça, há **4** meias diferentes.

Logo, o número de alternativas é, pelo princípio multiplicativo:

$$2 \times 3 \times 4 = 24$$

Gabarito: A

(CESPE/2013 – TRT-ES) Os alunos de uma turma cursam 4 disciplinas que são ministradas por 4 professores diferentes. As avaliações finais dessas disciplinas serão realizadas em uma mesma semana, de segunda a sexta-feira, podendo ou não ocorrerem em um mesmo dia. A respeito dessas avaliações, julgue o item seguinte.

Se cada professor escolher o dia em que aplicará a avaliação final de sua disciplina de modo independente dos demais, haverá mais de 500 maneiras de se organizar o calendário dessas avaliações.

Comentários:

Vamos representar as escolhas dos 4 professores da seguinte forma:

Sabendo que há 5 dias disponíveis, então cada professor terá 5 possibilidades de escolha:

5	5	5	5

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de organizar o calendário para os 4 professores é:

$$\text{Número de maneiras} = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$

Ou seja, há mais de 500 maneiras de organizar.

Gabarito: Certo.

(FGV/2022 – PM-PB) Cada vértice de um quadrado ABCD deverá ser pintado com uma cor. Há 5 cores diferentes disponíveis para essa tarefa. A única restrição é que os vértices que estejam em extremidades opostas de qualquer diagonal do quadrado (AC e BD) sejam pintados com cores diferentes. O número de maneiras diferentes de pintar os vértices desse quadrado é:

a) 18

b) 60

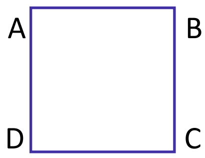
c) 120

d) 240

e) 400

Comentários:

A questão informa que temos **5** cores disponíveis para pintar 4 vértices de um quadrado:



No entanto, a cor do vértice **A** deve ser **diferente** da cor do vértice **C**; e a cor do vértice **B** deve ser **diferente** da cor do vértice **D**.

Assim, há **5** possibilidades para o vértice A e **4** possibilidades para o vértice C.

Similarmente, há **5** possibilidades para o vértice B e **4** possibilidades para o vértice D.

Pelo princípio multiplicativo, o número total de possibilidades para **todos** os 4 vértices é:

5 **x** 5 **x** 4 **x** 4 = 400

Gabarito: E

Contagem de Divisores

Com base no princípio multiplicativo, é possível calcular a **quantidade de divisores** de um número natural. O primeiro passo é **fatorar** o número natural em números **primos**. Por exemplo, vamos fatorar o número 60:

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

Assim, podemos representar o número 60, a partir dos seus **divisores primos**, da seguinte forma:

$$60 = 2^{\mathbf{2}} \times 3^{\mathbf{1}} \times 5^{\mathbf{1}}$$

Agora é o *pulo do gato*: **Todos** os divisores de um número são formados pelo **produto** de um **subconjunto** dos seus **divisores primos**. Por exemplo, o número 15 é produto de 3 e 5 e pode ser representado como:

$$15 = 2^{\mathbf{0}} \times 3^{\mathbf{1}} \times 5^{\mathbf{1}}$$

Assim, todos os divisores de 60, que indicamos como d_{60}, podem ser representados da seguinte forma:

$$d_{60} = 2^{x} \times 3^{y} \times 5^{z}, \qquad sendo\ \boldsymbol{x} \leq \mathbf{2}, \boldsymbol{y} \leq \mathbf{1}, \boldsymbol{z} \leq \mathbf{1}$$

Logo, as possibilidades para cada expoente são:

- x: 0, 1 ou 2 (**3** possibilidades);
- y: 0 ou 1 (**2** possibilidades);
- z: 0 ou 1 (**2** possibilidades).

Pelo princípio multiplicativo, devemos **multiplicar** as possibilidades desses eventos para encontrar o número de possibilidades, no total:

3 x **2** x **2** = 12

Logo, há 12 divisores de 60.

Os **expoentes** dos divisores primos de 60 eram **2**, **1** e **1**, e os valores multiplicados para encontrar o número de divisores foram **3**, **2** e **2**.

Portanto, basta **somar 1** a cada **expoente** e **multiplicá-los**:

Número de Divisores = (2 **+ 1**) x (1 **+ 1**) x (1 **+ 1**) = 3 x 2 x 2

Isso porque o número de possibilidades que cada expoente pode assumir é igual ao **seu valor**, **mais 1**, correspondente ao **zero**.

(FCC/2016 – Companhia Metropolitana/SP) Uma tabela retangular de 12 linhas por 18 colunas possui 216 campos de preenchimento. Outras tabelas retangulares com combinações diferentes de linhas e colunas também possuem 216 campos de preenchimento. Observando-se que uma tabela de 12 linhas por 18 colunas é diferente de uma tabela de 18 linhas por 12 colunas, o total de tabelas retangulares diferentes com 216 campos de preenchimento é igual a

a) 14

b) 12

c) 10

d) 16

e) 18

Comentários:

O enunciado pede a quantidade de tabelas distintas que podem ser formadas com 216 campos, de modo que uma tabela com A linhas e B colunas é **diferente** de uma tabela B linhas e A colunas.

Essa quantidade corresponde ao número de maneiras de obter 216 pelo produto de 2 números inteiros:

1 x 216; 2 x 108; ...; 108 x 2; 216 x 1

Ou seja, ela corresponde ao número **divisores** de 216.

Para isso, vamos primeiro fatorar 216 em números primos:

$$\begin{array}{r|l} 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$216 = 2^3 \times 3^3$$

Os divisores de 216 podem ser, portanto, representados da seguinte forma:

$$d_{216} = 2^x \times 3^y$$

Nesse caso, x pode assumir **3 + 1 = 4** possibilidades (0, 1, 2 ou 3), assim como y., que também pode assumir as mesmas **3 + 1 = 4** possibilidades. Pelo princípio multiplicativo, o número total de possibilidades é:

4 x 4 = 16

Gabarito: D.

Princípio Aditivo

Agora, veremos outro princípio fundamental de contagem, chamado de **princípio aditivo**:

*Se o evento A ocorre de **m** maneiras diferentes e o evento B ocorre de **n** maneiras diferentes, e se A e B são **mutuamente exclusivos*** (ou seja, se um ocorrer o outro **não** ocorre)*, então o número de maneiras de ocorrer **um** dos eventos (A **ou** B) é **m + n**.*

Para ilustrar esse princípio, vamos considerar que João precisa se **calçar** e que ele possui **3** opções de tênis e **2** opções de sapatos.

Nesse caso, o evento A corresponde a calçar um tênis, com ***m*** = 3 possibilidades, e o evento B corresponde a calçar um sapato, com ***n*** = 2 possibilidades. Esses eventos são **mutuamente excludentes** (João calçará um tênis **ou** um sapato; ele **não** pode calçar os dois). Assim, o número de maneiras de João se calçar é a soma:

m + n = 3 + 2 = 5

Podemos generalizar esse princípio para qualquer número de eventos.

Havendo n eventos **mutuamente exclusivos**, com $\mathbf{p_1}$ possibilidades para o evento A_1, $\mathbf{p_2}$ possibilidades para o evento A_2, ... e $\mathbf{p_n}$ possibilidades para o evento A_n, então o número de maneiras **um** dos n eventos ocorrer é:

$$P(A_1 \textbf{ ou } A_2 \textbf{ ou } \ldots \textbf{ ou } A_n) = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$$

RESUMINDO

- Quando **ambos** ocorrem os eventos (A **E** B), **multiplicamos** as possibilidades;
- Quando ocorre **somente um** dos eventos (A **OU** B), **somamos** as possibilidades.

Eventos Concomitantes: A **e** B → Princípio Multiplicativo: n(A) **x** n(B)

Eventos Excludentes: A **ou** B → Princípio Aditivo: n(A) **+** n(B)

EXEMPLIFICANDO

Agora, vejamos um exemplo **combinando** esses dois princípios.

Vamos considerar que Maria precisa se vestir e se calçar, dispondo de:

- **4 vestidos**;
- **2 saias**;
- **3 blusas**; e
- **5 sapatos**.

Nesse caso, Maria irá colocar um **vestido** (evento **A**) **OU** um conjunto de **saia** (evento **B**) **E** **blusa** (evento **C**). De uma forma ou de outra, irá colocar **também** um **sapato** (evento **D**).

Nessa situação, as possibilidades de Maria se vestir e se calçar são:

i) Os eventos **B (saia)** e **C (blusa)** são concomitantes – princípio multiplicativo:

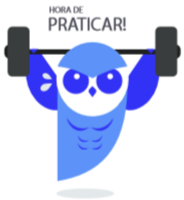
2 x 3 = **6** possibilidades;

ii) Os eventos **A (vestido)** e **(i) (saia e blusa)** são excludentes – princípio aditivo:

4 + 6 = **10** possibilidades;

iii) Os eventos **D (sapato)** e **(iii) (saia e blusa ou vestido)** são concomitantes – princípio multiplicativo:

5 x 10 = 50 possibilidades.



(2017 – Conselho Regional de Educação Física/CE) Numa estante encontram-se 4 dicionários de inglês, 3 de espanhol e 2 de francês.

De quantas maneiras uma pessoa pode escolher dois dicionários dessa estante e que sejam de idiomas diferentes?

a) 22

b) 24

c) 26

d) 28

Comentários:

Selecionando 2 dicionários de idiomas diferentes, podemos encontrar uma das seguintes opções:

i) um livro de inglês **e** um de espanhol; **ou**

ii) um livro de inglês **e** um de francês; **ou**

iii) um livro espanhol **e** um de francês.

Em cada opção, temos eventos concomitantes (ambos ocorrem), aplicando-se o princípio **multiplicativo**; enquanto as opções i, ii e iii se excluem mutuamente (somente uma delas irá ocorrer), aplicando-se o princípio **aditivo** entre elas.

- para i (inglês e espanhol), temos 4 x 3 = 12 possibilidades;
- para ii (inglês e francês), temos 4 x 2 = 8 possibilidades;
- para iii (espanhol e francês), temos 3 x 2 = 6 possibilidades.

E o total de maneiras de pegar dois dicionários de idiomas distintos é (princípio aditivo):

$$12 + 8 + 6 = 26$$

Gabarito: C

(CESPE/2013 – TRT-ES) Considerando que, na fruteira da casa de Pedro, haja 10 uvas, 2 maçãs, 3 laranjas, 4 bananas e 1 abacaxi, julgue o próximo item.

Se Pedro desejar comer apenas um tipo de fruta, a quantidade de maneiras de escolher frutas para comer será superior a 100.

Comentários:

Se Pedro deseja comer apenas **um** tipo de fruta, ele poderá comer uvas **OU** maçãs **OU** laranjas **OU** bananas **OU** abacaxi.

i) Uvas: há 10 uvas, logo Pedro poderá comer 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 uvas. Logo, há 10 maneiras de escolher uvas para comer;

ii) Maçãs: há 2 maçãs, logo há 2 maneiras de escolher maçãs para comer;

iii) Laranjas: com 3 laranjas, há 3 maneiras de comer laranjas;

iv) Bananas: com 4 bananas, há 4 maneiras de comer bananas;

v) Abacaxi: há 1 abacaxi, logo há 1 forma de comer abacaxi.

Como Pedro irá escolher apenas **uma** dessas opções, então devemos aplicar o princípio aditivo:

$$\text{Número de maneiras} = 10 + 2 + 3 + 4 + 1 = 20$$

Que é inferior a 100.

Gabarito: Errado.

(CESPE 2016/FUB) Em um intervalo para descanso, a assistente em administração Marta foi a uma lanchonete cujo cardápio oferecia 7 tipos diferentes de salgados, 4 tipos diferentes de bolos, 3 espécies diferentes de tapioca, sucos de 3 sabores diferentes e 5 tipos diferentes de refrigerantes. A partir dessa situação hipotética, julgue o item que se segue.

Se Marta desejar fazer um lanche com apenas uma opção de comida e apenas uma bebida, ela terá mais de 100 maneiras distintas de organizar seu lanche.

Comentários:

Marta deseja escolher uma comida **E** uma bebida.

Para comer, Marta pode escolher uma das 7 opções de salgado **OU** um dos 4 tipos de bolo **OU** uma das 3 espécies de tapioca. Pelo princípio aditivo, as opções de comida são:

$$7 + 4 + 3 = 14$$

Para beber, Marta pode escolher uma das 3 opções de suco **OU** uma das 5 opções de refrigerante. Pelo princípio aditivo, as opções de bebida são:

$$3 + 5 = 8$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de se escolher uma comida **E** uma bebida é:

$$14 \times 8 = 112$$

Logo, há mais de 100 maneiras.

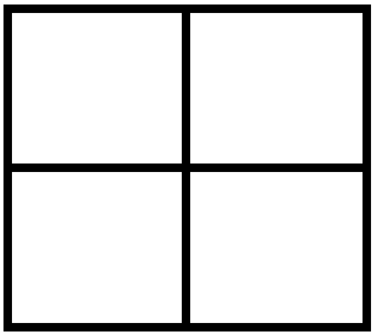
Gabarito: Certo.

Princípio da Casa dos Pombos

O **princípio do pombal** ou **da casa dos pombos** afirma que:

*Se **n** pombos devem se abrigar em **m** casas e se **n > m**, então **pelo menos uma** casa irá conter **mais de um** pombo.*

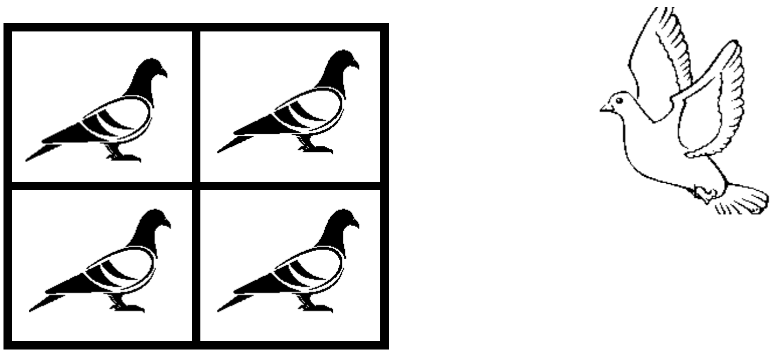
Por exemplo, podemos ter **m** = 4 casas. Nesse caso, se tivermos qualquer número de pombos **maior** do que 4, então pelo menos uma casa conterá **mais de um** pombo.



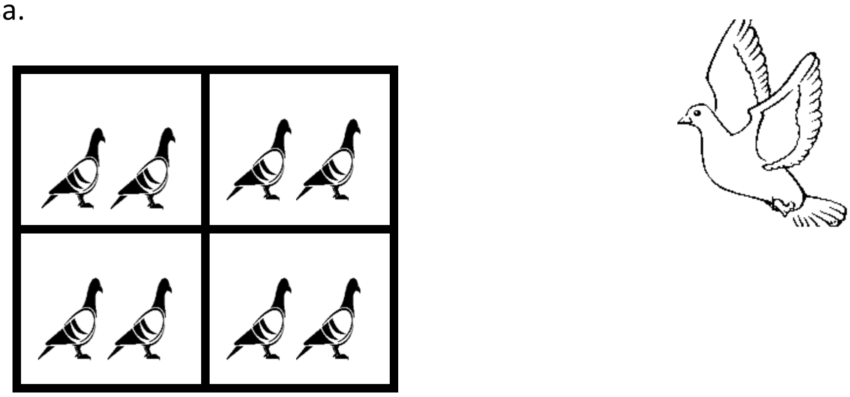
Por que pombos*?* Bem, os pombos são imprevisíveis. Eles podem resolver ficar todos juntos ou todos separados... Nesse sentido, eles representam **eventos aleatórios**, como a seleção de determinados elementos **ao acaso**. Porém, mesmo sendo imprevisíveis, é possível fazer algumas **afirmações** ou **garantias**. Para fazer essas afirmações, precisamos pensar no **pior cenário** possível.

Por exemplo, considerando um total de 4 casas, quantos pombos são necessários para **garantir** que haverá pelo menos 2 pombos em uma casa? Bem, é **possível** que, havendo apenas 2 pombos, ambos escolham a mesma casa. Porém, isso não pode ser **garantido**, pois também é possível que escolham casas distintas. A mesma situação ocorre com 3 e com 4 pombos, pois ainda é possível que todos escolham casas distintas.

Entretanto, com 5 pombos, **necessariamente** haverá **pelo menos** 2 pombos em uma casa. Como há somente 4 casas, ainda que eles tentem se espalhar, o 5º pombo não terá alternativa e terá que ficar com algum outro pombo.



Também podemos encontrar o número de pombos necessários para **garantir** que haja pelo menos **3 pombos em uma mesma casa**. No **pior cenário**, eles ficarão todos espalhados com 2 pombos por casa, antes de termos 3 pombos em uma mesma casa.



Para que haja 2 pombos em cada uma das 4 casas, serão necessários 2 x 4 = 8 pombos. Portanto, são necessários 8 + 1 = 9 pombos, para **garantir** que haverá **pelo menos** 3 pombos em uma casa.

Podemos mencionar outros exemplos, mais próximos à nossa realidade. Por exemplo, qual é o menor número de pessoas necessário para **garantir** que **pelo menos 2 pessoas** façam aniversário no mesmo mês?

Para garantir isso, precisamos pensar no pior cenário: aquele que em que os aniversariantes ficam todos "espalhados".

Assim, em um grupo de 12 pessoas, todas fariam aniversário em meses distintos. Porém, em um grupo de 13 pessoas, como há somente 12 meses, então necessariamente alguém fará aniversário no **mesmo** mês que outra pessoa. Portanto, são necessárias 13 pessoas para **garantir** que **pelo menos 2** façam aniversário no mesmo mês.

*Por que a pergunta é pelo **menor** número de pessoas?*

Note que, se houver mais do que 13 pessoas (ou seja, 14, 15,...), também poderemos garantir que pelo menos 2 pessoas farão aniversário no mesmo mês. Por isso, a questão se interessa pelo **menor** número de pessoas, para o qual temos a garantia desejada.

(FCC/2017 – Analista Executivo da Secretaria de Gestão/MA) No setor administrativo de uma empresa, há quatro tipos de cargos: estagiários, técnicos, gerentes e diretores. Alguns funcionários desse setor comporão um grupo que será transferido para o setor financeiro da empresa. Compondo-se o grupo com funcionários escolhidos ao acaso, o número mínimo de funcionários que deverá compor o grupo para que se tenha certeza de que nele haverá quatro funcionários de um mesmo cargo é igual a

a) 17

b) 15

c) 13

d) 16

e) 14

Comentários:

O pior cenário (ou seja, o cenário que exige o maior número de funcionários para garantir que 4 terão o mesmo cargo) é aquele em que os funcionários são todos de cargos diferentes. Assim, haverá 3 funcionários para cada um dos 4 tipos de cargo, antes de haver 4 funcionários de algum cargo.

Ou seja, haverá 3 x 4 = 12 funcionários distribuídos por todos os cargos, em 3 funcionários por cargo. Com o 13º funcionário, necessariamente haverá 4 funcionários para algum cargo.

Gabarito: C

(CESPE/2013 – TCE-RO) Considerando que, em uma pesquisa de rua, cada entrevistado responda sim ou não a cada uma de dez perguntas feitas pelos entrevistadores, julgue o item seguinte.

Será necessário entrevistar mais de mil pessoas para se garantir que duas pessoas respondam igualmente a todas as perguntas.

Comentários:

Para **garantir** que duas pessoas respondam igualmente a todas as perguntas, é necessário entrevistar um número de pessoas **maior** que o número de maneiras diferentes de responder ao questionário. Ou seja, essa questão combina o princípio dos pombos com o princípio multiplicativo.

Vamos representar as possibilidades de resposta para as 10 perguntas conforme abaixo:

Sabemos que há 2 respostas distintas possíveis para cada pergunta:

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras distintas de responder às 10 perguntas é:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{10} = 1024$$

Assim, precisamos entrevistar 1.025 pessoas para **garantir** que haverá pelo menos duas respostas iguais, ou seja, mais de 1.000 pessoas.

Gabarito: Certo.

FATORIAL DE UM NÚMERO NATURAL

Para resolvermos diversas questões de análise combinatória, utilizamos o chamado **fatorial**.

O **fatorial de um número natural** (0, 1, 2, 3, ...) é representado como:

$$\boldsymbol{n}!$$

TOME NOTA!

> O fatorial representa o **produto** de **todos** os números inteiros positivos **menores ou iguais àquele número**, conforme indicado a seguir:
>
> $$\boldsymbol{n}! = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} - \mathbf{1}) \times (\boldsymbol{n} - \mathbf{2}) \times \ldots \times \mathbf{2} \times \mathbf{1}$$

Por exemplo:

2! = 2 x 1 = 2

3! = 3 x 2 x 1 = 6

4! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24

5! = 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120

6! = 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 720

Note que podemos escrever o fatorial de um número natural em função do fatorial de **qualquer** outro número natural **menor**, por exemplo:

$$4! = 4 \text{ x } \underbrace{3 \text{ x } 2 \text{ x } 1}_{3!} = 4 \text{ x } 3!$$

$$7! = 7 \text{ x } \underbrace{6 \text{ x } 5 \text{ x } 4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1}_{6!} = 7 \text{ x } 6!$$

$$7! = 7 \text{ x } 6 \text{ x } \underbrace{5 \text{ x } 4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1}_{5!} = 7 \text{ x } 6 \text{ x } 5!$$

$$10! = 10 \text{ x } 9 \text{ x } 8 \text{ x } 7 \text{ x } \underbrace{6 \text{ x } 5 \text{ x } 4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1}_{6!} = 10 \text{ x } 9 \text{ x } 8 \text{ x } 7 \text{ x } 6!$$

Esse tipo de mudança facilita o cálculo das divisões entre fatoriais (**muito comuns** em combinatória):

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

$$\frac{15!}{13!} = \frac{15 \times 14 \times 13!}{13!} = \frac{15 \times 14 \times \cancel{13!}}{\cancel{13!}} = 15 \times 14 = 210$$

Nesses casos, aplicamos o fatorial **antes** de efetuar a divisão. Quando for necessário realizar a divisão **antes**, utilizaremos o **parêntesis**. Por exemplo:

$$\frac{6!}{3!} \neq \left(\frac{6}{3}\right)!$$

Em $\frac{6!}{3!}$, calculamos os **fatoriais antes**: $\frac{6!}{3!} = \frac{6\times5\times4\times3!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$; já em $\left(\frac{6}{3}\right)!$, efetuamos a **divisão** entre parêntesis, **antes** do fatorial:

$$\left(\frac{6}{3}\right)! = 2! = 2 \times 1 = 2$$

Analogamente, em um produto, temos: $2 \times 4! \neq (2 \times 4)!$

Em $2 \times 4!$, calculamos o **fatorial** de 4 **antes** da multiplicação:

$$2 \times 4! = 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$$

Em $(2 \times 4)!$, **multiplicamos** os fatores, **antes** de aplicar o fatorial:

$$(2 \times 4)! = 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40.320$$

O mesmo vale para as demais operações:

$$2 + 4! \neq (2 + 4)!$$

Pois $2 + 4! = 2 + 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 26$; e $(2 + 4)! = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

$$8 - 3! \neq (8 - 3)!$$

Pois $8 - 3! = 8 - 3 \times 2 \times 1 = 2$; e $(8 - 3)! = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Agora, vejamos dois **casos especiais** do fatorial. O **fatorial de 1** pode ser entendido pela própria definição de fatorial. Como não há número inteiro positivo menor do que 1, apenas igual, então esse será o único fator:

1! = 1

O segundo caso especial é **0!** Você pode considerar que o seguinte resultado é uma convenção:

0! = 1

Para entender o porquê dos resultados desses casos especiais, devemos observar que o fatorial de um número n pode ser escrito como o **fatorial do número seguinte**, (n + 1)!, **dividido** por esse **número seguinte**, n + 1.

Por exemplo, 4! pode ser representado como 5! dividido por 5.

$$4! = \frac{5!}{5} = \frac{\cancel{5} \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{\cancel{5}} = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Similarmente, o fatorial de 1 pode ser representado como:

$$1! = \frac{2!}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

E o fatorial de 0 como:

$$0! = \frac{1!}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

(2019 – Prefeitura de Jacutinga/MG) O fatorial de um número é extremamente utilizado na análise combinatória. Dessa forma, analise as proposições a seguir:

I. O fatorial n! de um número $n \in \mathbb{N}$ é dado por $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \ldots 3 \times 2 \times 1$;

II. 0! = 1;

III. 1! = 0.

Está(ão) CORRETA(S) a(s) proposição(ões):

a) II apenas.

b) I e II apenas.

c) II e III apenas.

d) I e III apenas.

Comentários:

A proposição I corresponde exatamente à definição de fatorial: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots 3 \times 2 \times 1$

A proposição II também está correta, pois $0! = 1$.

A proposição III está incorreta, pois $1! = 1$.

Ou seja, estão corretas apenas as proposições I e II.

Gabarito: B

(2018 – Prefeitura de Uruçuí/PI) A simplificação da expressão a seguir é: $\frac{200!}{198!}$

a) 200

b) 198!

c) 38.800

d) 39.800

Comentários:

Podemos escrever 200! como 200! = 200 x 199 x 198!. Assim, temos:

$$\frac{200!}{198!} = \frac{200 \times 199 \times 198!}{198!} = 200 \times 199 = 39.800$$

Gabarito: D

PERMUTAÇÃO

Informalmente, podemos dizer que **permutar** significa **trocar de lugar**.

Ao trocar elementos de lugar, a **ordem** desses elementos se **modifica**. Por isso, podemos dizer que as técnicas de permutação permitem calcular as **diferentes possibilidades** de se **ordenar** elementos.

Permutação Simples

Na permutação simples, os elementos a serem ordenados são todos **distintos** entre si.

Digamos que 3 alunos (Ana, Beto e Caio), de um grupo de estudo, serão avaliados e, em seguida, ranqueados de acordo com o resultado da sua avaliação. Supondo que não há empates, de quantas formas esses alunos podem ser ranqueados?

Como o exemplo é pequeno poderíamos relacionar e contar todas as possibilidades, mas vamos experimentar uma outra forma de resolver: encontrando o **número de possibilidades** para **cada posição**:

___	___	___
1º	2º	3º

Quais são os alunos que podem ficar em primeiro lugar? Qualquer um deles (Ana, Beto ou Caio) **pode** ficar em primeiro lugar. Portanto, temos 3 possibilidades para o primeiro lugar.

E para o segundo lugar? Bem, sabendo que alguém ficará em primeiro lugar, restarão 2 possibilidades para o segundo colocado.

E para o terceiro lugar, sabendo que alguém ficará em primeiro lugar e outro ficará em segundo lugar, restará apenas uma possibilidade para o terceiro lugar.

3	2	1
1º	2º	3º

Como são eventos concomitantes, pois alguém ficará em primeiro lugar, outra pessoa ficará em segundo **E** outra em terceiro, devemos **multiplicar** as possibilidades de cada evento, pelo princípio multiplicativo:

$$3 \times 2 \times 1$$

Poderíamos ter começado o raciocínio por qualquer posição, que o resultado seria o mesmo.

Como assim "sobrarão" 2 possibilidades para o 2º colocado e 1 possibilidade para o 3º colocado?

ESCLARECENDO!

Para a 1ª posição, **todos** os 3 alunos estão disponíveis:

3		
1º	2º	3º

Para cada uma dessas 3 possibilidades, teremos ordenações **diferentes**, dependendo do 2º e 3º lugares. Por exemplo, mantendo Ana em 1º lugar, temos Ana, Beto e Caio ou Ana, Caio e Beto.

Sabendo que não é possível que o mesmo aluno ocupe mais de uma posição, então há **apenas 2 possibilidades** para a 2ª posição, uma vez que um dos alunos terá ocupado a 1ª.

Por isso, dizemos que o aluno da 1ª posição "**já foi escolhido**" e assim sobrarão apenas 2 alunos para a 2ª posição:

3	2	
1º	2º	3º

Da mesma forma, só haverá 1 aluno que não terá ocupado nem a primeira nem a segunda posição, logo ele irá ocupar a terceira posição. Por isso, dizemos que, "**após a escolha**" do 1º e do 2º colocados, sobrará apenas 1 aluno para a 3ª posição:

3	2	1
1º	2º	3º

Por fim, multiplicamos todas essas possibilidades (princípio multiplicativo) para encontrar a quantidade de maneiras de ordenar todos os 3 elementos.

E se houvesse 4 alunos? Quais seriam as possibilidades de ordenação? Nesse caso, teríamos 4 possibilidades para o primeiro lugar; 3 para o segundo lugar; 2 para o terceiro e 1 para o quarto:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1$$

E para 10 alunos? Teríamos 10 possibilidades para o primeiro lugar, 9 para o segundo, depois 8, depois 7... até sobrar 1 possibilidade para o décimo lugar:

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Assim, a posição seguinte terá sempre **uma** possibilidade **a menos** do que a posição anterior.

Para n alunos, temos:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

Lembrou de algo? Essa é a fórmula do **fatorial**!

Portanto, a **permutação simples** de **n** elementos distintos, que representamos como $\boldsymbol{P_n}$, que corresponde ao número de possibilidades de **ordenar n** elementos **distintos**, é:

$$\boldsymbol{P_n = n!}$$

Reforçando, a **permutação simples** pode ser utilizada para calcular todas as possibilidades de se **reordenar** elementos, sejam letras de uma sigla (formando anagramas distintos), algarismos em um número (formando números distintos), etc., desde que os elementos sejam **todos distintos**.

(FGV/2019 – Prefeitura de Salvador/BA) Trocando-se a ordem das letras da sigla PMS de todas as maneiras possíveis, obtêm-se os anagramas dessa sigla. O número desses anagramas é:

a) 16.

b) 12.

c) 9.

d) 8.

e) 6.

Comentários:

Considerando que todas as 3 letras de PMS são distintas, o número de anagramas, ou seja, de formas de se reordenar essas letras é a permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Gabarito: E

(VUNESP/2018 – PM/SP) Em um armário, há 5 prateleiras e será preciso colocar 5 caixas, de cores distintas, cada uma em uma prateleira desse armário, sem que haja uma ordem específica. O número total de maneiras de colocar essas caixas nesse armário é

a) 25.

b) 60.

c) 95.

d) 120.

e) 165.

Comentários:

Por se tratar de caixas distintas, a serem alocadas em determinada ordem, temos uma permutação de 5 elementos:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Gabarito: D.

(CESPE 2018/EBSERH) Julgue o próximo item, a respeito de contagem.

Se a enfermaria de um hospital possuir cinco leitos desocupados e se cinco pacientes forem ocupar esses leitos, então haverá mais de 100 formas diferentes de fazer essa ocupação.

Comentários:

Considerando que temos 5 leitos para serem ocupados por 5 pacientes, temos uma permutação de 5 elementos:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Logo, há mais de 100 formas de fazer essa ocupação.

Gabarito: Certo.

(CESPE 2016/CBM-DF) Para atender uma grave ocorrência, o comando do corpo de bombeiros acionou 15 homens: 3 bombeiros militares condutores de viatura e 12 praças combatentes, que se deslocaram em três viaturas: um caminhão e duas caminhonetes. Cada veículo transporta até 5 pessoas, todas sentadas, incluindo o motorista, e somente os condutores de viatura podem dirigir uma viatura. Com relação a essa situação, julgue o item seguinte.

A quantidade de maneiras distintas de se distribuir os condutores de viatura para dirigir os veículos é superior a 5.

Comentários:

Considerando que há 3 condutores para 3 veículos, a quantidade de maneiras de organizá-los corresponde a uma permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Logo, a quantidade de maneiras é superior a 5.

Gabarito: Certo.

Permutação Simples com Restrição

É possível que algumas questões de permutações imponham determinadas **restrições**. Nesses casos, nem todos os elementos poderão permutar livremente, o que exige mais atenção para resolver a questão.

Por exemplo, vamos considerar que há 8 elementos distintos a serem ordenados, por exemplo, os algarismos {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. Vamos representar as opções de ordenação com os espaços abaixo.

Suponha que o número 1 esteja **fixo** na primeira posição e o número 8, na oitava posição:

1							8

Sendo assim, restarão os algarismos 2 a 7 (ou seja, um total de **6 algarismos**) para serem ordenados nos **6 espaços** restantes. Dessa forma, teremos uma permutação de 6 elementos em 6 posições:

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Poderíamos ter **fixado quaisquer 2 algarismos** em quaisquer 2 posições, que continuaríamos com a **permutação dos 6 algarismos restantes**, nos 6 espaços restantes. Portanto, o número de possibilidades de ordená-los seria o mesmo.

De modo geral, havendo **n elementos**, dos quais **p** estejam **fixos em determinadas posições**, fazemos a **permutação** de **n – p** elementos:

$$\mathbf{P_{n-p} = (n - p)!}$$

Um exemplo sutilmente **diferente** seria se esses dois algarismos fossem posicionados nos **extremos**, mas **sem fixar** qual irá ocupar a primeira posição e qual irá ocupar a última posição.

Assim, poderíamos ter o número 1 na primeira posição e o número 8 na oitava; **ou** o número 8 na primeira posição e o número 1 na oitava:

1							**8**

8							**1**

Nesse caso, para cada uma das 720 possibilidades de permutar os algarismos de 2 a 7 nas posições intermediárias, calculadas anteriormente, há **2 possibilidades distintas** de posicionar os extremos.

Pelo princípio **multiplicativo**, devemos multiplicar as possibilidades desses dois eventos:

$$2 \times P_6 = 2 \times 720 = 1440$$

Na verdade, essas **2 possibilidades** de alocar esses 2 algarismos, 1 e 8, nas 2 posições extremas correspondem à **permutação** desses 2 elementos.

Assim, podemos representar o número de maneiras de se ordenar os 8 algarismos, nessas condições, como:

$$P_2 \times P_6$$

Em outras palavras, podemos tratar como **duas permutações em separado**: uma com os 2 elementos que ocuparão as posições extremas; e a outra com os 6 elementos que ocuparão as posições não extremas.

E para ordenar **todos** os 8 elementos, **multiplicamos** esses resultados (princípio multiplicativo).

Com isso, podemos resolver outros problemas que indiquem determinadas posições a certos elementos, **sem fixar** a posição específica de cada um.

Por exemplo, vamos supor que os 3 primeiros algarismos tenham que ocupar as 3 primeiras posições, em **qualquer ordem**; e os demais algarismos, as demais posições, também em qualquer ordem:

$\underbrace{\qquad\qquad}_{1,\ 2 \text{ e } 3}$ $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{4,\ 5,\ 6,\ 7 \text{ e } 8}$

Nesse caso, temos a permutação de **3 elementos** nas 3 primeiras posições e de **5 elementos** nas demais posições.

Pelo princípio **multiplicativo**, o número de ordenações possíveis é:

$$P_3 \times P_5 = 3! \times 5! = 3 \times 2 \times 1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Agora, vamos supor que os algarismos ímpares tenham que ocupar posições ímpares e os algarismos pares, posições pares, como ilustrado abaixo:

I	P	I	P	I	P	I	P

Também vamos resolver esse caso com **2 permutações em separado**.

Em relação aos **ímpares**, temos 4 algarismos para 4 posições, logo, temos uma permutação de **4 elementos**:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Em relação aos **pares**, temos 4 algarismos para 4 posições, logo, temos outra permutação de **4 elementos**:

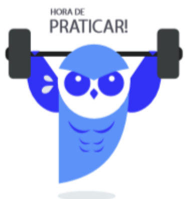
$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Pelo princípio **multiplicativo**, o número de maneiras de ordenar todos esses 8 algarismos é:

$$24 \times 24 = 576$$

Em geral, havendo **n** elementos, dos quais **p** estejam **designados a determinadas posições**, mas **sem fixar** a posição específica de cada um, fazemos a permutação de **n – p** elementos e **multiplicamos** pela permutação de **p** elementos:

$$P_{n-p} \times P_p = (n-p)! \times p!$$



(FCC/2019 – Analista Judiciário do TRF 3ª Região) Em um concurso com 5 vagas, os candidatos aprovados serão alocados, cada um, em um dos municípios A, B, C, D ou E. O primeiro colocado foi designado para o município A. O número de possíveis alocações dos outros candidatos aprovados é

a) 30

b) 4

c) 120

d) 24

e) 6

Comentários:

Essa questão trabalha com a permutação de 5 elementos, com um deles fixo.

Considerando que 1 dos candidatos está **fixo** no município A, restam 4 candidatos para serem alocados em 4 municípios (B, C, D ou E). Portanto:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Gabarito: D.

(CESPE 2018/BNB) Em um navio, serão transportados 10 animais, todos de espécies diferentes. Antes de serem colocados no navio, os animais deverão ser organizados em uma fila. Entre esses 10 animais, há um camelo, um elefante e um leão. A respeito da organização dessa fila, julgue o item subsequente.

Existem 8! maneiras distintas de organizar essa fila de forma que o camelo fique na primeira posição e o elefante fique na sexta posição.

Comentários:

A questão pede para organizarmos uma fila de 10 animais, de forma que o camelo (C) fique na primeira posição e o elefante (E), na sexta:

C					E				

Como esses elementos estão **fixos** em posições específicas, basta reordenarmos os **demais elementos**.

Logo, o número de maneira de organizarmos essa fila corresponde à permutação de 10 – 2 = 8 elementos:

$$P_8 = 8!$$

Gabarito: Certo.

(CESPE 2018/BNB) Em um navio, serão transportados 10 animais, todos de espécies diferentes. Antes de serem colocados no navio, os animais deverão ser organizados em uma fila. Entre esses 10 animais, há um camelo, um elefante e um leão.

A respeito da organização dessa fila, julgue o item subsequente.

Existem 3 × 7! maneiras distintas de organizar essa fila de forma que o elefante, o camelo e o leão fiquem nas três primeiras posições, não necessariamente nessa ordem.

Comentários:

Agora, desejamos organizar a fila de forma que os 3 animais (Elefante, Camelo e Leão) fiquem nas 3 primeiras posições, em **qualquer ordem**. Consequentemente, os outros 10 – 3 = 7 animais ocuparão as outras 7 posições, em qualquer ordem:

$$\underbrace{\square\,\square\,\square}_{\text{Elefante, Camelo, Leão}}\ \Big|\ \underbrace{\square\,\square\,\square\,\square\,\square\,\square\,\square}_{\text{Outros 7 animais}}$$

O número de formas de organizar os 3 animais corresponde a uma permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3!$$

O número de formas de organizar os outros 7 animais equivale a uma permutação de 7 elementos:

$$P_7 = 7!$$

Pelo princípio multiplicativo, multiplicamos esses resultados para obter o número de maneiras possíveis de organizar toda a fila:

$$\text{Número de possibilidades} = 3! \times 7!$$

Esse resultado é **diferente** do valor informado no item, qual seja, 3 × 7!, logo, o item está errado. Aliás, como 3! = 3 x 2, o nosso resultado é o **dobro** do que consta no item da questão.

Gabarito: Errado.

Vejamos mais uma ferramenta para resolver problemas de **permutação simples com restrição**.

Vamos supor que os algarismos 1 e 2 tenham que ficar **sempre juntos**, **nessa ordem**.

Nesse caso, tratamos esses 2 algarismos como **elemento único**, que podemos chamar de **A**. Assim, em vez de 8 elementos {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8}, ordenaremos apenas **7 elementos** {A, 3, 4, 5, 6, 7 e 8}:

$$P_7 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5.040$$

Portanto, a quantidade de maneiras de ordenar 8 elementos, de modo que 2 estejam sempre **juntos** em uma **determinada ordem**, corresponde à **permutação de 7 elementos**.

Se houvesse 3 elementos **juntos** em **determinada ordem**, {1, 2 e 3}, chamaríamos os 3 elementos de A, e calcularíamos a permutação dos **outros 5 elementos acrescido do elemento A**, o que corresponde à permutação de **6 elementos** {A, 4, 5, 6, 7 e 8}.

De modo geral, havendo **n elementos**, dos quais **j** devam ficar **juntos em determinada ordem**, fazemos a **permutação** de **n – j + 1** elementos:

$$\mathbf{P_{n-j+1} = (n - j + 1)!}$$

E se os elementos tivessem que ficar **juntos**, mas em **qualquer ordem**?

Nesse caso, o **início** da solução é similar, isto é, chamamos esses elementos de um **único elemento**, **A**, e fazemos a **permutação** do elemento **A** com os demais elementos.

Por exemplo, se os algarismos {1, 2 e 3} tivessem que ficar juntos, mas em qualquer ordem, dentre os 8 algarismos, faríamos a permutação dos 6 elementos {A, 4, 5, 6, 7 e 8}:

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Porém, para **cada uma** dessas 720 possibilidades de ordenar os elementos {A, 4, 5, 6, 7 e 8}, os algarismos {1, 2 e 3} pode aparecer como:

... 1 2 3 ...	... 1 3 2 ...	... 2 1 3 ...
... 2 3 1 ...	... 3 1 2 ...	... 3 2 1 ...

Em outras palavras, para cada uma das possibilidades que calculamos anteriormente, temos diferentes formas de **ordenar os 3 elementos**.

Como calculamos as diferentes formas de **ordenar 3 elementos**? Pela **permutação** de 3 elementos!

Logo, para calcular o número de maneiras de organizar **todos** os 8 elementos nessas condições, devemos **multiplicar** o resultado anterior pela permutação de **3 elementos** (princípio multiplicativo):

$$P_6 \times P_3 = 6! \times 3! = 720 \times 6 = 4320$$

De modo geral, havendo **n** elementos, dos quais **j** elementos devem ficar **juntos em qualquer ordem**, fazemos a permutação de **n – j + 1** elementos e **multiplicamos** pela permutação de **j** elementos:

$$P_{n-j+1} \times P_j = (n - j + 1)! \times j!$$

RESUMINDO

Na permutação simples com restrição, podemos (i) designar **posições** para determinados elementos ou (ii) determinar elementos a permanecerem **juntos**.

i) Quando designamos **posições**, devemos permutar os demais elementos.

i.a) Havendo p elementos **fixos** em determinadas posições, dentre n elementos no total, devemos permutar **n – p** elementos:

$$P_{n-p} = (n - p)!$$

i.b) Caso os p elementos possam ser **reordenados** dentre as posições designadas, devemos **multiplicar** o resultado anterior pela permutação de p elementos:

$$P_{n-p} \times P_p = (n - p)! \times p!$$

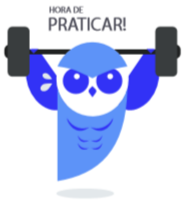
ii) Quando determinamos elementos devem permanecer **juntos**, devemos considerá-los como **elementos único** e permutar esse novo elemento junto aos demais.

ii.a) Havendo **j** elementos que deverão permanecer **juntos em determinada ordem**, dentre n elementos no total, devemos permutar os demais **n – j** elementos acrescidos de **1** unidade, a qual corresponde ao **conjunto** dos j elementos:

$$P_{n-j+1} = (n - j + 1)!$$

i.b) Se os **j** elementos, que deverão permanecer juntos, puderem ser **reordenados** entre si, devemos **multiplicar** o resultado anterior pela permutação de **j** elementos:

$$P_{n-j+1} \times P_j = (n - j + 1)! \times j!$$



(FGV/2017 – Prefeitura de Salvador/BA) Três casais vão ocupar seis cadeiras consecutivas de uma fila do cinema, e os casais não querem sentar separados. Assinale a opção que indica o número de maneiras diferentes em que esses três casais podem ocupar as seis cadeiras.

a) 6.

b) 12.

c) 24.

d) 36.

e) 48.

Comentários:

Primeiro, vamos tratar cada casal como elemento único. Assim, temos a permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Uma vez definida a ordem entre os casais, é necessário que cada casal decida a sua ordem.

Assim, para cada uma dessas 6 possibilidades de ordem entre os casais, há $P_2 = 2$ possibilidades de cada um dos três casais se organizarem:

$$6 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$$

Gabarito: E

(CESPE 2018/BNB) Em um navio, serão transportados 10 animais, todos de espécies diferentes. Antes de serem colocados no navio, os animais deverão ser organizados em uma fila. Entre esses 10 animais, há um camelo, um elefante e um leão.

A respeito da organização dessa fila, julgue o item subsequente.

Existem 7 × 7! maneiras distintas de organizar essa fila de forma que o elefante, o camelo e o leão estejam sempre juntos, mantendo-se a seguinte ordem: leão na frente do camelo e camelo na frente do elefante.

Comentários:

Para organizar uma fila de 10 animais, de modo que o leão, o camelo e o elefante apareçam sempre nessa ordem, podemos tratá-lo como elemento único.

Assim, o número de formas de organizar os outros 10 – 3 = 7 animais e **mais** esse trio corresponde a uma permutação de 8 elementos:

$$P_8 = 8! = 8 \times 7!$$

Esse resultado é diferente de **7** x 7!, descrito no item.

Gabarito: Errado.

(CESPE 2018/BNB) Julgue o próximo item, relativo a análise combinatória e probabilidade.

A quantidade de números naturais distintos, de cinco algarismos, que se pode formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, de modo que 1 e 2 fiquem sempre juntos e em qualquer ordem, é inferior a 25.

Comentários:

A quantidade de números que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 corresponde a uma permutação desses elementos. Para que os números 1 e 2 fiquem sempre juntos, podemos considerá-lo com elemento único. Assim, temos uma permutação de 4 elementos:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Porém, para cada uma dessas 24 maneiras de organizar os algarismos 3, 4, 5 e o elemento 1-2, podemos ter 1 primeiro e depois 2, ou 2 primeiro e depois 1. Logo, pelo princípio **multiplicativo**, devemos multiplicar esse resultado pela permutação de 2 elementos $P_2 = 2! = 2$:

Quantidade de números possíveis = 24 x 2 = 48

Essa quantidade é **superior** a 25.

Gabarito: Errado.

Permutação com Repetição

Na permutação **simples**, todos os elementos são **distintos**.

Por exemplo, se houver 3 elementos {A, B, C}, há $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades de ordená-los. São elas:

i) A B C   ii) A C B   iii) B A C   iv) B C A   v) C A B   vi) C B A

Agora, vamos supor que, em vez C, haja um **segundo elemento** A. Vamos escrever novamente as 6 possibilidades descritas acima, porém substituindo C por um segundo A:

I) A B A   II) A A B   III) B A A   IV) B A A   V) A A B   VI) A B A

Agora, a ordem descrita em I é igual à ordem em VI; a ordem em II é igual à ordem em V; e a ordem em III é igual à ordem em IV. Portanto, temos apenas 3 possibilidades **distintas** de ordenar os elementos {A, A, B}:

I) A B A   II) A A B   III) B A A

Ou seja, quando há **elementos repetidos**, o número de possibilidades distintas de ordenação **diminui**.

Mas, por quê? O que aconteceu?

Bem, a redução ocorreu porque na opção i da **primeira** permutação, os elementos A e C estavam **invertidos** em relação à opção vi, enquanto **todo o restante se manteve igual**. Por isso, na **segunda** permutação, essas opções se tornaram uma **única** opção. O mesmo ocorreu com as opções ii e v; e com as opções iii e iv.

Em outras palavras, precisamos **dividir** o resultado da primeira permutação pelo número de vezes em que A e C **trocam de posição**.

E como calculamos a quantidade de maneiras em que elementos trocam de posição? Pela **permutação**!

Portanto, na permutação com repetição, **dividimos** a permutação **simples** pela permutação dos elementos **repetidos**. Indicamos essa permutação de **3** elementos com **repetição de 2** elementos por P_3^2:

$$P_3^2 = \frac{P_3}{P_2} = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \times 2!}{2!} = \frac{3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 3$$

Assim, se tivéssemos 5 elementos distintos para permutar, teríamos **P_5 = 5!**. Havendo **3 elementos iguais**, dentre esses 5, dividimos esse resultado pela **permutação dos 3** elementos **P_3 = 3!**:

$$P_5^3 = \frac{P_5}{P_3} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \mathbf{3!}}{\mathbf{3!}} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 5 \times 4 = 20$$

E se além de um elemento repetido, tivéssemos **outro elemento repetido**? Por exemplo, {A, A, B, B, B, C, D}.

Vamos pensar em etapas: primeiro calculamos a permutação simples dos 7 elementos, como se fossem distintos: P_7 = 7!. Em seguida, consideramos que o elemento A está repetido 2 vezes e dividimos pela permutação de 2 elementos: P_2 = 2!. Por fim, consideramos que o elemento B está repetido 3 vezes e dividimos novamente pela permutação de 3 elementos: P_3 = 3!:

$$\boldsymbol{P_7^{2,3}} = \frac{P_7}{P_2 \times P_3} = \frac{7!}{2! \times 3!}$$

$$P_7^{2,3} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \mathbf{3!}}{2 \times \mathbf{3!}} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{2 \times \cancel{3!}} = 7 \times 3 \times 5 \times 4 = 420$$

Ou seja, na permutação com mais de um elemento repetido, **dividimos** a permutação **simples** pelas permutações dos elementos **repetidos**.

De modo geral, sendo n elementos **totais**, com $m_1, m_2, \ldots, m_k$ elementos distintos **repetidos**, a permutação desses elementos é dada por:

$$\boldsymbol{P_n^{m_1, m_2, \ldots, m_k}} = \frac{n!}{m_1! \times m_2! \times \ldots \times m_k!}$$

(VUNESP/2019 – Prefeitura de Cerquilho/SP) Com as letras, A, B e C, é possível fazer seis agrupamentos diferentes de três letras: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Se as três letras fossem A, A e B, só poderiam ser feitos três desses agrupamentos diferentes: AAB, ABA, BAA. Com as letras F, F, G e G, o número de agrupamentos diferentes de quatro letras é

a) 6.

b) 8.

c) 10.

d) 12.

e) 16.

Comentários:

A quantidade de agrupamentos com as letras F, F, G e G corresponde à permutação de 4 elementos, com 2 repetições de F e 2 repetições de G:

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

Gabarito: A.

(FGV/2018 – ALE-RO) Assinale a opção que indica o número de permutações das letras da palavra SUSSURRO

a) 1680

b) 1560

c) 1440

d) 1320

e) 1260

Comentários:

A palavra SUSSURRO contém 8 letras, sendo o S repetido 3 vezes, o U repetido 2 vezes e o R repetido 2 vezes.

Assim, temos a permutação de 8 elementos com repetição de 2, 2 e 3 elementos:

$$P_8^{2,2,3} = \frac{8!}{2! \times 2! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 2 \times 3!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$$

Gabarito: A

(FCC/2015 – Professor da Secretaria de Educação/ES) O número de anagramas que podem ser obtidos utilizando as letras da palavra VITÓRIA, e que terminam com uma consoante é igual a

a) 2520

b) 1080

c) 840

d) 5040

e) 1980

Comentários:

Na palavra VITÓRIA, há **7 letras**:

____	____	____	____	____	____	____
1	2	3	4	5	6	7

i) Para terminar com uma consoante, há 3 possibilidades para essa posição, todas distintas:

						3
1	2	3	4	5	6	7

ii) As outras 6 letras podem permutar livremente pelas 6 posições restantes. Considerando que dessas 6, há 2 elementos repetidos (letra I), temos:

$$P_6^2 = \frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

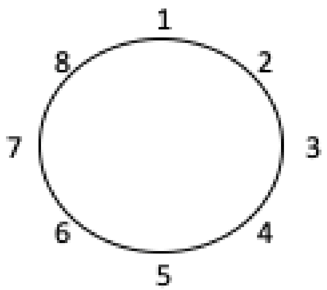
Pelo princípio **multiplicativo**, o número de possibilidades, no total, é:

3 **x** 360 = 1080

Gabarito: B.

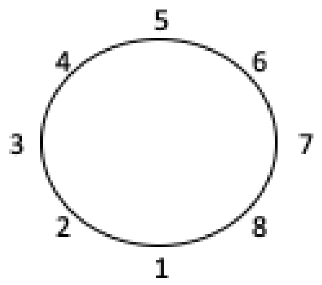
Permutação Circular

Na permutação circular, considera-se que os elementos estão dispostos em um **círculo**.

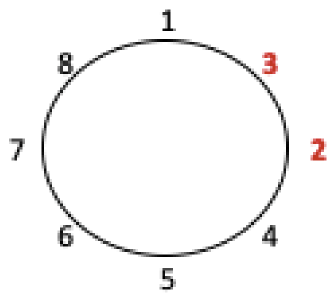


No círculo, considera-se que **não** há posições **fixas** (primeiro lugar, segundo, terceiro, ..., ou tampouco referências como acima, abaixo, à direita ou à esquerda).

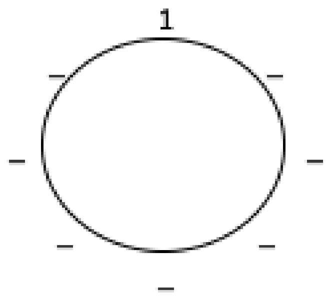
A figura a seguir representa a **mesma** disposição daquela indicada na figura acima, como se tivéssemos **girado** o círculo 180º, mantendo todos os elementos na **mesma posição**:



A disposição varia somente com a mudança da posição de algum elemento em **relação aos demais.** A figura abaixo representa uma disposição **diferente**, haja vista a **troca** dos elementos 2 e 3.



Para calcular a quantidade de disposições distintas, podemos **fixar** (qualquer) **um** dos elementos, por exemplo, o elemento 1, em qualquer posição:



Agora sim, as posições de **todos** os outros elementos irão **importar** porque elas serão **relativas** ao elemento 1 fixado. Portanto, calculamos a **permutação simples** para os **demais** elementos (no caso, os 7):

$$P_7 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5.040$$

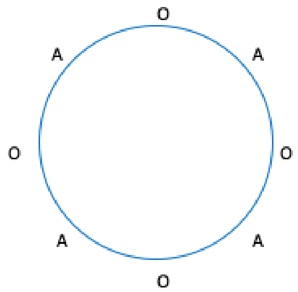
Em geral, como **fixamos um** dos elementos, a permutação circular de $\boldsymbol{n}$ elementos, indicada por $\boldsymbol{PC_n}$, é:

$$\boldsymbol{PC_n = (n-1)!}$$

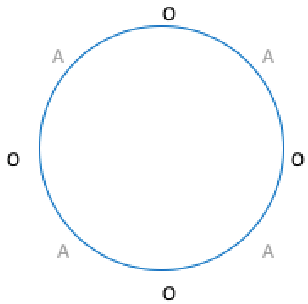
Permutação Circular com Restrições

É possível que uma permutação **circular** apresente **restrições**.

Por exemplo, suponha que haja 4 meninos (O) e 4 meninas (A) para se sentarem a uma mesa circular, de forma que todo menino esteja entre duas meninas (e, portanto, toda menina esteja entre dois meninos), como indicado abaixo.



Nesse tipo de situação, resolvemos o problema em **2 etapas**: primeiro sentamos os meninos e, depois, as meninas (ou vice-versa). Para sentarmos os 4 meninos, há 4 posições possíveis:



Nessa primeira etapa, temos uma **permutação circular**, em que **fixamos** a posição de **um** deles e calculamos a permutação dos demais:

$$PC_n = (n-1)!$$

$$PC_4 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Na segunda etapa, vamos sentar as 4 meninas. Nesse caso, **todas** as posições são **diferentes**, pois já temos meninos sentados, de modo que a posição de **todas as meninas** importa.

Assim, temos a **permutação simples** de 4 elementos:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Portanto, para cada uma das 6 possibilidades de se posicionar os meninos, há 24 possibilidades de posicionar as meninas. Pelo princípio **multiplicativo**, devemos multiplicar as possibilidades desses eventos:

$$6 \times 24 = 144$$

(2019 – Prefeitura de Ibiaçá/RS) O número máximo de maneiras distintas que um grupo de cinco amigos pode se sentar ao redor de uma mesa circular para realizar um lanche coletivo é:

a) 120

b) 50

c) 24

d) 12

e) 1

Comentários:

A permutação circular de n = 5 elementos é dada por:

$$PC_n = (n-1)!$$

$$PC_5 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Gabarito: C

(2016 – Prefeitura de Ouricuri/PE) De quantas maneiras possíveis podemos dispor nove crianças em um círculo em que todas brincam de mãos dadas?

a) 9!

b) 8!

c) 7!

d) 6!

e) 5!

Comentários:

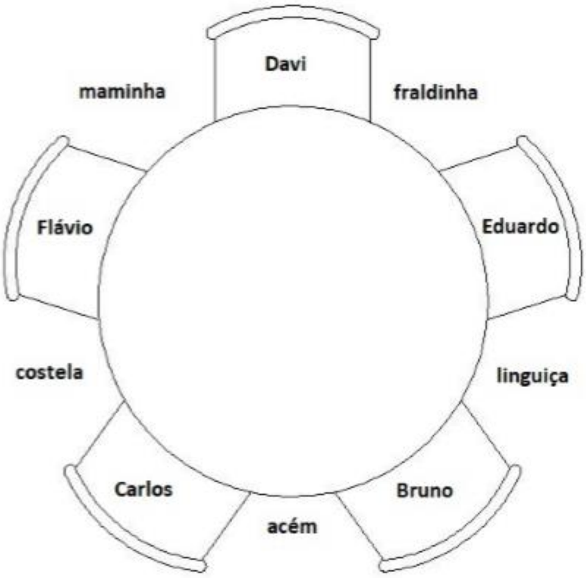
A permutação circular de n = 9 elementos é dada por:

$$PC_n = (n-1)!$$

$$PC_9 = 8!$$

Gabarito: B

(2017 – Companhia de Desenvolvimento Habitacional/DF)



Bruno, Carlos, Davi, Eduardo e Flávio são amigos e jantam em uma churrascaria. Na mesa circular em que se encontram, há 5 cadeiras idênticas, equidistantes duas a duas, e 5 espaços entre cada par de cadeiras para os garçons servirem carnes: acém; costela; fraldinha; linguiça; e maminha. A figura acima ilustra uma possível configuração da mesa, com os 5 amigos e as 5 carnes do rodízio. Sabe-se que as carnes preferidas de Bruno são costela e acém e Davi prefere fraldinha.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item a seguir.

O número possível de configurações da mesa, contando que os 5 amigos estejam sentados e as 5 carnes estejam entre cada par de cadeiras, é maior que 3.000.

Comentários:

Vamos resolver essa questão em 2 etapas. Primeiro, sentamos os 5 amigos e, em seguida, colocamos as 5 carnes (ou vice-versa).

Para sentar os 5 amigos em uma mesa redonda, podemos sentar um amigo em qualquer posição e, em seguida, permutar os demais:

$$PC_5 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Ao colocarmos as 5 carnes, a posição de todas elas importam, pois elas estarão entre amigos distintos. Portanto, temos a permutação simples de 5 elementos:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Portanto, para cada 24 possibilidades de sentar os amigos, há 120 possibilidades de colocar as carnes. Pelo princípio **multiplicativo**, as possibilidades desses eventos devem ser multiplicadas:

$$24 \times 120 = 2.880$$

Como 2.880 é menor que 3.000, o item está errado.

Gabarito: Errado

OUTROS TIPOS DE PERMUTAÇÃO

Nesta seção, veremos tipos de permutação mais complexos e menos frequentes nas provas de concursos, quais sejam, a permutação com **elementos ordenados** e a permutação **caótica** (ou **desarranjo**).

Permutação com Elementos Ordenados

Na permutação com elementos ordenados, determinados elementos devem **seguir uma ordem** definida, não podendo ser permutados livremente.

Vamos considerar o exemplo do grupo de estudo dos 3 alunos Ana, Beto e Caio. De quantas maneiras, podemos ordená-los, de acordo com as suas notas (sem empates), sabendo que a **nota da Ana foi maior do que a nota do Beto**?

Para responder, vamos primeiro relacionar todas as possibilidades, ignorando essa restrição (sabemos que são $P_3 = 3! = 6$ possibilidades):

i) Ana, Beto, Caio

ii) Ana, Caio, Beto

iii) Beto, Ana, Caio

iv) Beto, Caio, Ana

v) Caio, Ana, Beto

vi) Caio, Beto, Ana

Agora vamos eliminar as possibilidades em que Beto está à frente de Ana (ordem incorreta):

i) Ana, Beto, Caio

ii) Ana, Caio, Beto

~~iii) Beto, Ana, Caio~~

~~iv) Beto, Caio, Ana~~

v) Caio, Ana, Beto

~~vi) Caio, Beto, Ana~~

Claramente, há uma **redução** das ordenações possíveis, em relação à permutação simples. *Mas por quê?*

Na permutação simples, se mantivermos constantes as posições dos **demais** elementos, haverá sempre uma opção em que Ana fica à frente de Beto e outra em que Beto ficará à frente de Ana. Entretanto, apenas uma dessas opções atende à restrição de ordenação.

Por esse motivo, precisamos **dividir** o resultado pelo número de vezes em que os elementos ordenados **trocam de posição**.

Já sabemos como fazer isso! Dividindo a permutação simples pela permutação dos **elementos ordenados**!

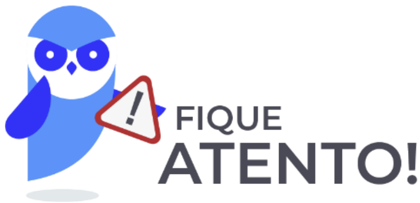
Nesse exemplo, dividimos P_3 por P_2:

$$\frac{P_3}{P_2} = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \times 2!}{2!} = 3$$

De maneira geral, havendo n elementos, dos quais k elementos devem respeitar uma **ordem específica**, o número de possibilidades de ordená-los é:

$$\frac{P_n}{P_k} = \frac{n!}{k!}$$

Esta fórmula é **igual** à da permutação **com repetição**!



Na permutação com **elementos ordenados**, os elementos **não** devem ser necessariamente **consecutivos**.

No exemplo em que a ordenação foi Ana > Beto, aceitamos a opção ii (Ana, Caio, Beto), sem que Ana e Beto estivessem em posições consecutivas.

Se o problema apontar que dois elementos estejam **em determinada ordem** e que sejam **consecutivos**, então será necessário tratá-lo como elemento **único**.

Em geral, havendo k_1 elementos que devam seguir uma ordem e outros k_2 elementos que devam seguir outra ordem, dividimos a permutação dos n elementos pela permutação de k_1 e de k_2 (o que também é similar à permutação com repetição):

$$\frac{P_n}{P_{k_1} \times P_{k_2}} = \frac{n!}{k_1! \times k_2!}$$

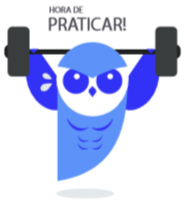
Por exemplo, vamos supor a palavra ORDEM. O número de anagramas que podem ser formados de modo que as letras ORD estejam sempre nesta ordem, assim como as letras EM, corresponde a uma permutação de 5 elementos, de modo que 3 elementos sigam uma ordem e outros 2 elementos sigam uma ordem:

$$\frac{P_5}{P_3 \times P_2} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 5 \times 2 = 10$$

Para ilustrar, vejamos quais são essas 10 possibilidades:

i. ORDEM
ii. OREDM
iii. OERDM
iv. EORDM
v. OREMD
vi. OERMD
vii. EORMD
viii. OEMRD
ix. EOMRD
x. EMORD

Essa fórmula pode ser estendida para qualquer número de ordenações necessárias.



(FCC/2014 – TRF 3ª Região) Álvaro, Benedito, Cléber e outros dois amigos participam de uma corrida. Se apenas os cinco participaram dessa corrida, o número de possibilidades diferentes de maneira que Álvaro chegue antes que Benedito e este, por sua vez, chegue antes de Cléber é igual a:

a) 20

b) 24

c) 18

d) 22

e) 26

Comentários:

Há n = 5 elementos, dos quais k = 3 elementos estão ordenados: Álvaro > Benedito > Cléber. Portanto, temos:

$$\frac{P_n}{P_k} = \frac{n!}{k!}$$

$$\frac{P_5}{P_3} = \frac{5!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

Gabarito: A.

Permutação Caótica ou Desarranjo

Na permutação caótica ou desarranjo, considera-se que os elementos estão originalmente ordenados de certa maneira e que **nenhum** deles pode retornar para a sua posição **original**.

Vamos supor que 3 elementos {A, B, C} estejam originalmente posicionados nesta ordem, isto é, A em primeiro lugar, B em segundo lugar e C em terceiro lugar. Agora, vamos reordenar esses elementos, de modo que nenhum deles retorne à sua posição original.

Como o elemento A estava em primeiro lugar, ele poderá ocupar o 2º ou o 3º lugar:

- **A em 2º lugar: __ A __**
  - Como o elemento **C** estava em 3º lugar originalmente, ele terá que ocupar o **1º lugar**
  - Assim, resta a **3ª posição** para o elemento **B**

  Possível ordenação: C A B

- **A em 3º lugar: __ __ A**
    - Como o elemento **B** estava em 2º lugar originalmente, ele terá que ocupar o **1º lugar**
    - Assim, resta a **2ª posição** para o elemento **C**

    Possível ordenação: B C A

Portanto, há **2 possibilidades** de permutação caótica para esse exemplo.

Para calcular o número de possibilidades em uma permutação caótica (ou desarranjo) de $\boldsymbol{n}$ elementos, utiliza-se a seguinte fórmula:

$$\boldsymbol{D_n} = \boldsymbol{n}! \times \left[\frac{\mathbf{1}}{0!} - \frac{\mathbf{1}}{1!} + \frac{\mathbf{1}}{2!} - \frac{\mathbf{1}}{3!} + \cdots + \frac{(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}!}\right]$$

Calma! Vamos juntos tentar digerir essa fórmula.

Observe que os denominadores das frações são **fatoriais** de 0 até $\boldsymbol{n}$ (total de elementos) e que os sinais das frações vão se alternando: quando o denominador é o fatorial de um número **par**, o sinal é **positivo**, quando o denominador é o fatorial de um número **ímpar**, o sinal é **negativo**.

Como não sabemos se $\boldsymbol{n}$ é par ou ímpar, utilizamos a expressão $(-1)^n$. Assim, quando $\boldsymbol{n}$ é par, $(-1)^n = +1$, e o sinal da fração é positivo; quando $\boldsymbol{n}$ é ímpar, $(-1)^n = -1$, e o sinal da fração é negativo. Em outras palavras, não precisamos calcular uma função exponencial, apenas nos atentar para o sinal de n.

Ademais, considerando que 0! = 1 e que 1! = 1, os resultados da primeira e da segunda fração são:

$$\frac{1}{0!} = 1$$

$$\frac{1}{1!} = 1$$

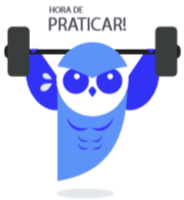
Como o sinal da primeira fração é positivo e o da segunda é negativo, essas frações se **anulam** (1 – 1 = 0). Logo, podemos retirá-las da fórmula:

$$\boldsymbol{D_n} = \boldsymbol{n}! \times \left[\frac{\mathbf{1}}{2!} - \frac{\mathbf{1}}{3!} + \cdots + \frac{(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}!}\right]$$

No nosso exemplo, tivemos n = 3, portanto:

$$D_3 = 3! \times \left[\frac{\mathbf{1}}{2!} - \frac{\mathbf{1}}{3!}\right] = \frac{3!}{2!} - \frac{3!}{3!} = 3 - 1 = 2$$

Que foi o resultado que obtivemos anteriormente.



(CESPE/2014 – TER-GO – *Adaptada*) As prestações de contas das campanhas dos 3 candidatos a governador de determinado estado foram analisadas por 3 servidores do TRE desse estado. Considerando que um servidor deve analisar exatamente prestação de contas e que, por coincidência, cada um dos 3 candidatos é parente de um dos 3 servidores, julgue o item que se segue.

A quantidade de maneiras distintas de se distribuírem as prestações de contas entre os 3 servidores de modo que nenhum deles analise as contas de um parente é inferior a 5.

Comentários:

O enunciado informa que há 3 servidores que irão analisar as contas de 3 candidatos e que cada candidato é parente de um servidor:

Candidato	A	B	C
Servidor	a	b	c

Para que nenhum candidato seja avaliado pelo seu parente, devemos reordenar os candidatos de modo que nenhum deles retorne à posição original, indicada acima. Assim, temos uma permutação caótica (ou desarranjo) de 3 elementos.

Como há poucos elementos, podemos contar as possibilidades, como fizemos anteriormente:

- O candidato A pode ser analisado pelo servidor b:

Candidato		A	
Servidor	a	b	c

- Nessa situação, o candidato C terá que ser analisado pelo servidor a;
- E restará o servidor c para o candidato B, resultando na seguinte possibilidade:

Candidato	C	A	B
Servidor	a	b	c

- O candidato A pode ser analisado pelo servidor c:

Candidato			A
Servidor	a	b	c

- Nessa situação, o candidato B terá que ser analisado pelo servidor a;
- E restará o servidor b para o candidato C, resultando na seguinte possibilidade:

Candidato	B	C	A
Servidor	a	b	c

Portanto, há 2 possibilidades.

Alternativamente, podemos aplicar a fórmula de desarranjo que aprendemos:

$$D_n = n! \times \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

$$D_4 = 3! \times \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right] = \frac{3!}{2!} - \frac{3!}{3!} = 3 - 1 = 2$$

Logo, o número de maneiras é inferior a 5.

Resposta: Certo.

(FCC/2019 – Prefeitura de Recife/PE) Os quatro funcionários de uma repartição trabalham cada um em uma mesa, todos na mesma sala. O chefe da repartição determinou que os funcionários trocassem de mesa entre si. Os funcionários podem ser realocados na sala de modo que nenhum funcionário passe a ocupar a mesa que ocupava antes da realocação.

a) de 4 maneiras diferentes.

b) de 24 maneiras diferentes.

c) de 9 maneiras diferentes.

d) de 6 maneiras diferentes.

e) de 12 maneiras diferentes.

Comentários:

Novamente, temos uma permutação caótica (ou desarranjo), mas agora com 4 elementos. Por haver uma maior quantidade de elementos, vamos direto para a fórmula:

$$D_n = n! \times \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

$$D_4 = 4! \times \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right] = \frac{4!}{2!} - \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{4!} = 4 \times 3 - 4 + 1 = 9$$

Gabarito: C

ARRANJO E COMBINAÇÃO

As técnicas que veremos nesta seção (arranjo e combinação) trabalham com a **seleção** de um subconjunto dos elementos.

A **ordem** dos elementos selecionados será **relevante** para o **arranjo**, mas **não** para a **combinação**. Em outras palavras, selecionar os elementos A e B ou os elementos B e A são possibilidades **distintas** para o **arranjo**, porém **equivalentes** para a **combinação**.

Arranjo Simples

O arranjo de um conjunto finito de elementos é um **subconjunto** desses elementos, de tal maneira que a sua **ordenação** seja **relevante**.

Por exemplo, em um sorteio, em que o primeiro sorteado ganha um carro, e o segundo sorteado ganha uma bicicleta, a ordem, com certeza, será relevante. Em outras palavras, o cenário em que Ana é sorteada primeiro e Beto é sorteado depois será **diferente** daquele em que Beto é sorteado primeiro e Ana é sorteada depois.

Suponha que existam 6 pessoas em um sorteio, em que 3 delas serão sorteadas, **não** sendo possível sortear a mesma pessoa mais de uma vez. Considerando a ordem relevante, de quantas formas as 3 pessoas poderão ser sorteadas?

Como a ordem importa, vamos sortear uma pessoa por vez, preenchendo os seguintes espaços com o número de possibilidades de cada sorteio:

$$\underset{1}{\underline{\qquad}} \quad \underset{2}{\underline{\qquad}} \quad \underset{3}{\underline{\qquad}}$$

Havendo 6 pessoas no total, há 6 possibilidades para sortearmos a primeira pessoa. Assim, restarão 5 pessoas para o segundo sorteio. Em seguida, haverá 4 possibilidades para o terceiro e último sorteio:

$$\underset{1}{\underline{\quad 6 \quad}} \quad \underset{2}{\underline{\quad 5 \quad}} \quad \underset{3}{\underline{\quad 4 \quad}}$$

Como os três sorteios irão ocorrer, pelo princípio multiplicativo, devemos **multiplicar** as possibilidades de cada evento. Dessa forma, o resultado desse arranjo é:

$$6 \times 5 \times 4$$

E se houvesse 10 pessoas para 4 sorteios?

Para o primeiro sorteio, haveria 10 possibilidades; para o segundo, 9 possibilidades; para o terceiro, 8 possibilidades; e para o quarto, 7 possibilidades:

$$10 \times 9 \times 8 \times 7$$

Parece um pouco a fórmula do fatorial, certo? Na verdade, é o início do fatorial do **total de n elementos**, "estancado" após k fatores, sendo k o número de **elementos sorteados**.

E como fazemos para "estancar" um fatorial? **Dividindo por um fatorial menor**!

No caso de $k = 4$ sorteios para um conjunto de $n = 10$ pessoas, fazemos:

$$\frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5.040$$

No caso geral, um **arranjo** sem reposição de k elementos, dentre n elementos distintos é:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Outra notação possível para o arranjo é A_n^k.

Por exemplo, o número de maneiras de sortear 5 pessoas, dentre um total de 8, para prêmios **distintos** corresponde ao **arranjo** de 5 elementos, dentre 8:

$$A_{8,5} = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6.720$$

Nem sempre a **importância da ordem** da seleção será fácil de visualizar. Vamos supor que, dentre um grupo de 10 funcionários de uma empresa, tivermos que selecionar **1 supervisor**, **1 coordenador** e **1 técnico**.

Nesse caso, selecionar um funcionário como supervisor é **diferente** de selecionar esse mesmo funcionário como coordenador ou como técnico.

Imagine que a **seleção** desses cargos ocorre em uma **sequência**, por exemplo, primeiro supervisor, depois coordenador e depois técnico.

Assim, há diferença entre ser chamado primeiro, segundo ou terceiro. Logo, a **ordem da seleção** é, de fato, **importante**, motivo pelo temos um **arranjo**.

A fórmula de arranjo que acabamos de ver serve para casos **sem reposição**, ou seja, quando um mesmo elemento **não** puder ser selecionado **mais de uma vez**.

Caso haja reposição, o **número de elementos disponíveis** para cada sorteio é sempre o **mesmo**. Por exemplo, em uma seleção **com reposição**, cuja ordem importe, de 3 elementos, dentre 6 elementos disponíveis no total, o número de possibilidades é:

$$6 \times 6 \times 6 = 6^3$$

De modo geral, o arranjo **com reposição** (ou **repetição**) de k elementos dentre n elementos no total é dado por:

$$A_{n,k} = \underbrace{n \times n \times \ldots \times n}_{k \text{ vezes}} = n^k$$

(VUNESP/2019 – Prefeitura de Cerquilho/SP) Na bilheteria de um teatro há apenas 5 ingressos à venda para a seção de uma peça. Se 4 amigos comprarem ingressos para essa seção, então o número total de posições distintas em que esses amigos poderão se acomodar no teatro é

a) 120.

b) 80.

c) 60.

d) 20.

e) 5.

Comentários:

Temos uma seleção de 4 lugares, dentre 5 disponíveis, com importância de ordem, pois cada lugar é **distinto** do outro. Assim, temos o arranjo de 4 elementos, dentre 5:

$$A_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Gabarito: A.

(VUNESP/2018 – PM/SP) Utilizando-se os algarismos 2, 3, 5, 6, 7 e 9, a quantidade de números múltiplos de 5 e que tenham três algarismos distintos que podem ser formados é

a) 25.

b) 20.

c) 15.

d) 10.

Comentários:

Para que o número formado pelos 6 algarismos indicados no enunciado seja múltiplo de 5, é necessário que o algarismo 5 seja o último algarismo. Assim, os diferentes números que podem ser formados com 3 algarismos correspondem a um arranjo de 2 elementos, dentre 5:

$$A_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

Gabarito: B.

(CESPE 2019/COGE-CE) Em determinado órgão, sete servidores foram designados para implantar novo programa de atendimento ao público. Um desses servidores será o coordenador do programa, outro será o subcoordenador, e os demais serão agentes operacionais.

Nessa situação, a quantidade de maneiras distintas de distribuir esses sete servidores nessas funções é igual a

a) 21.

b) 42.

c) 256.

d) 862.

e) 5.040.

Comentários:

Nessa questão, devemos definir o número de maneiras distintas de distribuir 7 servidores em funções distintas: 1 será coordenador, 1 será subcoordenador e os demais serão agentes. Note que, após a definição do coordenador e do subcoordenador, os que **sobrarem** serão **necessariamente** agentes. Por isso, não precisamos nos preocupar com eles, apenas com o **coordenador** o **subcoordenador**.

Para a escolha do coordenador, há 7 servidores, ou seja, 7 possibilidades:

7	

Após a escolha do coordenador, restarão 6 possibilidades para o subcoordenador:

7	6

Como devemos escolher o coordenador E o subcoordenador, devemos multiplicar as possibilidades (princípio multiplicativo):

Número de Possibilidades = 7 x 6 = 42

Alternativamente, poderíamos calcular o arranjo de 2 elementos, dentre 7:

$$A_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 7 \times 6 = 42$$

Gabarito: B

(CESPE 2020/TJ-PA) Em um sistema de acesso a uma rede de computadores, os usuários devem cadastrar uma senha de 6 dígitos, que deve ser formada da seguinte maneira:

• os 2 primeiros dígitos devem ser letras minúsculas distintas, escolhidas entre as 26 letras do alfabeto;

• os demais 4 dígitos da senha devem ser números inteiros entre 0 e 9, admitindo-se repetição.

Nessa situação, a quantidade de senhas diferentes que podem ser formadas é igual a

a) 3.674.

b) 5.690.

c) 1.965.600.

d) 3.276.000.

e) 6.500.000.

Comentários:

Nessa questão, temos os dois tipos de arranjo, com e sem reposição. Isso porque as letras devem ser distintas (não podem repetir) e os números podem ser repetir.

Vamos representar a senha de 6 dígitos por 6 espaços:

Os dois primeiros dígitos admitem as 26 letras do alfabeto, sem repetição. Logo, temos 26 possibilidades para o primeiro espaço e 25 possibilidades para o segundo espaço (uma vez que a letra escolhida para o primeiro espaço não pode se repetir):

26	25				

Os demais 4 dígitos admitem os 10 números (de 0 a 9), podendo haver repetição. Logo, há 10 possibilidades para cada espaço:

26	25	10	10	10	10

Como a senha é formada por todos os 6 dígitos, então devemos multiplicar as possibilidades (princípio multiplicativo):

Número de Senhas Possíveis = 26 x 25 x 10 x 10 x 10 x 10 = 6.500.000

Gabarito: E

Combinação Simples

Assim como no caso do arranjo, a combinação é uma **seleção** de elementos de um conjunto finito. Entretanto, para a combinação, a **ordem não importa**.

Por exemplo, em um sorteio de participantes para um **grupo** de estudo, a ordem do sorteio de cada participante é irrelevante.

Nessa situação, algumas possibilidades **distintas** identificadas no **arranjo** são **equivalentes** na **combinação**. Consequentemente, a **combinação** de determinados elementos resulta em um número **menor** do que o **arranjo** dos mesmos elementos.

Menor, quanto?

Bem, todas as possibilidades de sorteio das mesmas pessoas, em que elas apenas **mudam de lugar**, são consideradas o mesmo resultado na combinação. Logo, precisamos **dividir** as possibilidades do arranjo pelo número de possibilidades em que os elementos selecionados **trocam de posição**, isto é, pela **permutação dos elementos selecionados**!

No caso de um sorteio de 3 pessoas, dividimos o número de possibilidades do **arranjo** por P_3:

$$C_{6,3} = \frac{A_{6,3}}{P_3} = \frac{6!}{(6-3)!\,3!}$$

De maneira geral, a combinação sem reposição de k elementos, de um total de n elementos, é dada por:

$$\boldsymbol{C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$$

Outras notações comuns para a combinação são $\boldsymbol{C_n^k}$ ou $\boldsymbol{\binom{n}{k}}$.

(FGV/2019 – Pref. Angra dos Reis/RJ) Maria possui em casa quatro tipos de frutas: banana, mamão, abacate e manga. Ela decidiu fazer uma vitamina com duas dessas frutas, batendo-as juntas com leite no liquidificador. O número de vitaminas diferentes que Maria poderá fazer é

a) 3.

b) 4.

c) 5.

d) 6.

e) 12.

Comentários:

O número de vitaminas diferentes corresponde ao número de maneiras diferentes de Maria escolher 2, das 4 frutas, sem que a ordem importe, logo, temos uma combinação de 2 elementos, dentre 4:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4!}{2! \times 2} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

Gabarito: D

(FGV/2022 – PC-RJ) Do grupo dos 6 novos policiais de uma delegacia, 2 deles serão escolhidos para um treinamento especial. O número de pares diferentes de policiais que podem ser enviados para o treinamento especial é:

a) 10

b) 12.

c) 15.

d) 16.

e) 18.

Comentários:

O número de pares de policiais que podem ser escolhidos, dentre 6, corresponde ao número de maneiras de escolher 2 elementos, dentre 6. Como a ordem dos escolhidos não importa, temos a combinação de 2 elementos dentre 6:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}$$

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

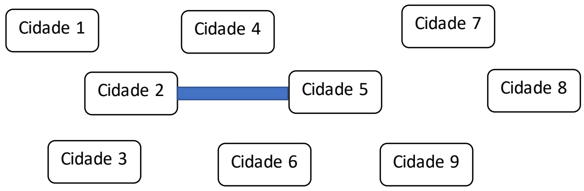
Gabarito: C

(CESPE 2018/BNB) Julgue o próximo item, relativo a análise combinatória e probabilidade.

Se 9 cidades forem interligadas por rodovias, de forma que entre quaisquer duas dessas cidades haja apenas uma rodovia interligando-as e essa rodovia não passe por nenhuma outra cidade, então essa malha viária será composta de 72 rodovias.

Comentários:

A ilustração a seguir representa as 9 cidades e 1 das rodovias possíveis.



Considerando que há exatamente 1 rodovia entre cada 2 cidades, então o número de rodovias é igual ao número de maneiras de selecionar 2 cidades, sem importância de ordem.

Sabendo que há 9 cidades, o número de maneiras de escolher 2 cidades é:

$$C_{9,2} = \frac{9!}{(9-2)! \times 2!} = \frac{9!}{7! \times 2!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7! \times 2!} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

Gabarito: Errado.

É comum que a questão imponha restrições à seleção, da forma "**pelo menos um**".

Por exemplo, suponha um conjunto de 5 mulheres e de 4 homens. Quantos grupos distintos de 3 pessoas podem ser formados com **pelo menos uma** mulher?

Você pode resolver esse tipo de questão calculando **todas** as possibilidades de grupos, **desconsiderando-se** a restrição imposta, e, em seguida, **subtrair** o número de possibilidades que **não** atendem à restrição.

Para o nosso exemplo, o número de maneiras possíveis de selecionar 3 pessoas, de um total de 4 + 5 = 9 pessoas, no total, é:

$$C_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 3 \times 4 \times 7 = 84$$

Dentre essas possibilidades, **não** servem aquelas em que **apenas** homens são selecionados. A quantidade de maneiras possíveis de selecionar 3 homens, dentre 4, é:

$$C_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)! \times 3!} = \frac{4 \times 3!}{1! \times 3!} = 4$$

Logo, o número de maneiras de formar grupos de 3 pessoas com pelo menos 1 mulher é:

84 – 4 = 80

Casos Particulares de Combinação

Nessa seção, veremos alguns casos particulares da combinação simples. Você **não** precisa decorá-los, mas conhecê-los pode ajudar a resolver alguns problemas com mais **rapidez**.

i) Combinação de n elementos em n elementos ($C_{n,n}$).

De quantas formas é possível selecionar 5 jogadores dentre 5 jogadores? Só **uma**, certo? Selecionando todos os jogadores! De todo modo, vamos às contas:

$$C_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!\,n!} = \frac{n!}{(0)!\,n!} = \frac{n!}{1 \times n!} = 1$$

$$\boxed{\boldsymbol{C_{n,n} = 1}}$$

ii) Combinação de 0 elemento em n elementos ($C_{n,0}$).

De quantas formas é possível selecionar 0 jogador dentre 5? Só **uma** também, certo? Não selecionando jogador algum! Vejamos como ficam as contas:

$$C_{n,0} = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = \frac{n!}{n! \times 1} = 1$$

$$\boxed{\boldsymbol{C_{n,0} = 1}}$$

iii) Combinação de 1 elemento em n elementos ($C_{n,1}$).

Considerando 5 jogadores (A, B, C, D, E), quantas são as possibilidades de selecionar 1 jogador? 5, certo? Podemos selecionar A, ou B, ou C, ou D ou E:

$$C_{n,1} = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = \frac{n}{1} = n$$

$$\boxed{\boldsymbol{C_{n,1} = n}}$$

iv) Combinação de $n-1$ elementos em n elementos ($C_{n,n-1}$).

Considerando os 5 jogadores (A, B, C, D, E), quantas são as possibilidades de selecionar 4 jogadores? Podemos responder a essa pergunta, pensando em quem fica de fora em cada seleção.

Ou seja, podemos selecionar todos exceto A; ou todos exceto B; ou todos exceto C; ou todos exceto D; ou todos exceto E. Assim, temos 5 possibilidades!

$$C_{n,n-1} = \frac{n!}{[n-(n-1)]!\,(n-1)!} = \frac{n}{[n-n+1]!} = \frac{n}{1} = n$$

$$\boldsymbol{C_{n,n-1} = n}$$

v) A combinação de k elementos em n é igual à combinação de $n - k$ em n ($C_{n,k} = C_{n,n-k}$).

No item anterior, construímos o raciocínio de que **selecionar** 4 jogadores dentre 5 é o mesmo que **deixar** 1 jogador. Além disso, o número de maneiras de **deixar** 1 jogador é o mesmo de **selecionar** 1 jogador.

Em outras palavras, de um total de 5 jogadores, o número de maneiras de selecionar 4 jogadores é o mesmo de selecionar 1 jogador.

Em geral, de um total de n elementos, selecionar k elementos é o mesmo que selecionar $n - k$ elementos:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

- $$C_{n,n-k} = \frac{n!}{[n-(n-k)]!\,(n-k)!} = \frac{n!}{[n-n+k]!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\boldsymbol{C_{n,k} = C_{n,n-k}}$$

Vamos a mais um "facilitador de contas":

O **somatório** de **todas** as **combinações possíveis** de n **elementos** é 2^n

$$\boldsymbol{C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,n-1} + C_{n,n} = 2^n}$$

Ou seja, o somatório de todas as possibilidades de combinações distintas de um total de n elementos, ou seja, a combinação com 0 elemento, as combinações com 1 elemento, combinações com 2 elementos, etc., até a combinação com n elementos, é igual a 2^n.

INDO MAIS FUNDO!

Essa propriedade que acabamos de ver é um dos teoremas associados ao chamado **Triângulo de Pascal**, que pode ser representado da seguinte forma:

$$
\begin{array}{llllll}
C_{0,0} \\
C_{1,0} & C_{1,1} \\
C_{2,0} & C_{2,1} & C_{2,2} \\
C_{3,0} & C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} \\
C_{4,0} & C_{4,1} & C_{4,2} & C_{4,3} & C_{4,4} \\
C_{5,0} & C_{5,1} & C_{5,2} & C_{5,3} & C_{5,4} & C_{5,5} \\
\dots
\end{array}
\quad \leftrightarrow \quad
\begin{array}{llllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\dots
\end{array}
$$

O Triângulo de Pascal é formado por combinações $C_{n,k}$, sendo n o número da **linha** e k o número da **coluna**, iniciando-se pela linha e coluna **zero**.

Os números $C_{n,k}$ podem ser chamados **Números Binomiais** ou **Coeficientes Binomiais**.

Para construir o Triângulo, somamos 2 elementos consecutivos (colunas k e $k+1$) de uma mesma linha (n), para obter o elemento da linha abaixo ($n+1$) na coluna $k+1$:

$$
\begin{array}{llllll}
1 \\
1 + 1 \\
1 & 2 + 1 \\
1 & 3 + 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 + 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\dots
\end{array}
$$

Essa propriedade é chamada de **Relação de Stifel** e corresponde ao seguinte:

$$C_{n,k} + C_{n,k+1} = C_{n+1,k+1}$$

Além disso, a soma dos elementos de uma coluna (k), desde o seu início (linha k) até alguma linha $k+n$, é igual ao elemento da linha seguinte ($k+n+1$) e coluna seguinte ($k+1$), conforme ilustrado abaixo para a coluna 1:

$$
\begin{array}{llllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\dots
\end{array}
$$

Essa propriedade é chamada de **Teorema das Colunas** e pode ser descrita como:

$$C_{k,k} + C_{k+1,k} + C_{k+2,k} + \cdots + C_{k+n,k} = C_{k+n+1,k+1}$$

A propriedade que vimos antes ($C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,n} = 2^n$) é chamada de **Teorema das Linhas**, pois $C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,n}$ é a soma de todos os elementos de uma linha n.

HORA DE PRATICAR!

(2019 – Prefeitura de Colômbia/SP) Em uma pequena escola de música os estudantes são especializados em instrumentos conforme tabela a seguir:

Instrumentos	Número de estudantes
Guitarra	6
Contrabaixo	2
Bateria	4
Teclado	3

O número de bandas diferentes que poderão ser formadas com os estudantes desta escola de música com a seguinte constituição: 2 guitarristas, 1 contrabaixista, 1 baterista e 1 tecladista está compreendido entre:

a) 1 e 300

b) 301 e 400

c) 401 e 600

d) 601 e 800

Comentários:

Para selecionar 2 guitarristas, dentre 6, temos:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!\,2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

Para as demais combinações, basta conhecer o caso especial $C_{n,1} = n$.

Para selecionar 1 contrabaixista, temos n = 2: $C_{2,1} = 2$.

Para selecionar 1 baterista, temos n = 4: $C_{4,1} = 4$.

Para selecionar 1 tecladista, temos n = 3: $C_{3,1} = 3$.

Como a banda terá todos esses instrumentistas, pelo princípio multiplicativo, devemos multiplicar todas essas possibilidades:

$$C_{guitarristas} \text{ x } C_{contrabaixistas} \text{ x } C_{bateristas} \text{ x } C_{tecladistas}$$

15 x 2 x 4 x 3 = 360

Gabarito: B

(CESPE 2018/PF) Para cumprimento de um mandado de busca e apreensão serão designados um delegado, 3 agentes (para a segurança da equipe na operação) e um escrivão. O efetivo do órgão que fará a operação conta com 4 delegados, entre eles o delegado Fonseca; 12 agentes, entre eles o agente Paulo; e 6 escrivães, entre eles o escrivão Estêvão.

Em relação a essa situação hipotética, julgue o item a seguir.

Considerando todo o efetivo do órgão responsável pela operação, há mais de 5.000 maneiras distintas de se formar uma equipe para dar cumprimento ao mandado.

Comentários:

A questão pede o número de maneiras de escolher 1 delegado (dentre 4), 3 agentes (dentre 12) e 1 escrivão (dentre 6):

- O número de formas de escolher 1 delegado, dentre 4, é igual a 4 – caso especial $C_{4,1} = 4$;

- O número de formas de escolher 3 agentes, dentre 12, é igual a:

$$C_{12,3} = \frac{12!}{9!\,3!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2} = 2 \times 11 \times 10 = 220$$

- O número de formas de escolher 1 escrivão, dentre 6, é igual a 6 – caso especial $C_{6,1} = 6$.

Para formar toda a equipe, multiplicamos esses resultados (princípio multiplicativo):

Número de possibilidades = 4 x 220 x 6 = 5280

Logo, há mais de 5.000 maneiras de formar a equipe.

Gabarito: Certo.

(FCC/2018 – Analista Judiciário do TRT 15ª Região) Dez pastas diferentes devem ser guardadas em duas caixas diferentes. Se a única regra é que cada uma das caixas contenha pelo menos uma pasta, então a quantidade de maneiras distintas como se pode guardar essas pastas nas caixas é

a) 510

b) 1.022

c) 126.

d) 2.048

e) 256

Comentários:

Como a ordem dentro das caixas não importa, utilizaremos combinação. Além disso, é importante notar que ao selecionarmos as pastas para uma das caixas, teremos definido as pastas que serão guardadas na outra caixa. Por isso, podemos pensar na combinação para **uma das caixas** apenas.

Assim, podemos selecionar 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 pastas para a primeira caixa. Não podemos selecionar 10 pastas porque não sobraria pastas para a segunda caixa, o que não é permitido (cada caixa deve conter pelo menos 1 pasta). Pelo mesmo motivo, não podemos selecionar 0 pasta para a primeira caixa.

Devemos, portanto, calcular as possibilidades de combinação $C_{10,1}$, $C_{10,2}$, $C_{10,3}$, $C_{10,4}$, $C_{10,5}$, $C_{10,6}$, $C_{10,7}$, $C_{10,8}$ e $C_{10,9}$. Esses eventos são mutuamente exclusivos (selecionamos 1 OU 2 OU 3 OU ... OU 9 pastas para a primeira caixa). Portanto, as possibilidades desses eventos devem ser **somadas** **(princípio aditivo)**.

Para facilitar as contas, utilizaremos a propriedade de combinação que vimos:

$$C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,n-1} + C_{n,n} = 2^n$$

$$C_{10,0} + C_{10,1} + C_{10,2} + C_{10,3} + C_{10,4} + C_{10,5} + C_{10,6} + C_{10,7} + C_{10,8} + C_{10,9} + C_{10,10} = 2^{10}$$

Porém, não é exatamente essa soma que estamos buscando, pois não temos nem $C_{10,0}$ nem $C_{10,10}$. Por isso, devemos subtrair os valores dessas combinações do resultado:

$$C_{10,1} + C_{10,2} + C_{10,3} + C_{10,4} + C_{10,5} + C_{10,6} + C_{10,7} + C_{10,8} + C_{10,9} = 2^{10} - C_{10,0} - C_{10,10}$$

Sabemos, ainda, que $C_{n,0} = 1$, logo, $C_{10,0} = 1$; e $C_{n,n} = 1$, logo, $C_{10,10} = 1$:

$$C_{10,1} + C_{10,2} + C_{10,3} + C_{10,4} + C_{10,5} + C_{10,6} + C_{10,7} + C_{10,8} + C_{10,9} = 1024 - 1 - 1 = 1022$$

Gabarito: B

Combinação Completa

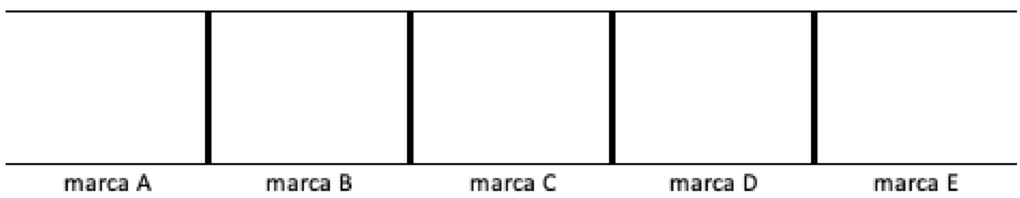
Os problemas de combinação completa (ou **combinação com repetição**) envolvem um conjunto de **n tipos** de elementos **diferentes**, dos quais serão escolhidos **k** elementos **iguais ou diferentes**. Também podemos pensar que será selecionado um número **k** de **objetos**, **iguais ou diferentes**, dentre **n tipos diferentes**.

Por exemplo, escolher **k = 3** potes de sorvete havendo um total de **n = 5 marcas distintas** (os potes podem ser de uma **mesma marca** ou de **marcas distintas**).

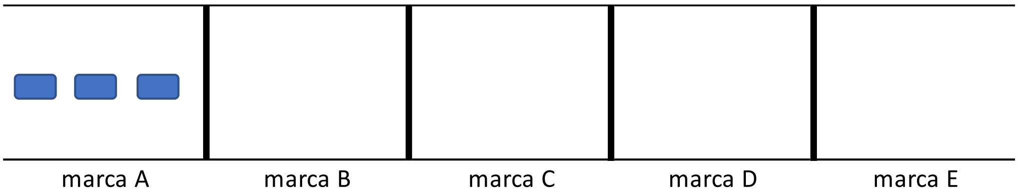
Observe que essa situação é diferente da escolha de 3 potes de sorvete dentre 5 potes, o que seria a combinação simples de 3 elementos, dentre 5 ($C_{5,3}$ = 10). Essa também seria a combinação para escolher 3 marcas dentre 5 marcas.

Porém, no nosso exemplo atual, temos que escolher 3 **potes** dentre 5 **marcas**. O número de possibilidades é muito **maior** do que a combinação simples de 3 dentre 5 elementos.

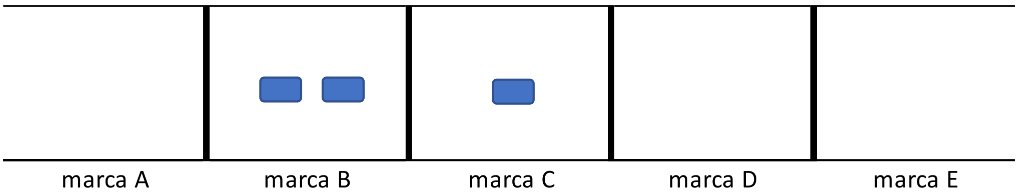
Para calcular todas as possibilidades, vamos imaginar que cada marca de sorvete esteja em uma **seção** separada do congelador:



Podemos escolher, por exemplo, 3 potes da marca A.



Ou 2 potes da marca B e 1 da marca C:



Ou, ainda, 1 da marca A, outro da D e outro da E:

Repare que podemos considerar esse problema como a **permutação** dos **objetos** (potes de sorvetes) e das **divisórias** que separam as diferentes **marcas**.

Nesse caso, temos 3 potes de sorvete e 4 divisórias – o número de **divisórias** é sempre o número de **marcas menos 1**. Assim, temos a permutação de 7 elementos, sendo 3 potes e 4 divisórias (elementos repetidos).

Portanto, a **combinação completa** de 3 objetos de 5 marcas, indicada por CR_5^3, é igual à **permutação** de 7 elementos, com repetição de 3 e 4 elementos:

$$CR_5^3 = P_7^{3,4} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 35$$

De maneira geral, a combinação de p **objetos** de n **tipos** (ou marcas), equivale à permutação de $n-1$ **divisórias** com p **objetos**, ou seja, à permutação de $n-1+p$ elementos, com repetição de $n-1$ e p elementos:

$$\boldsymbol{CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p} = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)! \times p!}}$$

Também devemos utilizar a **combinação completa** em problemas de **distribuição** de objetos entre pessoas (ou lugares). Por exemplo, a distribuição de 3 cestas básicas para 5 famílias segue o mesmo raciocínio.

ESCLARECENDO!

A **combinação completa** de $\boldsymbol{p}$ **objetos** de $\boldsymbol{n}$ **tipos** também equivale à **combinação simples** de $\boldsymbol{p}$ **elementos**, dentre $\boldsymbol{n-1+p}$ **elementos disponíveis**:

$$\boldsymbol{CR_n^p} = \frac{(\boldsymbol{n-1+p})!}{(\boldsymbol{n-1})! \times \boldsymbol{p}!} = \boldsymbol{C_{n-1+p,p}}$$

No nosso exemplo, a combinação completa de p = 3 potes de sorvete, havendo um total de n = 5 marcas distintas, corresponde à combinação de 3 elementos, dentre 5 – 1 + 3 = 8 elementos no total.

HORA DE PRATICAR!

(FGV/2018 – ALE-RO) Helena entra em uma sorveteria que oferece sorvetes de 8 sabores diferentes. Helena deseja escolher uma casquinha com duas bolas de sorvete não necessariamente de sabores diferentes. A ordem em que as bolas forem colocadas na casquinha não fará a escolha de Helena ser diferente.

O número de maneiras de Helena escolher sua casquinha é

a) 64.

b) 56.

c) 36.

d) 28.

e) 16.

Comentários:

Nessa questão, temos um exemplo de combinação com reposição (ou combinação completa). Trata-se de uma combinação porque a ordem **não** importa, como a questão informa. E há reposição pelo fato de Helena poder escolher sabores não necessariamente diferentes. A fórmula da combinação completa é:

$$\boldsymbol{CR_n^p} = \frac{(\boldsymbol{n-1+p})!}{(\boldsymbol{n-1})! \times \boldsymbol{p}!}$$

Sabendo que há 8 sabores disponíveis (n = 8) e que Helena irá escolher 2 bolas de sorvete (p = 2):

$$CR_8^2 = \frac{(8+2-1)!}{(8-1)! \times 2!} = \frac{9!}{7! \times 2!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7! \times 2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

Gabarito: C

(2019 – Conselho Regional de Medicina/AC) O pai de 3 filhos, com idades diferentes, distribuiu 9 balas idênticas entre eles, de forma que o mais velho recebeu o dobro de balas do caçula e o filho do meio recebeu mais balas que o caçula e menos balas que o mais velho. O filho caçula recebeu X balas e o filho do meio recebeu Y balas.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item a seguir.

Se alguém deseja distribuir 9 balas idênticas entre 3 pessoas, sem qualquer critério de distribuição, com cada uma delas recebendo pelo menos uma bala, então existem 28 maneiras de se fazer a distribuição.

Comentários:

Esse também é um caso de combinação completa, em que as balas correspondem aos objetos e as pessoas correspondem às seções.

Porém, o problema apontou para uma restrição: todas as pessoas receberão pelo menos uma bala.

Após distribuir uma bala por pessoa, totalizando 3 balas, sobrarão 9 – 3 = 6 balas a serem distribuídas, sem critério, para as 3 pessoas.

Portanto, temos a combinação completa de k = 6 objetos para n = 3 pessoas, ou seja, n – 1 = 2 divisórias:

$$CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p} = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)! \times p!}$$

$$CR_3^6 = P_8^{2,6} = \frac{8!}{2! \times 6!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

Gabarito: Certo

(CESPE 2018/SEFAZ-RS) Se 7 kg de feijão forem distribuídos para até quatro famílias, de modo que cada uma delas receba um número inteiro de quilos, então, nesse caso, a quantidade de maneiras distintas de se distribuírem esses 7 kg de feijão para essas famílias será igual a

a) 30.

b) 120.

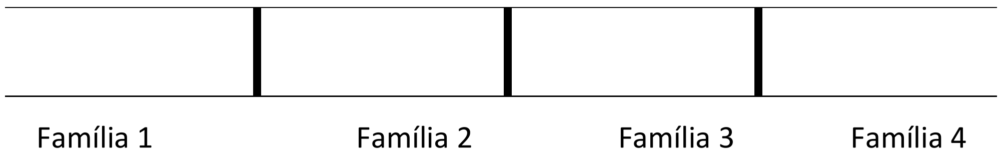
c) 330.

d) 820.

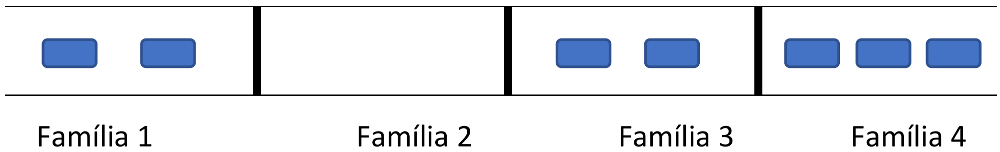
e) 1.320.

Comentários:

Podemos representar os quilos de feijão como e as 4 famílias como seções separadas por uma barra:



Podemos distribuir os 7 quilos de feijão da seguinte forma, por exemplo:



O enunciado permite que alguma(s) família(s) fique sem quilos de feijão porque menciona que a distribuição será para "até" 4 famílias. Assim, há 7 quilos de feijão (p = 7) a serem distribuídos livremente para 4 famílias (n = 4).

Essa distribuição pode ser vista como a permutação dos 7  e das 3 barras que separam as famílias, isto é, uma permutação de 10 elementos, com repetição de 7 e de 3 elementos:

$$CR_4^7 = P_{10}^{3,7} = \frac{10!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 10 \times 3 \times 4 = 120$$

Gabarito: B.

(FGV/2021 – Pref. Paulínia) Eva tem 9 maçãs indistinguíveis e deseja distribuí-las a 3 amigos de forma que cada um deles fique com, ao menos, 2 maçãs. O número de maneiras distintas de Eva distribuir as maçãs é

a) 12

b) 10

c) 9

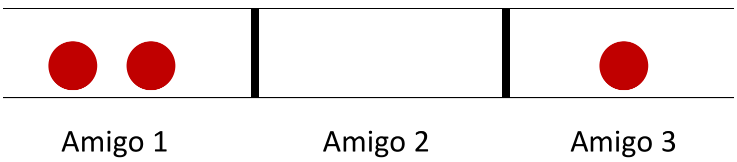
d) 8

e) 6

Comentários:

Essa questão trabalha com combinação completa, em que precisamos distribuir 9 maçãs para 3 amigos. Primeiro, distribuímos as maçãs obrigatórias, quais sejam, 2 para cada amigo. Após a distribuição das 6 maçãs, restarão 3 a serem distribuídas livremente.

A figura a seguir ilustra uma forma de distribuir as 3 maçãs:



A combinação completa, entre $n = 3$ amigos e $p = 3$ objetos, pode ser vista como a permutação dos 3 objetos e das 2 barras que separam os amigos, que corresponde a permutação de 5 elementos no total, com repetição de 3 e de 2 elementos:

$$CR_3^3 = P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 5 \times 2 = 10$$

Gabarito: B

Número de Soluções Inteiras de Equações

Os problemas de combinação completa, que acabamos de ver, podem ser analisados de **outra perspectiva**.

Vamos considerar o mesmo exemplo da compra de 3 potes de sorvete, dentre 5 marcas distintas.

Podemos representá-lo por uma **equação**, em que x_A representa a quantidade de potes de sorvete adquiridos da marca A; x_B representa a quantidade de potes de sorvete da marca B; x_C, a quantidade de potes da marca C; x_D, a quantidade de potes da marca D; e x_E, a quantidade de potes da marca E.

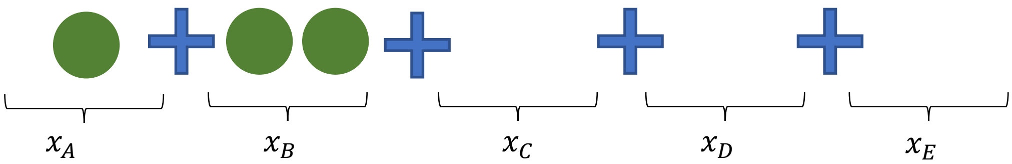
Sabendo que o total de potes de sorvete adquiridos é igual a 3, então a soma dos potes adquiridos de todas as marcas é igual a 3:

$$x_A + x_B + x_C + x_D + x_E = 3$$

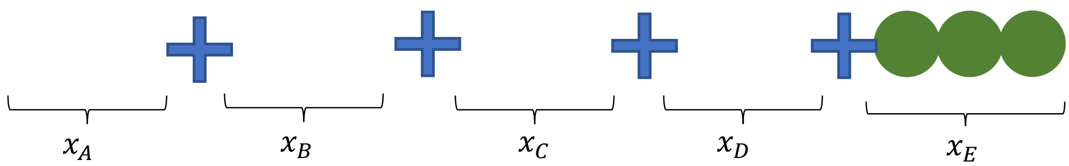
Como os valores de x representam as quantidades de **potes** adquiridos de cada uma das 5 marcas, de modo que o **total** de potes seja igual a 3, o número de maneiras de escolher os 3 potes de sorvete corresponde ao número de maneiras de encontrar os valores de x que **resolvem** essa **equação**.

Ou seja, o problema de **combinação completa**, que vimos antes, corresponde ao **número de soluções possíveis** para essa equação.

Afinal, podemos representar os diferentes x_i por espaços entre os símbolos de e os valores que eles assumem por , de forma que o total seja igual a 3. Um exemplo dessa representação é:



Aqui, temos $x_A = 1$, $x_B = 2$, $x_C = 0$, $x_D = 0$, $x_E = 0$. Outra opção seria:



Nesse exemplo, temos $x_A = 0$, $x_B = 0$, $x_C = 0$, $x_D = 0$ e $x_E = 3$.

Ou seja, o número de maneiras de encontrar os possíveis valores de x, isto é, o **número de soluções possíveis** para a equação, corresponde a uma permutação de p = 3 com n – 1 = 4 símbolos de

$$CR_5^3 = P_7^{4,3} = \frac{7!}{4! \times 3!}$$

Em outras palavras, a combinação completa CR_5^3 também indica o **número de soluções possíveis** para a equação $x_A + x_B + x_C + x_D + x_E = 3$.

De modo geral, o **número de soluções possíveis** para a equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$ é:

$$\boldsymbol{CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p}}$$

O **resultado** da equação corresponde ao número de objetos: $\boldsymbol{p}$

O **número de variáveis** corresponde ao número de seções: $\boldsymbol{n}$

Mais precisamente, a combinação completa CR_n^p indica o **número de soluções inteiras e não-negativas possíveis** para a referida equação.

Por que somente soluções **inteiras** e **não-negativas**?

Se pudéssemos escolher números **negativos**, poderíamos sempre diminuir uma unidade de uma variável e aumentar uma unidade de outra para manter a soma constante (no nosso exemplo, igual a 3).

Ou seja, poderíamos ter $x_A = 4$ e $x_B = -1$ (e as demais variáveis nulas), $x_A = 5$ e $x_B = -2$, $x_A = 6$ e $x_B = -3$, etc. O número de soluções seria **infinita**!

O mesmo vale para números **decimais**. Há **infinitos** números decimais entre quaisquer números inteiros. Por exemplo, entre 2 e 3, há 2,1; 2,11; 2,111; 2,1111;...

Portanto, se as incógnitas pudessem assumir quaisquer valores reais, sempre poderíamos aumentar uma incógnita um "pouquinho" e diminuir outra esse mesmo "pouquinho" e manter a soma constante.

Portanto, somente o conjunto das soluções **inteiras** e **não-negativas** da equação é um conjunto **finito**.

FIQUE ATENTO!

Como vimos, a princípio, são **permitidas** soluções **nulas** para algumas incógnitas.

Caso o problema traga alguma situação especial diferente dessa, como exigir que as soluções sejam **positivas** (ou seja, **não** permitir soluções **nulas**), precisamos fazer as adaptações necessárias.

Por exemplo, considere a seguinte equação, em que os valores de x precisam ser **positivos**:

$$x_A + x_B + x_C + x_D = 6, com\ x > 0$$

Nesse caso, precisamos primeiro distribuir 1 unidade para cada x.

Assim, sobrarão 6 – 4 = 2 unidades a serem **livremente** distribuídas, o que pode ser representado pela seguinte equação (em que x **pode** assumir valores **nulos**):

$$x_A + x_B + x_C + x_D = 2, com\ x \geq 0$$

Sabemos que o número de soluções possíveis para essa equação é:

$$CR_4^2 = P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \times 2!}$$

HORA DE PRATICAR!

(CESPE/2011 – SEDUC/AM) A equação $x_1 + x_2 + x_3 = 18$ possui mais de 200 soluções inteiras e não negativas.

Comentários:

O número de soluções inteiras e não-negativas para essa equação é o número de combinações completas com p = 18 objetos em n = 3 seções, ou seja:

$$CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p}$$

$$CR_3^{18} = P_{20}^{2,18} = \frac{20!}{2!\,18!} = \frac{20 \times 19}{2} = 190$$

O resultado (190) é inferior a 200.

Gabarito: Errado.

(2015 – Prefeitura de Mangaratiba/RJ) Considerando o conjunto universo dos números inteiros não negativos, podemos afirmar que a equação x + y + z – 5 = 0:

a) possui uma única solução.

b) possui infinitas soluções.

c) possui 21 soluções.

d) possui 35 soluções.

e) possui 42 soluções.

Comentários:

Primeiro fazemos o seguinte ajuste na equação:

$$x + y + z = 5$$

O número de soluções inteiras e não-negativas para essa equação é o número de combinações completas com p = 5 objetos em n = 3 seções, ou seja:

$$CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p}$$

$$CR_3^5 = P_7^{2,5} = \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

Gabarito: C.

Partições

O conceito de partição em matemática é bastante similar ao que utilizamos no dia a dia. Se vamos partir uma pizza, iremos dividi-la em algumas fatias (não necessariamente iguais). Seja qual for o número ou tamanho das fatias, se juntarmos todas elas (antes de comê-las, é claro!), teremos a pizza completa.

Com a partição em matemática, temos uma situação muito semelhante. A pizza inteira corresponderia a um conjunto de elementos, que seria particionado (fatiado) em alguma quantidade de subconjuntos (fatias), que podem **ser ou não iguais**.

Por exemplo, podemos particionar um grupo de 9 trabalhadores em 3 grupos (um com 5 trabalhadores, outro com 2 trabalhadores e outro com 1). Atente-se que a **soma** dos trabalhadores de todos os grupos equivale ao **total** de trabalhadores.

O fato de a soma dos elementos nos grupos ser equivalente ao total de elementos é a característica que **diferencia** as **partições** dos problemas de **combinação**.

Em outras palavras, é possível resolver problemas de partição com as técnicas de **combinação**. Porém, conhecer o cálculo específico para a partição é importante, tanto para acelerar a resolução do problema quanto para reduzir as chances de erros.

Há dois tipos de partição: a partição ordenada e a partição não-ordenada. Na partição **ordenada**, os grupos são **diferentes**. Por exemplo, há um grupo dos coordenadores, outro dos supervisores e outro dos trabalhadores de uma linha de montagem. Assim, participar do primeiro grupo é **diferente** de participar do segundo ou do terceiro, ou seja, a ordem **entre** os grupos **importa**.

Na partição **não-ordenada**, os grupos são **iguais**. Por exemplo, as equipes formadas terão que fazer um mesmo trabalho. Assim, se um mesmo grupo de pessoas é selecionado entes ou depois, não haverá diferença. Portanto, a ordem **entre** os grupos **não importa**.

Partição Ordenada

A partição ordenada representa a separação de um conjunto de elementos em **subconjuntos distintos** entre si, de modo que a soma dos elementos dos subconjuntos seja equivalente ao total de elementos do conjunto original.

Por exemplo, podemos particionar um conjunto de 10 profissionais entre os subconjuntos de 1 gerente, 2 coordenadores, e 7 trabalhadores de linha de frente. Como os subconjuntos são **distintos**, ser chamado para o primeiro grupo é diferente de ser chamado para o segundo, terceiro ou quarto grupos. Nesse caso, temos uma partição ordenada, em que a **ordem** dos subconjuntos **importa**.

Atenção! Dentro de um mesmo subconjunto, a ordem dos participantes não importa. O que **importa** é a ordem **entre os subconjuntos**.

Vamos resolver esse exemplo com as técnicas de combinação que conhecemos. Podemos começar calculando as possibilidades de se escolher o único gerente (k = 1, n = 10). Esse é um caso especial de combinação $C_{n,1} = n$:

$$C_{10,1} = 10$$

Agora, escolhemos k = 2 coordenadores, dentre as n = 9 opções que restaram após a escolha do gerente:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$C_{9,2} = \frac{9!}{7!\,2!} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

Por fim, temos uma única opção para escolher k = 7 trabalhadores, dentre as n = 7 opções que restaram (outro caso especial $C_{n,n} = 1$).

Pelo princípio multiplicativo, temos 10 x 36 x 1 = 360 possibilidades de formar esses três subconjuntos. O resultado seria o mesmo se começássemos por qualquer outro subconjunto.

Alternativamente, esse problema poderia ser resolvido com a seguinte fórmula de **partição**:

$$\binom{10}{1,2,7} = \frac{10!}{1!\,2!\,7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{2 \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{2} = 10 \times 9 \times 4 = 360$$

Bem mais simples, certo?

Por que esses resultados são iguais? Vamos entender essa "coincidência"!

Para a escolha de k = 1 gerente, dentre todas as n = 10 opções, temos:

$$C_{10,1} = \frac{10!}{(10-1)!1!}$$

Para a escolha de k = 2 coordenadores, dentre as n = 10 – 1 opções que sobraram após a escolha do gerente, temos:

$$C_{10-1,2} = \frac{(10-1)!}{(10-1-2)!2!}$$

Para a escolha de k = 7 trabalhadores, dentre as n = 10 – 1 – 2 opções que sobraram após a escolha do gerente e dos coordenadores, temos:

$$C_{10-1-2,7} = \frac{(10-1-2)!}{(10-1-2-7)!7!}$$

Agora, precisamos multiplicar todos esses resultados:

$$C_{10,1} \times C_{10-1,2} \times C_{10-1-2,7}$$

$$= \frac{10!}{(10-1)!1!} \times \frac{(10-1)!}{(10-1-2)!2!} \times \frac{(10-1-2)!}{(10-1-2-7)!7!}$$

Nessa expressão, podemos simplificar $\frac{(10-1)!}{(10-1)!}$ e também $\frac{(10-1-2)!}{(10-1-2)!}$:

$$= \frac{10!}{\cancel{(10-1)!}1!} \times \frac{\cancel{(10-1)!}}{\cancel{(10-1-2)!}2!} \times \frac{\cancel{(10-1-2)!}}{(10-1-2-7)!7!}$$

Além disso, $(10-1-2-7)! = 0! = 1$. Portanto, conforme vimos antes, temos:

$$= \frac{10!}{1!2!7!}$$

Em geral, uma partição ordenada de n elementos no total, em m subconjuntos com $p_1, p_2, \dots, p_m$ elementos cada, temos:

$$\binom{n}{p_1, p_2, \dots, p_m} = \frac{n!}{p_1!p_2!\dots p_m!}$$

(CESPE/2011 – STF) O colegiado do Supremo Tribunal Federal (STF) é composto por 11 ministros, responsáveis por decisões que repercutem em toda a sociedade brasileira. No julgamento de determinados processos, os ministros votam pela absolvição ou pela condenação dos réus de forma independente uns dos outros. A partir dessas informações e considerando que, em determinado julgamento, a probabilidade de qualquer um dos ministros decidir pela condenação ou pela absolvição do réu seja a mesma, julgue o item seguinte.

Se, no julgamento de determinado réu, 8 ministros votarem pela absolvição e 3 ministros votarem pela condenação, a quantidade de maneiras distintas de se atribuir os votos aos diferentes ministros será inferior a 170.

Comentários:

Temos uma partição de 11 elementos em dois subconjuntos com 8 e 3 elementos:

$$\binom{n}{p_1, p_2, \dots, p_m} = \frac{n!}{p_1!\, p_2! \dots p_m!}$$

$$\binom{11}{8,3} = \frac{11!}{8!\, 3!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8! \times 3 \times 2} = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2} = 11 \times 5 \times 3 = 165$$

Como 165 é menor do que 170, portanto o item está certo.

Gabarito: Certo

(FCC/2015 – Julgador Administrativo Tributário da SEFAZ/PE) A tabela a seguir mostra a pontuação obtida pelas cinco empresas que participaram da concorrência pública para a construção das dez estações de uma linha de metrô.

Empresa	Pontuação
I	500
II	300
III	200
IV	120
V	80

De acordo com as regras do edital da concorrência, somente as empresas com mais de 150 pontos seriam consideradas aprovadas.

Além disso, o edital determinava que as dez estações seriam distribuídas entre as empresas aprovadas proporcionalmente ao número de pontos que cada uma delas obteve.

Sabendo que as dez estações são iguais, o número de maneiras diferentes de distribuí-las entre as empresas aprovadas, de acordo com as regras do edital, é igual a

a) 3780.

b) 2520.

c) 7560.

d) 1260.

e) 5040.

Comentários:

Pela regra da pontuação mínima, apenas as empresas I, II e III são aprovadas. As 10 estações serão divididas entre elas proporcionalmente ao número de pontos.

Podemos chamar de x a quantidade de estações por ponto, que é constante para todas as empresas. Assim, temos:

$$500x + 300x + 200x = 10$$

$$1000x = 10$$

$$x = 1/100$$

Portanto, cada empresa irá receber 1/100 estação por ponto:

I) A empresa I irá receber: 500 x 1/100 = 5

II) A empresa II irá receber 300 x 1/100 = 3

III) A empresa III irá receber 200 x 1/100 = 2

Agora, vamos calcular o número de possibilidades de distribuição. Podemos calcular as combinações para cada empresa e, em seguida, multiplicar os resultados, tendo em vista o princípio multiplicativo.

Porém, a solução será muito mais rápida se considerarmos que as 10 estações serão particionadas entre as 3 empresas (não sobrará nenhuma estação), com n = 10, $p_1 = 5$, $p_2 = 3$ e $p_3 = 2$.

$$\binom{n}{p_1, p_2, \dots, p_m} = \frac{n!}{p_1!\,p_2!\dots p_m!}$$

$$\binom{10}{5,3,2} = \frac{10!}{5!\,3!\,2!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 2} = 10 \times 9 \times 4 \times 7 = 2520$$

Gabarito: B

Partição Não-Ordenada

A partição não-ordenada representa a separação de um conjunto de elementos em subconjuntos **equivalentes** entre si. Por exemplo, podemos particionar um conjunto de 6 profissionais em 3 duplas, que deverão realizar um **mesmo trabalho**.

Como os subconjuntos são equivalentes, se uma mesma dupla é chamada primeiro ou depois, a situação será a **mesma**. Ou seja, a **ordem entre** os subconjuntos **não importa.**

Repare que a ordem **dentro** do subconjunto **não importa**, como também não importava para a partição ordenada. A diferença é que, na partição não-ordenada, a ordem **entre** os subconjuntos **também não importa**.

Se esse exemplo de 3 duplas de profissionais, dentre 6, fosse uma partição **ordenada**, teríamos:

$$\binom{n}{p_1, p_2, \dots, p_m} = \frac{n!}{p_1!\,p_2!\dots p_m!}$$

$$\binom{6}{2,2,2} = \frac{6!}{2!\,2!\,2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = 6 \times 5 \times 3 = 90$$

Nessa situação, as **mesmas duplas**, selecionadas em **ordens diferentes**, correspondem a possibilidades **distintas**. Por exemplo, suponha que os 6 profissionais sejam Ana, Beto, Caio, Dedé, Eduardo e Fátima e que as duplas formadas sejam Ana e Beto, Caio e Dedé, Eduardo e Fátima.

Em uma **partição ordenada**, teríamos as seguintes possibilidades **distintas**, com exatamente essas duplas:

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
1.	Ana e Beto	Caio e Dedé	Eduardo e Fátima
2.	Ana e Beto	Eduardo e Fátima	Caio e Dedé
3.	Caio e Dedé	Ana e Beto	Eduardo e Fátima
4.	Caio e Dedé	Eduardo e Fátima	Ana e Beto
5.	Eduardo e Fátima	Ana e Beto	Caio e Dedé
6.	Eduardo e Fátima	Caio e Dedé	Ana e Beto

Porém, em uma partição **não ordenada**, todas essas 6 possibilidades representam o **mesmo resultado**, uma vez que as duplas são as mesmas.

Assim, para calcular a permutação **não ordenada**, precisamos **dividir** as 90 possibilidades da permutação ordenada pelo número de maneiras de **reordenar** as 3 duplas, ou seja, pela **permutação** dos 3 elementos:

$$\frac{\binom{6}{2,2,2}}{P_3} = \frac{\binom{6}{2,2,2}}{3!} = \frac{90}{3 \times 2 \times 1} = 15$$

De maneira geral, na **partição não ordenada**, precisamos dividir o resultado da partição ordenada pelo número de maneiras de **permutar os $\boldsymbol{m}$ grupos**, como indicado abaixo.

$$\frac{\binom{n}{p_1, p_2, \dots, p_m}}{P_m} = \frac{\frac{n!}{p_1!\,p_2! \dots p_m!}}{m!}$$

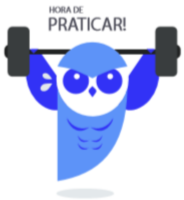
A fórmula da partição não ordenada é praticamente essa, porém com alguns ajustes. Para que sejam iguais, os grupos devem possuir o **mesmo tamanho**, então chamamos $p_1, p_2, \dots, p_m$ de $\boldsymbol{p}$. Logo, substituímos $p_1!\,p_2! \dots p_m!$ por:

$$\underbrace{\boldsymbol{p}!\,\boldsymbol{p}! \dots \boldsymbol{p}!}_{\boldsymbol{m} \text{ vezes}} = (\boldsymbol{p}!)^{\boldsymbol{m}}$$

Além disso, sabendo que há $\boldsymbol{m}$ subconjuntos com p elementos cada, então há um total de $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}$ elementos. Então, substituímos n por $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}$.

A partição **não ordenada** em **$\boldsymbol{m}$ subconjuntos** de **$\boldsymbol{p}$ elementos** cada (ou seja, o conjunto original possui $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}$ elementos, no total), é:

$$\frac{\binom{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}, \dots, \boldsymbol{p}}}{\boldsymbol{m}!} = \frac{(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p})!}{\boldsymbol{m}!\,(\boldsymbol{p}!)^{\boldsymbol{m}}}$$



(2016 – Prefeitura de São José da Coroa Grande/PE) De quantos modos podemos dividir 10 pessoas em dois grupos de 5 pessoas?

a) 96

b) 108

c) 120

d) 126

e) 132

Comentários:

Considerando que os grupos são equivalentes, temos uma partição não-ordenada de m = 2 subconjuntos de p = 5 elementos cada:

$$\frac{\binom{m \times p}{p, p, \dots, p}}{m!} = \frac{(m \times p)!}{m!\,(p!)^m}$$

$$\frac{\binom{10}{5,5}}{2!} = \frac{10!}{2!\,(5!)^2} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = 2 \times 9 \times 7 = 126$$

Gabarito: D

(2006 – TCE/PR) De quantas maneiras diferentes 12 estudantes podem ser divididos em 3 equipes, sendo que cada uma das equipes deve ser composta de quatro estudantes?

a) 8425

b) 3260

c) 12640

d) 5775

e) 34650

Comentários:

Considerando que as equipes são equivalentes, temos uma partição não-ordenada de m = 3 subconjuntos de p = 4 elementos cada:

$$\frac{\binom{12}{4,4,4}}{3!} = \frac{12!}{3!\,(4!)^3} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2} = 11 \times 5 \times 3 \times 7 \times 5 = 5.775$$

Gabarito: D

LEMAS DE KAPLANSKY

Agora, veremos o **primeiro lema** e o **segundo lema de Kaplansky**. Ambos trabalham com a **seleção** de um subconjunto de elementos, a partir de um conjunto de elementos originalmente dispostos em determinada ordem, de modo que elementos **consecutivos** (vizinhos) do conjunto original **não** sejam **selecionados**.

A diferença entre os lemas é que, para o **primeiro lema**, os elementos **extremos** do conjunto original **não** são considerados **consecutivos** (vizinhos), enquanto para o **segundo lema**, tais elementos **são** considerados **consecutivos** (vizinhos), como se os elementos do conjunto original estivessem dispostos em um **círculo**.

Primeiro Lema de Kaplansky

O **primeiro lema de Kaplansky** considera que os elementos estão originalmente dispostos em determinada ordem, como em uma **fila**, e que serão **selecionados** alguns desses elementos, sem que a ordem dessa seleção importe. Porém, dentre os elementos selecionados, **não** pode haver elementos **consecutivos** (vizinhos) da fila original.

Suponha um conjunto de 8 algarismos ordenados {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. Quantas são as possibilidades de selecionar 2 elementos que **não** sejam **consecutivos** do conjunto original?

Podemos resolver esse problema, sem conhecer o lema de Kaplansky, calculando o número de maneiras de selecionar 2 elementos no total (combinação de 2 elementos, dentre 8) e subtrair o número de maneiras de selecionar 2 elementos consecutivos. Vejamos:

A combinação de 2 elementos, dentre 8, é dada por:

$$C_{8,2} = \frac{8!}{(8-2)! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6! \times 2} = 4 \times 7 = 28$$

As possibilidades de escolha de 2 elementos consecutivos são: {1, 2}, {2, 3}, {3, 4}, {4, 5}, {5, 6}, {6, 7} e {7, 8}, ou seja, há 7 possibilidades.

Portanto, o número de maneiras de escolher 2 elementos não consecutivos, dentre 8 no total, é:

$$28 - 7 = 21$$

E se quiséssemos escolher 3 elementos não consecutivos? Aí, teríamos um pouco mais de trabalho.

Para facilitar a resolução de problemas desse tipo, podemos utilizar o raciocínio de Kaplansky.

Primeiro, vamos representar cada elemento do conjunto original por um **S**, caso ele pertença ao subconjunto selecionado, ou por um **N**, caso ele não pertença ao subconjunto selecionado. Por exemplo, a seleção do **2º** e do **4º** elemento do conjunto original de 8 elementos é representada por **N S N S N N N N**.

Para formar um subconjunto de 3 elementos, sem elementos consecutivos, vamos começar representando os 8 – 3 = 5 elementos que **não** serão selecionados. Como não sabemos em quais posições esses 5 elementos estarão, vamos prever **possíveis espaços antes e depois** desses elementos.

__ N __ N __ N __ N __ N __

Esses espaços correspondem **aos possíveis lugares dos elementos selecionados**. Como não há espaços consecutivos, não será possível escolher elementos consecutivos. Assim, o número de maneiras de selecionar 3 elementos não consecutivos do conjunto original corresponde ao número de maneiras de **selecionar 3 dentre esses 6 espaços** (combinação de 3 elementos, dentre 6):

$$C_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!\,3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 20$$

É mais importante entender o raciocínio do que memorizar a fórmula.

De modo geral, para a seleção de um subconjunto de p elementos, dentre n elementos no total, teremos $n - p$ elementos **não selecionados (N)** e, portanto, $n - p + 1$ **espaços**, antes e depois de cada N.

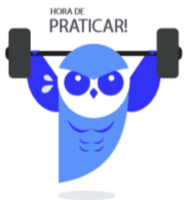
Desses $n - p + 1$ **espaços**, selecionaremos os lugares dos p elementos (combinação de p elementos dentre $n - p + 1$).

> O **1º lema de Kaplansky**, indicado por $f(n, p)$, é:
>
> $$f(n,p) = C_{n-p+1,p}$$

Para o exemplo que calculamos antes de conhecer o primeiro lema de Kaplansky, tivemos n = 8 e p = 2. Assim, haverá 8 – 2 = 6 elementos não selecionados e 6 + 1 = 7 espaços. Dentre esses 7 espaços, devemos escolher a posição de 2 elementos:

$$f(8,2) = C_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)!\,2!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2} = 7 \times 3 = 21$$

Que foi o resultado que obtivemos anteriormente.



(FGV/2019 – MPE/RJ) Valdo é estagiário em um escritório de advocacia e, na semana que vem, deverá escolher para trabalhar três dias de segunda a sábado. O escritório não permite que um estagiário trabalhe dois dias consecutivos. O número de possibilidades que Valdo tem para escolher seus dias de trabalho é:

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) 6

Comentários:

Como o conjunto original é formado pelos dias da semana de segunda a sábado, os extremos não são dias consecutivos. Assim, temos o primeiro lema de Kaplansky com n = 6 e p = 3.

Primeiro representamos os 6 – 3 = 3 dias em que Valdo não irá trabalhar, com os espaços antes e depois de cada dia não trabalhado, totalizando n – p + 1 = 4 espaços, os quais representam os **possíveis** dias de trabalho:

_ N _ N _ N _

Desses n – p + 1 = 4 espaços, devem ser escolhidos p = 3 elementos:

$$\boldsymbol{f(n,p) = C_{n-p+1,p}}$$

$$f(6,3) = C_{4,3}$$

Para facilitar as contas, lembre-se que a seleção de n – 1 elementos, dentre n, é um caso particular de combinação: $C_{n,n-1} = n$:

$$C_{4,3} = 4$$

Gabarito: C

(CESPE/2019 – Prefeitura de São Cristóvão/SE) Situação hipotética: As 5 lâmpadas tubulares de uma sala de aula foram instaladas formando uma única fileira. Por motivo de economia, 2 lâmpadas adjacentes nunca poderão ficar acesas ao mesmo tempo.

Assertiva: Nessa situação, há exatamente 13 configurações distintas, incluindo todas as lâmpadas desligadas, que atendem à exigência de economia.

Comentários:

Essa questão é um pouco mais trabalhosa. Precisamos tratar distintamente das situações (i) em que nenhuma lâmpada está acesa; (ii) em que há 1 lâmpada acesa; (iii) em que há 2 lâmpadas acesas; e (iv) em que há 3 lâmpadas acesas.

Se houvesse 4 lâmpadas acesas, dentre 5, necessariamente teríamos lâmpadas adjacentes acesas. Portanto, as opções de acender 4 lâmpadas ou mais (5) não atendem às restrições do problema.

i) Nenhuma lâmpada acesa: $\mathbf{C_{5,0} = 1}$ (caso especial de combinação $C_{n,0} = 1$). Não há que se falar em lema de Kaplansky, porque quando não selecionamos lâmpada alguma, não é possível selecionar lâmpadas adjacentes.

ii) 1 lâmpada acesa: $\mathbf{C_{5,1} = 5}$ (outro caso especial de combinação $C_{n,1} = n$). Nesse caso, também não há que se falar em lema de Kaplansky, porque quando selecionamos uma única lâmpada, também não é possível selecionar lâmpadas adjacentes.

iii) 2 lâmpadas acesas: agora sim, podemos utilizar o 1º lema de Kaplansky para garantir que as 2 lâmpadas selecionadas não sejam adjacentes. Com p = 2 elementos, dentre n = 5 elementos no total, temos n – p = 5 – 2 = 3 elementos não selecionados e n – p + 1 = 4 espaços. Desses 4 espaços, devemos escolher p = 2:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2} = \mathbf{6}$$

iv) 3 lâmpadas acesas: conseguimos selecionar 3 lâmpadas não adjacentes de uma **única** forma (SNSNS). De todo modo, vamos utilizar o lema de Kaplansky para chegar a essa conclusão. Com p = 3 elementos, dentre n = 5, temos n – p = 5 – 3 = 2 elementos não selecionados e n – p + 1 = 3 espaços. Desses 3 espaços, devemos escolher p = 3: $C_{3,3} = 1$ (caso especial de combinação $C_{n,n} = 1$).

Como as possibilidades dos eventos de i a iv são excludentes, isto é, temos a possibilidade de i OU as possibilidades de ii OU as possibilidades de iii OU a possibilidade de iv, então, pelo princípio **aditivo**, devemos somar esses resultados: 1 + 5 + 6 + 1 = 13

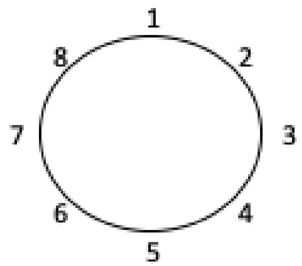
Gabarito: Certo.

Segundo Lema de Kaplansky

O **segundo lema de Kaplansky** também trabalha com a **seleção** de um subconjunto de elementos, de modo que elementos **consecutivos** (**vizinhos**) do conjunto original **não** sejam selecionados.

Porém, neste caso, os elementos **extremos** do conjunto original **são** considerados **consecutivos** (vizinhos). Assim, havendo n elementos, os elementos 1 e n são considerados vizinhos.

Supondo um conjunto de 8 elementos, os elementos 1 e 8 são consecutivos, como se os elementos estivessem dispostos em um círculo:



Exemplos desse tipo de situação são os dias da semana, de segunda a domingo, ou os meses do ano, de janeiro a dezembro, etc.

O **2º lema de Kaplansky**, indicado por $\boldsymbol{g(n,p)}$, é dado por:

$$\boldsymbol{g(n,p) = \frac{n}{n-p} C_{n-p,p}}$$

No caso de $n = 8$, como na figura, se tivermos que selecionar $p = 3$ elementos não consecutivos:

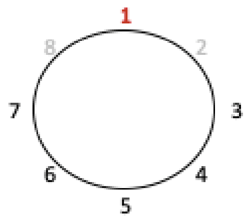
$$g(8,3) = \frac{8}{8-3} C_{8-3,3} = \frac{8}{5} C_{5,3}$$

$$g(8,3) = \frac{8}{5} \times \frac{5!}{(5-3)! \times 3!} = \frac{8}{5} \times \frac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} = \frac{8}{5} \times \frac{5 \times 4}{2} = 16$$

Vamos **entender o raciocínio** por trás do 2º lema.

Com 8 elementos dispostos em um círculo, precisamos **separar** o problema em 2: (i) o elemento 1 é selecionado; e (ii) o elemento 1 não é selecionado (poderíamos substituir o elemento 1 por qualquer outro elemento).

i) Ao **selecionarmos o elemento 1**, **não** podemos selecionar os elementos 2 ou 8, pois ambos são vizinhos.



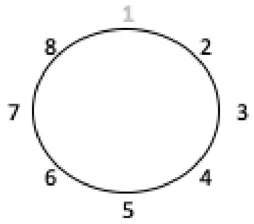
Assim, restam os elementos 3 a 7 (isto é, 5 elementos), dos quais devemos selecionar 2 elementos não consecutivos.

Observe que os extremos 3 e 7 **não são consecutivos**.

Portanto, podemos utilizar o **1º lema de Kaplansky**, com um total de n = 5 elementos, dos quais devemos selecionar p = 2 elementos. Assim, temos n – p = 3 elementos não selecionados e n – p + 1 = 4 espaços, dos quais devemos selecionar p = 2:

$$f(5,2) = C_{4,2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

ii) **Se não selecionarmos o elemento 1**, então iremos selecionar 3 elementos não consecutivos, dentre os elementos 2 a 8.



Novamente, os extremos 2 e 8 **não são consecutivos**.

Então, utilizamos o **1º lema de Kaplansky**, com n = 7 elementos e p = 3, ou seja, n – p = 4 elementos não selecionados e n – p + 1 = 5 espaços:

$$f(7{,}3) = C_{5,3} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5\times4}{2} = 10$$

Como as possibilidades de i e ii são excludentes, ou seja, temos as 6 possibilidades de i OU as 10 possibilidades de ii, pelo princípio aditivo, temos:

6 + 10 = 16

Esse é o resultado que obtivemos pela fórmula do 2º lema de Kaplansky!

(2018 – Câmara de Cambé/PR) Um auxiliar administrativo vai organizar um calendário para a supervisão de uma praça de 2ª feira até domingo. Essa praça tem que ser supervisionada exatamente duas vezes por semana e nos mesmos dias de cada semana. A praça nunca deve ser supervisionada dois dias consecutivos. Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o número de possibilidades diferentes que o auxiliar administrativo tem para organizar esse calendário.

a) 14

b) 16

c) 18

d) 24

e) 28

Comentários:

Temos um exemplo do segundo lema de Kaplansky, pois engloba todos os dias da semana (domingo e segunda-feira são consecutivos). Assim, temos n = 7, p = 2:

$$g(n,p) = \frac{n}{n-p} C_{n-p,p}$$

$$g(7,2) = \frac{7}{5} C_{5,2}$$

$$g(7,2) = \frac{7}{5} \times \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{7}{5} \times \frac{5 \times 4}{2} = 14$$

Caso **não lembre** essa fórmula, podemos dividir a resolução desse problema em duas situações.

i) A segunda-feira é selecionada. Assim, restarão os dias de quarta a sábado (4 dias) para selecionar 1 dia. Usando o 1º lema de Kaplansky, com n = 4 e p = 1, temos n – p = 3 dias não selecionados e n – p + 1 = 4 espaços, dos quais devemos selecionar 1:

$$f(4,1) = C_{4,1} = 4$$

ii) A segunda-feira não é selecionada. Assim, restarão os dias de terça a domingo (6 dias) para selecionar 2 dias. Usando o 1º lema de Kaplansky, com n = 6 e p = 2, temos n – p = 4 dias não selecionados e n – p + 1 = 5 espaços, dos quais devemos selecionar 2:

$$f(6,2) = C_{5,2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

Como são situações excludentes (ou seja, alternativas), pelo princípio da adição devemos somar os resultados:

$$g(7,2) = f(4,1) + f(6,2) = 4 + 10 = 14$$

Gabarito: A

Resumo da Aula

Princípios de Contagem

- **Princípio Multiplicativo** (multiplicação): Eventos concomitantes (ocorre um E outro)
- **Princípio Aditivo** (soma): Eventos mutuamente exclusivos (ocorre um OU outro)
- **Princípio do Pombo**: Considerar o pior cenário para **garantir** a situação desejada

Fatorial: **produto** de um número com todos os números menores que ele:

$$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$$

Permutação – reordenação de elementos

- **Permutação simples**: Número de maneiras de **reordenar** elementos **distintos**:

$$P_n = n!$$

- **Permutação com repetição**: Número de maneiras de reordenar n elementos, dos quais k elementos são **repetidos**:

$$P_n^k = \frac{n!}{k!}$$

- **Permutação circular**: Número de maneiras de reordenar elementos dispostos em **círculo**:

$$PC_n = (n-1)!$$

- **Permutação com elementos ordenados**: reordenação de n elementos, dos quais k elementos devem respeitar uma **ordem específica**, não necessariamente consecutivos:

$$\frac{P_n}{P_k} = \frac{n!}{k!}$$

- **Permutação caótica**: número de maneiras de reordenar elementos, de modo **nenhum** deles retorne para a sua **posição original**:

$$D_n = n! \times \left[+\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

Arranjo – seleção de elementos **com importância de ordem**

- **Arranjo sem repetição**: Número de maneiras de sortear, sem repetição k elementos, dentre n, de modo que a **ordem** do sorteio **importe**:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- **Arranjo com repetição**: Número de maneiras de sortear, permitindo-se a **repetição**, k elementos, dentre n, de modo que a **ordem** do sorteio **importe**:

$$A_{n,k} = n^k$$

Combinação – seleção de elementos **sem importância de ordem**

- **Combinação simples**: Número de maneiras de sortear, sem repetição, k elementos, dentre n, de modo que a **ordem** do sorteio **não importe**:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

- **Combinação completa**: Número de maneiras de sortear, **sem importância de ordem**, p objetos (ex: potes de sorvete), quando há n **tipos** diferentes (ex: marcas de sorvete):

$$CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p} = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)! \times p!}$$

Esse também é o **número de soluções inteiras não-negativas** para a equação:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$$

Partição – separação de elementos em **subconjuntos**

- **Partição ordenada**: Número de maneiras de separar n elementos em m **subconjuntos distintos** entre si, com $\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \dots, \boldsymbol{p_m}$ elementos cada, temos:

$$\binom{n}{p_1, p_2, \dots, p_m} = \frac{n!}{p_1!\,p_2!\dots p_m!}$$

- **Partição não ordenada**: Número de maneiras de separar elementos em m subconjuntos de p elementos cada (total de $m \times p$ elementos):

$$\frac{\binom{m \times p}{p, p, \dots, p}}{m!} = \frac{(m \times p)!}{m!\,(p!)^m}$$

Lemas de Kaplansky – seleção de elementos **não vizinhos**

- **1º Lema**: Número de maneiras de selecionar p elementos **não vizinhos**, dentre n, em que os **extremos** do conjunto original **não** são considerados **vizinhos**: $f(n,p) = C_{n-p+1,p}$

- **2º Lema**: Número de maneiras de selecionar p elementos **não vizinhos**, dentre n, em que os **extremos** do conjunto original **são** considerados **vizinhos**: $g(n,p) = \frac{n}{n-p} C_{n-p,p}$

Questões Comentadas – Multibancas

Princípios de Contagem

1. (AVANÇASP/2023 - Pref. Americana/SP) Em uma repartição pública trabalham 12 homens e 08 mulheres. O número máximo de duplas distintas que se pode formar contendo apenas um homem e uma mulher dessa repartição é igual a:

a) 84

b) 50

c) 72

d) 68

e) 96

Comentários:

O enunciado informa que há 12 homens e 8 mulheres. O número de maneiras de escolher um homem E uma mulher (eventos concomitantes) é, pelo princípio multiplicativo:

$$n = 12 \times 8 = 96$$

Gabarito: E

2. (FCM-CEFETMINAS/2023 - Pref. Contagem/MG) Considere todos os números de três algarismos distintos que podem ser formados utilizando os algarismos 1, 2, 4, 5, 7 e 8, como, por exemplo, os números 175 ou 852. Escrevendo-se todos esses números em ordem crescente, o número que ocupa a 50ª posição é

a) 417

b) 428

c) 452

d) 517

e) 518

Comentários:

Para responder essa questão, precisamos ordenar os possíveis números que podem ser formados com 3 algarismos distintos, dentre os 6 algarismos descritos:

Os primeiros números são aqueles que começam com 1. Para esses números, há 5 possibilidades de escolher o algarismo da 2ª posição e 4 possibilidades de escolher o algarismo da 3ª posição, uma vez que os algarismos precisam ser distintos:

1	5	4

Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de números que iniciam com o algarismo 1 é:

$$n(1) = 5 \times 4 = 20$$

Ou seja, esses números ocupam as 20 primeiras posições.

Em seguida, temos os números que começam com 2. Para esses números, também há 5 possibilidades de escolher o 2º algarismo e 4 possibilidades de escolher o 3º algarismo:

2	5	4

$$n(2) = 5 \times 4 = 20$$

Assim, os números que começam com o algarismo 1 ou com o algarismo 2, ocupam as 40 primeiras posições.

Também há 20 possibilidades de números que começam com o algarismo 4, mas como precisamos do número que ocupa a 50ª posição, vamos verificar essa ordem, ao certo.

Se escolhermos o algarismo 1 como 2º algarismo, restarão 4 possibilidades para o 3º algarismo:

4	1	4

Até aqui, temos 44 números.

Se escolhermos o algarismo 2 como 2º algarismo, também restarão 4 possibilidades para o 3º algarismo:

4	2	4

Agora, temos 48 números.

O número seguinte (49ª posição) é:

4	5	1

Por fim, o número que ocupa a 50ª posição é:

4	5	2

Gabarito: C

3. (IUDS/2022 - CORE/CE) Alice foi viajar e levou 8 blusas e 3 calças em sua mala. De quantas maneiras diferentes ela poderá combinar essas peças de roupa?

a) 16

b) 19

c) 24

d) 28

Comentários:

O número de maneiras de escolher uma blusa E uma calça, ou seja, eventos concomitantes, é o produto das possibilidades (princípio multiplicativo). Havendo 8 possibilidades de blusa e 3 possibilidades de calça, temos:

$$8 \times 3 = 24$$

Gabarito: C

4. (AMAUC/2022 - Pref. Peritiba) Gisele comprou 5 blusas, 4 saias e 3 sandálias. Quantos conjuntos diferentes ela pode formar com essas peças?

a) Ela pode formar 60 conjuntos diferentes.

b) Ela pode formar 27 conjuntos diferentes.

c) Ela pode formar 25 conjuntos diferentes.

d) Ela pode formar 40 conjuntos diferentes.

e) Ela pode formar 72 conjuntos diferentes.

Comentários:

O número de maneiras de escolher uma blusa E uma saia E uma sandália, ou seja, eventos concomitantes, é o produto das possibilidades (princípio multiplicativo). Havendo 5 possibilidades de blusa e 4 possibilidades de saia e 3 possibilidades de sandália, temos:

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

Gabarito: A

5. (COPESI-UFPI/2022 - Pref. Oeiras) Um restaurante possui disponível para montar uma refeição, quatro sabores de suco, três tipos de sobremesa e três opções de prato principal. Para montar uma refeição, é necessário escolher uma opção de suco, uma opção de prato principal e uma opção de sobremesa. De quantas maneiras distintas é possível montar uma refeição?

a) 36.

b) 48.

c) 72.

d) 96.

e) 108.

Comentários:

O enunciado informa que há 4 possibilidades de suco, 3 possibilidades de sobremesa e 3 possibilidades de prato principal. Para calcular o número de maneiras de escolher um suco E uma sobremesa E um prato principal, utilizamos o princípio multiplicativo:

$$4 \times 3 \times 3 = 36$$

Gabarito: A.

6. (UNESC/2022 - Pref. Lagunas/SC) Uma lanchonete oferece 18 tipos de sanduíche, 10 tipos de suco e 16 tipos de sorvete. De quantas maneiras diferentes é possível montar uma refeição com um tipo de sanduíche, um tipo de suco e um tipo de sorvete?

a) É possível montar essa refeição de 1.320 maneiras diferentes.

b) É possível montar essa refeição de 2.460 maneiras diferentes.

c) É possível montar essa refeição de 3.550 maneiras diferentes.

d) É possível montar essa refeição de 2.880 maneiras diferentes.

e) É possível montar essa refeição de 1.960 maneiras diferentes.

Comentários:

A questão informa o número de sanduíches diferentes, o número de sucos diferentes e o número de sorvetes diferentes. Para calcular o número de maneiras de montar uma refeição com os 3 itens (sanduíche E suco E sorvete), utilizamos o princípio multiplicativo. Sabendo que há 18 sanduíches, 10 sucos e 16 sorvetes, temos:

$$18 \times 10 \times 16 = 2.880$$

Gabarito: D.

7. (QUADRIX/2022 - Pref. Lagunas/SC) Em uma loja, há 6 tipos de refrigerante, 4 tipos de queijo e 3 tipos de carne. Com base nesse caso hipotético, julgue o item.

Há exatamente 13 modos de uma pessoa comprar um refrigerante, um queijo e uma carne nessa loja.

Comentários:

O enunciado informa que há 6 tipos de refrigerante, 4 tipos de queijo e 3 tipos de carne. O número de maneiras de comprar os 3 itens de forma concomitante (refrigerante E queijo E carne) é o produto das possibilidades (princípio multiplicativo):

$$6 \times 4 \times 3 = 72$$

Que é diferente de 13. Essa quantidade corresponde à soma das possibilidades (princípio aditivo), que seria aplicável caso a pessoa quisesse comprar um dos itens (refrigerante OU queijo OU carne).

Gabarito: Errado

8. (COPESI-UFPI/2022 - Pref. Oeiras) Uma pequena loja de roupas possui disponíveis três tipos de blusa, três tipos de bermuda e três tipos de calçados; os modelos de calçados disponíveis são tênis, sandália e alpargata. Lucas chegou à loja para comprar uma blusa, uma bermuda e um calçado, sabendo que em relação ao calçado, Lucas vai comprar uma alpargata ou um tênis. De quantas maneiras distintas Lucas pode realizar a sua compra?

a) 3

b) 6

c) 9

d) 12

e) 18

Comentários:

O enunciado informa que há 3 possibilidades de blusa, 3 possibilidades de bermuda e que, dentre as opções de calçado, Lucas que irá adquirir uma dentre 2 possibilidades. Para calcular o número de maneiras de escolher uma blusa E uma bermuda E um calçado (alpargata ou tênis), utilizamos o princípio multiplicativo:

$$3 \times 3 \times 2 = 18$$

Gabarito: E.

9. (Quadrix/2022 - CRC/PR) O cardápio de um restaurante apresenta quatro tipos de entrada, seis tipos de prato principal e três tipos de sobremesa. Para participar de determinada promoção nesse restaurante, cada cliente deverá escolher um item de cada uma dessas três categorias. Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Há menos de setenta formas de um cliente participante da promoção escolher seus pratos.

Comentários:

O enunciado informa que há 4 tipos de entrada, 6 tipos de prato principal e 3 tipos de sobremesa. O número de maneiras de escolher uma entrada, um prato principal e uma sobremesa (eventos concomitantes) é, pelo princípio multiplicativo:

$$4 \times 6 \times 3 = 72$$

Que é maior que 70.

Gabarito: Errado

10. (FEPESE/2022 - Pref. Chapecó) Um exame é formado por 8 questões do tipo verdadeiro ou falso, e a resposta de cada questão deve ser passada para um cartão de respostas. Um estudante que não se preparou para o exame irá responder a cada questão de maneira aleatória.

De quantas maneiras diferentes ele pode preencher o seu cartão de respostas? Assumimos que ele escolheu uma resposta, entre verdadeiro e falso, para cada uma das questões, isto é, não anulou nem deixou questões em branco.

a) Mais de 350

b) Mais de 300 e menos de 350

c) Mais de 250 e menos de 300

d) Mais de 200 e menos de 250

e) Menos de 200

Comentários:

Para cada uma das 8 perguntas, há 2 respostas possíveis. Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de responder todas as 8 perguntas (eventos concomitantes) é o produto:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$$

Que está entre 250 e 300.

Gabarito: C

11. (CONSULPLAN/2022 - Pref. Irauçuba) Em um restaurante chinês, a promoção do dia permite montar um combo com três tipos de sushis: hot, uramaki e hossomaki. Existem 5 sabores para o hot, 6 para o uramaki e 10 para o hossomaki. De quantas formas se pode fazer o combo, levando-se em consideração que teve, pelo menos, um tipo de sushi?

a) 462

b) 461

c) 460

d) 458

Comentários:

Precisamos calcular o número de possibilidades de escolher **pelo menos** um tipo de sushi, considerando que há 5 sabores de hot, 6 sabores de uramaki e 10 sabores de hossomaki.

Se escolhermos um único tipo de sushi (hot OU uramaki OU hossomaki), aplicamos o princípio aditivo, por se tratar de eventos mutuamente exclusivos:

$$n_1 = 5 + 6 + 10 = \mathbf{21}$$

Se escolhermos dois tipos de sushi, precisamos analisar as combinações em separado. Se escolhermos um hot E um uramaki, o número de possibilidades é (princípio multiplicativo):

$$n_{2a} = 5 \times 6 = 30$$

Se escolhermos um hot E um hossomaki, o número de possibilidades é:

$$n_{2a} = 5 \times 10 = 50$$

E se escolhermos um uramaki E um hossomaki, o número de possibilidades é:

$$n_{2a} = 6 \times 10 = 60$$

Como essas possibilidades são mutuamente exclusivas, aplicamos o princípio aditivo:

$$n_2 = 30 + 50 + 60 = \mathbf{140}$$

Por fim, se escolhermos os três tipos de sushi (hot E uramaki E hossomaki), o número de possibilidades é (princípio multiplicativo):

$$n_3 = 5 \times 6 \times 10 = \mathbf{300}$$

Como as possibilidades n_1, n_2 e n_3 são mutuamente exclusivas (vamos escolher 1 OU 2 OU 3 tipos de sushi), aplicamos o princípio aditivo:

$$n = 21 + 140 + 300 = 461$$

Gabarito: B

12. (IBFC/2022 - MGS) A Placa Mercosul é o novo padrão para a Placa de Identificação Veicular no Brasil, criada num acordo entre os países membros do Mercosul. A nova placa é constituída de sete caracteres, sendo os três primeiros letras do alfabeto (26 letras), o quinto caractere também corresponde a uma letra do mesmo alfabeto, já o quarto, o sexto e o sétimo caracteres correspondem a algarismos entre 0 e 9 (10 algarismos). Dessa forma, o número de placas Mercosul, possíveis de serem formadas, correspondem a:

a) 456.976.000

b) 175.760.000

c) 358.800.000

d) 656.000.000

Comentários:

A placa é composta de 4 letras e 3 números:

L	L	L	N	L	N	N

Considerando que os dígitos podem ser repetidos, para cada letra, há 26 possibilidades e, para cada número, há 10 possibilidades:

26	26	26	10	26	10	10

Pelo princípio multiplicativo, o número de placas possíveis (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 = 456.976.000$$

Não é necessário efetuar a multiplicação inteira, pois o produto de $26 \times 26 \times 26 \times 26$ termina em 6 e quando multiplicamos por $10 \times 10 \times 10$, obtemos três zeros à direita. A única alternativa que se encaixa nessa situação é a alternativa A.

Gabarito: A

13. (IDECAN/2022 - CBM/MS) Determine a quantidade de números pares com quatro algarismos que podemos formar com os números 1, 5, 6, 7 ,8.

a) 250

b) 230

c) 180

d) 160

e) 120

Comentários:

Precisamos formar números pares de 4 dígitos, com os algarismos 1, 5, 6, 7 e 8. Para que o número seja par, é necessário que o último dígito seja par, logo, há 2 possibilidades (6 ou 8) para o último dígito:

			2

Como não é necessário que os algarismos sejam distintos, há 5 possibilidades para os demais dígitos:

5	5	5	2

Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de maneiras de formar o número com os quatro dígitos (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 5 \times 5 \times 5 \times 2 = 250$$

Gabarito: A

14. (CETREDE/2022 - Pref. Ipaporanga) De quantas formas diferentes uma pessoa pode viajar da cidade A para a cidade D, passando necessariamente pelas cidades B e C uma única vez e tendo 5 estradas disponíveis para viajar de A para B, 8 de B para C e 12 de C para D?

a) 480

b) 350

c) 355

d) 360

e) 678

Comentários:

O enunciado informa que há 5 estradas entre A e B; 8 estradas entre B e C; e 12 estradas entre C e D. O número de maneiras de percorrer todos esses caminhos (eventos concomitantes) corresponde ao produto dessas possibilidades (princípio multiplicativo):

$$n = 5 \times 8 \times 12 = 480$$

Gabarito: A

15. (IBFC/2022 - MGS) A, B, C e D são cidades de uma região metropolitana. Existem três rodovias entre A e C, quatro entre B e D, duas entre A e B e cinco entre C e D. Dessa forma, para ir de A até D existe um número de rotas possíveis pelas rodovias que corresponde a:

a) 14

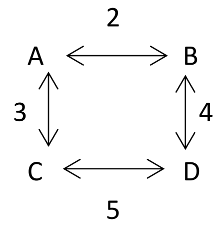
b) 20

c) 23

d) 120

Comentários:

O enunciado informa que há 3 rodovias entre A e C; 4 entre B e D; e 2 entre C e D:



Para ir de A até D, podemos percorrer o caminho ABD ou ACD. Pelo caminho ABD, há 2 possibilidades entre A e B e 4 possibilidades entre B e D. Logo, para percorrer ambos os trechos (eventos concomitantes), temos o produto:

$$n_{ABD} = 2 \times 4 = 8$$

Pelo caminho ACD, há 3 possibilidades entre A e C e 5 possibilidades entre C e D. Logo, para percorrer ambos os trechos (eventos concomitantes), temos o produto:

$$n_{ACD} = 3 \times 5 = 15$$

Como esses dois percursos são mutuamente exclusivos, o número total de possibilidades corresponde à soma:

$$n = 8 + 15 = 23$$

Gabarito: C

16. (CONSULPLAN/2022 - SEED/PR) O prédio de uma faculdade possui três portas de entrada que levam a um saguão onde estão disponíveis dois elevadores e uma escada para acessar os andares do prédio. Um visitante deve dirigir-se ao 5º andar passando por uma das portas de entrada e utilizando um dos meios de acesso aos andares da instituição. De quantas maneiras distintas ele pode chegar ao seu destino?

a) 5

b) 6

c) 9

d) 12

Comentários:

Há 3 portas de entrada, 2 elevadores e 1 escada. Assim, para entrar, há 3 possibilidades; e para subir, há 3 possibilidades (2 elevadores + 1 escada, uma vez que são eventos mutuamente excludentes).

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de entrar E subir é o produto:

$$n = 3 \times 3 = 9$$

Gabarito: C

17. (SELECON/2022 - CM CG/MS) Em uma repartição pública, trabalham x homens e y mulheres. A quantidade máxima de duplas diferentes que se pode formar com um homem e uma mulher que trabalham nessa repartição é igual a:

a) x+y

b) x.y

c)x^y

d) y^x

Comentários:

Havendo x homens e y mulheres, o número de maneiras de escolher um homem E uma mulher (eventos concomitantes) é, pelo princípio multiplicativo, o produto:

$$x.y$$

Gabarito: B.

18. (Quadrix/2022 - CRM/SC) As cores em computadores geralmente são identificadas por um código chamado RGB. Usando-se esse código, cada cor é expressa por 6 números, cada um variando entre 0 e 15. Assim, os 2 primeiros números representam o vermelho na cor final, os seguintes representam o verde e os últimos 2 números, o azul. Considerando essas informações, julgue o item.

Com esse código, é possível descrever 256^3 cores diferentes.

Comentários:

O enunciado informa que o código é composto por 6 números, cada um variando entre 0 e 15. Assim, há 16 possibilidades para cada número:

16	16	16	16	16	16

Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de maneiras de escolher os 6 números (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 = 16^6 = (16^2)^3 = 256^3$$

Gabarito: Certo

19. (Quadrix/2022 - CRM/SC) As cores em computadores geralmente são identificadas por um código chamado RGB. Usando-se esse código, cada cor é expressa por 6 números, cada um variando entre 0 e 15. Assim, os 2 primeiros números representam o vermelho na cor final, os seguintes representam o verde e os últimos 2 números, o azul. Considerando essas informações, julgue o item.

Existem apenas 25 cores em que os dois números que descrevem o verde são maiores que 10.

Comentários:

Agora, precisamos calcular o número de códigos que podem ser formados, considerando que os números centrais devem ser maiores que 10.

Para cada um dos números centrais, há 5 possiblidades (de 11 a 15); e os demais números continuam com 16 possibilidades cada:

16	16	5	5	16	16

Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de maneiras de escolher os 6 números nessa situação é o produto:

$$n = 16 \times 16 \times 5 \times 5 \times 16 \times 16 = 25 \times 16^4$$

Que é diferente de 25.

Gabarito: Errado

20. (Quadrix/2022 - CRM/SC) As cores em computadores geralmente são identificadas por um código chamado RGB. Usando-se esse código, cada cor é expressa por 6 números, cada um variando entre 0 e 15. Assim, os 2 primeiros números representam o vermelho na cor final, os seguintes representam o verde e os últimos 2 números, o azul. Considerando essas informações, julgue o item.

Das cores que são expressas apenas por números menores que 4, mais de 4.000 contêm 2 ou 3.

Comentários:

Para calcular a quantidade de números que contêm os números 2 ou 3 em alguma das posições, dentre os códigos que são expressos apenas por números menores que 4, vamos calcular a quantidade total desses números e, em seguida, subtrair aqueles não contêm nem o número 2, nem o número 3.

Sendo todos os números menores que 4, há 4 possibilidades (de 0 a 3) para cada posição:

4	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**

Pelo princípio multiplicativo, a quantidade desses números é o produto:

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^6 = 4096$$

Sendo os números diferentes de 2 e de 3, há 2 possibilidades (0 e 1) para cada posição:

2	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**

E a quantidade de números que não atendem à condição é o produto:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6 = 64$$

E a diferença corresponde aos números que atendem à condição desejada:

$$n = 4096 - 64 = 4032$$

Que, de fato, é maior que 4.000.

Gabarito: Certo

21. (COMPERVE/2022 - CREF 16/RN) Uma academia de ginástica contratou dois alunos de graduação em Educação Física para atuarem como estagiários. Cada um deles deve desenvolver suas atividades em apenas um dia da semana, no período de segunda-feira a sexta-feira. Se eles não trabalham no mesmo dia, a quantidade de escalas distintas de trabalho possíveis para eles, em uma semana, é de

a) 20

b) 10

c) 25

d) 15

Comentários:

O enunciado informa que há 2 estagiários e que cada um deve escolher um dia da semana (de 2ª a 6ª) diferente do outro. Assim, o primeiro estagiário pode escolher dentre todos os 5 dias e o segundo pode escolher dentre os 4 dias disponíveis, após a escolha do primeiro.

Pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades de ambos os estagiários escolherem os dias é o produto:

$$n = 5 \times 4 = 20$$

Gabarito: A.

22. (La Salle/2022 - São Leopoldo) Um bar possui 7 portas. De quantas maneiras é possível entrar nesse bar por uma porta e sair por uma porta diferente?

a) 02 maneiras.

b) 13 maneiras.

c) 14 maneiras.

d) 42 maneiras.

e) 49 maneiras.

Comentários:

O enunciado afirma que há 7 portas e que deve ser escolhida uma para entrar e outra (diferente) para sair. Assim, há 7 possibilidades para escolher a porta de entrada e 6 possibilidades para escolher a porta de saída (diferente da de entrada).

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de escolher ambas as portas (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 7 \times 6 = 42$$

Gabarito: D.

23. (CONSULPLAN/2022 - SEED/PR) Para apresentar um trabalho escolar, os amigos André, Bruno, Carlos e Daniel colocaram 4 cadeiras em uma fila na frente da sala de aula. Considerando que André e Bruno precisam, necessariamente, sentar nas extremidades, de quantas maneiras distintas todos os amigos podem se acomodar nas cadeiras?

a) 2.

b) 4.

c) 6.

d) 12.

Comentários:

Precisamos encontrar o número de maneiras de 4 amigos (A, B, C e D) se sentarem. Sabendo que A e B precisam sentar-se nas extremidades, há **2** possibilidades para isso ocorrer:

A _ _ B ou B _ _ A

Consequentemente, C e D ocuparão as cadeiras centrais. Também há 2 possibilidades de isso ocorrer:

_ C D _ ou _ D C _

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de todos se sentarem (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 2 \times 2 = 4$$

Gabarito: B

24. (CONSULPLAN/2022 - Pref. Rosário) Patrícia tem uma rara coleção com 56 pares de brincos que são guardados em pequenos recipientes, numerados de 1 a 56. Atendendo ao pedido de sua irmã, Patrícia retirou, de maneira aleatória, três recipientes. O número de retiradas dos três recipientes de forma que o segundo seja o de número 27 é:

a) 2970

b) 3080

c) 3192

d) 3228

Comentários:

Há 56 brincos no total, dos quais 3 serão retirados, de modo que o segundo seja um brinco específico, de número 27. Para que isso ocorra, o primeiro brinco retirado pode ser qualquer um, exceto o de número 27

(55 possibilidades); e o último brinco, pode ser qualquer um, dentre os brincos que restaram (54 possibilidades):

55	27	**54**

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de retirar os três brincos nessas condições (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 55 \times 54 = 2970$$

Gabarito: A

25. (CONSULPLAN/2022 - Pref. Caeté) Em seu guarda-roupa, Luciana armazena 80 pares de sandálias alocados em caixas devidamente enumeradas de 1 a 80. Após a solicitação de uma de suas amigas, Luciana pegou, aleatoriamente, três caixas de seu guarda-roupa. O número de retiradas diferentes das três caixas que Luciana pode realizar de forma que a segunda caixa seja a de número 18 é igual a:

a) 6162

b) 6320

c) 6480

d) 6796

Comentários:

Há 80 sandálias no total, das quais 3 serão retirados, de modo que a segunda seja uma sandália específica, de número 18. Para que isso ocorra, a primeira sandália retirada pode ser qualquer uma, exceto a de número 18 (79 possibilidades); e a última sandália, pode ser qualquer uma, dentre as sandálias que restaram (78 possibilidades):

79	18	**78**

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de retirar as três sandálias nessas condições (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 79 \times 78 = 6162$$

Gabarito: A

26. (IBFC/2022 - MGS) Paulo esqueceu a senha que utiliza na fechadura eletrônica para abrir a porta de sua casa. Se a senha é formada por 3 números, de 0 a 9, todos distintos, então o total de senhas possíveis de senhas que Paulo deve digitar para acertar na penúltima tentativa é:

a) 719

b) 999

c) 721

d) 659

Comentários:

A senha é formada por 3 algarismos distintos. Assim, há 10 possibilidades para o 1º dígito; em seguida, restarão 9 possibilidades para o 2º algarismo; e, por fim, haverá 8 possibilidades para o 3º dígito:

10	**9**	**8**

Pelo princípio multiplicativo, o número total de senhas possíveis é o produto:

$$n = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

E a penúltima tentativa, isto é, a tentativa anterior antes da última, é a 719ª.

Gabarito: A

27. (SELECON/2022 - Pref. São Gonçalo/RJ) Júlia dispõe de 8 cores diferentes para pintar a figura representada a seguir, formada por três quadrados.

A	**B**	**C**

Sabe-se que:
- **os quadrados A e C devem ser coloridos pela mesma cor;**
- **cada quadrado deve ser totalmente preenchido por uma única cor;**
- **a cor usada no quadrado B deve ser diferente da usada no quadrado A.**

O número máximo de pinturas distintas que essa figura pode ter é igual a:

a) 64

b) 56

c) 32

d) 24

Comentários:

Para pintar a figura, precisamos de 2 cores distintas, uma para os quadrados A e C, e outra para B.

Havendo 8 cores no total, há 8 possibilidades para a escolha da cor para A,C. Em seguida, restarão 7 cores para B:

$$n = 8 \times 7 = 56$$

Gabarito: B

28. (INAZ do Pará/2022 - SAGAZ) As pesquisas mostram que os jovens não se sentem pertencentes à comunidade escolar. Por isso, o protagonismo juvenil é um dos objetivos do Novo Ensino Médio do Brasil. A escola municipal "Antônio da Silveira", com o intuito de fazer com que os alunos se sintam partícipes na comunidade escolar, fez uma eleição para criarem a bandeira da escola. A primeira decisão foi de que a bandeira teria três listras horizontais com cores diferentes, veja a imagem abaixo.

Cor 1
Cor 2
Cor 3

As listras serão escolhidas dentre cinco opções de cores. De quantas formas diferentes essa bandeira pode ser configurada com as opções existentes?

a) 35

b) 45

c) 55

d) 60

e) 65

Comentários:

Sabendo que há 5 cores e que as 3 listras devem ter cores distintas, então há 5 possibilidades para a 1ª listra. Após a escolha da 1ª cor, restarão 4 possibilidades para a escolha da 2ª cor. Por fim, restarão 3 possibilidades para a escolha da 3ª cor.

5
4
3

Pelo princípio multiplicativo, o número de opções para a bandeira é o produto (eventos concomitantes):

$$n = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

Gabarito: D

29. (IDECAN/2022 - SEFAZ/RR) Uma bandeira com 7 listas em branco, deve ser pintada. Temos 11 cores, cada lista deve ter uma única cor, uma cor usada não pode ser reutilizada. De quantas formas essa bandeira pode ser pintada?

a) 1.543.200

b) 1.663.200

c) 1.423.200

d) 1.373.200

e) 1.293.200

Comentários:

Sabemos que há 11 cores e que as 7 listras devem ter cores distintas. Assim, há 11 possibilidades para a 1ª listra; após a escolha da 1ª cor, restarão 10 possibilidades para a escolha da 2ª cor; e assim sucessivamente até a última listra:

11	**10**	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**

Pelo princípio multiplicativo, o número de opções para a bandeira é o produto (eventos concomitantes):

$$n = 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1.663.200$$

Gabarito: B

30. (SELECON/2022 - CM Dourados) Existem exatamente N maneiras diferentes de três pessoas estacionarem seus carros em uma garagem que possui apenas nove vagas. O valor de N será igual a:

a) 3x9

b) 3^9

c) 9^3

d) 9x8x7

Comentários:

Se 3 pessoas selecionem 9 vagas distintas, a primeira pessoa terá 9 possibilidades; após a sua escolha, restarão 8 vagas possíveis para a segunda pessoa; por fim, restarão 7 possibilidades para a terceira pessoa.

9	8	7
P1	P2	P3

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de escolher as três vagas (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 9 \times 8 \times 7$$

Gabarito: D

31. (AVANÇASP/2022 - Pref. Laranjal Paul) Em uma corrida de fórmula 1, há 20 pilotos disputando a 1ª, 2ª e 3ª colocação. Sabendo que esses lugares dão, nessa ordem, 25, 18 e 15 pontos para o campeonato.

Assim, podemos afirmar com certeza que há:

a) 6840 formas de acontecer o pódio.

b) 6750 formas de acontecer o pódio.

c) 5814 formas de acontecer o pódio.

d) 8000 formas de acontecer o pódio.

e) 15625 formas de acontecer o pódio.

Comentários:

O enunciado pede o número de maneiras de 20 pessoas ocuparem 3 lugares diferentes. Para o 1º lugar, há 20 possibilidades; em seguida, restarão 19 possibilidades para o 2º lugar; e, por fim, haverá 18 possibilidades para o 3º lugar.

20	19	18
1º	2º	3º

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de escolher as três posições (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 20 \times 19 \times 18 = 6840$$

Gabarito: A

32. (CONSULPLAN/2022 - Pref. Caeté) Em um torneio mundial de vôlei participam 30 seleções, representando, cada uma, um país diferente. Cada equipe joga duas vezes com as demais equipes e vence o campeonato a seleção que alcançar o maior número de pontos. Podemos afirmar que o número de maneiras distintas para a classificação dos três últimos lugares é:

a) 6.090

b) 12.180

c) 24.360

d) 48.720

Comentários:

O enunciado pede o número de maneiras de 30 seleções ocuparem 3 lugares diferentes. Para o último lugar, há 30 possibilidades; em seguida, restarão 29 possibilidades para o penúltimo lugar; e, por fim, haverá 28 possibilidades para o antepenúltimo lugar.

28	29	30

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de escolher as três posições (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 30 \times 29 \times 28 = 24.360$$

Gabarito: C

33. (FAPEC/2022 - UFMS) Em uma corrida de Fórmula 1, iniciaram 20 pilotos partindo do grid de largada. Porém, no decorrer da corrida, alguns carros tiveram problemas e não completaram a prova, que possuía 71 voltas. Abandonaram a corrida, por problemas no motor, 4 pilotos; 2 pilotos, por colisão com o muro; e 3 pilotos, por pneu(s) furado(s). Com a bandeira quadriculada balançando ao final da última volta, temos algumas posições ocupadas no resultado da corrida: Lewis Hamilton, piloto da Mercedes, terminou na 5ª colocação; Max Verstappen, da Redbull, na 6ª posição; e Fernando Alonso, da Alpine, terminou em 9º lugar. Com as informações dispostas, determine de quantas maneiras é possível formar um pódio de 1º, 2º e 3º colocados nessa corrida.

a) 40.320

b) 5.040

c) 756

d) 336

e) 120

Comentários:

O enunciado informa que há inicialmente 20 pilotos na corrida, mas que um total de 9 pilotos a abandonaram, restando 11 pilotos. Ademais, sabe-se que 3 pilotos estão fora do pódio, restando 8 possíveis candidatos para os 3 primeiros lugares.

Portanto, para o 1º lugar, há 8 possibilidades; em seguida, restarão 7 possibilidades para o 2º lugar; e, por fim, haverá 6 possibilidades para o 3º lugar.

8	7	6
1º	2º	3º

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de escolher as três posições (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

Gabarito: D

34. (IBFC/2022 - MGS) A senha de um banco é formada por três consoantes distintas, considerando o alfabeto de 26 letras.

Nessas condições, o total de senhas possíveis de serem formadas é igual a:

a) 1330

b) 7980

c) 3990

d) 15600

Comentários:

Precisamos calcular o número de maneiras de formar uma senha com 3 **consoantes distintas**, considerando o alfabeto de 26 letras. Sabendo que há 5 vogais, o número de consoantes é a diferença:

$$26 - 5 = 21$$

Portanto, para o 1º dígito, há 21 possibilidades; em seguida, restarão 20 possibilidades para o 2º dígito; e, por fim, haverá 19 possibilidades para o 3º dígito.

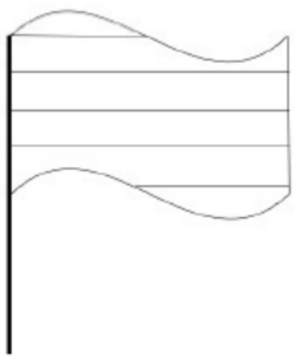
21	**20**	**19**

Pelo princípio multiplicativo, o número de senhas possíveis (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 21 \times 20 \times 19 = 7980$$

Gabarito: B

35. (CONSULPLAN/2022 - SEED/PR) A bandeira a seguir será pintada utilizando as cores azul, vermelho, verde e preto. Cada listra será pintada de uma única cor e as listras que estão lado a lado não poderão ter cores iguais.



O número de formas distintas de se pintar essa bandeira, seguindo as condições, é:

a) 3^6

b) 4^6

c) 4×3^5

d) 4 x 6

Comentários:

Precisamos colorir as 6 listras da bandeira, com 4 possibilidades de cores, de modo que listras lado a lado tenham cores diferentes.

A primeira listra pode ser de qualquer uma das 4 cores; a segunda listra pode ser de qualquer cor, exceto aquela escolhida para a primeira listra (3 possibilidades); e as demais teclas seguem a mesma regra da segunda: a terceira deve ser diferente da segunda (3 possibilidades), a quarta deve ser diferente da terceira (3 possibilidades) e assim sucessivamente até a 6ª listra.

1ª	**4**
2ª	**3**
3ª	**3**
4ª	**3**
5ª	**3**
6ª	**3**

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de escolher as cores de todas as listras (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 4 \times 3^5$$

Gabarito: C

36. (AOCP/2022 - PM/ES) Um XILOFONE deve ser montado escolhendo 7 teclas de tamanhos distintos, mas sempre obedecendo, da esquerda para a direita, a ordem crescente de tamanho. Para cada tecla, há disponíveis 5 cores diferentes: branco, amarelo, azul, verde e vermelho. De quantas maneiras distintas é possível montar esse XILOFONE, sabendo que teclas vizinhas não podem ter a mesma cor?

a) 16.384

b) 20.480

c) 40.320

d) 5.040

e) 78.125

Comentários:

Precisamos do número de maneiras de escolher a cor de 7 teclas, dentre 5 cores disponíveis, sabendo que teclas vizinhas não podem ter a mesma cor.

A primeira tecla pode ser de qualquer uma das 5 cores; a segunda tecla pode ser de qualquer cor, exceto aquela escolhida para a primeira tecla (4 possibilidades); e as demais teclas seguem a mesma regra da segunda: a terceira deve ser diferente da segunda (4 possibilidades), a quarta deve ser diferente da terceira (4 possibilidades) e assim sucessivamente até a 7ª tecla.

5	4	4	4	4	4	4
1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de escolher as cores de todas as teclas (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 5 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 20.480$$

Gabarito: B

37. (CONSULPLAN/2022 - Pref. Caeté) Jéssica foi em uma popular rede de eletrodomésticos e, no momento em que foi pagar por seus produtos, não conseguiu lembrar a senha de quatro dígitos do seu cartão de crédito. Entretanto, Jéssica sabe que essa senha era composta por algarismos distintos, formava um número par e começava com o algarismo 8. Qual o número máximo de tentativas diferentes Jéssica possui para acertar a senha?

a) 66

b) 112

c) 224

d) 280

Comentários:

A senha possui 4 algarismos distintos, sendo que o primeiro é 8.

8			

Sabemos que o número é par, ou seja, há 4 possibilidades para o último dígito (quais sejam, os algarismos 0, 2, 4 e 6, pois o algarismo 8 já consta na senha). Ademais, restam 8 possibilidades para o segundo dígito e 7 possibilidades para o terceiro dígito:

8	8	7	4

Pelo princípio multiplicativo, o número de senhas possíveis (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 8 \times 7 \times 4 = 224$$

Gabarito: C

38. (AOCP/2022 - PM/ES) Os 60 policiais militares que compõem o efetivo da Banda Militar receberam uma identificação numérica. Esse número é par e é formado por 4 números distintos escolhidos entre os números {2, 3, 4, 5, 6}. Se cada policial possui uma única numeração, quantas identificações, utilizando o mesmo critério, ainda sobram para possíveis contratações de novos membros?

a) 6

b) 8

c) 12

d) 20

e) 72

Comentários:

Precisamos calcular a quantidade de números pares de 4 dígitos que podem ser formados a partir dos algarismos {2, 3, 4, 5, 6}. Para o número ser par, é necessário que o último dígito seja par (3 possibilidades):

			3

Após a escolha do último dígito, restam 4 possibilidades para o primeiro dígito; em seguida, restarão 3 possibilidades para o segundo dígito; e, por fim, 2 possibilidades para o terceiro dígito:

4	3	2	3

Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de números que podem ser formados é o produto:

$$n_{total} = 4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$$

Sabendo que há 60 policiais, o número de novos membros que podem ser contratados é a diferença:

$$n_{novos} = 72 - 60 = 12$$

Gabarito: C

39. (IBFC/2022 - MGS) Assinale a alternativa que apresenta o total de senhas de quatro dígitos possíveis de serem formadas utilizando números de 1 a 5, sem repetição cujo primeiro dígito é par.

a) 1250

b) 120

c) 48

d) 96

Comentários:

Precisamos calcular a quantidade de senhas de 4 dígitos que podem ser formados a partir dos algarismos {1, 2, 3, 4, 5}, sendo o primeiro dígito par. Assim, há 2 possibilidades (2 ou 4) para o primeiro dígito:

2			

Após a escolha do primeiro dígito, restam 4 possibilidades para o segundo dígito; em seguida, restarão 3 possibilidades para o terceiro dígito; e, por fim, 2 possibilidades para o último dígito:

2	**4**	**3**	**2**

Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de números que podem ser formados é o produto:

$$n_{total} = 2 \times 4 \times 3 \times 2 = 48$$

Gabarito: C

40. (AOCP/2022 - IF/RO) Para irmos da cidade A para a cidade B, temos 4 caminhos distintos. Para ir da cidade B para a cidade C, temos 5 caminhos distintos. De quantas maneiras possíveis podemos ir da cidade A até a cidade C, passando pela cidade B, e depois voltar para a cidade A, passando novamente pela cidade B, sem usar caminhos repetidos?

a) 240

b) 480

c) 120

d) 400

e) 200

Comentários:

O enunciado informa que há 4 caminhos possíveis entre A e B e 5 caminhos possíveis entre B e C. Para percorrer ambos os trechos (eventos concomitantes) na ida, o número de possibilidades é o produto:

$$n(ida) = 4 \times 5 = 20$$

Na volta, não podemos utilizar caminhos repetidos, em qualquer um dos trechos. Assim, restarão 3 caminhos possíveis entre A e B e 4 caminhos possíveis entre B e C. O número de caminhos possíveis na volta é:

$$n(volta) = 3 \times 4 = 12$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de percorrer tanto a ida quanto a volta (eventos concomitantes) é o produto:

$$n(ida\ e\ volta) = 20 \times 12 = 240$$

Gabarito: A

41. (CPCP/2022 - UTFPR) A quantidade de números ímpares com três algarismos distintos que podemos formar com os algarismos 0, 1, 3, 4, 8, 9, é:

a) 60

b) 48

c) 36

d) 72

e) 75

Comentários:

O enunciado pede a quantidade de números com 3 algarismos distintos, terminando com um algarismo ímpar, que pode ser formado a partir dos algarismos {0, 1, 3, 4, 8, 9}. Há 3 possibilidades {1, 3, 9} para o último algarismo:

		3

Após a escolha do último algarismo, restarão 5 algarismos disponíveis - os pares e dois ímpares. Considerando que o algarismo 0 não pode ser escolhido como primeiro algarismo, há 4 possibilidades para o primeiro algarismo:

4		3

Por fim, restarão 4 algarismos disponíveis, incluindo o 0, para a escolha do algarismo central:

4	4	3

Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de maneiras de formar um número com todos os 3 algarismos é:

$$n = 4 \times 4 \times 3 = 48$$

Gabarito: B

42. (RBO/2022 - SMFA-BH) Marcelo possui um cartão de crédito de uma determinada instituição financeira e a senha desse cartão deve ser formada exclusivamente por algarismos de 0 a 9. Essa instituição permite que o proprietário do cartão utilize, somente, senhas de cinco algarismos distintos e que a senha seja sempre um número par. Assinale a alternativa que apresenta o número de senhas possíveis para o cartão de crédito de Marcelo.

a) 3.600

b) 25.200

c) 75.600

d) 7.200

e) 15.120

Comentários:

Precisamos formar uma senha de 5 algarismos distintos, que seja par, ou seja, o último algarismo deve ser par. Sabendo que dos 10 algarismos de 0 a 9, 5 são pares, então há 5 possibilidades para o último algarismo:

				5

Após a escolha do último algarismo, restarão 9 possibilidades para a 1ª posição; em seguida, 8 possibilidades para a 2ª posição; 7 possibilidades para a 3ª posição; e 6 possibilidades para a 4ª posição:

9	8	7	6	5

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de formar a senha com todos os 5 algarismos é:

$$n = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15.120$$

Gabarito: E

43. (CONSULPLAN/2022 - PM/RN) Em uma rede hospitalar, cinco guaritas foram construídas para garantir a segurança do local. Devido a restrições orçamentárias, quatro vigilantes foram contratados para ocuparem os cinco postos de trabalho. Sabe-se que a guarita localizada próximo à entrada do hospital deve ser ocupada sempre por apenas um vigilante. Por outro lado, as demais guaritas devem ser ocupadas por, no máximo, um vigilante. Considerando as informações, de quantas maneiras distintas os vigilantes podem ser distribuídos entre seus postos de trabalho?

a) 12

b) 24

c) 48

d) 96

e) 120

Comentários:

O enunciado informa que há 5 guaritas a serem ocupadas por 4 vigilantes, de modo que a guarita da entrada tenha necessariamente um vigilante.

Assim, há **4** possibilidades de um vigilante ocupar a guarita da entrada.

Em seguida, sobrarão 4 guaritas a serem ocupadas por 3 vigilantes:

1ºV	**2ºV**	**3ºV**

Para o primeiro vigilante, há 4 guaritas possíveis; para o segundo vigilante, restarão 3 guaritas possíveis; e para o terceiro vigilante, restarão 2 guaritas possíveis:

4	**3**	**2**

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de alocar todos os 4 vigilantes (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$$

Gabarito: D

44. (SELECON/2022 - CM São Gonçalo) O edital de um concurso informa que o total de questões da prova a ser realizada pelos candidatos é igual a 30. Sabe-se que cada questão apresenta quatro opções possíveis de respostas, sendo apenas uma a correta. Existem, então, exatamente 2^n maneiras diferentes de um candidato responder todas as questões dessa prova. O valor de n será igual a:

a) 30

b) 60

c) 90

d) 120

Comentários:

O enunciado informa que há 4 possibilidades para responder cada uma das 30 questões. O número de maneiras de responder todas as 30 questões (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = \underbrace{4 \times 4 \times \ldots \times 4}_{\text{30 vezes}} = 4^{30}$$

Sabendo que $4 = 2^2$, podemos representar essa potência como:

$$n = 4^{30} = (2^2)^{30} = 2^{2\times 30} = 2^{60}$$

Portanto, temos $n = 60$.

Gabarito: B

45. (Quadrix/2022 - CRC/AC) O número que permanece igual quando lido de trás para a frente é chamado de palíndromo. Considerando essa informação, é correto afirmar que existem

a) 72 números naturais palíndromos de 3 dígitos.

b) 81 números naturais palíndromos de 3 dígitos.

c) 90 números naturais palíndromos de 3 dígitos.

d) 100 números naturais palíndromos de 3 dígitos.

Comentários:

Essa questão pede a quantidade de palíndromos de 3 dígitos. Para que números de 3 dígitos tenham a mesma leitura de trás para a frente, é necessário que o primeiro e o último dígito sejam iguais, enquanto o dígito do meio pode ser igual ou diferente:

X	O	X

Considerando que o primeiro dígito não pode ser 0, há 9 possibilidades para X. Ademais, o dígito do meio (O) pode ser qualquer um dos 10 algarismos. Pelo princípio multiplicativo, o número de palíndromos de 3 dígitos é o produto (eventos concomitantes):

$$n = 9 \times 10 = 90$$

Gabarito: C

46. (Quadrix/2022 - CRA/PR) João ganhou 48 bolinhas de gude de seu avô, mas, como não quer ficar com todas, decidiu dividi-las com até 47 de seus amigos. A única condição que ele impôs é a de que, durante a divisão, cada uma das pessoas, contando o próprio João, deverá sair com um número idêntico de bolinhas, sem sobrar nenhuma. Com base nessa situação hipotética, julgue o item a seguir.

Existem 10 quantidades diferentes de amigos que João poderia chamar, respeitando a condição imposta.

Comentários:

O enunciado informa que João irá dividir 48 bolinhas entre ele e até 47 amigos, de modo que ele e todos os amigos que ele chamar fiquem com o mesmo número de bolinhas, sem sobrar nenhuma.

O número de maneiras de dividir as bolinhas corresponde à quantidade de **divisores** de 48. Esse número pode ser representado a partir dos seus divisores primos:

$$48 = 2^4 \times 3^1$$

Para calcular a quantidade de divisores, somamos 1 a cada **expoente** e os multiplicamos:

$$d = (4 + 1) \times (1 + 1) = 5 \times 2 = 10$$

No entanto, o enunciado afirma que João não quer ficar com todas as 48 bolinhas, ou seja, o divisor 1 não é uma possibilidade. Assim, o número de amigos que João pode chamar é:

$$10 - 1 = 9$$

Vamos entender melhor essa questão. Os divisores de 48 são {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48}. Isso significa que as 48 bolinhas podem ser divididas por qualquer uma dessas 10 quantidades diferentes de pessoas, de modo que todas as pessoas fiquem com o mesmo número de bolinhas, sem sobrar nenhuma.

Porém, as bolinhas não podem ser divididas por uma única pessoa, pois João não quer ficar com todas as bolinhas. Assim, as 48 bolinhas podem ser divididas por {2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 ou 48} pessoas, contando com João. Em outras palavras, João pode chamar {1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 23 ou 47} amigos, isto é, 9 quantidades diferentes.

Gabarito: Errado

47. (Legalle/2022 - Pref. Hulha Negra/RS) Ana decidiu comprar um único produto entre: 8 tipos de pastas de dente, 19 tipos de fio dental e 7 tipos de clareamento dental. O número de modos com que ela pode escolher um desses produtos é:

a) 34

b) 65

c) 870

d) 1064

e) 2012

Comentários:

Considerando que Ana irá adquirir um único produto, os eventos são mutuamente excludentes. Pelo princípio aditivo, o número de maneiras de Ana escolher um dos produtos é a soma:

$$8 + 19 + 7 = 34$$

Gabarito: A

48. (GUALIMP/2022 - Pref. Camro/RJ) Em uma urna, foram colocadas 12 bolas verdes, 14 bolas azuis, 16 bolas amarelas e 18 bolas cinzas. Todas as bolas são iguais (exceto pelas cores). De olhos totalmente vendados, Ana quer retirar 2 bolas de cor azuis. Escolhendo aleatoriamente e sem reposição, qual a quantidade mínima de bolas que Ana deve retirar para garantir que tenha retirado 2 bolas azuis?

a) 50

b) 48

c) 46

d) 44

Comentários:

Essa questão trabalha com o princípio da casa do pombo, em que devemos imaginar o **pior** cenário, para **garantir** que determinado evento irá ocorrer.

Para garantir que Ana terá retirado pelo menos 2 bolas azuis, devemos imaginar que ela vai retirar primeiro todas as bolas das outras cores. Sabendo que há 12 bolas verdes, 16 bolas amarelas e 18 bolas cinzas, então antes de retirar qualquer bola azul, Ana terá retirado:

$$12 + 16 + 18 = 46$$

Agora que só restam bolas azuis, Ana irá retirar 2 bolas azuis, após retirar 46 + 2 = 48 bolas no total.

Gabarito: B

49. (IADES/2021 - CRN1/DF) Uma lanchonete oferece uma promoção na compra de um suco e um salgado. Um cliente pode optar entre 4 sabores diferentes de suco e 3 tipos distintos de salgado. De quantas formas distintas uma pessoa pode escolher sua promoção?

a) 7

b) 10

c) 12

d) 15

e) 20

Comentários:

Para escolher um sabor de suco E um tipo de salgado (eventos concomitantes), utilizamos o princípio multiplicativo. Sabendo que há 4 sabores de suco e 3 tipos de salgado disponíveis, o número de maneiras de escolher um de cada é o produto:

$$4 \times 3 = 12$$

Gabarito: C

50. (IBADE/2021 - IAPEN/AC) Pedro precisou escolher em sua equipe de trabalho uma das 12 mulheres e um entre os 16 homens para fazer um curso de especialização e resolveu fazer um sorteio. Quantas duplas ele precisou formar para fazer o sorteio?

a) Ele precisou formar 1216 duplas

b) Ele precisou formar 100 duplas

c) Ele precisou formar 28 duplas

d) Ele precisou formar 192 duplas

e) Ele precisou formar 120 duplas

Comentários:

Pedro irá relacionar todas as maneiras possíveis de escolher uma mulher E um homem, para sortear uma dupla. Para calcular o número de duplas relacionadas, utilizamos o princípio multiplicativo. Sabendo que há 12 mulheres e 16 homens, então:

$$12 \times 16 = 192$$

Gabarito: D

51. (FUNDATEC/2021 - CRF/PR) Durante uma reunião plenária, é necessária uma equipe formada por exatamente: um secretário, um segurança e um auxiliar de serviços gerais. Se para formar essa equipe temos à disposição 4 secretários, 3 seguranças e 5 auxiliares de serviços gerais, quantas equipes distintas podem ser organizadas para atuarem em determinada reunião plenária?

a) 60

b) 40

c) 30

d) 20

e) 12

Comentários:

O enunciado informa que há 4 secretários, 3 seguranças e 5 auxiliares e que serão selecionados um profissional de cada área. Para calcular o número de maneiras de montar a equipe (com um secretário E um segurança E um auxiliar), utilizamos o princípio multiplicativo:

$$4 \times 3 \times 5 = 60$$

Gabarito: A

52. (IBRASP/2021 - Pref. Rio Grande) Gabriel tem 12 camisetas, 8 bermudas e 4 bonés. Ao todo, de quantos modos diferentes Gabriel poderá se vestir, devendo usar sempre uma camiseta, uma bermuda e um boné?

a) 192

b) 275

c) 384

d) 416

e) 568

Comentários:

O enunciado informa que há 12 camisetas, 8 bermudas e 4 bonés. Para calcular o número de maneiras de escolher uma opção de cada (eventos concomitantes), utilizamos o princípio multiplicativo:

$$12 \times 8 \times 4 = 384$$

Gabarito: C

53. (IADES/2021 - CRN1/DF) No refeitório de uma empresa, há 4 opções de grãos, 3 opções de legumes e 4 opções de verduras.

De quantas maneiras uma pessoa pode formar um prato escolhendo uma opção de grão, uma de legume e uma de verdura?

a) 36

b) 48

c) 58

d) 64

e) 80

Comentários:

O enunciado informa que há 4 opções de grão, 3 opções de legume e 4 opções de verdura e que será selecionada uma opção de cada.

Para calcular o número de maneiras de montar todo o prato (eventos concomitantes), utilizamos o princípio multiplicativo:

$$4 \times 3 \times 4 = 48$$

Gabarito: B

54. (IBADE/2021 - CM Vila Velha) O almoço executivo no restaurante Comer Bem possui 2 opções de entrada, 3 opções de prato principal e 2 opções de sobremesa. Para beber, pode-se escolher entre refrigerante, suco, água e cerveja.

João vai começar a frequentar esse restaurante diariamente, e quer pedir em cada visita uma combinação diferente de opções. Quantos dias João conseguirá pedir cardápios distintos?

a) 4

b) 60

c) 12

d) 48

e) 36

Comentários:

O enunciado informa que há 2 opções de entrada, 3 opções de prato principal, 2 opções de sobremesa e 4 opções de bebida. Para calcular o número de possibilidades de escolher uma opção de cada categoria (eventos concomitantes), utilizamos o princípio multiplicativo:

$$2 \times 3 \times 2 \times 4 = 48$$

Gabarito: D

55. (OMNI/2021 - Pref. Rio Negrinho) Vinícius e Érica foram em uma pizzaria, chegando lá, decidiram pedir uma pizza metade salgada e a outra metade doce. Para as pizzas salgadas, tinham as opções de calabresa, frango, lombo e vegetariana; para a metade doce da pizza, tinham as opções de chocolate, morango e amendoim. O casal, podia escolher ainda, o recheio da borda da pizza, para a metade salgada da pizza ,podiam escolher o recheio de catupiry e cheddar; e a pizza doce, podiam escolher o recheio da borda entre os sabores de leite condensado e doce de leite. Quantas possibilidades, entre sabores de pizza e recheio da borda, o casal pode escolher?

a) 48

b) 36

c) 14

d) 4

Comentários:

O enunciado informa que há 4 sabores de pizza salgada, 3 sabores de pizza doce, 2 possibilidades para a borda da pizza salgada e 2 possibilidades para a borda da pizza doce. O número de maneiras de escolher uma opção de cada (eventos concomitantes) é o produto:

4 x 3 x 2 x 2 = 48

Gabarito: A

56. (CETREDE/2021 - Pref. Icapuí) De quantas maneiras pode-se colorir uma tabela com 3 linhas, utilizando as cores vermelha, azul e verde?

a) 3

b) 6

c) 9

d) 27

e) 81

Comentários:

O número de maneiras de escolher as cores de 3 linhas, sabendo que há 3 possibilidades para cada uma é o produto:

3
3
3

$$n = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

Gabarito: D

57. (IADES/2021 - CAU/MS) Para acessar o Sistema de Informação e Comunicação do Conselho de Arquitetura e Urbanismo (SICCAU), um servidor de suporte técnico deve utilizar o reconhecimento biométrico e um código de 4 dígitos. Quantos códigos distintos são formados exclusivamente por dígitos ímpares?

a) 25

b) 125

c) 625

d) 1000

e) 1250

Comentários:

O enunciado pede o número de maneiras de formar um código com 4 dígitos ímpares. Considerando que há 5 algarismos ímpares, temos 5 possibilidades para cada um dos dígitos:

5	5	5	5

Pelo princípio multiplicativo, temos:

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$

Gabarito: C

58. (UFES/2021) A quantidade de números inteiros positivos de cinco algarismos com, pelo menos, um algarismo ímpar é igual a

a) 53.200

b) 62.400

c) 72.600

d) 87.500

e) 97.300

Comentários:

A questão pede a quantidade de possibilidades de formar números com 5 algarismos, com pelo menos 1 algarismo ímpar, ou seja, com 1, 2, 3, 4 ou 5 algarismos ímpares. A forma mais simples de resolver essa questão é calcular a quantidade total de possibilidades de formar números com 5 algarismos e subtrair a quantidade de possibilidades de formar números com todos os algarismos pares, ou seja, com 0 algarismos ímpares.

Há 10 possibilidades (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9) para cada posição. No entanto, os números de 5 posições que se iniciam com 0, por exemplo, 03527, são números de apenas 4 algarismos (no caso, 3527). Por isso, há apenas 9 possibilidades para a primeira posição (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9):

9	**10**	**10**	**10**	**10**

Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de maneiras de formar números de 5 algarismos é o produto dessas possibilidades:

$$9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 90.000$$

Agora, vejamos as maneiras de formar números com algarismos pares apenas. Há 5 possibilidades (0, 2, 4, 6 e 8) para cada posição, exceto para a primeira posição, que não pode conter o algarismo 0 (logo, há 4 possibilidades para a primeira posição:

4	**5**	**5**	**5**	**5**

Pelo princípio multiplicativo, devemos multiplicar essas possibilidades:

$$4 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 4 \times 625 = 2.500$$

Por fim, para encontrar a quantidade de maneiras de formar números com pelo menos um algarismo ímpar é a diferença:

$$90.000 - 2.500 = 87.500$$

Gabarito: D.

59. (UFES/2021) A quantidade de números inteiros positivos de cinco algarismos com, pelo menos, dois algarismos idênticos é igual a

a) 26.360

b) 38.448

c) 48.322

d) 54.546

e) 62.784

Comentários:

Novamente, vamos subtrair do total de possibilidades, aquelas que não atendem à restrição imposta, no caso, ter 2 algarismos iguais.

Na questão anterior, vimos que a quantidade total de maneiras de formar números de 5 algarismos é:

$$9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 90.000$$

Para que o número não tenha, pelo menos, dois algarismos idênticos, é necessário que todos sejam distintos. Para o primeiro dígito há 9 possibilidades (de 1 a 9); para o segundo dígito, há 9 possibilidades (de 0 a 9, exceto o algarismo escolhido como primeiro); para o terceiro dígito, há 8 possibilidades; para o quarto dígito, há 7 possibilidades; e, para o quinto dígito, restarão 6 possibilidades:

9	9	8	7	6

Pelo princípio multiplicativo, devemos multiplicar essas possibilidades:

$$9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 27.216$$

E a diferença é:

$$90.000 - 27.216 = 62.784$$

Gabarito: E.

60. (OBJETIVA/2021 - Pref. Venâncio Aires) Certo campeonato de xadrez é disputado por 8 competidores. Sendo assim, de quantas maneiras distintas o pódio (três colocações) dessa competição pode ser formado?

a) 336.

b) 324.

c) 312.

d) 296.

e) 288.

Comentários:

O enunciado pede o número de maneiras de 8 competidores ocuparem o pódio. Para o 1º lugar, há 8 possibilidades; em seguida, restarão 7 possibilidades para o 2º lugar; e, por fim, haverá 6 possibilidades para o 3º lugar.

8	7	6
1º	2º	3º

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de formar o pódio é o produto:

$$n = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

Gabarito: A

61. (OBJETIVA/2021 - Pref. Venâncio Aires) Pedro possui 5 tintas de cores distintas para pintar 3 objetos diferentes. Sabendo-se que objetos distintos devem ter cores que não são iguais, ao todo, de quantos modos diferentes ele pode escolher a forma como que irá pintar esses objetos:

a) 60

b) 55.

c) 50.

d) 45.

e) 40.

Comentários:

Precisamos calcular o número de maneiras de pintar 3 objetos com cores diferentes, sabendo que há 5 possibilidades de cor, no total. Para o primeiro objeto, há 5 possibilidades; após a escolha da cor do primeiro objeto, restarão 4 possibilidades para o segundo; e, por fim, restarão 3 possibilidades para o terceiro objeto:

5	4	3

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de formar o pódio é o produto:

$$n = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

Gabarito: A

62. (OBJETIVA/2021 - Pref. Venâncio Aires) Quantas senhas distintas, compostas por 4 algarismos, podem ser formadas utilizando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, de modo que não se tenha algarismos repetidos:

a) 54

b) 60

c) 96

d) 120

e) 102

Comentários:

Precisamos calcular o número de maneiras de compor uma senha de 4 algarismos distintos, dentre 5 possibilidades. Para o primeiro dígito, há 5 possibilidades; após a escolha do primeiro dígito, restarão 4 possibilidades para o segundo; em seguida, restarão 3 possibilidades para o terceiro dígito; e, por fim, restarão 2 possibilidades para o quarto dígito:

5	**4**	**3**	**2**

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de formar a senha é o produto:

$$n = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

Gabarito: D

63. (FUNDEP/2021 - Pref. Itapecerica) Augusto vai fazer um cadastro em um site e precisa criar uma senha. Para a construção dessa senha, ele deve fazer uma combinação de seis números sem repetição. Para isso, deverá utilizar os algarismos 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. O número possível de senhas, considerando os algarismos apresentados, que podem ser criadas é

a) 720

b) 5.040

c) 30.240

d) 151.200

Comentários:

Precisamos calcular o número de maneiras de compor uma senha de 6 algarismos distintos, dentre 10 possibilidades. Para o primeiro dígito, há 10 possibilidades; após a escolha do primeiro dígito, restarão 9 possibilidades para o segundo; e assim sucessivamente:

10	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de formar a senha é o produto:

$$n = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151.200$$

Gabarito: D

64. (AVANÇASP/2021 - Rio Claro) O Número de Identificação Pessoal (PIN) é o nome usual para as senhas de quatro caracteres utilizados em chips de telefonia celular. Quantas senhas podem ser formadas de modo que sejam utilizados, somente, algarismos distintos e que o último dígito seja par?

a) 2540

b) 2520

c) 2550

d) 2530

e) 2510

Comentários:

Precisamos calcular o número de possibilidades de formar uma senha com 4 algarismos distintos, sendo o último par. Nesse caso, há 5 possibilidades (0, 2, 4, 6, 8) para o último dígito:

			5

Em seguida, restarão 9 possibilidades para o primeiro dígito; depois, 8 possibilidades para o segundo dígito; e, por fim, restarão 7 possibilidades para o terceiro dígito:

9	**8**	**7**	**5**

Pelo princípio multiplicativo, o número de senhas possíveis (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 9 \times 8 \times 7 \times 5 = 2520$$

Gabarito: B

65. (IBRASP/2021 - Pref. Rio Grande) Supondo que todos os alvarás emitidos por certo órgão público são compostos por um código de validação que permite a qualquer pessoa verificar a autenticidade do documento. Sabe-se que este código de validação é composto por quatro dígitos distintos, sendo sempre uma letra e um algarismo, uma letra e um algarismo, nesta ordem.

Considerando-se o alfabeto brasileiro composto por 26 letras, a quantidade máxima de códigos de validação distintos que poderão ser formados é igual a:

a) 45.600

b) 58.500

c) 67.600

d) 72.000

e) 81.900

Comentários:

Precisamos calcular o número de maneiras de compor uma senha de 4 dígitos distintos, sendo duas letras (L) e dois algarismos (A):

L	A	L	A

Para a primeira letra, há todas as 26 possibilidades; para o primeiro algarismo, há todas as 10 possibilidades (de 0 a 9); para a segunda letra, restarão 25 possibilidades; e para o segundo algarismo, restarão 9 possibilidades:

26	10	25	9

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de formar o código é o produto:

$$n = 26 \times 10 \times 25 \times 9 = 58.500$$

Gabarito: B

66. (FAPEC/2021 - PC/MS) Diocrezas é uma anciã que atuou como professora de Matemática por muitos anos em Campo Grande - MS. Como algumas vezes lhe faltou a memória, ela escreveu dicas para lembrar sua senha do cartão do banco (os dígitos são todos distintos, e vão da esquerda para a direita).

Confira as dicas e veja a figura abaixo, na qual são colocados os dígitos da senha:

1º Vogal do meu nome.
2º Número primo do intervalo [0, 9].
3º Uma letra do meu nome.
4º Um número quadrado perfeito do intervalo [0, 9].
5º Uma letra do nosso alfabeto.
6º Um algarismo do intervalo [1, 9].

Assinale quantas são as possibilidades para formar a senha da professora Diocrezas:

a) 64.512 possibilidades

b) 82.944 possibilidades

c) 93.312 possibilidades

d) 116.640 possibilidades

e) 126.360 possibilidades

Comentários:

Precisamos calcular o número de maneiras de compor uma senha de 6 dígitos distintos, seguindo as diretrizes dadas. O primeiro dígito é uma vogal do nome DIOCREZAS - há 4 possibilidades (I, O, E, A):

4					

O segundo dígito é um número primo entre 0 e 9 - há 4 possibilidades (2, 3, 5, 7):

4	**4**				

O terceiro dígito é uma letra do nome DIOCREZAS. Há 9 letras, mas uma delas já utilizada para o primeiro dígito, restando 8 possibilidades:

4	**4**	**8**			

O quarto dígito é um quadrado perfeito entre 0 e 9 - há 3 possibilidades (1, 4, 9):

4	**4**	**8**	**3**		

O quinto dígito é uma letra do alfabeto. Há 26 letras, mas duas já foram utilizadas na senha, restando 24 possibilidades:

4	**4**	**8**	**3**	**24**	

O sexto dígito é um algarismo entre 1 e 9. Há 9 algarismos, mas dois já foram utilizados na senha, restando 7 possibilidades:

4	**4**	**8**	**3**	**24**	**7**

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de formar a senha é o produto:

$$n = 4 \times 4 \times 8 \times 3 \times 24 \times 7 = 64.512$$

Gabarito: A

QUESTÕES COMENTADAS – MULTIBANCAS

Permutação

1. (INAZ do Pará/2022 - SAGAZ) Um hacker descobriu que sua vítima escolheu colocar como senha de banco os algarismos referentes ao dia e ao mês de sua data de nascimento. Ele não sabe a ordem dos 4 (quatro) algarismos, então decidiu utilizar o método "força bruta", qual seja, tentar todas as combinações alterando a ordem dos algarismos.

03/12 → __ __ __ __

Dia Mês Senha

Sabendo-se que não há repetição de algarismos e que todos foram utilizados, qual o total de tentativas que o hacker pode fazer?

a) 16.

b) 24.

c) 30.

d) 36.

e) 42.

Comentários:

O número de maneiras de formar uma senha de 4 dígitos, a partir de 4 algarismos diferentes, corresponde à permutação simples de 4 elementos:

$$P_n = n!$$

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Gabarito: B

2. (NOSSO RUMO/2022 - Pref. Suzano/SP) Assinale a alternativa que apresenta o número de maneiras diferentes que 7 amigos podem se sentar em um banco para tirar foto.

a) 5.100 maneiras.

b) 4.980 maneiras.

c) 5.040 maneiras.

d) 5.580 maneiras.

e) 6.024 maneiras.

Comentários:

O número de maneiras de organizar 7 amigos lado a lado corresponde à permutação simples de 7 elementos:

$$P_7 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

Gabarito: C

3. (Legalle/2022 - Pref. Hulha Negra/RS) Em uma sala há um total de 9 funcionários esperando para serem atendidos pelo prefeito municipal. Sabe-se que se formará uma fila com estes para iniciar o atendimento. A quantidade total de filas distintas que se pode formar com esses 9 funcionários é:

a) 3.024

b) 15.120

c) 60.480

d) 181.400

e) 362.800

Comentários:

O número de maneiras de formar uma fila de 9 pessoas corresponde à permutação de 9 elementos:

$$P_9 = 9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362.800$$

Gabarito: E

4. (AOCP/2022 - PC/GO) Dentre as atribuições do Papiloscopista Policial da 3ª Classe, estão a execução, orientação, supervisão e fiscalização de todos os trabalhos papiloscópicos de coleta, análise, classificação, subclassificação, pesquisa e arquivamento e a emissão de pareceres técnicos. Jonas é

Papiloscopista Policial da 3ª Classe e deseja marcar sua agenda de afazeres com cores diferentes para cada uma das funções, isto é, deve escolher uma cor diferente para cada tópico listado:

- **execução;**
- **orientação;**
- **supervisão;**
- **fiscalização;**
- **coleta;**
- **análise;**
- **classificação;**
- **subclassificação;**
- **pesquisa e arquivamento;**
- **emissão de pareceres técnicos.**

Considerando a disponibilidade de 10 cores diferentes, de quantas formas é possível que Jonas identifique os afazeres em sua agenda?

a) 10

b) Entre 11 e 50

c) Entre 51 e 100

d) Entre 101 e 150

e) Mais de 150

Comentários:

O número de maneiras de colorir 10 tarefas com 10 cores diferentes corresponde à permutação de 10 elementos:

$$P_{10} = 10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3.628.000$$

Que é muito superior a 150.

Gabarito: E

5. (Quadrix/2022 - CRM/SC) As cores em computadores geralmente são identificadas por um código chamado RGB. Usando-se esse código, cada cor é expressa por 6 números, cada um variando entre 0 e 15. Assim, os 2 primeiros números representam o vermelho na cor final, os seguintes representam o verde e os últimos 2 números, o azul. Considerando essas informações, julgue o item.

Existem, no máximo, 720 cores diferentes descritas pelo mesmo conjunto de números.

Comentários:

O enunciado informa que o código é composto por 6 números. Se o conjunto de números for o mesmo, os códigos serão diferentes quando a **ordem** desses números for diferente. Assim, a quantidade de códigos que podem ser descritos pelo mesmo conjunto de números corresponde à permutação desses 6 números:

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Gabarito: Certo

6. (UNIFIL/2022 - SOMAR) Anagrama é a possibilidade de formar novas palavras a partir da troca de posição de suas letras. Considerando a palavra "SOMAR", assinale a alternativa que representa a quantidade de anagramas possíveis que terminam com a letra "R".

a) 12

b) 24

c) 36

d) 48

Comentários:

A quantidade de anagramas de SOMAR que terminam com R corresponde à uma permutação simples das outras 4 letras (SOMA), todas distintas:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Gabarito: B

7. (IMPARH/2022 - Pref. Fortaleza/CE) Durante um jantar, uma família formada por quatro adultos e duas crianças irá sentar-se a uma mesa retangular com seis cadeiras, sendo três de cada lado. O número de maneiras que essa família poderá sentar-se à mesa de modo que as crianças não fiquem lado a lado é:

a) 120

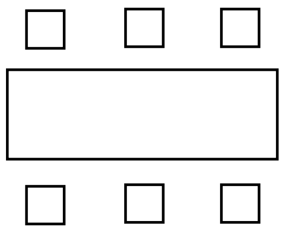
b) 192

c) 528

d) 720

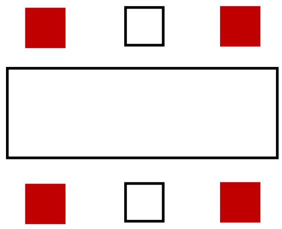
Comentários:

O enunciado informa que há uma mesa de 6 lugares, sendo 3 de cada lado:



Sabe-se que 4 adultos e 2 crianças irão se sentar nesses lugares, mas as crianças não podem ficar lado a lado.

Primeiro, vamos considerar que uma das crianças irá se sentar em uma das extremidades:



Há **4** possibilidades para isso.

Se a primeira criança se senta em uma das extremidades, a segunda criança poderá se sentar em qualquer cadeira vazia, exceto a única cadeira que está ao lado da primeira. Assim, há **4** possibilidades para a segunda criança.

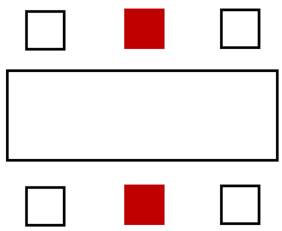
Em seguida, os 4 adultos poderão se sentar em qualquer lugar vazio. Assim, temos a permutação de 4 elementos:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Se a primeira criança se sentar em uma das extremidades da mesa, o número de maneiras de acomodar todas as pessoas é o produto (princípio multiplicativo - eventos concomitantes):

$$n(C1) = 4 \times 4 \times 24 = 384$$

Por outro lado, a primeira criança pode se sentar em uma das cadeiras do meio:



Há **2** possibilidades para isso.

Nessa situação, a segunda criança poderá se sentar em uma das cadeiras do lado oposto, pois, no mesmo lado, só haverá cadeiras ao lado da outra criança. Assim, há **3** possibilidades para a segunda criança.

Em seguida, os 4 adultos poderão se sentar nos 4 lugares vazios:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Nesse segundo cenário, o número de maneiras de acomodar todas as pessoas é o produto:

$$n(C2) = 2 \times 3 \times 24 = 144$$

Como esses cenários são mutuamente excludentes, o número total de maneiras de alocar todos é a soma (princípio aditivo):

$$n(C1 \; ou \; C2) = 384 + 144 = 528$$

Gabarito: C

8. (ACCESS/2022 - CM Rio Acima) João possui seis livros de Matemática. São eles: Geometria I, Álgebra I, Álgebra II, Análise, Matemática Financeira e Números Complexos. O número de maneiras que ele pode empilhar esses livros de modo que os livros de Álgebra fiquem juntos é

a) 240

b) 120

c) 60

d) 20

Comentários:

O enunciado pede o número de maneiras de empilhar 6 livros, de modo que 2 deles fiquem juntos. Para isso, vamos primeiro tratar os 2 livros de Álgebra como único elemento. Assim, temos a permutação de 5 elementos (4 livros e mais os dois de Álgebra considerados como único elemento)

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Como a ordem dos dois livros de Álgebra não é fixa, para cada uma dessas maneiras de empilhar os livros, há 2 possibilidades diferentes (Álgebra I acima de Álgebra II ou Álgebra II acima de Álgebra I). Assim, devemos multiplicar o resultado por 2:

$$n = 2 \times 120 = 240$$

Gabarito: A

9. (QUADRIX/2022 - CRT 4) Arthur, um entregador de encomendas, precisa entregar encomendas em 6 locais distintos em determinado dia.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item a seguir, quanto às diferentes ordens de entrega que Arthur poderá seguir nesse dia.

Há 720 modos diferentes de se montar a rota que define a ordem de entregas.

Comentários:

O número de maneiras de ordenar 6 locais corresponde à permutação de 6:

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Gabarito: Certo

10. (QUADRIX/2022 - CRT 4) Arthur, um entregador de encomendas, precisa entregar encomendas em 6 locais distintos em determinado dia.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item a seguir, quanto às diferentes ordens de entrega que Arthur poderá seguir nesse dia.

Se Arthur definir que duas das entregas deverão ser feitas consecutivamente, então haverá, exatamente, 120 modos diferentes de se montar a rota de entregas.

Comentários:

Se 2 dos 6 locais de entrega devem ser consecutivos, precisamos inicialmente tratá-los como elemento único. Assim, temos a permutação de 5 elementos (4 locais e mais a dupla de locais consecutivos):

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Como a ordem dos dois locais não é fixa, precisamos multiplicar esse resultado por 2, pois há 2 possibilidades de ordenar os dois locais consecutivos:

$$n = 2 \times 120 = 240$$

Gabarito: Errado

11. (CONSULPLAN/2022 - SEED/PR) Suponha que as letras da palavra ÂNGULO precisam ser distribuídas nas seis lacunas a seguir:

O número de maneiras distintas que tais letras podem ser distribuídas de modo que todas as vogais fiquem em uma mesma coluna é:

a) 18

b) 36

c) 72

d) 144

Comentários:

A palavra ÂNGULO possui 6 letras, todas distintas, sendo 3 vogais e 3 consoantes. Para que as vogais fiquem na mesma coluna, é necessário que as consoantes também fiquem na mesma coluna.

Há **2** maneiras de organizar o grupo das vogais e o das consoantes (vogais na 1ª coluna e consoantes na 2ª ou o contrário).

Para cada possibilidade dessas, podemos reordenar as vogais entre si, o que corresponde a uma permutação simples de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Similarmente, para reordenar as consoantes entre si, temos uma permutação simples de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Por fim, multiplicamos todas essas possibilidades:

$$n = 2 \times 6 \times 6 = 72$$

Gabarito: C

12. (FAPEC/2022 - UFMS) No âmbito da Matemática e da Lógica, os anagramas estão relacionados com a análise combinatória e consistem na permutação das letras de uma palavra. A quantidade de anagramas é o total de possibilidades de formar palavras com ou sem sentido.

Determine a alternativa em que TODAS as palavras possuem o mesmo número de anagramas e seguem a mesma lógica específica no desenvolvimento do cálculo desses anagramas.

a) BANANA, TUIUIU, MACACA, BABADA, PIRIRI.

b) BABADA, ASSADA, BARBADA, AGUADA, PANACA.

c) CHÁ, CAFÉ, TRUPÉ, BACULÉ, TREMEMBÉ.

d) PÃO, PORÃO, CARRÃO, BRASÃO, CACHORRÃO.

e) PIRIRI, BABADA, BEBADA, TACACA, PANACA.

Comentários:

Precisamos identificar a alternativa em que as palavras possuem o mesmo número de anagramas e com a mesma lógica de desenvolvimento, ou seja, com o mesmo número de letras no total e de letras repetidas.

Na alternativa A, todas as palavras possuem 6 letras no total, com repetição de 3 e de 2 letras. Em BANANA, temos 3 A´s e 2 N´s; em TUIUIU, temos 3 U´s e 2 I´s; em MACACA, temos 3 A´s e 2 C´s; em BABADA, temos 3 A´s e 2 B´s; e em PIRIRI, temos 3 I´s e 2 R´s.

Nas alternativas B, C e D, nem sequer o número total de letras é o mesmo. Na alternativa E, o número total de letras é sempre igual a 6, mas as repetições não são iguais. PIRIRI, BABADA e TACACA possuem repetições de 3 e de 2 letras; enquanto BEBADA possui repetição de 2 B´s e 2 A´s; e PANACA possui repetição de 3 A´s.

Gabarito: A

13. (Quadrix/2022 - CRC/AC) Assinale a alternativa que apresenta a quantidade de anagramas da palavra OFIÚCO.

a) 180

b) 360

c) 720

d) 900

Comentários:

A palavra OFIÚCO possui 6 letras, das quais 2 são repetidas (O). Assim, o número de anagramas corresponde à permutação de 6 elementos, com repetição de 2:

$$P_6^2 = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

Gabarito: B

14. (Quadrix/2022 - CAU/SC) Assinale a alternativa que apresenta o número de anagramas da palavra "SAMURAI".

a) 630

b) 1.260

c) 2.520

d) 5.040

e) 10.080

Comentários:

A palavra SAMURAI possui 7 letras, das quais 2 são repetidas (A). Assim, o número de anagramas corresponde à permutação de 7 elementos, com repetição de 2:

▪

$$P_7^2 = \frac{7!}{2!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$$

Gabarito: C

15. (AOCP/2022 - PM/ES) Determine o número de anagramas possíveis a partir da palavra PINOQUIO, de tal maneira que as consoantes sejam mantidas em suas posições originais.

a) $\frac{5!}{2!.2!}$

b) $8!$

c) $\frac{8!-3!}{2!.2!}$

d) $\frac{8!}{2!.2!}$

e) $\frac{3!}{2!.2!}$

Comentários:

Se as consoantes forem mantidas em suas posições originais, então temos uma permutação das vogais IOUIO, isto é, de 5 elementos, com repetição de 2 I´s e 2 O´s:

$$P_5^{2,2} = \frac{5!}{2! \times 2!}$$

Gabarito: A

16. (Objetiva/2022 - Pref. Roca Sales) Assinalar a alternativa que apresenta a quantidade de anagramas da palavra PLANETA:

a) 5.040

b) 4.480

c) 3.620

d) 2.520

Comentários:

A palavra PLANETA possui 7 letras, das quais 2 são repetidas (A). Assim, o número de anagramas corresponde à permutação de 7 elementos, com repetição de 2:

$$P_7^2 = \frac{7!}{2!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$$

Gabarito: D

17. (CETREDE/2022 - Pref. Ipaporanga) Anagramas são todas as diferentes disposições das letras de uma palavra (mesmo que não façam sentido na língua portuguesa), ou de números e símbolos, em uma sequência. Dessa forma, quantos anagramas é possível formar com a palavra "calculadora"?

a) 1543220

b) 1663200

c) 4566349

d) 1277600

e) 9887123

Comentários:

A palavra CALCULADORA possui 11 letras, sendo 2 C´s, 3 A´s e 2 L´s. Assim, o número de anagramas corresponde à permutação de 11 elementos, com repetição de 2, de 3 e de 2:

$$P_{11}^{2,3,2} = \frac{11!}{2! \times 3! \times 2!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3! \times 2}$$

$$P_{11}^{2,3,2} = 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1663200$$

Gabarito: B

18. (Quadrix/2022 - CREMERO) Um liquidificador industrial possui formato cilíndrico e altura de 32 cm. O fabricante do produto recomenda que esse liquidificador só seja enchido até 78,125% de sua altura total, situação em que o volume ocupado dele é igual a 1,6π litros. Ao utilizar esse produto para misturar uma bebida, um estudante percebeu que se formava um cone de ar em meio ao líquido, sendo a base desse cone paralela à base do liquidificador e estando a base do cone à mesma distância do fundo do liquidificador que os pontos mais altos de líquido. A altura do cone, por sua vez, variava com a velocidade do liquidificador. Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Há 2.520 modos de organizar as consoantes da palavra "LIQUIDIFICADOR".

Comentários:

A palavra LIQUIDIFICADOR possui 7 consoantes, das quais 2 são repetidas (D). Assim, o número de modo de organizar as consoantes corresponde à permutação de 7 elementos, com repetição de 2:

$$P_7^2 = \frac{7!}{2!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$$

Gabarito: Certo

19. (QUADRIX/2022 - COREN/AP) Uma loja de doces decidiu fazer uma grande liquidação e, para isso, estabeleceu que seria possível comprar duas jujubas pelo preço de uma e 3 pirulitos pelo preço de 1, mas o chiclete não entraria na promoção. O preço original de cada doce era de R$ 1,00 e Léo foi para a loja com R$ 5,00. Sabe-se que a chance de ele escolher cada um dos doces é igual, que doces iguais são indistinguíveis e que ele saiu com pelo menos 1 doce. Com base nesse caso hipotético, julgue o item.

Se Léo tiver levado para casa 1 chiclete, duas jujubas e 3 pirulitos, então existem 60 ordens diferentes para ele comer seus doces.

Comentários:

O número de ordens possíveis para 1 chiclete, 2 jujubas (iguais) e 3 pirulitos (iguais) corresponde a uma permutação de 6 elementos, com repetição de 2 e de 3:

$$P_6^{2,3} = \frac{6!}{2! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3!} = 6 \times 5 \times 2 = 60$$

Gabarito: Certo

20. (FEPESE/2022 - CINCATARINA) Quantos números diferentes podem ser formados permutando os algarismos do número 3.444.551.

a) Mais de 415

b) Mais de 400 e menos de 415

c) Mais de 385 e menos de 400

d) Mais de 370 e menos de 385

e) Menos de 370

Comentários:

O número 3.444.551 possui 7 algarismos no total, com repetição de 3 vezes o algarismo 4 e 2 vezes o algarismo 5. Assim, temos uma permutação de 7 elementos, com repetição de 3 e de 2:

$$P_7^{2,3} = \frac{7!}{2! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3!} = 7 \times 6 \times 5 \times 2 = 420$$

Gabarito: A

21. (Quadrix/2022 - CRC/PR) Em 10 de dezembro de 2022, Cássia Rejane Eller, mais conhecida como Cássia Eller, completaria 60 anos de idade. Uma das maiores vozes da música brasileira, Cássia morreu no dia 29 de dezembro de 2001, em razão de um infarto do miocárdio repentino. Com base nessas informações, julgue o item.

O número de anagramas da palavra “REJANE” que terminam em E é igual a 120.

Comentários:

A quantidade de anagramas da palavra REJANE que terminam com E corresponde a uma permutação das outras 5 letras (REJAN), todas diferentes:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Gabarito: Certo

22. (Quadrix/2022 - CRC/PR) Em 10 de dezembro de 2022, Cássia Rejane Eller, mais conhecida como Cássia Eller, completaria 60 anos de idade. Uma das maiores vozes da música brasileira, Cássia morreu no dia 29 de dezembro de 2001, em razão de um infarto do miocárdio repentino. Com base nessas informações, julgue o item.

Desconsiderando-se o acento, o número de anagramas da palavra "CÁSSIA" é o sêxtuplo do número de anagramas da palavra "ELLER".

Comentários:

O número de anagramas da palavra CASSIA corresponde a uma permutação de 6 letras, com repetição de 2 A´s e de 2 S´s:

$$P_6^2 = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3$$

E o número de anagramas da palavra ELLER corresponde a uma permutação de 5 letras, com repetição de 2 E´s e de 2 L´s:

$$P_5^2 = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 360$$

A razão entre esses resultados é:

$$\frac{n(CASSIA)}{n(ELLER)} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{5 \times 4 \times 3} = 6$$

De fato, número de anagramas de CASSIA é 6 vezes o número de anagramas de ELLER.

Gabarito: Certo

23. (AOCP/2022 - PM/ES) Quantos anagramas da palavra CLARINETE começam por vogal?

a) 10.080

b) 20.160

c) 40.320

d) 60.480

e) 80.640

Comentários:

A palavra CLARINETE possui 9 letras, incluindo as vogais A, I e 2 E´s. Para calcular a quantidade de anagramas que começam com vogais, vamos primeiro calcular aquelas que começam com A ou I e depois aquelas que começam com E.

Se a palavra começar com A ou I (**2** possibilidades), teremos uma permutação das outras 8 letras, com repetição de 2 E´s:

$$n_1 = 2 \times P_8^2 = 2 \times \frac{8!}{2!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40.320$$

Se a palavra começar com E (1 possibilidade), teremos uma permutação das outras 8 letras, sem repetição:

$$n_2 = P_8 = 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40.320$$

Por serem situações mutuamente exclusivas, o total de possibilidades é a soma (princípio aditivo):

$$n = 40.320 + 40.320 = 80.640$$

Gabarito: E

24. (Quadrix/2022 - CAU/SC) Julgue o item.

O resto da divisão do número de anagramas da palavra CLARICE por 2.022 é igual a 134.

Comentários:

A palavra CLARICE possui 7 letras, das quais 2 são repetidas (C). Assim, o número de anagramas corresponde à permutação de 7 elementos, com repetição de 2:

$$P_7^2 = \frac{7!}{2!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$$

Dividindo esse resultado por 2.022, obtemos 1 como quociente, com resto igual à diferença:

$$r = 2520 - 2022 = 498$$

Que é diferente de 134.

Gabarito: Errado

25. (Quadrix/2022 - CRECI 24) Julgue o item.

O número de anagramas da palavra CRIME está para o número de anagramas da palavra CASTIGO, assim como 1 está para 42.

Comentários:

A palavra CRIME possui 5 letras distintas, logo, o número de anagramas corresponde à permutação simples de 5 elementos:

$$P_5 = 5!$$

E a palavra CASTIGO possui 7 letras distintas, logo, o número de anagramas corresponde à permutação simples de 7 elementos:

$$P_7 = 7!$$

A razão entre esses resultados é:

$$\frac{P_5}{P_7} = \frac{5!}{7!} = \frac{5!}{7 \times 6 \times 5!} = \frac{1}{42}$$

Portanto, de fato, o número de anagramas de CRIME está para o número de anagramas de CASTIGO como 1 está para 42.

Gabarito: Certo

26. (Quadrix/2022 - CRP 18) Com relação a princípios de contagem e probabilidade e a arranjos e permutações, julgue o item.

O número de anagramas da palavra "MATO" está para o número de anagramas da palavra "GROSSO" assim como 2 está para 15.

Comentários:

A palavra MATO possui 4 letras distintas, logo, o número de anagramas corresponde à permutação simples de 4 elementos:

$$P_4 = 4!$$

E a palavra GROSSO possui 6 letras, com repetição de 2 O´s e 2 S´s:

$$P_6^{2,2} = \frac{6!}{2! \times 2!} = \frac{6!}{4}$$

A razão entre esses resultados é:

$$\frac{P_4}{P_6^{2,2}} = \frac{4!}{\frac{6!}{4}} = \frac{4 \times 4!}{6 \times 5 \times 4!} = \frac{2}{15}$$

Portanto, de fato, o número de anagramas de MATO está para o número de anagramas de GROSSO como 2 está para 15.

Gabarito: Certo

27. (QUADRIX/2022 - Pref. Lagunas/SC) Em uma loja, há 6 tipos de refrigerante, 4 tipos de queijo e 3 tipos de carne. Com base nesse caso hipotético, julgue o item.

O número de anagramas da palavra QUEIJO está para o número de anagramas da palavra REFRIGERANTE assim como 1 está para 2^4 x 3 x 5 x 7 x 11.

Comentários:

A palavra QUEIJO possui 6 letras distintas, logo, o número de anagramas corresponde à permutação simples de 6:

$$P_6 = 6!$$

E a palavra REFRIGERANTE possui 12 letras, com repetição de 3 R´s e 3 E´s:

$$P_{12}^{3,3} = \frac{12!}{3! \times 3!}$$

A razão entre esses resultados é:

$$R = \frac{P_6}{P_{12}^{3,3}} = \frac{6!}{\frac{12!}{3! \times 3!}} = \frac{6! \times 3! \times 3!}{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!} = \frac{3 \times 2 \times 3 \times 2}{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}$$

$$R = \frac{1}{11 \times 10 \times 3 \times 8 \times 7} = \frac{1}{11 \times 2 \times 5 \times 3 \times 2^3 \times 7} = \frac{1}{11 \times 5 \times 3 \times 2^4 \times 7}$$

Gabarito: Certo

28. (Quadrix/2022 - CRECI 11) Na matemática, o duplo fatorial de um número natural n, denotado por n!!, é o produto de todos os inteiros positivos de 1 até n que possuem a mesma paridade de n. Por exemplo, 7!! = 1 × 3 × 5 × 7 = 105 e 8!! = 2 × 4 × 6 × 8 = 384. Considerando essas informações, julgue o item.

O número de anagramas da palavra EUROPA está para 7!!, assim como 1 está para 7.

Comentários:

O enunciado informa que 7!! = 105 e pede a relação entre esse valor e o número de anagramas de EUROPA, que corresponde a uma permutação simples de 6 elementos distintos:

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

A razão entre 720 e 105 é **diferente** da razão entre 1 e 7.

Gabarito: Errado

29. (Quadrix/2022 - CRA/PR) Acerca dos anagramas da palavra NIRVANA, julgue o item.

O número de anagramas é igual a 1.620.

Comentários:

A palavra NIRVANA possui 7 letras, das quais 2 são N´s e 2 são A´s. Assim, o número de anagramas corresponde à permutação de 7 elementos, com repetição de 2 e de 2:

$$P_7^{2,2} = \frac{7!}{2! \times 2!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{2 \times 2} = 7 \times 6 \times 5 \times 3 \times 2 = 1260$$

Gabarito: Errado

30. (Quadrix/2022 - CRA/PR) Acerca dos anagramas da palavra NIRVANA, julgue o item.

O número de anagramas que começam e terminam pela letra N é igual a 2^2 x 3 x 5.

Comentários:

Agora, a questão fixa os N´s nos extremos:

N						N

O número de anagramas nessas condições corresponde à permutação das outras 5 letras (IRVAA), com repetição de 2 A´s:

$$P_5^2 = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 2^2 \times 3 \times 5$$

Gabarito: Certo

31. (Quadrix/2022 - CRA/PR) Acerca dos anagramas da palavra NIRVANA, julgue o item.

O número de anagramas que começam ou terminam pela letra A é igual a 720.

Comentários:

Agora, os anagramas devem começar OU terminar pela letra A. Fixando a letra A no início, precisamos permutar as outras 6 letras (NIRVAN), das quais 2 são repetidas (N):

A						

$$P_6^2 = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

Se fixarmos a letra A no fim, teremos a mesma quantidade de anagramas (360). No entanto, não podemos somar esses resultados diretamente, pois estaremos contanto em dobro os anagramas que começa **E** terminam com A (interseção). Por isso, precisamos subtraí-los.

A						A

Esses anagramas correspondem à permutação das outras 5 letras (NIRVN), das quais 2 são repetidas (N):

$$P_5^2 = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

Logo, o número de anagramas que começam ou terminam por A é:

$$n = 360 + 360 - 60 = 660$$

Gabarito: Errado

32. (Quadrix/2022 - CRP 18) Com relação a princípios de contagem e probabilidade e a arranjos e permutações, julgue o item.

O número de anagramas da palavra "GROSSO" que começam ou terminam com a letra O é igual a 120.

Comentários:

Similarmente à questão anterior, os anagramas de GROSSO devem começar OU terminar pela letra O. Fixando a letra O no início, precisamos permutar as outras 5 letras (GROSS), das quais 2 são repetidas (S):

O					

$$P_5^2 = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

Se fixarmos a letra O no fim, teremos a mesma quantidade de anagramas (60).

No entanto, não podemos somar esses resultados diretamente, pois estaremos contanto em dobro os anagramas que começa **E** terminam com O (interseção). Por isso, precisamos subtraí-los.

O						O

Esses anagramas correspondem à permutação das outras 4 letras (GRSS), das quais 2 são repetidas (S):

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 4 \times 3 = 12$$

Logo, o número de anagramas que começam ou terminam por O é:

$$n = 60 + 60 - 12 = 108$$

Gabarito: Errado

33. (Quadrix/2022 - CRECI 24) Julgue o item.

Mais de 4% dos anagramas da palavra ODISSEIA começam com S e terminam com A.

Comentários:

Precisamos calcular a proporção entre o número de anagramas da palavra ODISSEIA que começam com S e terminam com A, em relação ao total de anagramas.

Considerando que a palavra possui 8 letras, das quais 2 são S e 2 são I, o número total de anagramas é uma permutação de 8 elementos, com repetição de 2 e de 2:

$$P_8^{2,2} = \frac{8!}{2! \times 2!} = \frac{8!}{4}$$

Agora, vamos fixar um S no início e o A no final:

S							A

O número de anagramas corresponde ao número de maneiras de permutar as outras 6 letras (ODISEI), com repetição de 2 I´s:

$$P_6^2 = \frac{6!}{2!} = \frac{6!}{2}$$

A razão entre essas quantidades é:

$$p = \frac{\frac{6!}{2}}{\frac{8!}{4}} = \frac{6!}{\frac{8 \times 7 \times 6!}{2}} = \frac{1}{4 \times 7} = \frac{1}{28} \cong 3{,}6\%$$

Que é inferior a 4%.

Gabarito: Errado

34. (GUALIMP/2022 - Pref. Carmo/RJ) Cecília escreveu todos os anagramas da palavra BANDOLIM em que as vogais aparecem juntas e em ordem alfabética. Quantos anagramas Cecília escreveu?

a) 120

b) 5.040

c) 840

d) 720

Comentários:

Essa questão pede os anagramas da palavra BANDOLIM, em que as vogais aparecem juntas e em ordem alfabética, ou seja, "AIO". Como essas letras devem aparecer juntas e em uma ordem específica, vamos tratá-las como elemento único. Assim, temos a permutação de 6 elementos (as 5 consoantes e o elemento formado pelas vogais):

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Gabarito: D

35. (Legalle/2022 - Pref. Hulha Negra/RS) A quantidade total de anagramas da palavra PANELA que contêm a sequência ELA é:

a) 6

b) 12

c) 18

d) 24

e) 48

Comentários:

Similarmente à questão anterior, precisamos dos anagramas de PANELA que contêm a sequência "ELA". Para isso, vamos tratá-las como elemento único.

Assim, temos a permutação de 4 elementos (as 3 letras em PAN e o elemento "ELA" como elemento único):

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Gabarito: D

36. (Quadrix/2022 - CRO/ES) Julgue o item.

O número de anagramas da palavra BRUXISMO que tem as vogais juntas é igual a 4.230.

Comentários:

A palavra BRUXISMO possui 8 letras diferentes, sendo 3 vogais e 5 consoantes. Para que as vogais fiquem juntas, vamos primeiro tratá-las como elemento único. Assim, temos a permutação de 6 elementos (5 consoantes e o elemento com as vogais):

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Para cada uma dessas possibilidades, as 3 vogais podem aparecer em diferentes ordens, o que corresponde à permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de anagramas nessas condições é:

$$n = 720 \times 6 = 4320$$

Que é diferente de 4.230.

Gabarito: Errado

37. (Quadrix/2022 - CRO/ES) Julgue o item.

O número de anagramas da palavra ODONTOLOGIA é igual a $2^5.3^2.5^3.7.11$.

Comentários:

A palavra ODONTOLOGIA possui 11 letras, das quais 4 são iguais (O). Logo, o número de anagramas corresponde à permutação de 11 elementos, com repetição de 4:

$$P_{11}^{4} = \frac{11!}{4!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$$

Para responder à questão, vamos decompor esses fatores em números primos:

$$P_{11}^{4} = 11 \times 2 \times 5 \times 3^2 \times 2^3 \times 7 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^5 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11$$

As potências do fator 3 e do fator 5 são diferentes daquelas descritas no item.

Gabarito: Errado

38. (SELECON/2022 - CM São Gonçalo) Seja n o número total de permutações distintas formadas com as 6 letras da palavra VACINA e que possuam as três vogais juntas. O valor de n é igual a:

a) 720

b) 360

c) 72

d) 36

Comentários:

A palavra VACINA possui 6 letras, sendo 3 vogais e 3 consoantes. Para que as 3 vogais fiquem juntas, vamos primeiro tratá-las como elemento único. Assim, temos a permutação de 4 elementos diferentes (3 consoantes diferentes e o elemento com as vogais):

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Para cada uma dessas possibilidades, podemos reordenar as 3 vogais, sendo 2 repetidas (A), o que corresponde a uma permutação de 3 elementos, com repetição de 2:

$$P_3^2 = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \times 2!}{2!} = 3$$

Pelo princípio multiplicativo, o número total de anagramas nessas condições é o produto:

$$n = 24 \times 3 = 72$$

Gabarito: C

39. (Quadrix/2022 - CRECI 24) Julgue o item.

17.280 anagramas da palavra LISPECTOR têm as consoantes juntas.

Comentários:

A palavra LISPECTOR possui 9 letras distintas, sendo 3 vogais e 6 consoantes. Para que as consoantes fiquem juntas, vamos primeiro tratá-las como elemento único. Assim, temos a permutação simples de 4 elementos (3 vogais e o elemento formado pelas consoantes):

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Para cada uma dessas possibilidades, podemos reordenar as consoantes entre si. Assim, temos a permutação simples de 6 elementos:

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Pelo princípio multiplicativo, o número total de anagramas (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 24 \times 720 = 17.280$$

Gabarito: Certo

40. (FEPESE/2022 - CINCATARINA) Um trem de passageiros é constituído de uma locomotiva e sete vagões distintos, sendo um deles o vagão do silêncio (onde não é permitido conversar) e outro o vagão restaurante. O trem deve ser formado com a locomotiva à frente e o vagão do silêncio não pode ser colocado imediatamente após a locomotiva e nem imediatamente após ou antes do vagão restaurante.

Portanto, o número de modos diferentes de montar a composição que forma o trem é:

a) Mais de 3100

b) Mais de 2900 e menos de 3100

c) Mais de 2700 e menos de 2900

d) Mais de 2500 e menos de 2700

e) Menos de 2500

Comentários:

Precisamos encontrar o número de maneiras de ordenar 7 vagões, de modo que o vagão do silêncio não seja o primeiro (logo após a locomotiva) e nem em um dos lados do vagão restaurante.

Para isso, vamos primeiro encontrar o número de maneiras de ordenar todos os 7 vagões, sem restrições:

$$P_7 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \mathbf{5040}$$

Agora, vamos **subtrair** aquelas possibilidades em que o vagão do silêncio é o primeiro vagão. Nessa situação, esse vagão está fixo e os outros 6 vagões permutam livremente:

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \mathbf{720}$$

Também vamos subtrair aquelas possibilidades em que o vagão do silêncio está ao lado do vagão restaurante. Primeiro, vamos tratá-los como único elemento. Assim, temos a permutação de 6 elementos:

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Para cada uma dessas possibilidades, há 2 maneiras de ordenar o vagão do silêncio e o vagão restaurante (um primeiro ou o outro), logo, devemos multiplicar esse resultado por 2:

$$2 \times P_6 = 2 \times 720 = \mathbf{1440}$$

Por fim, devemos **somar** os elementos da interseção, para que não sejam subtraídos duas vezes. Para que o vagão do silêncio seja o primeiro e esteja ao lado do vagão restaurante, é necessário que este seja o segundo. Assim, esses dois vagões estão fixos e os outros 5 vagões permutam livremente:

$$P_6 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \mathbf{120}$$

E o número de maneiras de ordenar os vagões, atendendo às restrições, é:

$$n = 5040 - 720 - 1440 + 120 = 3000$$

Gabarito: B

41. (Quadrix/2022 - CRN 4) Quanto aos anagramas da palavra EUFORIA, julgue o item.

Podem ser formados por 5.040 anagramas.

Comentários:

A palavra EUFORIA possui 7 letras distintas. Assim, o número de anagramas corresponde a uma permutação simples de 7 elementos:

$$P_7 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

Gabarito: Certo

42. (Quadrix/2022 - CRN 4) Quanto aos anagramas da palavra EUFORIA, julgue o item.

$\frac{1}{840}$ desses anagramas possui as letras FURIA juntas e nessa ordem.

Comentários:

Para que as letras FURIA fiquem juntas e nessa ordem, vamos tratá-las como único elemento. Assim, temos a permutação de 3 elementos (E, O e o elemento FURIA):

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Sabendo que há 5040 anagramas no total, como vimos na questão anterior, a proporção dos anagramas com as letras FURIA juntas e nessa ordem é:

$$p = \frac{6}{5040} = \frac{1}{840}$$

Gabarito: Certo

43. (Quadrix/2022 - CRN 4) Quanto aos anagramas da palavra EUFORIA, julgue o item.

O número de anagramas que possuem as vogais e as consoantes juntas é um quadrado perfeito.

Comentários:

Agora, precisamos do número de anagramas que possuem as 5 vogais EUOIA e as 2 consoantes FR juntas, em qualquer ordem. Há **2** possibilidades de ordenar esses grupos - primeiro as vogais e depois as consoantes ou o contrário.

Além disso, as vogais podem aparecer em qualquer ordem. Sabendo que há 5 vogais, temos a permutação de 5 elementos:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

E as 2 consoantes também podem aparecer em qualquer ordem:

$$P_2 = 2! = 2 \times 1 = 2$$

Logo, o número de anagramas nessas condições é, pelo princípio multiplicativo:

$$n = 2 \times 120 \times 2 = 480$$

Esse número não é um quadrado perfeito, pois não possui raiz inteira. Ele pode ser decomposto em números primos da seguinte forma:

$$480 = 2^5 \times 3 \times 5$$

Gabarito: Errado

44. (Quadrix/2022 - CRN 4) Quanto aos anagramas da palavra EUFORIA, julgue o item.

Se se ordenar esses anagramas em ordem alfabética crescente, a palavra EUFORIA ocupará a posição de número 1.362.

Comentários:

Os primeiros anagramas de EUFORIA, em ordem alfabética, começam com a letra A, cuja quantidade corresponde a uma permutação das outras 6 letras da palavra:

A _ _ _ _ _ _: $P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

Em seguida, temos os anagramas que começam com a letra E, como a palavra desejada. Dentre eles, os primeiros começam com EA, cuja quantidade corresponde a uma permutação das outras 5 letras:

EA _ _ _ _ _: $P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

O mesmo vale para os anagramas que começam com EF, EI, EO e ER:

EF _ _ _ _ _: $P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

EI _ _ _ _ _: $P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

EO _ _ _ _ _: $P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

ER _ _ _ _ _: $P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

Em seguida, temos os anagramas que começam com EU, como a palavra desejada. Dentre eles, os primeiros começam com EUA, cuja quantidade corresponde a uma permutação das outras 4 letras:

EUA _ _ _ _: $P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Em seguida, temos os anagramas que começam com EUF, como a palavra desejada. Dentre eles, os primeiros começam com EUFA, cuja quantidade corresponde a uma permutação das outras 3 letras:

EUFA _ _ _: $P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$

O mesmo vale para os anagramas que começam com EUFI:

EUFI _ _ _: $P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$

Em seguida, temos os anagramas que começam com EUFO, como desejamos. Desses, os primeiros começam com EUFOA, cuja quantidade corresponde a uma permutação das outras 2 letras:

EUFOA _ _: $P_2 = 2 \times 1 = 2$

O mesmo vale para os anagramas que começam com EUFOI:

EUFOI _ _: $P_2 = 2 \times 1 = 2$

Em seguida, temos os anagramas que começam com EUFOR, como desejamos. Desses, o primeiro é EUFORAI e depois temos EUFORIA.

Portanto, a posição que EUFORIA ocupa é a soma:

$$720 + 5 \times 120 + 24 + 2 \times 6 + 2 \times 2 + 1 + 1 = 720 + 600 + 24 + 12 + 4 + 2 = 1362$$

Gabarito: Certo

45. (Quadrix/2022 - CRECI 11) Na aula de artes visuais, Bárbara aprendeu que as sete cores do arco-íris são: vermelho; laranja; amarelo; verde; azul; anil; e violeta. Na mesma aula, ela também aprendeu que o azul, o verde, o anil e o violeta são cores frias e que o vermelho, o laranja e o amarelo são cores quentes.

Com base nesse caso hipotético, julgue o item.

Se os anagramas da palavra ANIL forem colocados em ordem alfabética, a palavra LINA ocupará a décima sexta posição.

Comentários:

Os primeiros anagramas de ANIL, em ordem alfabética, começam com a letra A, cuja quantidade corresponde a uma permutação das outras 3 letras da palavra, todas diferentes:

A _ _ _: $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

O mesmo vale para os anagramas que começam com I:

I _ _ _: $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

Em seguida, temos os anagramas que começam com L, como desejamos. Desses, primeiro temos os anagramas que começam com LA, cuja quantidade corresponde a uma permutação das outras 2 letras:

LA _ _: $P_2 = 2! = 2 \times 1 = 2$

Em seguida, temos os anagramas que começam com LI, como buscamos. Desses, o primeiro é LIAN e depois temos LINA.

Portanto, a posição que LINA ocupa é a soma:

$$6 + 6 + 2 + 1 + 1 = 16$$

Gabarito: Certo

46. (ACCESS/2022 - Pref. Ouro Branco) Listando em ordem alfabética, como em um dicionário, todos os anagramas da palavra "BRANCO", a forma "BRANCO" ocuparia a

a) 125ª posição

b) 219ª posição

c) 312ª posição

d) 720ª posição

Comentários:

Os primeiros anagramas de BRANCO, em ordem alfabética, começam com a letra A, cuja quantidade corresponde a uma permutação das outras 5 letras da palavra, todas diferentes:

A _ _ _ _ _: $P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

Em seguida, temos os anagramas que começam com B, como desejamos. Desses, primeiro temos os anagramas que começam com BA, cuja quantidade corresponde a uma permutação das outras 4 letras:

BA _ _ _ _: $P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

O mesmo vale para aqueles que começam com BC, BN e BO:

BC _ _ _ _: $P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

BN _ _ _ _: $P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

BO _ _ _ _: $P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Por fim, temos os anagramas que começam com BR, como buscamos. Os primeiros começam justamente com BRA, como desejamos. Desses, os primeiros começam com BRAC, cuja quantidade corresponde a uma permutação das outras 2 letras:

BRAC _ _: $P_2 = 2! = 2 \times 1 = 2$

E a palavra seguinte é BRANCO. A sua posição corresponde à soma:

$$120 + 24 \times 4 + 2 + 1 = 219$$

Gabarito: B

47. (IBADE/2022 - SEA/SC) Um anagrama de uma palavra é obtido ao trocar a ordem de suas letras. Colocando em ordem alfabética todos os anagramas da palavra MILITAR, a posição ocupada pela palavra MILITAR é a:

a) 1556

b) 1557

c) 1558

d) 1559

e) 1560

Comentários:

Os primeiros anagramas de MILITAR, em ordem alfabética, começam com a letra A, cuja quantidade corresponde a uma permutação das outras 6 letras da palavra (MILITR), com repetição de 2 I´s:

A _ _ _ _ _ _: $P_6^2 = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

Em seguida, temos os anagramas que começam com I, cuja quantidade corresponde a uma permutação das outras 6 letras (MLITAR), todas diferentes:

I _ _ _ _ _ _: $P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

Em seguida, temos os anagramas que começam com L, cuja quantidade corresponde a uma permutação das outras 6 letras (MIITAR), com repetição de 2 I´s:

I _ _ _ _ _ _: $P_6^2 = \frac{6!}{2!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

Em seguida, temos os anagramas que começam com M, como desejamos. Desses, primeiro temos os que começam com MA, cuja quantidade corresponde a uma permutação das outras 5 letras (ILITR), com repetição de 2 I´s:

MA _ _ _ _ _: $P_5^2 = \frac{5!}{2!} = \frac{5\times4\times3\times2!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$

Em seguida, temos os anagramas que começam com MI, como desejamos. Desses, primeiro temos os que começam com MIA, cuja quantidade corresponde a uma permutação das outras 4 letras (LITR), todas diferentes:

MIA _ _ _ _: $P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

O mesmo vale para os anagramas que começam com MII:

MII _ _ _ _: $P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Em seguida, temos os anagramas que começam com MIL, como desejamos. Desses, primeiro temos os que começam com MILA, cuja quantidade corresponde a uma permutação das outras 3 letras (ITR), todas diferentes:

MILA _ _ _: $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

Em seguida, temos os anagramas que começam com MILI, como desejamos. Desses, primeiro temos os que começam com MILIA, cuja quantidade corresponde a uma permutação das outras 2 letras (TR):

MILIA _ _: $P_2 = 2! = 2 \times 1 = 2$

O mesmo vale para os anagramas que começam com MILIR:

MILIR _ _: $P_2 = 2! = 2 \times 1 = 2$

Por fim, a palavra seguinte é MILITAR. A sua posição corresponde à soma:

$$360 + 720 + 360 + 60 + 24 + 24 + 6 + 2 + 2 + 1 = 1559$$

Gabarito: D

48. (AOCP/2022 - IF/RO) Ao permutar os algarismos do conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5} sem os repetir, formamos 120 números de 5 algarismos. Escrevendo esses números em ordem decrescente, qual ocupará a 83ª posição?

a) 24.135

b) 42.513

c) 42.531

d) 23.451

e) 24.153

Comentários:

Para resolver essa questão, também precisamos ordenar as permutações dos algarismos {1, 2, 3, 4, 5}, de forma **decrescente**.

Os primeiros números começam com 5, cuja quantidade corresponde à permutação dos outros 4 algarismos:

5 _ _ _ _: $P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

O mesmo vale para os números que começam com 4 e com 3:

4 _ _ _ _: $P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

3 _ _ _ _: $P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Por enquanto, temos $24 \times 3 = 72$ números e aquele que ocupa a 83ª posição começa com o algarismo 2. Desses números, os primeiros começam com 25, cuja quantidade corresponde à permutação dos outros 3 algarismos:

25 _ _ _: $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

Por enquanto, temos $72 + 6 = 78$ números e aquele que ocupa a 83ª posição começa com os algarismos 24. Desses, os primeiros começam com 245, cuja quantidade corresponde à permutação dos outros 2 algarismos:

245 _ _: $P_2 = 2! = 2 \times 1 = 2$

O mesmo vale para os números que começam com 243:

243 _ _: $P_2 = 2! = 2 \times 1 = 2$

Por enquanto, temos $78 + 2 \times 2 = 82$ números e aquele que ocupa a 83ª posição é o maior número que começa com 241, qual seja, **24153**.

Gabarito: E

49. (FCM/2022 - CM MDM) Felipe mora na Europa e, durante suas férias, resolveu visitar seus cinco irmãos que moram no Brasil, porém em cidades distintas. Na ordem das visitas para as cinco cidades, apenas duas delas precisam ocorrer de modo consecutivo. Assim, o número de formas em que essa ordem pode ser elaborada, obedecendo apenas a essa condição, é igual a

a) 36

b) 48

c) 72

d) 96

Comentários:

Precisamos encontrar o número de maneiras de ordenar as visitas aos 5 amigos, sabendo que duas delas precisam ser consecutivas. Assim, vamos tratá-las como elemento único, o que corresponde a uma permutação de 4 elementos (3 amigos e a dupla como elemento único):

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Para cada uma dessas possibilidades, há 2 maneiras de ordenar as visitas consecutivas, logo, devemos multiplicar o resultado por 2:

$$n = 2 \times 24 = 48$$

Gabarito: B

50. (RBO/2022 - SMFA-BH) Oito, entre eles, Ana, Fernanda, Maria e José, foram ao teatro. Compraram oito lugares contíguos. O número de maneiras distintas que esses oito amigos podem se assentar lado a lado, se Ana, Fernanda e Maria devem estar sempre juntas, além disso, José sempre deverá ocupar uma das extremidades dos lugares contíguos, é

a) 240

b) 720

c) 840

d) 1.200

e) 1.440

Comentários:

Precisamos organizar 8 amigos em 8 lugares em fila. Considerando que José precisa ocupar uma das extremidades, há **2** possibilidades para ele se sentar.

Uma vez escolhido o lugar de José, restarão 7 pessoas, mas Ana, Fernanda e Maria precisam estar juntas, então vamos tratá-las como elemento único. Assim, temos a permutação de 5 elementos (os outros 4 amigos e essas meninas como elemento único):

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Por fim, precisamos definir como as 3 meninas estarão posicionadas. Aqui, temos uma permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de sentar todos os amigos, nessas condições, é:

$$n = 2 \times 120 \times 6 = 1.440$$

Gabarito: E

51. (Quadrix/2022 - COREN/AP) Em uma equipe de competição de jiu-jitsu, há 6 faixas brancas, 1 faixa azul, 4 faixas roxa, 2 faixas marrons e 1 faixa preta. Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Há exatamente 480 modos de se dispor os competidores faixas brancas em fila, sem que 2 determinados faixas brancas fiquem juntos.

Comentários:

A questão pede o número de maneiras de organizar os 6 competidores faixa branca em fila, de modo que 2 determinados competidores não fiquem juntos. Para isso, vamos calcular o total de maneiras de organizá-los em fila e subtrair os casos que não atendem à restrição.

O número total de maneiras de organizar 6 pessoas em uma fila, sem restrições corresponde à permutação de 6 elementos:

$$n(T) = P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

O número de casos que não atendem à restrição são aqueles em que 2 competidores permanecem juntos. Para calcular esse número, vamos considerar os 2 competidores como único elemento. Assim, temos a permutação de 5 elementos (4 competidores e mais a dupla considerada como único elemento):

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Para cada uma dessas possibilidades, há 2 maneiras de ordenar os 2 competidores da dupla. Assim, o número de casos que não atendem à restrição é o produto:

$$n(\bar{R}) = 2 \times 120 = 240$$

Por fim, o número de maneiras de organizar os 6 competidores nessas condições é a diferença:

$$n = 720 - 240 = 480$$

Gabarito: Certo

52. (ACCESS/2022 - CPGI) Seis amigos se posicionam, um ao lado do outro, para tirar uma foto. Entre eles, estão Adão e Eva. O fotógrafo pediu para que os seis amigos se posicionassem para a foto de modo que Adão ficasse separado de Eva. O número de maneiras de isso ocorrer é

a) 600

b) 560

c) 540

d) 480

Comentários:

Essa questão também pede o número de maneiras de enfileirar 6 pessoas, de modo que 2 delas não fiquem juntas. Novamente, vamos calcular o total e subtrair os casos em que os 2 estão juntos.

O número total de maneiras de organizar 6 pessoas em uma fila é:

$$n(T) = P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Para calcular o número de possíveis filas em que os 2 estão juntos, vamos primeiro tratá-los como elemento único. Assim, temos a permutação de 5 elementos:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Considerando que, para cada uma dessas possibilidades, há 2 maneiras de posicionar Adão e Eva, multiplicamos esse resultado por 2:

$$n(\bar{R}) = 2 \times 120 = 240$$

Por fim, o número de maneiras de organizar a fila nessas condições é a diferença:

$$n = 720 - 240 = 480$$

Gabarito: D

53. (GUALIMP/2022 - Pref. Carmo/RJ) Dez alunos (incluindo Rafael e Flávio) foram chamados para uma reunião. Ao final da reunião, foi solicitado para formarem uma fila para assinarem a lista de presença.

De quantas formas diferentes essa fila pode ser formada de forma que Rafael e Flávio não fiquem juntos?

a) 3.265.920.

b) 3.628.800.

c) 2.903.040.

d) 725.760.

Comentários:

Para encontrar o número de maneiras de formar uma fila com 10 pessoas de forma que 2 delas não fiquem juntas. Vamos primeiro calcular o número o total de maneiras de formar uma fila com 10 pessoas, sem restrição, que corresponde à permutação de 10 elementos:

$$n(T) = P_{10} = 10! = 3.628.800$$

Agora, devemos subtrair o número de filas que não atendem à restrição, isto é, o número de filas em que Rafael e Flávio ficam juntos. Para isso, vamos primeiro tratá-los como elemento único. Assim, temos a permutação de 9 elementos (8 pessoas e mais a dupla):

$$P_9 = 9! = 362.880$$

Para cada uma dessas possibilidades, há 2 maneiras de posicionar Rafael e Flavio (Rafael primeiro ou Flavio primeiro). Assim, o número de filas que não atendem à restrição é o produto:

$$n(\bar{R}) = 2 \times 9! = 725.760$$

O número de filas que atendem à restrição é a diferença:

$$n = 3.628.800 - 725.760 = 2.903.040$$

Gabarito: C

54. (Legalle/2022 - BADESUL) Quantos anagramas podemos formar a partir da palavra FINANCEIRO?

a) 3.628.800.

b) 1.234.567.

c) 907.200.

d) 846.300.

e) 553.600.

Comentários:

A palavra FINANCEIRO possui 10 letras, com 2 I´s e 2 N´s. Assim, temos uma permutação de 10 elementos com 2 repetições de 2 elementos:

$$P_{10}^{2,2} = \frac{10!}{2! \times 2!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{2 \times 2} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 3 \times 2 = 907.200$$

Gabarito: C

55. (Quadrix/2022 - CRP 6) João trabalha há 7 anos no Conselho Regional de Psicologia. Ele passou 70% desse tempo na área financeira, 20% do tempo restante na área de recursos humanos e o resto, na área jurídica. Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

A palavra "financeira" possui 21.600 anagramas em que todas as vogais estão juntas.

Comentários:

A palavra FINANCEIRA possui 10 letras, das quais 5 são vogais e 5 são consoantes. Para que todas as vogais fiquem juntas, vamos primeiro tratá-las como elemento único. Assim, temos a permutação de 6 elementos (5 consoantes e o elemento com as vogais), dos quais 2 são repetidos (N):

$$P_6^2 = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

Para cada uma dessas possibilidades, podemos reordenar as vogais. Havendo 5 vogais, sendo 2 I´s e 2 A´s, temos uma permutação de 5 elementos, com repetição de 2 e de 2:

$$P_5^{2,2} = \frac{5!}{2! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{2 \times 2} = 5 \times 3 \times 2 = 30$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de formar anagramas nessas condições é o produto:

$$n = 360 \times 30 = 10.800$$

Que é diferente da quantidade indicada no item.

Gabarito: Errado

56. (AOCP/2022 - IF/RO) Quantos anagramas da palavra INSTITUTO possuem as vogais sempre juntas e as consoantes, também, sempre juntas?

a) 240

b) 480

c) 362.880

d) 30.240

e) 960

Comentários:

Precisamos calcular o número de anagramas da palavra INSTITUTO, em que as vogais estejam sempre juntas, assim como as consoantes. Para ordenar esses 2 grupos, há **2** possibilidades (primeiro as vogais ou primeiro as consoantes).

No grupo das vogais, há 4 letras, sendo 2 delas iguais (I). Assim, o número de maneiras de reordenar os elementos desse grupo é a permutação de 4 elementos, com repetição de 2:

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$$

No grupo das consoantes, há 5 letras, sendo 3 delas iguais (T). Assim, o número de maneiras de reordenar os elementos desse grupo é a permutação de 5 elementos, com repetição de 3:

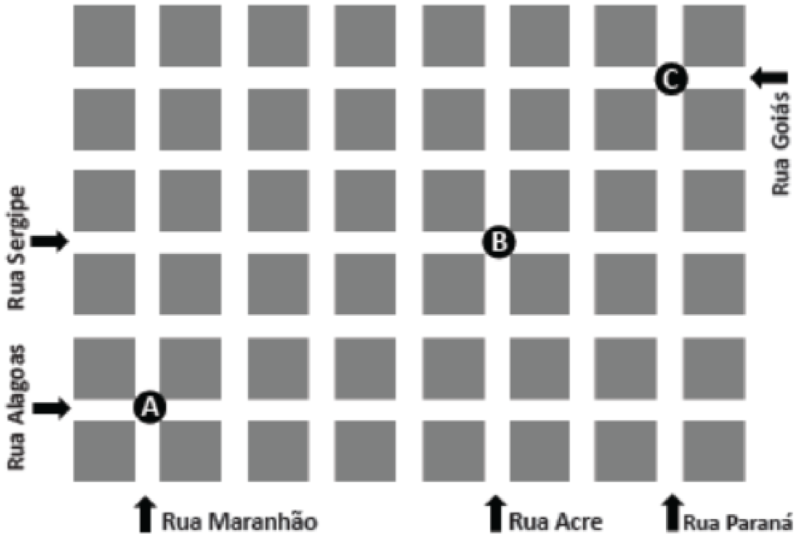
$$P_5^3 = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 20$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de anagramas nessas condições é o produto:

$$n = 2 \times 12 \times 20 = 480$$

Gabarito: B

57. (FCM - CEFETMINAS/2022 - Pref. Santa Cruz do Escalvado) A figura a seguir é um mapa, mostrando parte das ruas de um bairro, em que todos os quarteirões, representados pelos quadrados, possuem o mesmo tamanho.



Considere que uma pessoa esteja em um automóvel no ponto A, esquina das ruas Maranhão e Alagoas, e pretenda chegar ao ponto C, esquina das ruas Goiás e Paraná, passando pelo ponto B, esquina das ruas Acre e Sergipe, de modo a percorrer sempre o trajeto mais curto possível.

Assim, considerando as informações dadas, o número de caminhos diferentes que essa pessoa pode fazer é igual a

a) 75

b) 90

c) 100

d) 120

Comentários:

Para sair do ponto A e chegar no ponto B, a pessoa precisa percorrer 4 ruas para a direita e 2 ruas para cima. Os caminhos serão diferentes se a ordem desses percursos mudar. Representando o percurso à direita como D e o percurso para cima como C, o caminho DDDDCC é diferente do caminho CDDCDD, por exemplo.

Assim, o número de caminhos diferentes entre A e B corresponde a uma permutação de 6 elementos, com repetição de 4 D´s e 2 C´s:

$$n(A,B) = P_6^{4,2} = \frac{6!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2} = 3 \times 5 = 15$$

Ademais, para sair do ponto B e chegar no ponto C, a pessoa precisa percorrer 2 ruas para a direita e 2 ruas para cima, o que corresponde a uma permutação de 4 elementos, com repetição de 2 D´s e 2 C´s:

$$n(B,C) = P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2} = 2 \times 3 = 6$$

Por fim, o número de maneiras de a pessoa realizar ambos os percursos (eventos concomitantes) é o produto (princípio multiplicativo):

$$n = 15 \times 6 = 90$$

Gabarito: B

58. (QUADRIX/2022 - CRP 10) Para a realização de uma dinâmica de grupo, deseja-se selecionar 6 pessoas de um conjunto de 10 pessoas (entre elas Anderson e Bárbara).

Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

As 6 pessoas que participarão dessa dinâmica de grupo poderão formar uma roda de 720 modos distintos.

Comentários:

Aqui, temos uma permutação circular (roda) de 6 elementos. Nessa situação, fixamos uma pessoa qualquer e calculamos a permutação simples das outras 5:

$$PC_n = (n-1)!$$

$$PC_6 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Gabarito: Errado

59. (AVANÇASP/2022 - Pref. Laranjal Paul) Joana e suas 8 amigas saíram para jantar e a única mesa vaga no restaurante era uma mesa central redonda.

Desse modo, de quantas formas elas podem se sentar nesta mesa?

a) 9!

b) 5!

c) 4!

d) 7!

e) 8!

Comentários:

O número de maneiras de 9 pessoas se sentarem em uma mesa redonda corresponde à permutação circular de 9 elementos. Nessa situação, fixamos uma pessoa qualquer e calculamos a permutação simples das outras 8:

$$PC_9 = 8!$$

Gabarito: E

60. (AOCP/2022 - Pref. Pinhais) Uma reunião será feita com o Prefeito, o vice, o chefe da Câmara dos vereadores e os 5 chefes das Secretarias Municipais. De quantas maneiras é possível alocar essas 8 pessoas em uma mesa circular de modo que Prefeito e vice fiquem sempre lado a lado?

a) 10.080 maneiras

b) 5.040 maneiras

c) 720 maneiras

d) 1.440 maneiras

e) 2.520 maneiras

Comentários:

Para que o Prefeito e o Vice fiquem lado a lado, primeiro as tratamos como elementos único. Assim, consideramos que temos uma permutação circular de 7 elementos (6 pessoas e mais a dupla como elemento único):

$$PC_7 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Para cada uma dessas possibilidades, há 2 maneiras de o Prefeito e o Vice se sentarem (o Prefeito à direita do Vice ou o contrário). Logo, precisamos multiplicar esse resultado por 2:

$$n = 2 \times 720 = 1440$$

Gabarito: D

61. (OMNI/2021 - Pref. Sete Lagos) Para ser campeão, um time ainda terá pela frente seis jogos, porém a ordem dessas partidas ainda não foi definida. Sabendo que nesses próximos jogos o time enfrentará seis times diferentes, é possível afirmar que os próximos seis jogos podem acontecer de:

a) 360 maneiras diferentes

b) 46.656 maneiras diferentes

c) 720 maneiras diferentes

d) 1.080 maneiras diferentes

Comentários:

O número de maneiras de ordenar 6 jogos corresponde à permutação de 6 elementos:

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Gabarito: C

62. (AVANÇASP/2021 - Pref. Vinhedo) O arco-íris tem 7 cores. Uma criança com 7 lápis coloridos pode pintar de quantas maneiras diferentes sem repetir as cores?

a) 7!

b) 7!/7

c) 6!/5

d) 7

e) 8!/7

Comentários:

O número de maneiras de ordenar 7 cores corresponde à permutação de 7 elementos:

$$P_7 = 7!$$

Gabarito: A

63. (IBRASP/2021 - Pref. Rio Grande) Ao todo, quantos anagramas a palavra QUATRO possui a mais do que a palavra DOIS?

a) 620

b) 665

c) 696

d) 702

e) 716

Comentários:

A palavra QUATRO possui 6 letras distintas. O número de anagramas é a permutação dos 6 elementos:

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

A palavra DOIS possui 4 letras distintas. O número de anagramas é:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

E a diferença é:

$$n = 720 - 24 = 696$$

Gabarito: C

64. (SELECON/2021 - Guarda Civil de Campo Grande) Cinco guardas civis metropolitanos, Ana, Bruna, Carlos, Davi e Edson, ao participarem de uma solenidade, foram colocados um ao lado do outro para uma fotografia. Levando em conta apenas a posição deles entre si, existem exatamente k arrumações diferentes, de modo que as pessoas do sexo feminino fiquem nas extremidades. O valor de k é:

a) 8

b) 12

c) 18

d) 24

Comentários:

Precisamos calcular o número de maneiras de ordenar 5 pessoas, de modo que as duas mulheres ocupem as extremidades. Assim, há **2** maneiras de as mulheres se sentarem (Ana à direita e Bruna à esquerda, ou o contrário).

Para cada uma dessas possibilidades, temos a permutação dos 3 homens ao centro:

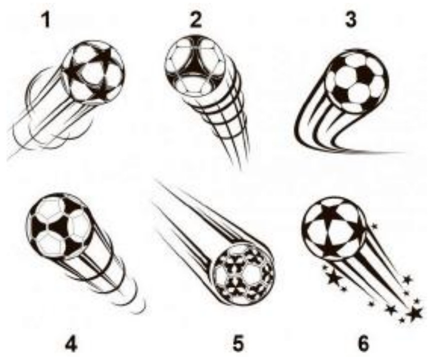
$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Pelo princípio multiplicativo, o número total de possibilidades é o produto:

$$n = 2 \times 6 = 12$$

Gabarito: B

65. (AMAUC/2021 - Pref. Alto Bela Vista) Analise a seguir os desenhos que serão dispostos na parede do quarto de João:



Considerando que o desenho 1 somente poderá trocar de lugar com o desenho 6, assinale a alternativa que representa corretamente a quantidade de possibilidades de disposição desses desenhos na parede:

a) 52 possibilidades

b) 24 possibilidades

c) 40 possibilidades

d) 60 possibilidades

e) 48 possibilidades

Comentários:

Precisamos calcular o número de maneiras de organizar 6 desenhos, de modo que o desenho 1 só troque de lugar com o desenho 6. Assim, há **2** maneiras de colocar esses desenhos.

Para cada uma dessas possibilidades, temos a permutação livre dos outros 4 desenhos:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Pelo princípio multiplicativo, o número total de possibilidades é o produto:

$$n = 2 \times 24 = 48$$

Gabarito: E

66. (OBJETIVA/2021 - Pref. Venâncio Aires) Pedro possui 5 livros distintos de matemática, 3 livros distintos de português e 2 livros distintos de história. Sendo assim, o número de maneiras distintas pelas quais Pedro pode arrumar esses livros, lado a lado, em uma estante, de forma que os livros de mesma matéria permaneçam juntos, é igual a:

a) 1.728

b) 2.456

c) 8.640

d) 4.820

e) 3.742

Comentários:

Precisamos calcular o número de maneiras de ordenar 5 livros de matemática, 3 livros de português e 2 livros de história, de modo que os livros da mesma matéria fiquem juntos. Para isso, vamos inicialmente tratar os livros de cada matéria como um único elemento. Assim, temos a permutação de 3 elementos (matemática, português e história):

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Para cada uma dessas possibilidades, podemos reordenar os livros de cada matéria. O número de maneiras de ordenar os 5 livros de matemática é:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

O número de maneiras de ordenar os 3 livros de português é:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

E o número de maneiras de ordenar os 2 livros de história é:

$$P_2 = 2! = 2 \times 1 = 2$$

Pelo princípio multiplicativo, devemos multiplicar todas essas possibilidades:

$$n = 6 \times 120 \times 6 \times 2 = 8640$$

Gabarito: C

67. (Quadrix 2021/CREFONO - 3ª Reg.) Julgue o item.

Exatamente 36 anagramas da palavra JÚNIOR possuem as vogais e as consoantes juntas.

Comentários:

A palavra JUNIOR possui 3 vogais distintas (U, I e O) e 3 consoantes distintas (J, N e R). Com vogais e consoantes juntas, podemos ter as 3 vogais, seguidas das 3 consoantes ou o contrário, isto é, as 3 consoantes seguidas das 3 vogais. Há, portanto, **2** possibilidades de posicionar vogais e consoantes juntas.

Em cada caso, o número de maneiras de reordenar as 3 vogais distintas corresponde a uma permutação simples de **3** elementos, assim como o número de maneiras de reordenar as **3** consoantes distintas.

Pelo princípio multiplicativo, devemos multiplicar todas essas possibilidades para encontrar o número total de maneiras de reordenar as 6 letras (vogais E consoantes - princípio multiplicativo):

$$2 \times P_3 \times P_3 = 2 \times 3! \times 3! = 2 \times 6 \times 6 = 72$$

Que é diferente de 36. Aqui, o aluno que visualiza as duas permutações de 3 elementos cada, mas esquece das duas maneiras de ordenar o conjunto das vogais com o conjunto das consoantes erra a questão.

Gabarito: Errado.

68. (Quadrix 2021/CREFONO - 3ª Reg.) Julgue o item.

O número de anagramas da palavra FISCAL que começam com F ou terminam com L é igual a 240.

Comentários:

A palavra FISCAL possui 6 letras distintas. O número de anagramas que começam com F corresponde ao número de maneiras de reordenar as outras 5 letras, logo, temos uma permutação de 5 elementos:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

O número de anagramas que terminam com L também corresponde ao número de maneiras de reordenar as outras 5 letras:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

O número de possibilidades associado à união desses eventos (começar com F OU terminar com L) corresponde à soma dessas possibilidades, **subtraindo**-se as possibilidades da interseção (para que ela não seja somada em dobro).

O número de anagramas que começam com F e terminam com L corresponde ao número de maneiras de reordenar as 4 letras nas posições centrais:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Logo, o número de anagramas buscado é:

120 + 120 - 24 = 216

Que é diferente de 240. Aqui, o aluno que esquece de subtrair as possibilidades da interseção erra a questão.

Gabarito: Errado.

69. (Quadrix 2021/CRTR - 12ª Reg.) Assinale a alternativa que apresenta o número de anagramas da palavra QUADRIX que possuem as vogais e as consoantes alternadas.

a) 36

b) 144

c) 576

d) 720x

e) 840

Comentários:

A palavra QUADRIX possui 3 vogais distintas (U, A e I) e 4 consoantes distintas (Q, D, R e X). Para que as vogais (V) e consoantes (C) estejam alternadas, precisamos da seguinte disposição:

C V C V C V C

Considerando que temos 4 consoantes, o número de maneiras de ordená-las nos espaços correspondentes equivale à permutação de 4 elementos:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

E o número de maneiras de ordenar as 3 vogais nos respectivos espaços corresponde à permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

E o número de anagramas (com as consoantes E as vogais) corresponde ao produto dessas possibilidades (princípio multiplicativo):

$$6 \times 24 = 144$$

Gabarito: B

70. (UNESC/2021 - Pref. Laguna) Quantos anagramas podemos escrever com as letras da palavra: LAGUNA?

a) 120

b) 240

c) 360

d) 480

e) 720

Comentários:

A palavra LAGUNA possui 6 letras, com repetição de 2 A´s. Assim, temos uma permutação de 6, com repetição de 2:

$$P_6^2 = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

Gabarito: C

71. (OMNI/2021 - Pref. Sete Lagos) Josiana, em seu tempo livre, estava se desafiando e tentando formar todos os anagramas possíveis com o seu nome. É CORRETO afirmar que ela formará no total:

a) 7 anagramas

b) 5.040 anagramas

c) 2.520 anagramas

d) 1.520 anagramas

Comentários:

A palavra JOSIANA possui 7 letras, com repetição de 2 A´s. Assim, temos uma permutação de 7, com repetição de 2:

$$P_7^2 = \frac{7!}{2!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2.520$$

Gabarito: C

72. (OBJETIVA/2021 - TRENSURB) Em um torneio de xadrez, a equipe Catarinense obteve o seguinte desempenho: 5 vitórias, 8 empates e 2 derrotas, havendo, no total, 15 partidas. De quantas maneiras distintas esses resultados poderiam ter ocorrido?

a) 145.135

b) 145.145

c) 135.135

d) 135.145

e) 145.000

Comentários:

Precisamos calcular o número de maneiras de reordenar 15 resultados, sendo 8 empates, 5 vitórias e 2 derrotas. Para isso, temos a permutação de 15 elementos, com repetição de 8, 5 e 2:

$$P_{15}^{8,5,2} = \frac{15!}{8! \times 5! \times 2!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8! \times 5! \times 2} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2}$$

$$P_{15}^{8,5,2} = 7 \times 13 \times 3 \times 11 \times 5 \times 9 = 135.135$$

Gabarito: C

73. (Quadrix 2021/CRP - 22ª Reg.) Acerca dos anagramas da palavra SATURNO, julgue o item.

O número de anagramas que começam com S é igual ao número de anagramas da palavra NETUNO.

Comentários:

O número de anagramas da palavra SATURNO que começam com S corresponde à permutação das outras 6 letras (todas distintas):

$$P_6 = 6!$$

E a palavra NETUNO também possui 6 letras, mas 2 são iguais. Logo, temos uma permutação de 6 elementos com repetição de 2:

$$P_6^2 = \frac{6!}{2!}$$

Logo, os números de anagramas são diferentes.

Gabarito: Errado

74. (Quadrix 2021/CRP - 22ª Reg.) A respeito dos anagramas da palavra TOPÁZIO, julgue o item.

O número de anagramas que têm as vogais e as consoantes alternadas é igual a 144.

Comentários:

A palavra TOPAZIO possui 4 vogais, das quais 2 são a mesma (O, A, I e O); e 3 consoantes distintas (T, P e Z). Para que as vogais (V) e consoantes (C) estejam alternadas, precisamos da seguinte disposição:

V C V C V C V

Considerando que temos 4 vogais, das quais 2 são iguais, o número de maneiras de ordená-las nos espaços correspondentes equivale à permutação de 4 elementos, com 2 elementos repetidos (que consiste na permutação de todos os 4 elementos, dividida pela permutação dos elementos repetidos):

$$P_4^2 = \frac{P_4}{P_2} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 4 \times 3 = 12$$

E o número de maneiras de ordenar as 3 consoantes, todas distintas, nos respectivos espaços corresponde à permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

E o número de anagramas (com as vogais E as consoantes) corresponde ao produto dessas possibilidades (princípio multiplicativo):

$$6 \times 12 = 72$$

Que é diferente de 144. Mais uma vez, o concurseiro que não percebe que há 2 vogais repetidas erra a questão.

Gabarito: Errado

Questões Comentadas – Multibancas

Outros Tipos de Permutação

1. (QUADRIX/2022 - CRP 18) Com relação a princípios de contagem e probabilidade e a arranjos e permutações, julgue o item.

O número de desarranjos (permutações em que nenhuma letra permanece em sua posição original) da palavra "MATO" é igual a 10.

Comentários:

A **permutação caótica** ou **desarranjo** é aquela em que os elementos não podem retornar para a sua posição original. O número de possibilidades nessa situação é dado pela seguinte fórmula, em que os denominadores são os fatoriais de 0 até n e os sinais das frações se alternam, sendo positivo para números pares e positivos para números ímpares:

$$D_n = n! \times \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

O desarranjo de 4 elementos é:

$$D_4 = 4! \times \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right]$$

Sendo $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$, temos:

$$D_4 = 24 \times \left[1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right] = 24 \times \left[\frac{12 - 4 + 1}{24}\right] = 24 \times \left[\frac{9}{24}\right] = 9$$

Que é diferente de 10.

Gabarito: Errado

2. (QUADRIX/2021 - CRF/AP) Uma permutação de um conjunto de n elementos é dita caótica quando nenhum elemento está em seu lugar original. Com base nessa informação, julgue o item.

ROMA é uma permutação caótica das 4 letras da palavra AMOR, mas ARMO não é.

Comentários:

A **permutação caótica** é aquela em que os elementos não retornam para a sua posição original.

Sabendo que AMOR é a palavra original, ROMA é uma permutação caótica, porque todas as letras mudaram de posição: A saiu da 1ª posição para a 4ª; M saiu da 2ª posição para a 3ª; O saiu da 3ª posição para a 2ª; e R saiu da 4ª posição para a 1ª.

Já ARMO não é uma permutação caótica de AMOR, porque a letra A permanece na 1ª posição.

Gabarito: Certo

3. (QUADRIX/2021 - CRF/AP) Uma permutação de um conjunto de n elementos é dita caótica quando nenhum elemento está em seu lugar original. Com base nessa informação, julgue o item.

O número de permutações caóticas das 4 letras da palavra ANEL é igual a 9.

Comentários:

O número de permutações caóticas de n elementos pode ser calculado pela seguinte fórmula, em que os denominadores são os fatoriais de 0 até n e os sinais das frações se alternam, sendo positivo para números pares e positivos para números ímpares:

$$D_n = n! \times \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

A permutação caótica de 4 elementos é:

$$D_4 = 4! \times \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right]$$

Sendo $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$, temos:

$$D_4 = 24 \times \left[1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right] = 24 \times \left[\frac{12 - 4 + 1}{24}\right] = 24 \times \left[\frac{9}{24}\right] = 9$$

Gabarito: Certo

4. (QUADRIX/2021 - CRF/AP) Uma permutação de um conjunto de n elementos é dita caótica quando nenhum elemento está em seu lugar original. Com base nessa informação, julgue o item.

Exatamente 315 permutações da palavra DESAFIO têm exatamente 3 letras em seu lugar original.

Comentários:

Se 3 letras da palavra DESAFIO devem permanecer em seu lugar original, então, uma vez fixadas as três letras, temos a permutação caótica das outras 4 letras da palavra. No item anterior, vimos que a permutação caótica de 4 elementos é:

$$D_4 = 4! \times \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right] = 24 \times \left[1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right] = 24 \times \left[\frac{12 - 4 + 1}{24}\right] = 9$$

Agora, precisamos multiplicar esse resultado pelo número de maneiras distintas de **escolher** 3 letras para que sejam **fixadas**, o que corresponde à combinação de 3 elementos, dentre 7:

$$C_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 7 \times 5 = 35$$

Pelo princípio multiplicativo, o número total de possibilidades corresponde ao produto:

$$n = 9 \times 35 = 315$$

Gabarito: Certo

5. (FUNDEP/2021 - CBM/MG) Em determinado dia, uma equipe de bombeiros recebeu 4 demandas de serviços, não emergenciais. Cada atendimento recebido foi classificado com as cores Roxo, Amarelo ou Verde. Nessa data, houve 1 demanda Roxa, 2 Amarelas e 1 Verde. A equipe pode definir a ordem de atendimento conforme desejar, desde que uma demanda Verde nunca seja realizada antes de uma Roxa.

De quantos modos diferentes essa equipe poderá organizar a ordem dos seus atendimentos, para realizar os 4 serviços demandados?

a) 3

b) 6

c) 12

d) 24

Comentários:

Precisamos ordenar 4 demandas, de modo que a demanda Verde nunca seja realizada antes da Roxa. Assim, temos uma **permutação com elementos ordenados**, em que devemos dividir a permutação simples de todos os n elementos, pela permutação dos k elementos que devem seguir determinada ordem:

$$\frac{P_n}{P_k} = \frac{n!}{k!}$$

No caso, temos $n = 4$ demandas no total, das quais $k = 2$ demandas devem seguir determinada ordem:

$$\frac{P_4}{P_2} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$$

Gabarito: C

QUESTÕES COMENTADAS – MULTIBANCAS

Arranjo e Combinação

1. (FCM-CEFETMINAS/2023 - Pref. Contagem/MG) Uma empresa possui dez funcionários, entre eles Carlos e Beatriz, e precisa selecionar uma comissão com quatro desses funcionários para viajarem a uma feira de negócios. Entretanto, é necessário que ao menos um deles, Carlos ou Beatriz, fique na empresa e, assim, não sejam escolhidos juntos para essa viagem. Desse modo, considerando-se essa situação, o número de comissões diferentes com seus funcionários que a empresa pode organizar para ir à feira de negócios é

a) 45

b) 112

c) 165

d) 182

e) 210

Comentários:

Conforme o enunciado, dos 10 funcionários, precisamos escolher 4 (sem importância de ordem, pois todos terão a mesma função). Porém, Carlos e Beatriz não podem ser escolhidos juntos para formar a comissão.

Para resolver essa questão, vamos calcular o número total de possibilidades de formar a comissão, sem restrição, e, em seguida, subtraímos o número de maneiras de selecionar tanto Carlos quanto Beatriz para a comissão.

O número total de maneiras de selecionar 4 funcionários, dentre 10, sem importância de ordem é:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$C_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)! \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 7 = 210$$

Selecionando Carlos e Beatriz para a comissão, restarão 8 funcionários, dos quais 2 deverão ser escolhidos:

$$C_{8,2} = \frac{8!}{(8-2)! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6! \times 2!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

E a diferença é:

$$n = 210 - 28 = 182$$

Gabarito: D

2. (MAIS/2022 - CM Praia Grande/SP) Carlos e Irina irão se casar e, para o bufê, devem escolher 4 tipos de doces em um cardápio que contém 7 opções. Assinale a alternativa que apresenta quantas são as combinações possíveis que Carlos e Irina podem escolher, sabendo que a ordem da escolha dos doces não é importante.

a) 35

b) 70

c) 105

d) 210

Comentários:

O número de maneiras de escolher 4 doces, dentre 7 possibilidades, considerando que a ordem da escolha não importa, é a combinação de 4 elementos, dentre 7:

$$C_{7,4} = \frac{7!}{(7-4)! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 7 \times 5 = 35$$

Gabarito: A

3. (AOCP/2022 - PM/ES) Ernesto é músico da Polícia Militar e precisa decidir, dentre 5 instrumentos, quais são os 3 cuja manutenção serão de sua responsabilidade. De quantas maneiras distintas ele poderá fazer essa escolha?

a) 10

b) 15

c) 20

d) 30

e) 60

Comentários:

O número de maneiras de escolher 3 instrumentos, dentre 5 possibilidades, considerando que a ordem da escolha não importa, é a combinação de 3 elementos, dentre 5:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} = 5 \times 2 = 10$$

Gabarito: A

4. (FEPESE/2022 - FCEE) Uma pessoa tem à sua disposição 9 vídeos diferentes, de 15 minutos cada, relativos a um assunto sobre o qual deseja se informar. Ela decide juntar os vídeos em grupos de 4 vídeos cada, formando vídeos de 1 hora.

Sem levar em consideração a ordem em que os vídeos de 15 minutos são apresentados no vídeo maior, quantos vídeos de 1 hora essa pessoa pode criar?

a) Mais de 125

b) Mais de 110 e menos de 125

c) Mais de 95 e menos de 110

d) Mais de 80 e menos de 95

e) Menos de 80

Comentários:

Considerando que a ordem não importa, o número de maneiras de escolher 4 vídeos, dentre 9, é a combinação de 9 escolhe 4:

$$C_{9,4} = \frac{9!}{(9-4)! \times 4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2} = 9 \times 2 \times 7 = 126$$

Gabarito: A

5. (IADES/2022 - CAU/SE) Em uma empresa de arquitetura, há 10 arquitetos, entre os quais 60% são paisagistas. Dois paisagistas serão escolhidos para realizar um projeto urbanístico. Quantas escolhas distintas poderão ser feitas para selecionar os dois arquitetos?

a) 10

b) 12

c) 15

d) 18

e) 21

Comentários:

O enunciado informa que 60% dos 10 arquitetos são paisagistas. Logo, há 6 paisagistas, dos quais 2 serão escolhidos, o que corresponde à combinação de 2 elementos, dentre 6:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2} = 3 \times 5 = 15$$

Gabarito: C

6. (CONSULPLAN/2022 - SEED/PR) Em uma apresentação de final de ano de uma escola, os alunos do 2º ano do ensino fundamental ficaram responsáveis pela apresentação de um jogral. Para isso, a professora precisa escolher, entre seus 35 alunos, 2 meninos e uma menina para declamarem algumas partes dos poemas escolhidos. Como se trata de uma apresentação para toda a escola, a professora decidiu que iria ensaiar todos os alunos e, após, iria determinar quais seriam os escolhidos para o grande dia. Sabendo-se que a turma do 2º ano do ensino fundamental conta com 20 meninos e 15 meninas, quantas combinações a professora poderá formar agrupando dois meninos e uma menina?

a) 2850

b) 3927

c) 5700

d) 6545

Comentários:

O enunciado informa que serão selecionados 2 meninos, dentre 20, e uma menina, dentre 15. Assim, há **15** possibilidades para a escolha da menina.

Em relação aos meninos, considerando que a ordem não importa, o número de maneiras de selecionar 2 dentre 20 é:

$$C_{20,2} = \frac{20!}{(20-2)! \times 2!} = \frac{20 \times 19 \times 18!}{18! \times 2} = 10 \times 19 = 190$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de escolher as três pessoas (eventos concomitantes) é:

$$n = 15 \times 190 = 2850$$

Gabarito: A

7. (AOCP/2022 - Pref. Pinhais) Uma comissão de Segurança do Trabalho será montada entre os servidores municipais da cidade de Pinhais. Voluntariam-se para o processo de seleção 10 pessoas, das quais, 7 homens e 3 mulheres. De quantos modos essa comissão pode ser formada, sabendo que serão escolhidos exatamente dois homens e duas mulheres?

a) 24

b) 36

c) 63

d) 120

e) 240

Comentários:

O enunciado informa que serão selecionados 2 homens, dentre 7, e 2 mulheres, dentre 3. Considerando que a ordem não importa, o número de maneiras de selecionar 2 homens, dentre 7, é a combinação:

$$C_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)! \times 2!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2} = 7 \times 3 = 21$$

E o número de maneiras de selecionar 2 mulheres, dentre 3, é a combinação de 3 escolhe 2:

$$C_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)! \times 2!} = \frac{3 \times 2!}{1! \times 2!} = 3$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de escolher os homens E as mulheres (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 21 \times 3 = 63$$

Gabarito: C

8. (CONSULPLAN/2022 - PM/RN) No feriado municipal de uma determinada cidade, 4 médicos e 6 enfermeiros farão plantão em um centro de saúde. Se certo procedimento necessitar de 2 médicos e 3 enfermeiros, quantas equipes distintas com esses profissionais poderão ser formadas?

a) 30

b) 60

c) 90

d) 120

e) 180

Comentários:

O enunciado informa que serão selecionados 2 médicos, dentre 4, e 3 enfermeiros, dentre 6. Considerando que a ordem não importa, o número de maneiras de selecionar 2 médicos, dentre 4, é a combinação de 4 escolhe 2:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2} = 2 \times 3 = 6$$

E o número de maneiras de selecionar 3 enfermeiros, dentre 6, é a combinação de 6 escolhe 3:

$$C_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 5 \times 4 = 20$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de escolher os médicos E os enfermeiros (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 6 \times 20 = 120$$

Gabarito: D

9. (CONSULPLAN/2022 - Pref. Rosário) Os estudantes de um departamento de pós-graduação formado por 8 mestrandos e 5 doutorandos foram convidados a apresentar seus trabalhos em um congresso. Entretanto, o departamento possui recursos para pagar os custos de viagem de apenas 7 desses estudantes. Considerando que, dentre os escolhidos, 3 estudantes devem ser de mestrado e 4 de doutorado, quantas maneiras distintas os estudantes podem ser selecionados?

a) 56

b) 128

c) 280

d) 360

Comentários:

O enunciado informa que serão selecionados 3 mestrandos, dentre 8, e 4 doutorandos, dentre 5. Considerando que a ordem não importa, o número de maneiras de selecionar 3 mestrandos, dentre 8, é a combinação de 8 escolhe 3:

$$C_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 8 \times 7 = 56$$

E o número de maneiras de selecionar 4 doutorandos, dentre 5, é a combinação de 5 escolhe 4:

$$C_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)! \times 4!} = \frac{5 \times 4!}{1! \times 4!} = 5$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de escolher os mestrandos E os doutorandos (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 56 \times 5 = 280$$

Gabarito: C

10. (IBFC/2022 - PM/RN) Serão escolhidos 5 aspirantes para realizar um curso de primeiros socorros. Dentre 8 aspirantes do sexo feminino serão escolhidas 3 pra fazer parte do grupo e dentre 7 aspirantes serão escolhidos os outros 2 aspirantes para o grupo. Nessas condições, o total de grupos distintos que podem ser formados é igual a:

a) 1960

b) 380

c) 14112

d) 1176

e) 7056

Comentários:

O enunciado informa que serão selecionadas 3 mulheres, dentre 8, e 2 aspirantes, dentre 7. Considerando que a ordem não importa, o número de maneiras de selecionar 3 mulheres, dentre 8, é:

$$C_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 8 \times 7 = 56$$

E o número de maneiras de selecionar 2 aspirantes, dentre 7, é:

$$C_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)! \times 2!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2} = 7 \times 3 = 21$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de escolher as 5 pessoas (eventos concomitantes) é:

$$n = 56 \times 21 = 1176$$

Gabarito: D

11. (ACCESS/2022 - CM Arantina) Uma comissão de trabalho será formada entre os funcionários de um setor específico de uma Prefeitura. Este setor possui três Técnicos em Contabilidade, quatro Auxiliares de Serviços gerais e três Auxiliares de Secretaria. A comissão de trabalho será composta por um Técnico em Contabilidade, dois Auxiliares de serviços gerais e dois Auxiliares de Secretaria.

O número de maneiras possíveis de formar essa comissão é:

a) 12

b) 24

c) 36

d) 50

e) 54

Comentários:

O enunciado informa que a comissão é composta por 1 técnico, dentre 3; 2 auxiliares gerais, dentre 4; e 2 auxiliares de secretaria, dentre 3.

Para escolher o técnico, há 3 possibilidades. Em relação aos auxiliares gerais, temos a combinação de 2 profissionais, dentre 4:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2} = 2 \times 3 = 6$$

E o número de maneiras de selecionar 2 auxiliares de secretaria, dentre 3, é:

$$C_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)! \times 2!} = \frac{3 \times 2!}{1! \times 2!} = 3$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de selecionar toda a comissão (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 3 \times 6 \times 3 = 54$$

Gabarito: E

12. (IBADE/2022 - SEA/SC) Em uma turma de alunos do ensino médio há 14 alunas, 10 alunos e 5 professores. O número de maneiras que se pode organizar uma comissão de formatura composta por 1 professor, 2 alunos e 2 alunas é:

a) 20.400

b) 20.550

c) 20.455

d) 20.565

e) 20.475

Comentários:

Precisamos calcular o número de maneiras de escolher 1 professor, dentre 5; 2 alunos, dentre 10; e 2 alunas, dentre 14.

Para escolher o professor, há 5 possibilidades. Em relação aos alunos, temos a combinação de 2, dentre 10:

$$C_{10,2} = \frac{10!}{(10-2)! \times 2!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8! \times 2} = 5 \times 9 = 45$$

E o número de maneiras de selecionar 2 alunas, dentre 14, é:

$$C_{14,2} = \frac{14!}{(14-2)! \times 2!} = \frac{14 \times 13 \times 12!}{12! \times 2} = 7 \times 13 = 91$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de selecionar toda a comissão (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 5 \times 45 \times 91 = 20.475$$

Gabarito: E

13. (IBADE/2022 - SEA/SC) Considere que o conselho de uma empresa é formado por 3 diretores, 5 gerentes e 2 conselheiros. Sabendo que 10 pessoas se candidataram para a vaga de diretor, 8 para a de gerente e 5 para a de conselheiros, o número de possíveis conselhos é:

a) 67.000

b) 67.100

c) 67.200

d) 67.300

e) 67.400

Comentários:

Precisamos calcular o número de maneiras de escolher 3 diretores, dentre 10; 5 gerentes, dentre 8; e 2 conselheiros, dentre 5.

Em relação aos diretores, temos a combinação de 3 membros, dentre 10:

$$C_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 10 \times 3 \times 4 = 120$$

Em relação aos gerentes, temos a combinação de 5 membros, dentre 8:

$$C_{8,5} = \frac{8!}{(8-5)! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 8 \times 7 = 56$$

E, em relação aos conselheiros, temos a combinação de 2 membros, dentre 5:

$$C_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 5 \times 2 = 10$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de selecionar todo o conselho (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 120 \times 56 \times 10 = 67.200$$

Gabarito: C

14. (CETREDE/2022 - UFC) Uma floricultura possui cravos e tulipas, sendo que há 5 cores distintas de cravos e 6 cores distintas de tulipas, dentre elas cravos vermelhos e tulipas brancas. Quantas são as opções da floricultura para montar um arranjo floral constituído de 3 cravos de cores distintas e 3 tulipas de cores distintas, de forma que cravos vermelhos e tulipas brancas não sejam escolhidos?

a) 40

b) 30

c) 20

d) 50

Comentários:

O enunciado informa que há 5 cores de cravos (inclusive vermelha) e 6 cores de tulipas (inclusive branca) e pede o número de maneiras de escolher 3 cores de cravos, que não seja vermelha, e 3 cores de tulipas, que não seja branca.

Assim, há 4 cores de cravos (diferente de vermelho), dentre as quais devemos escolher 3, sem importância de ordem:

$$C_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)! \times 3!} = \frac{4 \times 3!}{1! \times 3!} = 4$$

E 5 cores de tulipas (diferente de branco), dentre as quais devemos escolher 3:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} = 5 \times 2 = 10$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de escolher os cravos e as tulipas é o produto:

$$n = 4 \times 10 = 40$$

Gabarito: A

15. (Quadrix/2022 - CAU/SC) Um professor tem um banco de exercícios que contém, no total, dez questões, sendo quatro fáceis, quatro médias e duas difíceis. Com base nessa situação hipotética, é correto afirmar que o professor pode selecionar quatro questões para uma prova, sendo uma fácil, duas médias e uma difícil, de

a) 24 modos distintos.

b) 48 modos distintos.

c) 72 modos distintos.

d) 96 modos distintos.

e) 120 modos distintos.

Comentários:

O professor vai selecionar uma questão fácil, dentre 4, duas questões médias, dentre 4, e uma questão difícil, dentre 2. Assim, há **4** possibilidades de selecionar a questão fácil e **2** maneiras de selecionar a questão difícil.

O número de maneiras de selecionar as questões médias corresponde a uma combinação de 2 elementos, dentre 4:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2} = 2 \times 3 = 6$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de selecionar todas as questões (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 4 \times 6 \times 2 = 48$$

Gabarito: B

16. (Legalle/2022 - Pref. Hulha Negra/RS) Ao fazer uma compra de máscaras de tecido e álcool em gel na cidade, o prefeito encontrou 6 marcas de máscara e 4 de álcool em gel. Sendo assim, resolveu comprar 2 marcas de máscara e 2 de álcool em gel, um de cada modelo. É CORRETO afirmar que o número de compras distintas que o prefeito pode fazer é:

a) 15

b) 34

c) 45

d) 60

e) 90

Comentários:

O prefeito deve escolher 2 marcas de máscara, dentre 6, e 2 marcas de álcool, dentre 4. Sabendo que a ordem da seleção não importa, o número de maneiras de escolher as marcas de máscara é a combinação de 2 elementos, dentre 6:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2} = 3 \times 5 = 15$$

E o número de maneiras de escolher as marcas de álcool é a combinação de 2 elementos, dentre 4:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2} = 2 \times 3 = 6$$

Considerando que o prefeito irá comprar os dois tipos de produtos (eventos concomitantes), o número de maneiras de fazê-lo é o produto (princípio multiplicativo):

$$n = 15 \times 6 = 90$$

Gabarito: E

17. (AOCP/2022 - PC/GO) Em geral, para a identificação de um suspeito por suas digitais, é necessário que coincidam de 12 a 20 pontos característicos (dentre esses, estão ponto, bifurcação, encerro, forquilha e cortada). Suponha que sejam exatamente 20 os pontos característicos de uma impressão digital e que haja duas possibilidades de resposta à correspondência, a saber: "coincide" ou "não coincide". Se alguém foi identificado por mais de 14 pontos característicos de suas digitais, pode-se dizer que o total de variações dos 20 pontos possíveis para que se identifique o suspeito com mais de 14 pontos é igual a

a) 21.700

b) 10.000

c) 4.500

d) 2.215

e) 512

Comentários:

Precisamos calcular o número de maneiras de mais de 14 pontos, de um total de 20 pontos, coincidirem, ou seja, o número de maneiras de 15 pontos, 16 pontos, 17 pontos, 18 pontos, 19 pontos e 20 pontos coincidirem. Em cada um desses casos, precisamos **escolher** quais dos pontos coincidem, o que corresponde à combinação.

O número de maneiras de 15 pontos coincidirem é a combinação de 20 escolhe 15:

$$C_{20,15} = \frac{20!}{(20-15)! \times 15!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15!}{5! \times 15!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16}{5 \times 4 \times 3 \times 2}$$

$$C_{20,15} = 19 \times 3 \times 17 \times 16 = 15.504$$

O número de maneiras de 16 pontos coincidirem é a combinação de 20 escolhe 16:

$$C_{20,16} = \frac{20!}{(20-16)! \times 16!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16!}{4! \times 16!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{4 \times 3 \times 2}$$

$$C_{20,15} = 5 \times 19 \times 3 \times 17 = 4.845$$

O número de maneiras de 17 pontos coincidirem é a combinação de 20 escolhe 17:

$$C_{20,17} = \frac{20!}{(20-17)! \times 17!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17!}{3! \times 17!} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2} = 20 \times 19 \times 3 = 1.140$$

O número de maneiras de 18 pontos coincidirem é:

$$C_{20,18} = \frac{20!}{(20-18)! \times 18!} = \frac{20 \times 19 \times 18!}{2! \times 18!} = \frac{20 \times 19}{2} = 10 \times 19 = 190$$

O número de maneiras de 19 pontos coincidirem é:

$$C_{20,19} = \frac{20!}{(20-19)! \times 19!} = \frac{20 \times 19!}{1! \times 19!} = 20$$

E há uma única maneira de 20 pontos coincidirem:

$$C_{20,20} = \frac{20!}{(20-20)! \times 20!} = 1$$

Por serem eventos mutuamente excludentes, o número total de possibilidades é a soma (princípio aditivo):

$$n = 15.504 + 4.845 + 1.140 + 190 + 20 + 1 = 21.700$$

Gabarito: A

18. (CONSULPLAN/2022 - SEED/PR) Em um condomínio, Gabriela e Bruno participam de um grupo de 15 síndicos formado por 8 mulheres e 7 homens. Uma comissão com 6 síndicos deve ser realizada para avaliar novas propostas de melhorias na infraestrutura do local. De quantas maneiras distintas essa comissão pode ser formada de modo que Gabriela participe e Bruno não participe?

a) 504

b) 1287

c) 1450

d) 2002

Comentários:

Há 15 pessoas (dentre elas, Gabriela e Bruno), das quais 6 serão escolhidas para um grupo.

Se Gabriela participa do grupo, será necessário preencher as outras 5 vagas. Além disso, se Bruno não participa há 13 síndicos disponíveis para preencher as 5 vagas no grupo. Logo, temos a combinação:

$$C_{13,5} = \frac{13!}{(13-5)! \times 5!} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8! \times 5!} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 13 \times 11 \times 9 = 1287$$

Gabarito: B

19. (QUADRIX/2022 - CRP 10) Para a realização de uma dinâmica de grupo, deseja-se selecionar 6 pessoas de um conjunto de 10 pessoas (entre elas Anderson e Bárbara). Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Essa dinâmica de grupo pode ser realizada de 210 modos distintos.

Comentários:

O número de maneiras de escolher um grupo de 6 pessoas (sem que a ordem importe), dentre 10, sem qualquer restrição, é a combinação de 6 elementos, dentre 10:

$$C_{10,6} = \frac{10!}{(10-6)! \times 6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{4! \times 6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 10 \times 3 \times 7 = 210$$

Gabarito: Certo

20. (QUADRIX/2022 - CRP 10) Para a realização de uma dinâmica de grupo, deseja-se selecionar 6 pessoas de um conjunto de 10 pessoas (entre elas Anderson e Bárbara).

Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Se Anderson e Bárbara são um casal inseparável, essa dinâmica de grupo pode ser realizada de 98 maneiras distintas.

Comentários:

Segundo esse item, Anderson e Bárbara devem permanecer, seja dentro ou fora do grupo de 6 pessoas.

Se o casal fizer parte do grupo, precisamos escolher 4 pessoas para completar o grupo, dentre as outras 8:

$$C_{8,4} = \frac{8!}{(8-4)! \times 4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2} = 7 \times 2 \times 5 = 70$$

Se o casal não fizer parte do grupo, precisamos escolher 6 pessoas para formar o grupo, dentre as outras 8:

$$C_{8,6} = \frac{8!}{(8-6)! \times 6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{2! \times 6!} = 4 \times 7 = 28$$

Por se tratar de situações excludentes, o número de grupos possíveis, de uma forma ou outra é a soma:

$$n = 70 + 28 = 98$$

Gabarito: Certo

21. (FEPESE/2022 - Pref. Guatambu) Doze colegas (entre eles Rafael e Bruno) vão jogar uma partida de futebol. Para isto, devem formar dois times de 6 jogadores cada time. Porém, Rafael e Bruno devem ficar em times diferentes.

Levando as informações acima em consideração, de quantas formas distintas os times podem ser formados?

a) Mais de 270

b) Mais de 260 e menos de 270

c) Mais de 250 e menos de 260

d) Mais de 240 e menos de 250

e) Menos de 240

Comentários:

Precisamos dividir 12 colegas em dois grupos de 6 cada, de modo que Rafael e Bruno fiquem em times diferentes. Para isso, podemos escolher os outros 5 colegas para o time de um deles (Rafael, por exemplo). Considerando que Bruno não pode fazer parte, temos a combinação de 5 colegas, dentre 10 disponíveis:

$$C_{10,5} = \frac{10!}{(10-5)! \times 5!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 5!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 2 \times 9 \times 2 \times 7 = 252$$

Após a escolha dos colegas do time do Rafael, os colegas do time do Bruno terão sido definidos. Logo, há 252 maneiras de fazer essa divisão.

Gabarito: C

22. (QUADRIX/2022 - CFFa) A fim de montar uma equipe para cuidar de um novo investimento de sua empresa, Gabriel precisa montar uma equipe de três funcionários. Ele dispõe de 18 funcionários diferentes para escolha, sendo oito desses funcionários graduados e dez não graduados.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Se não houver nenhuma restrição quanto à formação da equipe, Gabriel poderá montá-la de 818 modos diferentes.

Comentários:

O enunciado informa que há 18 funcionários, dos quais 3 serão selecionados para formar uma equipe. Se não houver restrição alguma, o número de maneiras de montar a equipe é a combinação de 18 escolhe 3:

$$C_{18,3} = \frac{18!}{(18-3)! \times 3!} = \frac{18 \times 17 \times 16 \times 15!}{15! \times 3!} = \frac{18 \times 17 \times 16}{3 \times 2} = 3 \times 17 \times 16 = 816$$

Gabarito: Errado

23. (QUADRIX/2022 - CFFa) A fim de montar uma equipe para cuidar de um novo investimento de sua empresa, Gabriel precisa montar uma equipe de três funcionários. Ele dispõe de 18 funcionários diferentes para escolha, sendo oito desses funcionários graduados e dez não graduados.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Gabriel pode formar 696 grupos com, pelo menos, um graduado.

Comentários:

Para encontrar o número de maneiras de formar um grupo com **pelo menos um** graduado, vamos subtrair, de todas as possibilidades, aquelas que não possuem qualquer funcionário graduado.

Na questão anterior, vimos que o número total de possibilidades, sem restrições, é:

$$C_{18,3} = \frac{18!}{(18-3)! \times 3!} = \frac{18 \times 17 \times 16 \times 15!}{15! \times 3!} = \frac{18 \times 17 \times 16}{3 \times 2} = 3 \times 17 \times 16 = 816$$

Para que o grupo não contenha graduado algum, é necessário selecionar 3 funcionários, dentre os 10 não graduados:

$$C_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 10 \times 3 \times 4 = 120$$

A diferença corresponde aos grupos com pelo menos um graduado:

$$n = 816 - 120 = 696$$

Gabarito: Certo

24. (QUADRIX/2022 - CFFa) A fim de montar uma equipe para cuidar de um novo investimento de sua empresa, Gabriel precisa montar uma equipe de três funcionários. Ele dispõe de 18 funcionários diferentes para escolha, sendo oito desses funcionários graduados e dez não graduados.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Se Gabriel decidir que a equipe deverá ter dois graduados e um não graduado, ele poderá montar a equipe de 286 modos diferentes.

Comentários:

Para que a equipe tenha essa configuração, é necessário escolher 2 graduados, dentre 8, e 1 não graduado, dentre 10.

O número de maneiras de escolher 2 graduados, dentre 8, é:

$$C_{8,2} = \frac{8!}{(8-2)! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6! \times 2} = 4 \times 7 = 28$$

E o número de maneiras de escolher um graduado, dentre 10, é igual a 10.

Para formar toda a equipe (eventos concomitantes), multiplicamos os resultados (princípio multiplicativo):

$$n = 28 \times 10 = 280$$

Gabarito: Errado

25. (CONSULPLAM/2022 - Pref. Irauçuba) Uma comissão será formada entre os senadores que compõem o senado federal. Espera-se que cada um dos 26 estados, como o Distrito Federal tenham, entre seus 3 representantes, 1 ou 2 senadores. De quantos modos essa comissão pode ser formada?

a) 3^{27}

b) 4^{27}

c) 5^{27}

d) 6^{27}

Comentários:

É necessário calcular o número de maneiras de escolher 1 ou 2 senadores, dentre 3, para cada um dos 27 Estados/Distrito Federal.

Para cada Estado/DF, há **3** possibilidades para escolher 1 senador. Para escolher 2 senadores, temos a combinação de 3 escolhe 2:

$$C_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)! \times 2!} = \frac{3 \times 2!}{1! \times 2!} = 3$$

Por serem eventos mutuamente exclusivos (1 OU 2), para cada Estado/DF, o número de maneiras de escolher os seus representantes é a soma dessas possibilidades (princípio aditivo):

$$3 + 3 = 6$$

Para os 27 Estados (eventos concomitantes), o número de maneiras de formar a comissão é o produto (princípio multiplicativo):

$$n = \underbrace{6 \times 6 \times \ldots \times 6}_{\text{27 vezes}} = 6^{27}$$

Gabarito: D

26. (FEPESE/2022 - FCEE) Um grupo de 8 pessoas, incluindo Luciano e Paula, deseja formar uma comitiva com três representantes.

Quantas comitivas diferentes são possíveis formar, se Luciano e Paula não podem participar juntos na mesma comitiva?

a) Mais de 58

b) Mais de 53 e menos de 58

c) Mais de 48 e menos de 53

d) Mais de 43 e menos de 48

e) Menos de 43

Comentários:

Precisamos calcular o número de maneiras de selecionar 3 pessoas, dentre 8, de maneira que duas pessoas específicas (Luciano e Paula) não façam parte da comissão juntos.

Para isso, vamos primeiro calcular o número total de maneiras de formar a comissão, sem restrições. Assim, temos a combinação de 8 escolhe 3:

$$C_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 8 \times 7 = 56$$

Agora, vamos **subtrair** as possibilidades que não atendem à condição imposta. Se Luciano e Paula participam juntos da comissão, restarão 6 pessoas, das quais uma deve ser escolhida para a comissão (**6** possibilidades).

Logo, o número de possibilidades de formar a comissão, atendendo à condição, é a diferença:

$$n = 56 - \mathbf{6} = 50$$

Gabarito: C

27. (Legalle/2022 - Pref. Hulha Negra/RS) Em um campeonato de Padel, organizado pela secretaria municipal de desporto, haverá um sorteio para definir duplas a partir de um total de 10 jogadores. Considerando que cada dupla permanecerá a mesma até o fim do campeonato e que todas as duplas se enfrentarão uma única vez, assinale a alternativa que apresenta o intervalo em que há o número de disputas que ocorrerão neste campeonato:

a) 8

b) 10

c) 15

d) 20

e) 22

Comentários:

O enunciado informa que serão formadas (mediante sorteio) duplas de um total de 10 jogadores e que todas as duplas formadas se enfrentarão uma única vez.

O número de jogos corresponde a todas as maneiras de selecionar 2 duplas para se enfrentarem, de um total de 5 duplas. Considerando que a ordem não importa, temos a combinação de 2 elementos, dentre 5:

$$C_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 5 \times 2 = 10$$

Gabarito: B

28. (FUNDATEC/2022 - Pref. Flores da Cunha/RS) Na Copa do Mundo de 2022, teremos 8 grupos de 4 times cada. Considere a notação em análise combinatória de que uma combinação é m à n é dada por $C_{m,n}$. Então, é possível afirmar que o total de jogos (um jogo entre cada equipe do seu grupo) na primeira fase é dado por:

a) $C_{6,3}$

b) $C_{4,3}$

c) $C_{4,2}$

d) $8C_{4,2}$

e) $4C_{8,2}$

Comentários:

Na Copa do Mundo, temos 8 grupos de 4 times cada, sendo que cada time enfrenta os demais times do grupo uma única vez, na primeira fase.

O número de jogos em **cada grupo** corresponde ao número de maneiras de escolher 2 times para se enfrentar, dentre 4, isto é, à combinação de 4 escolhe 2:

$$C_{4,2}$$

Sabendo que há 8 grupos, o número total de jogos na primeira fase é:

$$8.\, C_{4,2}$$

Gabarito: D

29. (IDECAN/2022 - IF/PA) Em uma corrida de rua com 50 participantes inscritos com as numerações de 1 a 50 ficaram nos três primeiros lugares os atletas cuja soma das inscrições era um número par. Nesta corrida, os três primeiros eram considerados os campeões e recebiam a mesma premiação, independente da ordem.

Assinale a alternativa que apresenta de quantas maneiras essa situação pode acontecer.

a) 9800

b) 7500

c) 25

d) 300

Comentários:

Precisamos calcular o número de maneiras de escolher 3 competidores dentre 50, numerados de 1 a 50, cuja soma dos números seja par. O enunciado informa que a ordem desses 3 competidores não importa.

Para que a soma dos 3 números seja par, é necessário que todos os números sejam pares ou 2 números sejam ímpares e um par.

Se todos forem pares, temos a escolha de 3 dentre 25 números pares:

$$n(I) = C_{25,3} = \frac{25!}{(25-3)! \times 3!} = \frac{25 \times 24 \times 23 \times 22!}{22! \times 3!} = \frac{25 \times 24 \times 23}{3 \times 2} = 25 \times 4 \times 23 = 2300$$

Se dois forem ímpares, temos a escolha de 2 dentre 25 números ímpares:

$$C_{25,2} = \frac{25!}{(25-2)! \times 2!} = \frac{25 \times 24 \times 23!}{23! \times 2} = 25 \times 12 = 300$$

Ademais, há 25 possibilidades para a escolha do número par. Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de ocorrer esse cenário é:

$$n(II) = 300 \times 25 = 7500$$

Por serem cenários mutuamente excludentes, o número total de maneiras de a soma dos 3 números ser par é a soma dos resultados (princípio aditivo):

$$n = 2300 + 7500 = 9800$$

Gabarito: A

30. (FEPESE/2022 - Pref. B Camboriú) De quantas maneiras podemos escolher três números distintos do conjunto A = {1, 2, 3, ..., 32, 33} de modo que sua soma seja um múltiplo de 2?

a) Mais de 3000

b) Mais de 2900 e menos de 3000

c) Mais de 2800 e menos de 2900

d) Mais de 2700 e menos de 2800

e) Menos de 2700

Comentários:

Para que a soma de três números seja um múltiplo de 2, isto é, seja par, é necessário que todos os números sejam pares OU dois sejam ímpares e um seja par.

No conjunta A, há 16 números pares (metade dos números de 1 a 32) e 17 números ímpares (metade dos números de 1 a 32, mais o número 33).

Considerando que a ordem não importa, a quantidade de maneiras de selecionar 3 números pares, dentre 16, é a combinação de 16 escolhe 3:

$$n(I) = C_{16,3} = \frac{16!}{(16-3)! \times 3!} = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13!}{13! \times 3!} = \frac{16 \times 15 \times 14}{3 \times 2} = 16 \times 5 \times 7 = 560$$

Se dois forem ímpares, temos a escolha de 2 dentre 17 números ímpares:

$$C_{17,2} = \frac{17!}{(17-2)! \times 2!} = \frac{17 \times 16 \times 15!}{15! \times 2} = 17 \times 8 = 136$$

Ademais, há 16 possibilidades para a escolha do número par. Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de ocorrer esse cenário é:

$$n(II) = 136 \times 16 = 2176$$

Por serem cenários mutuamente excludentes, o número total de maneiras de escolher três números nessas condições é a soma dos resultados (princípio aditivo):

$$n = 560 + 2176 = 2736$$

Gabarito: D

31. (Quadrix/2022 - CRP 11) As irmãs Bianca e Sofia estão jogando um jogo de cartas com um baralho que possui dez cartas, no total. Conforme as regras desse jogo, deve-se tirar três cartas desse baralho,

memorizá-las e devolvê-las ao baralho, embaralhando-o. Em seguida, deve-se escolher três novas cartas e anotar o número de cartas que vierem repetidas nesse grupo. Então, embaralha-se novamente o baralho, e a outra irmã repete o mesmo processo. Quem tiver mais cartas repetidas vence o jogo. Se as duas irmãs tirarem o mesmo número de cartas repetidas, o jogo termina empatado. Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Existem 720 modos de se tirarem três cartas do baralho.

Comentários:

Essa questão pede o número de maneiras de retirar 3 cartas, de um total de 10. Considerando que a ordem dessa seleção não importa, temos a combinação de 10 escolhe 3:

$$C_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 10 \times 3 \times 4 = 120$$

Que é diferente de 720.

Esse resultado seria obtido caso a ordem importasse $A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$*, mas não é o caso.*

Gabarito: Errado

32. (Quadrix/2022 - CRP 11) As irmãs Bianca e Sofia estão jogando um jogo de cartas com um baralho que possui dez cartas, no total. Conforme as regras desse jogo, deve-se tirar três cartas desse baralho, memorizá-las e devolvê-las ao baralho, embaralhando-o. Em seguida, deve-se escolher três novas cartas e anotar o número de cartas que vierem repetidas nesse grupo. Então, embaralha-se novamente o baralho, e a outra irmã repete o mesmo processo. Quem tiver mais cartas repetidas vence o jogo. Se as duas irmãs tirarem o mesmo número de cartas repetidas, o jogo termina empatado.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

A razão entre o número de formas de não se tirar nenhuma carta repetida e o número de formas de se tirarem duas cartas repetidas é igual a $\frac{5}{3}$.

Comentários:

Para não selecionar carta repetida alguma, na segunda vez em que as cartas são extraídas, é necessário selecionar 3 das **outras** 7 cartas que não foram selecionadas na primeira vez. Assim, temos a combinação de 7 escolhe 3:

$$n(A) = C_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 7 \times 5$$

Para selecionar exatamente 2 cartas repetidas, primeiro vamos escolher quais das 3 cartas serão selecionadas novamente. Para isso, temos a combinação de 3 escolhe 2:

$$C_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)! \times 2!} = \frac{3 \times 2!}{1! \times 2!} = 3$$

Em seguida, vamos selecionar uma das outras 7 cartas que não foram selecionadas da primeira vez, ou seja, há 7 possibilidades. E o número de maneiras de selecionar 2 cartas repetidas é o produto:

$$n(B) = 3 \times 7$$

E a razão entre os resultados é:

$$\frac{n(A)}{n(B)} = \frac{7 \times 5}{3 \times 7} = \frac{5}{3}$$

Gabarito: Certo

33. (ACCESS/2022 - CM Rio Acima) Uma senha para acesso em um site de compras exige que o cliente escolha 3 caracteres distintos.

A senha deve apresentar as seguintes características:

- **deve conter duas letras distintas e um dígito;**
- **as letras que podem ser utilizadas são {A, B, C, X, Y}**
- **os dígitos que podem ser utilizados são apenas os ímpares.**

O número de senhas distintas que são possíveis neste caso é

a) 120

b) 240

c) 300

d) 320

Comentários:

Como as posições das letras e do dígito não estão definidas, vamos primeiro **escolher** os elementos que serão utilizados na senha, **sem** nos preocuparmos com a ordem nesse primeiro momento, e em seguida calculamos todas as maneiras de **ordenar** os elementos escolhidos.

Sabendo que a senha é composta por 2 letras distintas, dentre 5, o número de maneiras de escolher as letras, **sem** nos preocuparmos com a ordem, é a combinação de 5 escolhe 2:

$$C_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 5 \times 2 = 10$$

Ademais, havendo 5 possíveis dígitos (números ímpares), há 5 maneiras de **escolher** o dígito.

Uma vez definidos os 3 elementos que irão compor a senha, precisamos do número de maneiras de ordená-los, o que corresponde à permutação de 3:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Por fim, o número de senhas distintas, nessas condições, é o produto (princípio multiplicativo):

$$n = 10 \times 5 \times 6 = 300$$

Gabarito: D

34. (CONSULPLAN/2022 - CM Barbacena) Em uma pequena cidade do interior, foi realizado um campeonato de futebol envolvendo quatro times. Cada equipe participante enfrenta as demais equipes apenas uma única vez. Assuma que uma vitória concede 3 pontos ao time vencedor e não há pontuação para o time perdedor. Caso haja um empate, os dois times da partida ganham 1 ponto. Após todos os jogos do campeonato, a seguinte tabela aponta a classificação final:

Time	Pontuação
Macedos	7
Calcita	5
Olaria	3
Ilha	1

Qual o número de partidas que terminaram empatadas no campeonato?

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

Comentários:

O número total de partidas corresponde ao número de maneiras de selecionar 2 times, dentre os 4:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2} = 2 \times 3 = 6$$

Os jogos que resultam na vitória de um dos times rendem 3 pontos ao todo (3 para o time vencedor e 0 para o time perdedor) e os jogos que resultam em empate rendem 2 pontos ao todo (1 para cada time). Assim, cada **empate** resulta em **1 ponto a menos** do que uma vitória/derrota, quando consideramos a soma dos pontos para todos os times.

Se todos os 6 jogos resultassem em vitória/derrota, o número total de pontos seria:

$$n_{max} = 3 \times 6 = 18$$

Porém, o número total de pontos obtidos, conforme a tabela fornecida no enunciado, foi:

$$n_o = 7 + 5 + 3 + 1 = 16$$

Ou seja, foram obtidos 2 pontos a menos, o que significa que houve 2 empates.

Se preferir, é possível resolver essa questão utilizando o seguinte sistema de equações. Sabendo que cada vitória/derrota (v) rende 3 pontos no total, que cada empate (e) rende 2 pontos no total e que foram obtidos um total de 16 pontos, temos:

$$3.v + 2.e = 16$$

Ademais, sabemos que o número total de jogos é igual a 6:

$$v + e = 6$$

$$v = 6 - e$$

Substituindo essa expressão na primeira equação, temos:

$$3.(6 - e) + 2.e = 16$$

$$18 - 3.e + 2.e = 16$$

$$e = 18 - 16 = 2$$

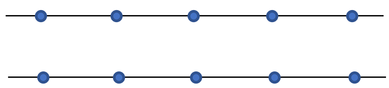
Gabarito: B

35. (Quadrix/2022 - CRMV/MS) Poliana, uma amante da matemática, traçou 2 segmentos de reta, paralelos, na areia da praia de Boa Viagem. Depois, ela marcou 5 pontos distintos em cada um dos segmentos. Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Com vértices nos pontos marcados na areia, Poliana pode construir 120 triângulos.

Comentários:

O enunciado informa que foram traçados 2 segmentos de reta paralelos e marcados 5 pontos em cada um:



Para construir triângulos, é necessário selecionar 2 pontos quaisquer em uma das retas e um ponto qualquer na outra reta.

O número de maneiras de escolher 2 pontos da reta superior corresponde à combinação de 2 elementos, dentre 5:

$$C_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 5 \times 2 = 10$$

E o número de maneiras de escolher um ponto da reta inferior é igual a 5, já que há 5 possibilidades. Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de construir um triângulo com 2 pontos da reta superior e 1 ponto da reta inferior (eventos concomitantes) é o produto:

$$10 \times 5 = 50$$

Similarmente, o número de maneiras de construir um triângulo com 2 pontos da reta inferior e 1 ponto da reta superior é também igual a 50.

Por serem eventos mutuamente exclusivos, o número de maneiras de construir triângulos, de uma forma ou da outra, é a soma:

$$n = 50 + 50 = 100$$

Que é diferente de 120.

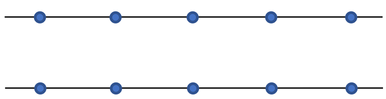
Gabarito: Errado

36. (Quadrix/2022 - CRMV/MS) Poliana, uma amante da matemática, traçou 2 segmentos de reta, paralelos, na areia da praia de Boa Viagem. Depois, ela marcou 5 pontos distintos em cada um dos segmentos. Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Com vértices nos pontos marcados na areia, Poliana pode construir 210 quadriláteros.

Comentários:

Para construir quadriláteros, precisamos selecionar 2 pontos quaisquer da reta superior e 2 pontos quaisquer da reta inferior:



O número de maneiras de escolher 2 pontos de uma das retas corresponde à combinação:

$$C_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 5 \times 2 = 10$$

Para escolher 2 pontos da outra reta, também há 10 possibilidades. Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de construir um quadrilátero com 2 pontos da reta superior e 2 pontos da reta inferior (eventos concomitantes) é o produto:

$$10 \times 10 = 100$$

Que é diferente de 210.

Gabarito: Errado

37. (IBFC/2022 - EBSERH-UNIFAP) Para o seu casamento, Adriana deve escolher três músicas que serão tocadas na igreja, dentre 10 possíveis. Além disso, Adriana deve escolher em qual ordem cada uma dessas três músicas escolhidas serão tocadas. Nessas condições, o total de escolhas possíveis de Adriana é igual a:

a) 120

b) 360

c) 480

d) 720

e) 1440

Comentários:

O enunciado informa que Adriana deve escolher 3 dentre 10 músicas, considerando que a ordem importa. Assim, temos o arranjo de 3 elementos, dentre 10:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

Gabarito: D

38. (Legalle/2022 - Pref. Hulha Negra/RS) Dado o conjunto G = {2,3, 8, 9}. Se agruparmos os números desse conjunto de 3 em 3, de modo que os agrupamentos gerem subconjuntos com elementos distintos, podendo esses subconjuntos repetirem os mesmos elementos com ordens diferentes, o número de agrupamentos possíveis será:

a) 8

b) 12

c) 18

d) 24

e) 36

Comentários:

Precisamos calcular o número de maneiras de **selecionar** 3 elementos do conjunto G, formado por 4 elementos. Como um subconjunto pode repetir os elementos de outro subconjunto, em ordem diferente, sendo considerados subconjuntos distintos, então a ordem da seleção **importa**.

Assim, temos o arranjo de 3 elementos dentre 4:

$$A_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1!} = 24$$

Gabarito: D

39. (FEPESE/2022 - Pref. Chapecó) Um partido deve escolher, entre 27 pessoas, uma chapa formada por um presidente e um vice-presidente, para participar de uma eleição.

De quantas maneiras diferentes esta chapa pode ser formada?

a) Mais de 1000

b) Mais de 900 e menos de 1000

c) Mais de 800 e menos de 900

d) Mais de 700 e menos de 800

e) Menos de 700

Comentários:

Como os cargos são diferentes, então escolher A para presidente e B para vice é **diferente** de escolher B para presidente e A para vice. Em outras palavras, a **ordem** da escolha importa e devemos utilizar o arranjo.

Assim, temos o arranjo de 2 elementos, dentre 27:

$$A_{27,2} = \frac{27!}{(27-2)!} = \frac{27 \times 26 \times 25!}{25!} = 27 \times 26 = 702$$

Que está entre 700 e 800.

Gabarito: D

40. (IDECAN/2022 - CFO) Nos Jogos Nacionais dos Cursos de Formação de Oficiais, na modalidade barra, nove atletas se inscreveram dos quais quatro são de Mato Grosso do Sul. De quantos modos é possível que pelo menos um cadete da Academia de Polícia do Mato Grosso do Sul fique em uma das três primeiras posições na modalidade barra?

a) 60

b) 444

c) 504

d) 669

e) 729

Comentários:

Há 9 atletas, dos quais 4 são do Mato Grosso do Sul. Para calcular as possibilidades para as 3 primeiras posições, com **pelo menos um** atleta do Mato Grosso do Sul, devemos calcular o número total de possibilidades para as 3 primeiras posições e subtrair o número de possibilidades sem qualquer atleta do Mato Grosso do Sul.

O número total de possibilidades para as 3 primeiras posições (com importância de ordem), sabendo que há 9 atletas no total é o arranjo:

$$A_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

E o número de possibilidades para as 3 primeiras posições, sem qualquer atleta do Mato Grosso do Sul, sabendo que há 5 atletas que não são desse estado, é o arranjo:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

A diferença corresponde ao número de possibilidades para as 3 primeiras posições, com pelo menos um atleta do Mato Grosso do Sul:

$$n = 504 - 60 = 444$$

Gabarito: B

41. (GUALIMP/2022 - Pref. Carmo/RJ) Uma família possui 8 pessoas: pai, mãe e 6 filhos. Desses 6 filhos, apenas o Marcos é menor de idade (3 anos). Essa família possui um carro com 2 lugares na frente (motorista e acompanhante) e 3 lugares atrás.

Sabendo que Marcos não pode ocupar o banco da frente, de quantas formas diferentes esse carro pode ser ocupado?

a) 2.520

b) 5.640

c) 5.040

d) 2.820

Comentários:

Sabendo que há 8 pessoas na família e 5 lugares distintos no carro, será necessário selecionar 5 pessoas, dentre 8, com importância de ordem (arranjo). Mas como Marcos não pode ocupar os bancos da frente, vamos dividir essa questão em dois cenários - um com Marcos no carro e outro sem.

Se Marcos estiver no carro, ele terá **3** possibilidades (atrás). Em seguida, haverá 7 pessoas para ocuparem os outros 4 bancos:

$$A_{7,4} = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

E o número de possibilidades nesse cenário é o produto:

$$n(M) = 3 \times 840 = 2520$$

Se Marcos não estiver no carro, haverá 7 pessoas para ocuparem os 5 bancos:

$$A_{7,5} = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$$

Por serem situações excludentes, o número total de maneiras de ocupar o carro, nessas condições, é a soma:

$$n = 2520 + 2520 = 5040$$

Gabarito: C

42. (AOCP/2022 - PM/ES) Assinale a única alternativa em que possa figurar a razão R entre o número de arranjos de n elementos tomados p a p e o número de combinações dos mesmos n elementos tomados p a p.

a) R = 5

b) R = 10

c) R = 25

d) R = 100

e) R = 120

Comentários:

A razão entre o número de arranjos de p elementos, dentre n, e o número de combinações de p elementos, dentre n, é dada por:

$$R = \frac{A_{n,p}}{C_{n,p}} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{\frac{n!}{(n-p)! \times p!}} = p!$$

Ou seja, a razão corresponde ao fatorial do número p de elementos. Dentre as alternativas, o único número que corresponde a um fatorial é 120, que é o fatorial de 5.

Gabarito: E

43. (Quadrix/2022 - CRBM 3) De um grupo de 6 homens e 6 mulheres, entre eles Anderson e Bárbara, deseja-se formar uma comissão de 4 pessoas. Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

A comissão pode ser formada de 495 modos distintos.

Comentários:

O número de maneiras de formar uma comissão de 4 pessoas, dentre 12 pessoas no total, sem restrições, corresponde à combinação de 4 elementos, dentre 12:

$$C_{12,4} = \frac{12!}{(12-4)! \times 4!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8! \times 4!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2} = 11 \times 5 \times 9 = 495$$

Gabarito: Certo

44. (Quadrix/2022 - CRBM 3) De um grupo de 6 homens e 6 mulheres, entre eles Anderson e Bárbara, deseja-se formar uma comissão de 4 pessoas. Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Se o número de homens e mulheres nessa comissão deve ser o mesmo, então ela pode ser formada de 252 modos distintos.

Comentários:

Se, numa comissão de 4 pessoas, o número de homens e mulheres for o mesmo, então a comissão terá 2 homens e 2 mulheres.

O número de maneiras de escolher 2 homens, dentre 6, é a combinação:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 6!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2} = 3 \times 5 = 15$$

Similarmente, há 15 maneiras de escolher 2 mulheres, dentre 6.

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de selecionar toda a comissão (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 15 \times 15 = 225$$

Que é diferente de 252.

Gabarito: Errado

45. (Quadrix/2022 - CRBM 3) De um grupo de 6 homens e 6 mulheres, entre eles Anderson e Bárbara, deseja-se formar uma comissão de 4 pessoas. Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Se Anderson ou Bárbara deve participar dessa comissão, então ela pode ser formada de 330 modos distintos.

Comentários:

Agora, precisamos calcular o número de maneiras de organizar a comissão com Anderson ou Bárbara. Para isso, vamos subtrair do total aquelas comissões das quais não participam nem Anderson nem Bárbara.

Para formar comissões sem essas duas pessoas, precisamos escolher pessoas dentre as outras 10:

$$C_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)! \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 10 \times 3 \times 7 = 210$$

Como vimos nos itens anteriores, o total de comissões possíveis é:

$$C_{12,4} = \frac{12!}{(12-4)! \times 4!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8! \times 4!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2} = 11 \times 5 \times 9 = 495$$

A diferença corresponde ao número de comissões em que participam Anderson ou Bárbara:

$$n = 495 - 210 = 285$$

Que é diferente de 330.

Gabarito: Errado

46. (NUCEPE/2022 - PM/PI) De quantos modos distintos um agente pode colocar 5 presos em 4 celas, sabendo-se que cada cela deve conter pelo menos um preso?

a) 240

b) 180

c) 120

d) 96

e) 60

Comentários:

Para que 5 presos ocupem todas as 4 celas, exatamente 2 presos ficarão na mesma cela. O número de maneiras de selecionar 2 dos 5 presos para ficarem juntos em alguma cela é a combinação:

$$C_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 5 \times 2 = 10$$

Agora, precisamos alocar as 4 unidades (3 presos que ficarão sozinhos e a dupla de presos) nas 4 celas. O número de maneiras de fazer isso é a permutação de 4 elementos:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de alocar os presos nessa situação é o produto:

$$n = 10 \times 24 = 240$$

Gabarito: A

47. (CETAP/2022 - AGE/PA) Em um grupo de cientistas formado por 6 homens e 4 mulheres, 5 devem ser selecionados para participar de um congresso, incluindo pelo menos 2 mulheres. De quantas formas essa delegação poderá ser formada?

a) 40

b) 186

c) 148

d) 88

Comentários:

Precisamos formar equipes de 5 pessoas, das quais pelo menos 2 devem ser mulheres, ou seja, as equipes podem ser com 2, 3 ou 4 mulheres.

Para formarmos equipes com 2 mulheres e 3 homens, precisamos escolher 2 mulheres, dentre as 4, e 3 homens, dentre os 6:

$$n(2M) = C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2} = 6$$

$$n(3H) = C_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3 \times 2} = 5 \times 4 = 20$$

E o número total de maneiras de selecionar equipes com 2 mulheres e 3 homens é, pelo princípio multiplicativo:

$$n(2M, 3H) = 6 \times 20 = 120$$

Para formarmos equipes com 3 mulheres e 2 homens, precisamos escolher 3 mulheres, dentre as 4, e 2 homens, dentre os 6:

$$n(3M) = C_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)! \times 3!} = \frac{4 \times 3!}{1! \times 3!} = 4$$

$$n(2H) = C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2} = 3 \times 5 = 15$$

E o número total de maneiras de selecionar equipes com 3 mulheres e 2 homens é:

$$n(3M, 2H) = 4 \times 15 = 60$$

Por fim, para formarmos equipes com 4 mulheres e 1 homem, precisamos de todas as 4 mulheres (1 possibilidade) e escolher 1 homem, dentre os 6 (6 possibilidades):

$$n(4M, 1H) = 1 \times 6 = 6$$

Como essas possibilidades são excludentes, pelo princípio aditivo, o número total de maneiras de selecionar a equipe com pelo menos 2 mulheres é a soma:

$$n = 120 + 60 + 6 = 186$$

Gabarito: B

48. (FEPESE/2022 - PCien/SC) De um grupo de 10 professores, 4 são professores de História e os outros são professores de outras disciplinas. De quantos modos pode-se formar uma comissão com 4 destes professores, de forma que ao menos 2 sejam professores de História?

a) Mais de 100

b) Mais de 85 e menos de 100

c) Mais de 70 e menos de 85

d) Mais de 55 e menos de 70

e) Menos de 55

Comentários:

Precisamos formar comissões de 4 professores, com pelo menos 2 de História, ou seja, as equipes podem ser com 2, 3 ou 4 professores de história.

Para formarmos comissões com 2 professores de história, precisamos escolher 2 professores, dentre os 4 de história, e 2 professores, dentre os outros 6:

$$n(2H) = C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2} = 6$$

$$n(2X) = C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2} = 3 \times 5 = 15$$

E o número total de maneiras de selecionar uma comissão dessa forma é o produto:

$$n(2H, 2X) = 6 \times 15 = 90$$

Para formarmos comissões com 3 professores de história, precisamos escolher 3 professores, dentre os 4 de história, e 1 professor, dentre os outros 6 (6 possibilidades para isso):

$$n(3H) = C_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)! \times 3!} = \frac{4 \times 3!}{1! \times 3!} = 4$$

E o número total de maneiras de selecionar uma comissão dessa forma é o produto:

$$n(3H, 1X) = 4 \times 6 = 24$$

Por fim, há **uma** única maneira de formarmos comissões com os 4 professores de história.

Como essas possibilidades são excludentes, pelo princípio aditivo, o número total de maneiras de selecionar a comissão com pelo menos 2 professores de história é a soma:

$$n = 90 + 24 + 1 = 115$$

Que é maior que 100.

Gabarito: A

49. (AOCP/2022 - SEAD/GO) Em um setor de uma Prefeitura, há 7 mulheres com mais de cinco anos de experiência em determinada área e há 5 homens também com mais de cinco anos de experiência nessa mesma área. O chefe desse setor pretende formar uma comissão com 5 desses servidores, com pelo menos 3 mulheres. Nesse caso, quantas comissões podem ser formadas?

a) 546

b) 584

c) 654

d) 1092

e) 1168

Comentários:

Precisamos formar equipes de 5 pessoas, das quais pelo menos 3 devem ser mulheres, ou seja, as equipes podem ser com 3, 4 ou 5 mulheres.

Para formarmos equipes com 3 mulheres e 2 homens, precisamos escolher 3 mulheres, dentre as 7, e 2 homens, dentre os 5:

$$n(3M) = C_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3 \times 2} = 7 \times 5 = 35$$

$$n(2H) = C_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 5 \times 2 = 10$$

E o número total de maneiras de selecionar equipes com 3 mulheres e 2 homens é, pelo princípio multiplicativo:

$$n(3M, 2H) = 35 \times 10 = 350$$

Para formarmos equipes com 4 mulheres e 1 homem, precisamos escolher 4 mulheres, dentre as 7, e 1 homem, dentre os 5:

$$n(4M) = C_{7,4} = \frac{7!}{(7-4)! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 7 \times 5 = 35$$

$$n(1H) = C_{5,1} = \frac{5!}{(5-1)! \times 1!} = \frac{5 \times 4!}{4! \times 1} = 5$$

E o número total de maneiras de selecionar equipes com 4 mulheres e 1 homem é:

$$n(4M, 1H) = 35 \times 5 = 175$$

Por fim, para formarmos equipes com 5 mulheres e nenhum homem, escolhemos 5 mulheres, dentre as 7:

$$n(5M) = C_{7,5} = \frac{7!}{(7-5)! \times 5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{2! \times 5!} = \frac{7 \times 6}{2} = 7 \times 3 = 21$$

Como essas possibilidades são excludentes, pelo princípio aditivo, o número total de maneiras de selecionar a equipe com pelo menos 3 mulheres é a soma:

$$n = 350 + 175 + 21 = 546$$

Gabarito: A

50. (SELECON/2022 - Pref. São Gonçalo/RJ) Um engenheiro trabalha com 8 equipes diferentes, distribuídas em três níveis conforme a tabela abaixo.

Nível	Quantidade de equipes por nível
A	3
B	1
C	4

Se este engenheiro escolher apenas 3 dessas equipes para realizar uma determinada tarefa, sendo pelo menos uma do nível C, o número total de escolhas distintas que ele poderá fazer é igual a:

a) 52

b) 54

c) 56

d) 58

Comentários:

Precisamos escolher 3 equipes, dentre 8, sendo **pelo menos uma** do nível C. Para resolver essa questão, podemos calcular o número total de maneiras de escolher as equipes e subtrair as possibilidades que não contemplam qualquer equipe do nível C.

O número total de maneiras de escolher 3 equipes, sem que a ordem importe, uma vez que elas realizarão a mesma tarefa, é a combinação:

$$C_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 8 \times 7 = 56$$

O número de maneiras de escolher 3 equipes que não sejam do nível C, sabendo que há 4 equipes em outros níveis, é a combinação:

$$C_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)! \times 3!} = \frac{4 \times 3!}{1! \times 3!} = 4$$

E o número de maneiras de escolher 3 equipes atendendo à restrição é a diferença:

$$n = 56 - 4 = 52$$

Gabarito: A

51. (FADESP/2022 - PM/PA) Uma unidade possui 3 oficiais e 4 praças aptos a fazerem parte de comissões disciplinares com 3 componentes, sendo que a presidência tem que ser exercida por um dos oficiais. Sabendo-se que, por exemplo, a comissão A presidente, B e C Membros difere da comissão B presidente, A e C membros, o número de comissões distintas que se pode formar com esses militares, tendo pelo menos um praça em sua constituição, é igual a

a) 60

b) 52

c) 48

d) 42

Comentários:

Precisamos formar comissões com um oficial na presidência e outros 2 membros, dentre 3 oficiais e 4 praças, de modo que deve haver pelo menos um praça como membro.

Há $n(P) = \mathbf{3}$ possibilidades para escolher o oficial presidente.

Após a escolha do presidente, 2 membros devem ser escolhidos dentre os 6 profissionais restantes:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!} = 3 \times 5 = 15$$

No entanto, precisamos excluir as possibilidades compostas de apenas oficiais. Como há apenas 3 oficiais ao todo, há uma única comissão que pode ser formada apenas por oficiais. Assim, o número de maneiras de escolher os 2 membros da comissão é:

$$n(M) = 15 - 1 = 14$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de selecionar o presidente e os membros da comissão é o produto:

$$n(P, M) = 3 \times 14 = 42$$

Gabarito: D

52. (UFMT/2022 - CBM/MT) O Quadro de Oficiais de Saúde da Polícia Militar (QOSPM) é composto por:

Postos	Quantidade
Coronel	02
Tenente-Coronel e Major	30
Capitão	25
Primeiro Tenente e Segundo Tenente	30
TOTAL	87

Assinale a alternativa que apresenta o número total de comissões que podem ser formadas com 4 membros do QOSPM, dentre os Coronéis, os Capitães ortopedistas e os Capitães odontólogos, que contenham pelo menos um Coronel e que não seja uma comissão formada apenas por médicos, nem apenas por odontólogos.

Dados:

- **Dentre os Coronéis do QOSPM, um é médico e o outro é odontólogo;**
- **Dentre os Capitães do QOSPM, três são ortopedistas e três são odontólogos.**

a) 70

b) 55

c) 68

d) 53

e) 72

Comentários:

Essa questão pede a quantidade de comissões possíveis com 4 membros, dentre os seguintes oficiais:

- 1 Coronel médico;
- 1 Coronel odontólogo;
- 3 Capitães médicos;
- 3 Capitães odontólogos.

Ademais, as comissões devem conter pelo menos um Coronel e não ser formada apenas por médicos ou apenas por odontólogos.

Para resolver essa questão, vamos calcular o número total de comissões possíveis, sem restrições e, em seguida, excluir aquelas que não atendem ao enunciado.

O número de maneiras de formar uma comissão de 4 membros, dentre 8 no total, é a combinação:

$$C_{8,4} = \frac{8!}{(8-4)! \times 4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2} = 7 \times 2 \times 5 = 70$$

O número de comissões que podem ser formadas sem coronéis corresponde à combinação de 4 membros, dentre os 6 capitães:

$$C_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)! \times 4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2! \times 4!} = 3 \times 5 = 15$$

Essas comissões são necessariamente mistas com médicos e odontólogos, logo, podemos excluir as comissões de apenas médicos ou apenas odontólogos, pois não há interseção entre esses grupos.

Há uma única comissão formada apenas por médicos e uma única comissão formada apenas por odontólogos. Assim, o número de comissões que atendem às restrições do enunciado é:

$$n = 70 - 15 - 1 - 1 = 53$$

Gabarito: D

53. (FAPEC/2022 - UFMS) Para formar a comissão dos servidores da UFMS, são escolhidas 6 pessoas. É obrigatório que na formação dessa comissão, haja a presença de pelo menos duas pessoas do sexo feminino. Estão aptas a participarem do processo de escolha da comissão 11 pessoas, sendo 7 do sexo masculino e 4 do sexo feminino. Existem quantas formas diferentes (possibilidades) de escolha para se montar essa comissão?

a) 756 possibilidades

b) 371 possibilidades

c) 320 possibilidades

d) 120 possibilidades

e) 81 possibilidades

Comentários:

Precisamos calcular o número de maneiras de selecionar 6 pessoas para uma comissão, das quais **pelo menos** 2 sejam mulheres, de um total de 11 pessoas, sendo 7 homens e 4 mulheres.

Nesse caso, podemos calcular o número total de possibilidades de formar a comissão, sem restrições, e subtrair aquelas formadas apenas por homens ou por apenas 1 mulher. Esse cálculo é um pouco menos trabalhoso do que somar as comissões com 2, com 3 e com 4 mulheres.

O número total de comissões possíveis corresponde à escolha de 6 pessoas, dentre todas as 11:

$$C_{11,6} = \frac{11!}{(11-6)! \times 6!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{5! \times 6!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 11 \times 2 \times 3 \times 7 = 462$$

Se a comissão for formada apenas por homens, temos a seleção de 6 pessoas, dentre os 7 homens:

$$C_{7,6} = \frac{7!}{(7-6)! \times 6!} = \frac{7 \times 6!}{1! \times 6!} = 7$$

Se a comissão tiver uma única mulher e 5 homens, haverá **4** possibilidades para selecionar a mulher e, para selecionar 5 homens dentre 7, temos:

$$C_{7,5} = \frac{7!}{(7-5)! \times 5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{2! \times 6!} = 7 \times 3 = 21$$

Logo, o número de maneiras de formar comissões com uma única mulher é o produto:

$$21 \times 4 = 84$$

Portanto, o número de comissões formadas por pelo menos duas mulheres é:

$$n = 462 - 7 - 84 = 371$$

Gabarito: B

54. (IDECAN/2022 - CBM/ES) Em um baralho convencional de 52 cartas, desejamos escolher quatro cartas. Sem levarmos em consideração a ordem delas, queremos que em cada escolha haja pelo menos uma dama. De quantas formas podemos escolher essas quatro cartas?

a) $\binom{52}{4} - \binom{48}{4}$

b) $\binom{48}{4}$

c) $\binom{48}{4} - \binom{52}{4}$

d) $\binom{48}{4}^2$

Comentários:

Precisamos calcular o número de maneiras de escolher 4 cartas, dentre 52, com **pelo menos uma** dama, sabendo que há 4 damas no baralho. Para isso, vamos calcular o número total de maneiras de escolher as cartas, sem restrições, e depois subtrair aquelas em que nenhuma dama foi escolhida.

O número total de maneiras de escolher 4 cartas, dentre 52, é:

$$C_{52,4} = \binom{52}{4}$$

Para que nenhuma das cartas escolhidas seja uma dama, é necessário escolher 4 cartas, dentre as 48 cartas que não correspondem a uma dama:

$$C_{48,4} = \binom{48}{4}$$

E o número de maneiras de escolher pelo menos uma dama é a diferença:

$$\binom{52}{4} - \binom{48}{4}$$

Gabarito: A

55. (FCM-CEFETMINAS/2022 - Pref. Timóteo/MG) Considere os números naturais de quatro algarismos, ou seja, de 1000 a 9999. Alguns desses números têm os algarismos apresentados em ordem decrescente, como, por exemplo, os números 9862 e 8641. Já os números 8247 e 4479 não têm os algarismos escritos em ordem decrescente.

A quantidade de números naturais de quatro algarismos que apresentam os algarismos em ordem decrescente é igual a

a) 144

b) 176

c) 210

d) 252

Comentários:

Para que os algarismos sejam dispostos em ordem decrescente eles precisam ser distintos. Ademais, dados quaisquer 4 algarismos distintos, há exatamente uma forma de ordená-los de maneira decrescente. Por exemplo, se os algarismos forem 8247, como indicado no enunciado, a única possibilidade é 8742.

Assim, a quantidade de números de 4 algarismos em ordem decrescente corresponde ao número de maneiras de escolher 4 algarismos, dentre 10 (de 0 a 9). Uma vez escolhidos os algarismos, haverá uma única maneira de ordená-los.

$$C_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)! \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 10 \times 3 \times 7 = 210$$

Gabarito: C

56. (AOCP/2022 - SED/MS) Um professor solicitou a seus alunos que resolvessem a questão a seguir, justificando a resposta: "Quantos são os subconjuntos de $\{a_1, a_2, a_3 \cdots, a_n\}$, com p elementos, nos quais pelo menos um dos elementos a_1, a_2 figura?". Esse professor recebeu as seguintes respostas:

Aluno A: Há C_{n-1}^{p-1} combinações em que o elemento a_1 figura e C_{n-1}^{p-1} combinações em que o elemento a_2 figura. Portanto, a resposta é $2C_{n-1}^{p-1}$.

Aluno B: Primeiro obtemos o total de combinações C_n^p e excluímos as C_{n-2}^p que não contém nem a_1 e nem a_2. Portanto a resposta é $C_n^p - C_{n-2}^p$.

Aluno C: Basta somar as combinações que contém a_1 mas não a_2 $\left(C_{n-2}^{p-1}\right)$ com as que contém a_2 mas não a_1 $\left(C_{n-2}^{p-1}\right)$ com as contém ambos os elementos $\left(C_{n-2}^{p-2}\right)$. A resposta é $2.C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$

A respeito das respostas e justificativas apresentadas, assinale a alternativa correta.

a) O aluno A apresentou uma justificativa correta, mas a resposta é incorreta.

b) O aluno A apresentou uma justificativa correta e a resposta é correta.

c) O aluno B apresentou uma justificativa incorreta.

d) O aluno B apresentou uma justificativa correta, mas a resposta é incorreta.

e) O aluno C apresentou uma justificativa correta e a resposta é correta.

Comentários:

O professor pede o número de subconjuntos de p elementos cada, selecionados dentre n elementos no total $\{a_1, a_2, a_3 \cdots, a_n\}$, que contenha pelo menos um dos elementos a_1 e a_2.

O aluno A afirma que há C_{n-1}^{p-1} subconjuntos com o elemento a_1. De fato, para que esse elemento faça parte do subconjunto, é necessário selecionar os outros $p-1$ elementos do subconjunto, dentre os $n-1$ elementos disponíveis $\{a_2, a_3 \cdots, a_n\}$. Similarmente, há C_{n-1}^{p-1} subconjuntos com o elemento a_2.

No entanto, não podemos simplesmente somar essas possibilidades, pois os subconjuntos que possuem tanto o elemento a_1 quanto o elemento a_2 (interseção) serão contados em dobro. Logo, a justificativa e resposta do aluno A estão **incorretas**. Nenhuma alternativa afirma isso.

O aluno B afirma que há C_n^p subconjuntos no total e C_{n-2}^p subconjuntos que não contêm nem a_1 nem a_2.

De fato, para escolher quaisquer p elementos, dentre n, temos a combinação C_n^p. Ademais, para que nem a_1 nem a_2 faça parte do subconjunto, é necessário escolher p elementos, dentre $n-2$ elementos disponíveis $\{a_3 \cdots, a_n\}$.

A diferença entre esses resultados corresponde ao número de subconjuntos com pelo menos um dos dois elementos. Logo, a justificativa e resposta do aluno B estão **corretas**. Nenhuma alternativa afirma isso.

O aluno C afirma que há C_{n-2}^{p-1} subconjuntos que contêm a_1 mas não a_2. De fato, se a_1 fizer parte do subconjunto, é necessário escolher outros $p-1$ elementos para ele. Se a_2 não fizer parte do subconjunto, restarão $n-2$ elementos disponíveis $\{a_3 \cdots, a_n\}$. Similarmente, há C_{n-2}^{p-1} subconjuntos que contêm a_2 mas não a_1.

Ademais, se tanto a_1 quanto a_2 fizerem parte do subconjunto, é necessário escolher outros $p-2$ elementos, dentre $n-2$ elementos disponíveis $\{a_3 \cdots, a_n\}$. Logo, de fato, há C_{n-2}^{p-2} subconjuntos com ambos os elementos. Como esses eventos são mutuamente excludentes, o número total de possibilidades é a soma (princípio aditivo). Portanto, a justificativa e resposta do aluno C estão **corretas**. A alternativa E afirma isso.

Gabarito: E

57. (QUADRIX/2022 - CRMV/PR) Bárbara quer comprar 10 croissants em uma padaria onde há 3 tipos de croissant (presunto e queijo, pera com gorgonzola e chocolate).

Com base nessa situação hipotética, é correto afirmar que ela poderá fazer isso de

a) 44 maneiras distintas.

b) 55 maneiras distintas.

c) 66 maneiras distintas.

d) 77 maneiras distintas.

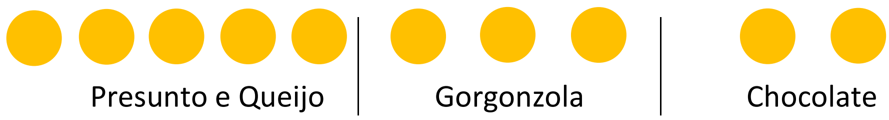
e) 88 maneiras distintas.

Comentários:

Sabendo que há 3 tipos de croissant, precisamos escolher 10 croissants, que podem ser do mesmo sabor ou de sabores diferentes. Assim, temos uma combinação completa com $n = 3$ tipos diferentes e $k = 10$ objetos iguais ou diferentes.

Nessa situação, podemos representar os tipos diferentes de croissant por seções separadas por barras e os 10 croissants por círculos. Nessa situação, a ordem das barras e dos círculos corresponde às possibilidades de escolha dos tipos de croissant.

A seguir, representamos a escolha de 5 croissants de presunto e queijo, 3 de gorgonzola e 2 de chocolate.



Assim, o número de maneiras de escolher os sabores dos 10 croissants é o número de maneiras de reordenar os 10 círculos e as 2 barras, o que corresponde a uma permutação de 12 elementos, com repetição de 10 e de 2:

$$CR_n^k = P_{n+k-1}^{n-1,k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \times k!}$$

$$CR_3^{10} = P_{12}^{2,10} = \frac{12!}{2! \times 10!} = \frac{12 \times 11 \times 10!}{2 \times 10!} = 6 \times 11 = 66$$

Gabarito: C.

58. (QUADRIX/2022 - COREN/AP) Uma loja de doces decidiu fazer uma grande liquidação e, para isso, estabeleceu que seria possível comprar duas jujubas pelo preço de uma e 3 pirulitos pelo preço de 1, mas o chiclete não entraria na promoção. O preço original de cada doce era de R$ 1,00 e Léo foi para a loja com R$ 5,00. Sabe-se que a chance de ele escolher cada um dos doces é igual, que doces iguais são indistinguíveis e que ele saiu com pelo menos 1 doce. Com base nesse caso hipotético, julgue o item.

Há 21 modos de Léo comprar 5 doces.

Comentários:

O enunciado informa que há 3 tipos de doces e que serão adquiridos 5 doces, que podem ser iguais ou diferentes. Logo, aqui também temos uma combinação completa de $n = 3$ tipos diferentes e $k = 5$ objetos. Acrescente-se que, como Léo possui dinheiro suficiente para comprar inclusive 5 chicletes (doce mais caro), não é necessário qualquer ajuste no resultado da combinação completa.

Podemos considerar que temos 2 barras que dividem as seções dos tipos de doce e 5 objetos que representam as balas e que vamos permutar esses 7 elementos, com repetição de 2 e de 5:

$$CR_3^5 = P_7^{2,5} = \frac{7!}{2! \times 5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{2 \times 5!} = 7 \times 3 = 21$$

Gabarito: Certo

59. (QUADRIX/2022 - Pref. Lagunas/SC) Em uma loja, há 6 tipos de refrigerante, 4 tipos de queijo e 3 tipos de carne. Com base nesse caso hipotético, julgue o item.

Há exatamente 64 modos de uma pessoa comprar 10 carnes nessa loja.

Comentários:

Precisamos calcular o número de maneiras de comprar 10 carnes, sabendo que há 3 tipos de carne. Assim, temos uma combinação completa de $n = 3$ tipos diferentes e $k = 10$ objetos.

Podemos considerar que temos 2 barras que dividem os três tipos de carne e 10 objetos que representam as carnes; e que vamos permutar esses 12 elementos, com repetição de 2 e de 10:

$$CR_3^{10} = P_{12}^{2,10} = \frac{12!}{2! \times 10!} = \frac{12 \times 11 \times 10!}{2 \times 10!} = 6 \times 11 = 66$$

Que é diferente de 64.

Gabarito: Errado

60. (AOCP/2022 - CBM/PA) Em um sorteio realizado por uma rede de supermercados, o bombeiro Abel recebeu 7 cartões vale-compras no valor de R$1.000,00 cada um. Sensibilizado por conta de um desastre climático recente e diante do instinto de proteger (razão pela qual escolheu a profissão), ele decide que renunciará ao seu prêmio em favor da população atingida pelo desastre. Após pesquisar, percebe que três ONGs (Organizações não Governamentais) encabeçam as ações de cuidados com os desabrigados. De quantas maneiras Abel poderia distribuir os 7 cartões entre as 3 ONGs, sabendo que é possível doar para apenas uma, apenas duas ou distribuir entre as três?

a) 210

b) 343

c) 7

d) 35

e) 36

Comentários:

É necessário distribuir 7 cartões entre 3 ONGs, sem restrições, ou seja, é possível que os cartões sejam distribuídos para apenas uma, apenas duas ou todas as três ONGS. Assim, temos uma combinação completa de $n = 3$ tipos diferentes e $k = 7$ objetos.

Podemos considerar que temos 2 barras que dividem as três ONGs e 7 objetos que representam os cartões; e que vamos permutar esses 9 elementos, com repetição de 2 e de 7:

$$CR_3^7 = P_9^{2,7} = \frac{9!}{2! \times 7!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{2 \times 7!} = 9 \times 4 = 36$$

Gabarito: E

61. (IBFC/2022 - PC/BA) Num restaurante há sempre 3 tipos de sobremesas. Ana vai almoçar todo dia e escolhe uma sobremesa. Nessas circunstâncias, o total de escolhas possíveis que Ana pode fazer em 4 dias almoçando nesse restaurante, considerando que o dia escolhido para qualquer uma das sobremesas não importa, é igual a:

a) 20

b) 18

c) 15

d) 12

e) 24

Comentários:

Precisamos calcular de quantas maneiras podemos escolher sobremesas para 4 dias, dentre 3 tipos de sobremesa. O que importa nessa questão é a quantidade de dias em que cada sobremesa é escolhida, e não o dia específico, ou seja, a ordem dessas escolhas não importa.

Assim, temos uma combinação completa de $n = 3$ tipos diferentes e $k = 4$ objetos.

Podemos considerar que temos 2 barras que dividem os três tipos de sobremesa e 4 objetos que representam os dias; e que vamos permutar esses 6 elementos, com repetição de 2 e de 4:

$$CR_3^4 = P_6^{2,4} = \frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 4!} = 3 \times 5 = 15$$

Gabarito: C

62. (FUNDATEC/2022 - SBC) Imagine que você esteja usando um aplicativo novo que ainda está em fase de testes. Por essa razão, uma pessoa só consegue instalar esse aplicativo se tiver recebido um convite de alguém que já era um usuário. Suponha que você tenha 10 convites para distribuir para 4 amigos. De quantas maneiras isso pode ser feito levando em consideração que os convites são todos indistinguíveis, que você pode distribuir mais de um convite para um mesmo amigo e que cada amigo deva receber pelo menos um convite?

a) 84

b) 120

c) 126

d) 5040

e) 6561

Comentários:

O enunciado informa que 10 convites (iguais) precisam ser distribuídos para 4 amigos, de modo que cada amigo deve receber pelo menos 1 convite. Assim, após distribuir um convite para cada amigo, restarão 6 convites que poderão ser livremente distribuídos para os 4 amigos.

Assim, temos uma combinação completa de $n = 4$ tipos diferentes e $k = 6$ objetos.

Podemos considerar que temos 3 barras que dividem os quatro amigos e 6 objetos que representam os convites; e que vamos permutar esses 9 elementos, com repetição de 3 e de 6:

$$CR_4^6 = P_9^{3,6} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3 \times 2 \times 6!} = 3 \times 4 \times 7 = 84$$

Gabarito: A

63. (FUNDEP/2021 - CRM/MG) O diretor de uma empresa vai promover três de seus funcionários: um a gerente e os outros dois a supervisor e coordenador de vendas, respectivamente. Após uma entrevista, o diretor concluiu que 19 funcionários, dentre os entrevistados, tinham o perfil adequado às vagas e, seguindo a política da empresa, nenhum funcionário assumiria mais de um cargo. De quantas maneiras distintas o diretor poderá escolher os funcionários que ocuparão as vagas?

a) 5.814 maneiras

b) 6.156 maneiras

c) 6.498 maneiras

d) 6.859 maneiras

Comentários:

Como os cargos são diferentes (gerente, supervisor e coordenador), a ordem da escolha dos 3 funcionários importa. Assim, temos o arranjo de 3, dentre 19:

$$A_{19,3} = \frac{19!}{(19-3)!} = \frac{19 \times 18 \times 17 \times 16!}{16!} = 19 \times 18 \times 17 = 5814$$

Gabarito: A

64. (IBFC/2021 - MGS) Para formar uma senha de um aplicativo são necessários 4 dígitos, sendo os dois primeiros vogais e os dois últimos números pares. Se cada senha é formada por dígitos diferentes, ou seja, não pode haver duas vogais ou dois números pares iguais, então o total de senhas distintas que poderão ser formadas é igual a:

a) 360

b) 625

c) 400

d) 480

Comentários:

O enunciado informa que uma senha é formada por 2 vogais distintas e 2 números pares distintos. Sabendo que há 5 vogais, o número de maneiras de selecionar 2 vogais, com importância de ordem (já que estamos trabalhando com senhas) corresponde ao arranjo de 2 elementos, dentre 5:

$$A_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

Sabendo que há 5 números pares, a quantidade de maneiras de selecionar 2 números, com importância de ordem, também corresponde ao arranjo de 2 elementos, dentre 5, que sabemos ser igual a 20.

E a quantidade de possibilidades de formar a senha inteira (com 2 vogais **E** 2 números pares) corresponde ao produto dessas possibilidades (princípio multiplicativo):

20 x 20 = 400

Gabarito: C.

65. (IBRASP/2021 - Pref. Rio Grande) Em um grupo composto por 6 candidatos a uma vaga de emprego, apenas 4 deverão ser selecionados para a próxima etapa da seleção. Sendo assim, ao todo, quantas combinações, poderão ser realizadas, sendo que as ordens das pessoas selecionadas não importam:

a) 12 combinações

b) 15 combinações

c) 18 combinações

d) 20 combinações

e) 24 combinações

Comentários:

O número de maneiras de escolher 4 candidatos, dentre 6, de modo que a ordem não importe, corresponde à combinação de 6 escolhe 4:

$$C_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)! \times 4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2! \times 4!} = 3 \times 5 = 15$$

Gabarito: B

66. (OBJETIVA/2021 - Pref. Horizontina) Durante uma convenção, foram disponibilizados 5 estandes para a apresentação dos produtos de certas empresas. Sabendo-se que 8 empresas se inscreveram para fazer essa apresentação, mas que apenas 5 serão escolhidas, de quantos modos distintos pode ser feita a escolha das empresas que irão se apresentar?

a) 6.720

b) 120

c) 56

d) 52

e) 200

Comentários:

O número de maneiras de escolher 5 empresas, dentre 8, para apresentarem os seus produtos, corresponde à combinação de 8 escolhe 5:

$$C_{8,5} = \frac{8!}{(8-5)! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 8 \times 7 = 56$$

Gabarito: C

67. (IBADE/2021 - CFQ) Um professor de química dispõe de 6 substâncias químicas para realizar uma experiência com seus alunos. Ele solicita que, a cada aula de laboratório, eles misturem 2 substâncias distintas e anotem os resultados e as propriedades observadas, não devendo repetir a mistura das aulas anteriores. Se há uma única aula de laboratório por semana, em quantas semanas os alunos finalizarão a experiência, realizando todas as combinações possíveis?

a) 12

b) 20

c) 18

d) 15

e) 10

Comentários:

O número de semanas da experiência corresponde ao número de maneiras de combinar 2 substâncias, de um total de 6 substâncias, o que corresponde à combinação de 6 escolhe 2:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2} = 3 \times 5 = 15$$

Gabarito: D

68. (SELECON/2021 - CM Cuiabá) Para a construção de novas escolas, a prefeitura de um município recebeu 10 projetos, entre eles o projeto A. O número máximo de maneiras diferentes de se escolher três desses projetos, de modo que o projeto A seja sempre um dos escolhidos é:

a) 24

b) 36

c) 48

d) 54

e) 10

Comentários:

Precisamos calcular o número de maneiras de escolher 3 projetos, entre eles o projeto A, de um total de 10 projetos. Para isso, vamos escolher outros 2 projetos, além do projeto A, dentre os outros 9 projetos:

$$C_{9,2} = \frac{9!}{(9-2)! \times 2!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7! \times 2} = 9 \times 4 = 36$$

Gabarito: B

69. (UERJ 2021) Em um setor onde trabalham quatro professores e cinco pedagogos, quatro pessoas serão escolhidas para compor uma equipe, sendo pelo menos uma delas professor. Levando em conta apenas as pessoas que podem ser escolhidas, o número máximo de equipes distintas que podem ser formadas é igual a:

a) 84

b) 91

c) 104

d) 121

Comentários:

O enunciado informa que há 4 professores e 5 pedagogos e que 4 pessoas serão escolhidas, de modo que pelo menos uma delas seja professor. Nesses casos de "pelo menos um", o mais simples é calcular o número total de possibilidades e subtrair o número de casos que não atendem à restrição. Ou seja, aqui calculamos o número de formas de selecionar 4 dentre todos as pessoas disponíveis e subtraímos o número de casos que não apresentam professor algum.

O número de maneiras de selecionar 4 pessoas, dentre todas as 9 pessoas disponíveis, corresponde à combinação:

$$C_{9,4} = \frac{9!}{(9-4)! \times 4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$C_{9,4} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 9 \times 2 \times 7 = 126$$

E os casos que não apresentam professor algum são aqueles em que as 4 pessoas escolhidas são pedagogas. Sabendo que há 5 pedagogos, o número de possibilidades de selecionar 4 delas é:

$$C_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)! \times 4!} = \frac{5 \times 4!}{1! \times 4!} = 5$$

Logo, o número de equipes que podem ser formadas com pelo menos um professor é a diferença:

126 - 5 = 121

Gabarito: D

70. (Quadrix 2021/CRP-MG) Em uma determinada competição futebolística, em que cada um dos times enfrentou todos os demais duas vezes, foram realizadas trezentas e oitenta partidas. Com base nessa situação hipotética, assinale a alternativa que apresenta o número de times que participaram da competição.

a) 19

b) 20

c) 22

d) 24

e) 25

Comentários:

O número de partidas entre 2 times quando todos os n times se enfrentam uma vez corresponde ao número de possibilidades de selecionar 2 times dentre n, ou seja, à combinação de 2 elementos dentre n:

$$C_{n,2} = \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{(n-2)! \times 2} = \frac{n \times (n-1)}{2}$$

O enunciado informa que todos os times se enfrentaram 2 vezes e que foram realizadas 380 partidas. Portanto, o dobro do resultado da combinação deve ser igual a 380:

$$2 \times \frac{n \times (n-1)}{2} = 380$$

$$n \times (n-1) = 380$$

Pelas alternativas, podemos observar que $n = 20$ atende a essa equação, pois 20 x 19 = 380. Alternativamente, podemos resolver essa questão utilizando Bháskara:

$$n^2 - n - 380 = 0$$

Aqui, temos $a = 1, b = -1, c = -380$:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-380) = 1 + 1520 = 1521$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1521}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm 39}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+39}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

$$x_2 = \frac{1-39}{2} = \frac{-38}{2} = -19$$

Como o número de times é necessariamente positivo, temos $n = 20$.

Gabarito: B

QUESTÕES COMENTADAS – MULTIBANCAS

Partições

1. (CONSULPLAN/2022 - Pref. Linhares) Uma equipe composta por 7 alunos terá que realizar um trabalho escolar, em que serão necessárias as seguintes atividades: apresentação oral, elaboração do texto-base, confecção dos cartazes de exposição. Dessa forma, se a equipe decidir que serão dois alunos responsáveis pela apresentação oral, dois responsáveis pela elaboração do texto-base e três incumbidos da confecção dos cartazes de exposição, a quantidade de formas diferentes que essa equipe poderá se organizar para realizar o trabalho escolar está compreendida entre:

a) 1 e 200

b) 201 e 500

c) 501 e 1000

d) 1001 e 5040

Comentários:

O enunciado informa que 7 alunos serão divididos em três grupos, que realizarão atividades **distintas**, de modo que dois grupos terão 2 alunos e um grupo terá com 3 alunos.

Como os grupos são diferentes entre si, devemos utilizar a fórmula da **partição ordenada**:

$$\binom{N}{n_1, n_2, n_3} = \frac{N!}{n_1!\, n_2!\, n_3!}$$

$$\binom{7}{3,2,2} = \frac{7!}{3!\,2!\,2!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 2} = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

Que está entre 201 e 500.

Gabarito: B

2. (FUNCERN/2022 - SESCOOP/RN) Uma empresa resolve dividir os seus 10 gerentes em três grupos de trabalho, de modo que o primeiro grupo fique com 4 gerentes, o segundo com 3 gerentes e o terceiro também com 3 gerentes. Foi solicitado que os seus funcionários calculassem o número de maneiras distintas em que essa distribuição poderia ser feita. Realizaram os cálculos corretamente os funcionários que encontraram como resultado

a) 4.200.

b) 8.400.

c) 2.100.

d) 12.600.

Comentários:

O enunciado informa que 10 pessoas serão divididas em 3 grupos, de modo que o primeiro fique com 4 pessoas, o segundo com 3 e o terceiro também com 3. Assim, os grupos são **diferentes** entre si. Portanto, devemos utilizar a fórmula da **partição ordenada**:

$$\binom{10}{4,3,3} = \frac{10!}{4!\,3!\,3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3 \times 2 \times 3 \times 2} = 10 \times 3 \times 4 \times 7 \times 5 = 21 \times 200 = 4200$$

Gabarito: A

3. (Quadrix/2022 - COREN/AP) Em uma equipe de competição de jiu-jitsu, há 6 faixas brancas, 1 faixa azul, 4 faixas roxa, 2 faixas marrons e 1 faixa preta. Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Há exatamente 91 modos de se dividir esses competidores em 7 duplas.

Comentários:

Precisamos dividir 14 competidores em 7 duplas. Como a ordem das duplas **não importa**, ou seja, não há diferença se João e Maria são selecionados como primeira dupla ou como segunda (ou qualquer outra), temos uma **partição não ordenada**:

$$\frac{\binom{m \times p}{p, p, \ldots, p}}{m!} = \frac{(m \times p)!}{m!\,(p!)^m}$$

Em que p corresponde ao número de pessoas por grupo e m corresponde ao número de grupos. Como há m grupos de tamanho p cada, essa fórmula corresponde à partição ordenada $\frac{(m \times p)!}{(p!)^m}$ dividida pela permutação de m grupos.

Sabendo que há $p = 2$ competidores por grupo (dupla) e $m = 7$ duplas, temos:

$$n = \frac{\binom{7 \times 2}{2,2,\ldots,2}}{7!} = \frac{(7 \times 2)!}{7!\,(2!)^7} = \frac{14!}{7! \times 2^7}$$

$$n = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 2^7} = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$$

$$n = 7 \times 13 \times 3 \times 11 \times 5 \times 9 = 135.135$$

Que é diferente de 91.

Acrescente-se que 91 resulta da combinação de 2 elementos dentre 7, o que corresponde ao número de maneiras de escolher ***uma*** *dupla dentre os competidores. Como precisamos dividir todos os competidores em duplas, precisamos utilizar a partição.*

Gabarito: Errado

4. (IDIB/2021 - CREMEPE) Um professor de Matemática quer dividir um grupinho de 6 alunos que estão inquietos em sala em outros dois grupos de 3 pessoas cada, ou três duplas. Assinale a alternativa que possui a quantidade de maneiras diferentes disso acontecer para as duas situações distintas.

a) 15 e 10

b) 20 e 10

c) 10 e 15

d) 10 e 20

Comentários:

Precisamos dividir 6 alunos em 2 trios OU 3 duplas. Como a ordem das duplas **não importa**, temos **partições não ordenadas**. Podemos considerar que, nesse tipo de partição, dividimos o resultado da partição ordenada pelo número de maneiras de permutar os grupos.

No primeiro caso, temos 3 competidores por grupo (trio) e 2 trios:

$$n = \frac{\binom{6}{3,3}}{2!} = \frac{6!}{2 \times 3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3 \times 2 \times 3!} = 5 \times 2 = 10$$

No primeiro caso, temos 2 competidores por grupo (dupla) e 3 duplas:

$$n = \frac{\binom{6}{2,2,2}}{3!} = \frac{6!}{3! \times 2! \times 2! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 2 \times 2} = 3 \times 5 = 15$$

Gabarito: C

5. (QUADRIX/2021 - CREFITO 4) No convite de uma festa de aniversário infantil, foi pedido para que as crianças dissessem se gostavam ou não de refrigerante de uva, empada de frango e pastel de queijo.

Dentre as 50 crianças convidadas, 28 gostam de refrigerante de uva, 15 gostam de empada de frango, 26 gostam de pastel de queijo e duas não responderam ao convite. Dentre as crianças que gostam de refrigerante de uva, 9 gostam de empada de frango e 8 gostam de pastel de queijo. Dentre as que gostam de pastel de queijo, 6 gostam de empada de frango. Todas as crianças que responderam ao convite gostam de pelo menos uma das 3 opções.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Para participar de uma brincadeira na festa, há duas mil quinhentas e vinte maneiras de se formar 4 duplas com as crianças que gostam de pastel de queijo e ao menos uma das outras opções.

Comentários:

O primeiro passo para responder a essa questão é obter as informações de todos os campos do Diagrama de Venn, utilizando a fórmula da união de todos os eventos (R - refrigerante; E - empada; e P - pastel):

$$n(R \cup E \cup P) = n(R) + n(E) + n(P) - n(R \cap E) - n(R \cap P) - n(E \cap P) + n(R \cap E \cap P)$$

O enunciado informa que:

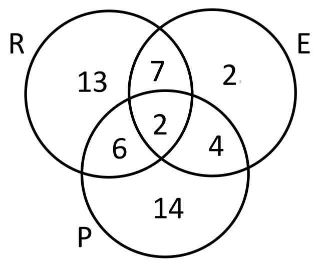
- Das 50 crianças, 2 não responderam e todas as crianças que responderam gostam de pelo menos uma das opções: $n(R \cup E \cup P) = 50 - 2 = 48$;
- 28 crianças gostam de refrigerante: $n(R) = 28$;
- 15 crianças gostam de empada: $n(E) = 15$;
- 26 crianças gostam de pastel: $n(P) = 26$;
- 9 crianças gostam de refrigerante e empada: $n(R \cap E) = 9$;
- 8 crianças gostam de refrigerante e pastel: $n(R \cap P) = 8$; e
- 6 crianças gostam de pastel e empada: $n(E \cap P) = 6$.

Com esses dados, podemos calcular a interseção $n(R \cap E \cap P)$:

$$48 = 28 + 15 + 26 - 9 - 8 - 6 + n(R \cap E \cap P)$$

$$n(R \cap E \cap P) = 48 - 69 + 26 = 2$$

Agora, podemos preencher o diagrama de Venn:



Assim, o número de crianças que gostam de pastel e pelo menos uma das outras opções é a soma:

$$6 + 4 + 2 = 12$$

Para formarmos 4 duplas, totalizando 8 crianças, a partir dessas 12, vamos primeiro escolher quais crianças formarão duplas, o que corresponde à combinação de 12 escolhe 8:

$$C_{12,8} = \frac{12!}{(12-8)! \times 8!} = \frac{12!}{4! \times 8!}$$

Não vamos efetuar essa conta agora. Uma vez escolhidas as 8 crianças que formarão as 4 duplas, podemos calcular o número de maneiras de dividi-las, utilizando a fórmula da partição não ordenada, uma vez que a ordem das duplas não importa.

$$\frac{\binom{8}{2,2,2,2}}{4!} = \frac{8!}{4! \times 2! \times 2! \times 2! \times 2!} = \frac{8!}{4! \times 16}$$

Pelo princípio multiplicativo, o número total de maneiras de distribuir as 12 crianças em 4 duplas é o produto:

$$n = \frac{12!}{4! \times 8!} \times \frac{8!}{4! \times 16} = \frac{12!}{4! \times 4! \times 16} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 16}$$

$$n = 11 \times 5 \times 9 \times 7 \times 3 \times 5 = 51.975$$

Que é diferente de 2.520.

Gabarito: Errado

6. (IADES/2021 - BRB) Suponha que um banco de investimentos realizou um processo seletivo no qual foram contratados cinco novos analistas de tecnologia da informação, que serão distribuídos em duas agências, uma no bairro da Asa Sul e outra no bairro da Asa Norte. A agência da Asa Sul receberá três analistas e a agência da Asa Norte receberá dois analistas. De quantas maneiras distintas os cinco analistas recém-contratados podem ser distribuídos entre as duas agências?

a) 8

b) 10

c) 12

d) 15

e) 21

Comentários:

Para distribuir 5 analistas em duas agências distintas, uma com 3 analistas e outra com 2 analistas, podemos utilizar a fórmula da **partição ordenada**:

$$\binom{5}{3,2} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 5 \times 2 = 10$$

Gabarito: B

QUESTÕES COMENTADAS – MULTIBANCAS

Lemas de Kaplansky

1. (CEBRASPE 2021/SEDUC-AL) O próximo item apresenta uma situação hipotética a ser julgada, acerca de problemas matemáticos envolvendo situação de uma escola.

Em 5 cadeiras de um auditório, só podem sentar professores e alunos, de tal forma que 2 alunos não podem sentar-se juntos, para se evitar conversa. Nessa situação hipotética, há exatamente 9 possibilidades diferentes de 5 pessoas, entre professores e alunos, sentarem-se nas 5 cadeiras.

Comentários:

Precisamos encontrar o número de possibilidades de sentar 5 pessoas, dentre professores e alunos, em 5 cadeiras, de modo que 2 alunos não estejam juntos. Essa questão não distingue os alunos entre si ou os professores entre si. A ideia aqui é encontrar o número de maneiras de organizar "plaquinhas" de "professor" e de "aluno" nos 5 assentos, considerando essa restrição.

Para resolver essa questão, precisamos separar o problema em cenários. O primeiro cenário é aquele em que as 5 pessoas são professores. Nessa situação, há **1** possibilidade para as "plaquinhas", qual seja, todas elas sendo de "professor".

Como segundo cenário, podemos ter 1 aluno e 4 professores. Nessa situação, há 5 assentos possíveis para o aluno, logo **5** possibilidades de organizar as planilhas.

É no terceiro cenário, com 2 alunos e 3 professores que podemos aplicar o primeiro lema de Kaplansky. Para isso, vamos colocar os 3 professores entre possíveis espaços:

___ P ___ P ___ P ___

E os alunos vão se sentar em 2 desses possíveis espaços. Por exemplo, escolhendo os dois primeiros espaços, teremos A P A P P. Desse modo, garantimos que os alunos não se sentarão juntos. Sabendo que há 4 espaços, dos quais 2 serão escolhidos, temos a combinação de 2 dentre 4:

$$f(n,p) = C_{n-p+1,p}$$

$$f(5,2) = C_{5-2+1,2} = C_{4,2}$$

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2} = 2 \times 3 = \mathbf{6}$$

E o último cenário é aquele com 3 alunos e 2 professores. Podemos utilizar novamente o lema de Kaplansky, ou entender que há apenas **1** maneira de sentar essas 5 pessoas, qual seja A P A P A. Este é o último cenário, pois não há como sentar 4 alunos e 1 professor, de modo que aluno algum fique ao lado de outro.

Como esses cenários são alternativos, isto é, ocorrerá um **OU** outro, o número total de possibilidades corresponde à soma dessas possibilidades (princípio aditivo):

$$1 + 5 + 6 + 1 = 13$$

Que é diferente de 9.

Gabarito: Errado

2. (FGV/2015 – SSP-AM) Sete pessoas formam uma fila e duas delas serão escolhidas para receber um brinde. O número de maneiras diferentes de escolher duas pessoas da fila que não sejam vizinhas é:

a) 15

b) 18

c) 20

d) 24

e) 30

Comentários:

Considerando que duas pessoas vizinhas não podem ser escolhidas, podemos utilizar o 1º lema de Kaplansky para resolver essa questão.

Sabendo que há 7 pessoas na fila e que 2 serão escolhidas, então 5 pessoas não serão escolhidas (N). Assim, as pessoas escolhidas ocuparão 2 posições dentre as seguintes possibilidades (_):

_ N _ N _ N _ N _ N _

Logo, há 6 posições possíveis para a escolha de 2 (combinação):

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{6!}{4! \times 2} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

Gabarito: A

3. (FGV/2021 - Pref. Paulínia) O número de anagramas da palavra PAULINIA que não têm duas consoantes juntas é

a) 3600

b) 4800

c) 6400

d) 10800

e) 14400

Comentários:

Podemos utilizar o primeiro lema de Kaplansky para garantir que não teremos duas consoantes juntas. Nesse sentido, vamos primeiro escolher os **lugares** das 3 consoantes entre as 5 vogais, sem nos preocuparmos, neste primeiro momento, com qual letra ocupará cada posição:

__ V __ V __ V __ V __ V __

As consoantes ocuparão 3 desses 6 espaços, pois assim garantimos que não haverá consoantes juntas. O número de maneiras de escolher 3 desses 6 lugares é a combinação de 3 elementos, dentre 6:

$$f(n,p) = C_{n-p+1,p}$$

$$f(8{,}3) = C_{8-3+1,3} = C_{6,3}$$

$$C_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 5 \times 4 = 20$$

Agora que encontramos o número de maneiras de organizar as posições das consoantes e das vogais, precisamos encontrar o número de maneiras de reorganizar as diferentes consoantes e as vogais em cada posição. Por exemplo, supondo uma posição fixa V C V V C V C V, de quantas maneiras podemos organizar as 3 consoantes e as 5 vogais nessas posições.

Como há 3 consoantes diferentes, o número de maneiras de reorganizá-las corresponde à permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Como há 5 vogais, sendo 2 As e 2 Is, o número de maneiras de reorganizá-las corresponde à permutação de 5 elementos com repetição de 2 elementos e de 2 elementos:

$$P_5^{2,2} = \frac{5!}{2! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{2} = 5 \times 2 \times 3 = 30$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de anagramas que não apresentam duas vogais juntas é:

$$20 \times 6 \times 30 = 3600$$

Gabarito: A

LISTA DE QUESTÕES – MULTIBANCAS

Princípios de Contagem

1. (AVANÇASP/2023 - Pref. Americana/SP) Em uma repartição pública trabalham 12 homens e 08 mulheres. O número máximo de duplas distintas que se pode formar contendo apenas um homem e uma mulher dessa repartição é igual a:

a) 84

b) 50

c) 72

d) 68

e) 96

2. (FCM /2023 - Pref. Contagem/MG) Considere todos os números de três algarismos distintos que podem ser formados utilizando os algarismos 1, 2, 4, 5, 7 e 8, como, por exemplo, os números 175 ou 852. Escrevendo-se todos esses números em ordem crescente, o número que ocupa a 50ª posição é

a) 417

b) 428

c) 452

d) 517

e) 518

3. (IUDS/2022 - CORE/CE) Alice foi viajar e levou 8 blusas e 3 calças em sua mala. De quantas maneiras diferentes ela poderá combinar essas peças de roupa?

a) 16

b) 19

c) 24

d) 28

4. (AMAUC/2022 - Pref. Peritiba) Gisele comprou 5 blusas, 4 saias e 3 sandálias. Quantos conjuntos diferentes ela pode formar com essas peças?

a) Ela pode formar 60 conjuntos diferentes.

b) Ela pode formar 27 conjuntos diferentes.

c) Ela pode formar 25 conjuntos diferentes.

d) Ela pode formar 40 conjuntos diferentes.

e) Ela pode formar 72 conjuntos diferentes.

5. (COPESI-UFPI/2022 - Pref. Oeiras) Um restaurante possui disponível para montar uma refeição, quatro sabores de suco, três tipos de sobremesa e três opções de prato principal. Para montar uma refeição, é necessário escolher uma opção de suco, uma opção de prato principal e uma opção de sobremesa. De quantas maneiras distintas é possível montar uma refeição?

a) 36.

b) 48.

c) 72.

d) 96.

e) 108.

6. (UNESC/2022 - Pref. Lagunas/SC) Uma lanchonete oferece 18 tipos de sanduíche, 10 tipos de suco e 16 tipos de sorvete. De quantas maneiras diferentes é possível montar uma refeição com um tipo de sanduíche, um tipo de suco e um tipo de sorvete?

a) É possível montar essa refeição de 1.320 maneiras diferentes.

b) É possível montar essa refeição de 2.460 maneiras diferentes.

c) É possível montar essa refeição de 3.550 maneiras diferentes.

d) É possível montar essa refeição de 2.880 maneiras diferentes.

e) É possível montar essa refeição de 1.960 maneiras diferentes.

7. (QUADRIX/2022 - Pref. Lagunas/SC) Em uma loja, há 6 tipos de refrigerante, 4 tipos de queijo e 3 tipos de carne. Com base nesse caso hipotético, julgue o item.

Há exatamente 13 modos de uma pessoa comprar um refrigerante, um queijo e uma carne nessa loja.

8. (COPESI-UFPI/2022 - Pref. Oeiras) Uma pequena loja de roupas possui disponíveis três tipos de blusa, três tipos de bermuda e três tipos de calçados; os modelos de calçados disponíveis são tênis, sandália e alpargata. Lucas chegou à loja para comprar uma blusa, uma bermuda e um calçado, sabendo que em relação ao calçado, Lucas vai comprar uma alpargata ou um tênis. De quantas maneiras distintas Lucas pode realizar a sua compra?

a) 3

b) 6

c) 9

d) 12

e) 18

9. (Quadrix/2022 - CRC/PR) O cardápio de um restaurante apresenta quatro tipos de entrada, seis tipos de prato principal e três tipos de sobremesa. Para participar de determinada promoção nesse restaurante, cada cliente deverá escolher um item de cada uma dessas três categorias. Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Há menos de setenta formas de um cliente participante da promoção escolher seus pratos.

10. (FEPESE/2022 - Pref. Chapecó) Um exame é formado por 8 questões do tipo verdadeiro ou falso, e a resposta de cada questão deve ser passada para um cartão de respostas. Um estudante que não se preparou para o exame irá responder a cada questão de maneira aleatória. De quantas maneiras diferentes ele pode preencher o seu cartão de respostas? Assumimos que ele escolheu uma resposta, entre verdadeiro e falso, para cada uma das questões, isto é, não anulou nem deixou questões em branco.

a) Mais de 350

b) Mais de 300 e menos de 350

c) Mais de 250 e menos de 300

d) Mais de 200 e menos de 250

e) Menos de 200

11. (CONSULPLAN/2022 - Pref. Irauçuba) Em um restaurante chinês, a promoção do dia permite montar um combo com três tipos de sushis: hot, uramaki e hossomaki. Existem 5 sabores para o hot, 6 para o uramaki e 10 para o hossomaki. De quantas formas se pode fazer o combo, levando-se em consideração que teve, pelo menos, um tipo de sushi?

a) 462

b) 461

c) 460

d) 458

12. (IBFC/2022 - MGS) A Placa Mercosul é o novo padrão para a Placa de Identificação Veicular no Brasil, criada num acordo entre os países membros do Mercosul. A nova placa é constituída de sete caracteres, sendo os três primeiros letras do alfabeto (26 letras), o quinto caractere também corresponde a uma letra do mesmo alfabeto, já o quarto, o sexto e o sétimo caracteres correspondem a algarismos entre 0 e 9 (10 algarismos). Dessa forma, o número de placas Mercosul, possíveis de serem formadas, correspondem a:

a) 456.976.000

b) 175.760.000

c) 358.800.000

d) 656.000.000

13. (IDECAN/2022 - CBM/MS) Determine a quantidade de números pares com quatro algarismos que podemos formar com os números 1, 5, 6, 7 ,8.

a) 250

b) 230

c) 180

d) 160

e) 120

14. (CETREDE/2022 - Pref. Ipaporanga) De quantas formas diferentes uma pessoa pode viajar da cidade A para a cidade D, passando necessariamente pelas cidades B e C uma única vez e tendo 5 estradas disponíveis para viajar de A para B, 8 de B para C e 12 de C para D?

a) 480

b) 350

c) 355

d) 360

e) 678

15. (IBFC/2022 - MGS) A, B, C e D são cidades de uma região metropolitana. Existem três rodovias entre A e C, quatro entre B e D, duas entre A e B e cinco entre C e D. Dessa forma, para ir de A até D existe um número de rotas possíveis pelas rodovias que corresponde a:

a) 14

b) 20

c) 23

d) 120

16. (CONSULPLAN/2022 - SEED/PR) O prédio de uma faculdade possui três portas de entrada que levam a um saguão onde estão disponíveis dois elevadores e uma escada para acessar os andares do prédio. Um visitante deve dirigir-se ao 5º andar passando por uma das portas de entrada e utilizando um dos meios de acesso aos andares da instituição. De quantas maneiras distintas ele pode chegar ao seu destino?

a) 5

b) 6

c) 9

d) 12

17. (SELECON/2022 - CM CG/MS) Em uma repartição pública, trabalham x homens e y mulheres. A quantidade máxima de duplas diferentes que se pode formar com um homem e uma mulher que trabalham nessa repartição é igual a:

a) x+y

b) x.y

c)x^y

d) y^x

18. (Quadrix/2022 - CRM/SC) As cores em computadores geralmente são identificadas por um código chamado RGB. Usando-se esse código, cada cor é expressa por 6 números, cada um variando entre 0 e 15. Assim, os 2 primeiros números representam o vermelho na cor final, os seguintes representam o verde e os últimos 2 números, o azul. Considerando essas informações, julgue o item.

Com esse código, é possível descrever 256^3 cores diferentes.

19. (Quadrix/2022 - CRM/SC) As cores em computadores geralmente são identificadas por um código chamado RGB. Usando-se esse código, cada cor é expressa por 6 números, cada um variando entre 0 e 15. Assim, os 2 primeiros números representam o vermelho na cor final, os seguintes representam o verde e os últimos 2 números, o azul. Considerando essas informações, julgue o item.

Existem apenas 25 cores em que os dois números que descrevem o verde são maiores que 10.

20. (Quadrix/2022 - CRM/SC) As cores em computadores geralmente são identificadas por um código chamado RGB. Usando-se esse código, cada cor é expressa por 6 números, cada um variando entre 0 e 15. Assim, os 2 primeiros números representam o vermelho na cor final, os seguintes representam o verde e os últimos 2 números, o azul. Considerando essas informações, julgue o item.

Das cores que são expressas apenas por números menores que 4, mais de 4.000 contêm 2 ou 3.

21. (COMPERVE/2022 - CREF 16/RN) Uma academia de ginástica contratou dois alunos de graduação em Educação Física para atuarem como estagiários. Cada um deles deve desenvolver suas atividades em apenas um dia da semana, no período de segunda-feira a sexta-feira. Se eles não trabalham no mesmo dia, a quantidade de escalas distintas de trabalho possíveis para eles, em uma semana, é de

a) 20

b) 10

c) 25

d) 15

22. (La Salle/2022 - São Leopoldo) Um bar possui 7 portas. De quantas maneiras é possível entrar nesse bar por uma porta e sair por uma porta diferente?

a) 02 maneiras.

b) 13 maneiras.

c) 14 maneiras.

d) 42 maneiras.

e) 49 maneiras.

23. (CONSULPLAN/2022 - SEED/PR) Para apresentar um trabalho escolar, os amigos André, Bruno, Carlos e Daniel colocaram 4 cadeiras em uma fila na frente da sala de aula. Considerando que André e Bruno precisam, necessariamente, sentar nas extremidades, de quantas maneiras distintas todos os amigos podem se acomodar nas cadeiras?

a) 2.

b) 4.

c) 6.

d) 12.

24. (CONSULPLAN/2022 - Pref. Rosário) Patrícia tem uma rara coleção com 56 pares de brincos que são guardados em pequenos recipientes, numerados de 1 a 56. Atendendo ao pedido de sua irmã, Patrícia retirou, de maneira aleatória, três recipientes. O número de retiradas dos três recipientes de forma que o segundo seja o de número 27 é:

a) 2970

b) 3080

c) 3192

d) 3228

25. (CONSULPLAN/2022 - Pref. Caeté) Em seu guarda-roupa, Luciana armazena 80 pares de sandálias alocados em caixas devidamente enumeradas de 1 a 80. Após a solicitação de uma de suas amigas, Luciana pegou, aleatoriamente, três caixas de seu guarda-roupa. O número de retiradas diferentes das três caixas que Luciana pode realizar de forma que a segunda caixa seja a de número 18 é igual a:

a) 6162

b) 6320

c) 6480

d) 6796

26. (IBFC/2022 - MGS) Paulo esqueceu a senha que utiliza na fechadura eletrônica para abrir a porta de sua casa. Se a senha é formada por 3 números, de 0 a 9, todos distintos, então o total de senhas possíveis de senhas que Paulo deve digitar para acertar na penúltima tentativa é:

a) 719

b) 999

c) 721

d) 659

27. (SELECON/2022 - Pref. São Gonçalo/RJ) Júlia dispõe de 8 cores diferentes para pintar a figura representada a seguir, formada por três quadrados.

A	B	C

Sabe-se que:

- **os quadrados A e C devem ser coloridos pela mesma cor;**
- **cada quadrado deve ser totalmente preenchido por uma única cor;**
- **a cor usada no quadrado B deve ser diferente da usada no quadrado A.**

O número máximo de pinturas distintas que essa figura pode ter é igual a:

a) 64

b) 56

c) 32

d) 24

28. (INAZ do Pará/2022 - SAGAZ) As pesquisas mostram que os jovens não se sentem pertencentes à comunidade escolar. Por isso, o protagonismo juvenil é um dos objetivos do Novo Ensino Médio do Brasil. A escola municipal "Antônio da Silveira", com o intuito de fazer com que os alunos se sintam partícipes na comunidade escolar, fez uma eleição para criarem a bandeira da escola. A primeira decisão foi de que a bandeira teria três listras horizontais com cores diferentes, veja a imagem abaixo.

Cor 1
Cor 2
Cor 3

As listras serão escolhidas dentre cinco opções de cores. De quantas formas diferentes essa bandeira pode ser configurada com as opções existentes?

a) 35

b) 45

c) 55

d) 60

e) 65

29. (IDECAN/2022 - SEFAZ/RR) Uma bandeira com 7 listas em branco, deve ser pintada. Temos 11 cores, cada lista deve ter uma única cor, uma cor usada não pode ser reutilizada. De quantas formas essa bandeira pode ser pintada?

a) 1.543.200

b) 1.663.200

c) 1.423.200

d) 1.373.200

e) 1.293.200

30. (SELECON/2022 - CM Dourados) Existem exatamente N maneiras diferentes de três pessoas estacionarem seus carros em uma garagem que possui apenas nove vagas. O valor de N será igual a:

a) 3x9

b) 3^9

c) 9^3

d) 9x8x7

31. (AVANÇASP/2022 - Pref. Laranjal Paul) Em uma corrida de fórmula 1, há 20 pilotos disputando a 1ª, 2ª e 3ª colocação. Sabendo que esses lugares dão, nessa ordem, 25, 18 e 15 pontos para o campeonato.

Assim, podemos afirmar com certeza que há:

a) 6840 formas de acontecer o pódio.

b) 6750 formas de acontecer o pódio.

c) 5814 formas de acontecer o pódio.

d) 8000 formas de acontecer o pódio.

e) 15625 formas de acontecer o pódio.

32. (CONSULPLAN/2022 - Pref. Caeté) Em um torneio mundial de vôlei participam 30 seleções, representando, cada uma, um país diferente. Cada equipe joga duas vezes com as demais equipes e vence o campeonato a seleção que alcançar o maior número de pontos. Podemos afirmar que o número de maneiras distintas para a classificação dos três últimos lugares é:

a) 6.090

b) 12.180

c) 24.360

d) 48.720

33. (FAPEC/2022 - UFMS) Em uma corrida de Fórmula 1, iniciaram 20 pilotos partindo do grid de largada. Porém, no decorrer da corrida, alguns carros tiveram problemas e não completaram a prova, que possuía 71 voltas.

Abandonaram a corrida, por problemas no motor, 4 pilotos; 2 pilotos, por colisão com o muro; e 3 pilotos, por pneu(s) furado(s). Com a bandeira quadriculada balançando ao final da última volta, temos algumas posições ocupadas no resultado da corrida: Lewis Hamilton, piloto da Mercedes, terminou na 5ª colocação; Max Verstappen, da Redbull, na 6ª posição; e Fernando Alonso, da Alpine, terminou em 9º lugar. Com as informações dispostas, determine de quantas maneiras é possível formar um pódio de 1º, 2º e 3º colocados nessa corrida.

a) 40.320

b) 5.040

c) 756

d) 336

e) 120

34. (IBFC/2022 - MGS) A senha de um banco é formada por três consoantes distintas, considerando o alfabeto de 26 letras.

Nessas condições, o total de senhas possíveis de serem formadas é igual a:

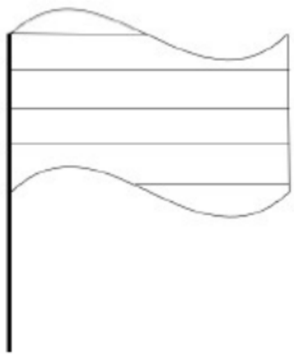
a) 1330

b) 7980

c) 3990

d) 15600

35. (CONSULPLAN/2022 - SEED/PR) A bandeira a seguir será pintada utilizando as cores azul, vermelho, verde e preto. Cada listra será pintada de uma única cor e as listras que estão lado a lado não poderão ter cores iguais.



O número de formas distintas de se pintar essa bandeira, seguindo as condições, é:

a) 3^6

b) 4^6

c) 4×3^5

d) 4 x 6

36. (AOCP/2022 - PM/ES) Um XILOFONE deve ser montado escolhendo 7 teclas de tamanhos distintos, mas sempre obedecendo, da esquerda para a direita, a ordem crescente de tamanho. Para cada tecla, há disponíveis 5 cores diferentes: branco, amarelo, azul, verde e vermelho.

De quantas maneiras distintas é possível montar esse XILOFONE, sabendo que teclas vizinhas não podem ter a mesma cor?

a) 16.384

b) 20.480

c) 40.320

d) 5.040

e) 78.125

37. (CONSULPLAN/2022 - Pref. Caeté) Jéssica foi em uma popular rede de eletrodomésticos e, no momento em que foi pagar por seus produtos, não conseguiu lembrar a senha de quatro dígitos do seu cartão de crédito. Entretanto, Jéssica sabe que essa senha era composta por algarismos distintos, formava um número par e começava com o algarismo 8.

Qual o número máximo de tentativas diferentes Jéssica possui para acertar a senha?

a) 66

b) 112

c) 224

d) 280

38. (AOCP/2022 - PM/ES) Os 60 policiais militares que compõem o efetivo da Banda Militar receberam uma identificação numérica. Esse número é par e é formado por 4 números distintos escolhidos entre os números {2, 3, 4, 5, 6}. Se cada policial possui uma única numeração, quantas identificações, utilizando o mesmo critério, ainda sobram para possíveis contratações de novos membros?

a) 6

b) 8

c) 12

d) 20

e) 72

39. (IBFC/2022 - MGS) Assinale a alternativa que apresenta o total de senhas de quatro dígitos possíveis de serem formadas utilizando números de 1 a 5, sem repetição cujo primeiro dígito é par.

a) 1250

b) 120

c) 48

d) 96

40. (AOCP/2022 - IF/RO) Para irmos da cidade A para a cidade B, temos 4 caminhos distintos. Para ir da cidade B para a cidade C, temos 5 caminhos distintos. De quantas maneiras possíveis podemos ir da cidade A até a cidade C, passando pela cidade B, e depois voltar para a cidade A, passando novamente pela cidade B, sem usar caminhos repetidos?

a) 240

b) 480

c) 120

d) 400

e) 200

41. (CPCP/2022 - UTFPR) A quantidade de números ímpares com três algarismos distintos que podemos formar com os algarismos 0, 1, 3, 4, 8, 9, é:

a) 60

b) 48

c) 36

d) 72

e) 75

42. (RBO/2022 - SMFA-BH) Marcelo possui um cartão de crédito de uma determinada instituição financeira e a senha desse cartão deve ser formada exclusivamente por algarismos de 0 a 9. Essa instituição permite que o proprietário do cartão utilize, somente, senhas de cinco algarismos distintos e que a senha seja sempre um número par. Assinale a alternativa que apresenta o número de senhas possíveis para o cartão de crédito de Marcelo.

a) 3.600

b) 25.200

c) 75.600

d) 7.200

e) 15.120

43. (CONSULPLAN/2022 - PM/RN) Em uma rede hospitalar, cinco guaritas foram construídas para garantir a segurança do local. Devido a restrições orçamentárias, quatro vigilantes foram contratados para ocuparem os cinco postos de trabalho. Sabe-se que a guarita localizada próximo à entrada do hospital deve ser ocupada sempre por apenas um vigilante. Por outro lado, as demais guaritas devem ser ocupadas por, no máximo, um vigilante. Considerando as informações, de quantas maneiras distintas os vigilantes podem ser distribuídos entre seus postos de trabalho?

a) 12

b) 24

c) 48

d) 96

e) 120

44. (SELECON/2022 - CM São Gonçalo) O edital de um concurso informa que o total de questões da prova a ser realizada pelos candidatos é igual a 30. Sabe-se que cada questão apresenta quatro opções possíveis de respostas, sendo apenas uma a correta. Existem, então, exatamente 2^n maneiras diferentes de um candidato responder todas as questões dessa prova. O valor de n será igual a:

a) 30

b) 60

c) 90

d) 120

45. (Quadrix/2022 - CRC/AC) O número que permanece igual quando lido de trás para a frente é chamado de palíndromo. Considerando essa informação, é correto afirmar que existem

a) 72 números naturais palíndromos de 3 dígitos.

b) 81 números naturais palíndromos de 3 dígitos.

c) 90 números naturais palíndromos de 3 dígitos.

d) 100 números naturais palíndromos de 3 dígitos.

46. (Quadrix/2022 - CRA/PR) João ganhou 48 bolinhas de gude de seu avô, mas, como não quer ficar com todas, decidiu dividi-las com até 47 de seus amigos. A única condição que ele impôs é a de que, durante a divisão, cada uma das pessoas, contando o próprio João, deverá sair com um número idêntico de bolinhas, sem sobrar nenhuma. Com base nessa situação hipotética, julgue o item a seguir.

Existem 10 quantidades diferentes de amigos que João poderia chamar, respeitando a condição imposta.

47. (Legalle/2022 - Pref. Hulha Negra/RS) Ana decidiu comprar um único produto entre: 8 tipos de pastas de dente, 19 tipos de fio dental e 7 tipos de clareamento dental. O número de modos com que ela pode escolher um desses produtos é:

a) 34

b) 65

c) 870

d) 1064

e) 2012

48. (GUALIMP/2022 - Pref. Camro/RJ) Em uma urna, foram colocadas 12 bolas verdes, 14 bolas azuis, 16 bolas amarelas e 18 bolas cinzas. Todas as bolas são iguais (exceto pelas cores). De olhos totalmente vendados, Ana quer retirar 2 bolas de cor azuis. Escolhendo aleatoriamente e sem reposição, qual a quantidade mínima de bolas que Ana deve retirar para garantir que tenha retirado 2 bolas azuis?

a) 50

b) 48

c) 46

d) 44

49. (IADES/2021 - CRN1/DF) Uma lanchonete oferece uma promoção na compra de um suco e um salgado. Um cliente pode optar entre 4 sabores diferentes de suco e 3 tipos distintos de salgado. De quantas formas distintas uma pessoa pode escolher sua promoção?

a) 7

b) 10

c) 12

d) 15

e) 20

50. (IBADE/2021 - IAPEN/AC) Pedro precisou escolher em sua equipe de trabalho uma das 12 mulheres e um entre os 16 homens para fazer um curso de especialização e resolveu fazer um sorteio. Quantas duplas ele precisou formar para fazer o sorteio?

a) Ele precisou formar 1216 duplas

b) Ele precisou formar 100 duplas

c) Ele precisou formar 28 duplas

d) Ele precisou formar 192 duplas

e) Ele precisou formar 120 duplas

51. (FUNDATEC/2021 - CRF/PR) Durante uma reunião plenária, é necessária uma equipe formada por exatamente: um secretário, um segurança e um auxiliar de serviços gerais. Se para formar essa equipe temos à disposição 4 secretários, 3 seguranças e 5 auxiliares de serviços gerais, quantas equipes distintas podem ser organizadas para atuarem em determinada reunião plenária?

a) 60

b) 40

c) 30

d) 20

e) 12

52. (IBRASP/2021 - Pref. Rio Grande) Gabriel tem 12 camisetas, 8 bermudas e 4 bonés. Ao todo, de quantos modos diferentes Gabriel poderá se vestir, devendo usar sempre uma camiseta, uma bermuda e um boné?

a) 192

b) 275

c) 384

d) 416

e) 568

53. (IADES/2021 - CRN1/DF) No refeitório de uma empresa, há 4 opções de grãos, 3 opções de legumes e 4 opções de verduras.

De quantas maneiras uma pessoa pode formar um prato escolhendo uma opção de grão, uma de legume e uma de verdura?

a) 36

b) 48

c) 58

d) 64

e) 80

54. (IBADE/2021 - CM Vila Velha) O almoço executivo no restaurante Comer Bem possui 2 opções de entrada, 3 opções de prato principal e 2 opções de sobremesa. Para beber, pode-se escolher entre refrigerante, suco, água e cerveja.

João vai começar a frequentar esse restaurante diariamente, e quer pedir em cada visita uma combinação diferente de opções. Quantos dias João conseguirá pedir cardápios distintos?

a) 4

b) 60

c) 12

d) 48

e) 36

55. (OMNI/2021 - Pref. Rio Negrinho) Vinícius e Érica foram em uma pizzaria, chegando lá, decidiram pedir uma pizza metade salgada e a outra metade doce. Para as pizzas salgadas, tinham as opções de calabresa, frango, lombo e vegetariana; para a metade doce da pizza, tinham as opções de chocolate, morango e amendoim. O casal, podia escolher ainda, o recheio da borda da pizza, para a metade salgada da pizza ,podiam escolher o recheio de catupiry e cheddar; e a pizza doce, podiam escolher o recheio da borda entre os sabores de leite condensado e doce de leite. Quantas possibilidades, entre sabores de pizza e recheio da borda, o casal pode escolher?

a) 48

b) 36

c) 14

d) 4

56. (CETREDE/2021 - Pref. Icapuí) De quantas maneiras pode-se colorir uma tabela com 3 linhas, utilizando as cores vermelha, azul e verde?

a) 3

b) 6

c) 9

d) 27

e) 81

57. (IADES/2021 - CAU/MS) Para acessar o Sistema de Informação e Comunicação do Conselho de Arquitetura e Urbanismo (SICCAU), um servidor de suporte técnico deve utilizar o reconhecimento biométrico e um código de 4 dígitos. Quantos códigos distintos são formados exclusivamente por dígitos ímpares?

a) 25

b) 125

c) 625

d) 1000

e) 1250

58. (UFES/2021) A quantidade de números inteiros positivos de cinco algarismos com, pelo menos, um algarismo ímpar é igual a

a) 53.200

b) 62.400

c) 72.600

d) 87.500

e) 97.300

59. (UFES/2021) A quantidade de números inteiros positivos de cinco algarismos com, pelo menos, dois algarismos idênticos é igual a

a) 26.360

b) 38.448

c) 48.322

d) 54.546

e) 62.784

60. (OBJETIVA/2021 - Pref. Venâncio Aires) Certo campeonato de xadrez é disputado por 8 competidores. Sendo assim, de quantas maneiras distintas o pódio (três colocações) dessa competição pode ser formado?

a) 336.

b) 324.

c) 312.

d) 296.

e) 288.

61. (OBJETIVA/2021 - Pref. Venâncio Aires) Pedro possui 5 tintas de cores distintas para pintar 3 objetos diferentes. Sabendo-se que objetos distintos devem ter cores que não são iguais, ao todo, de quantos modos diferentes ele pode escolher a forma como que irá pintar esses objetos:

a) 60

b) 55.

c) 50.

d) 45.

e) 40.

62. (OBJETIVA/2021 - Pref. Venâncio Aires) Quantas senhas distintas, compostas por 4 algarismos, podem ser formadas utilizando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, de modo que não se tenha algarismos repetidos:

a) 54

b) 60

c) 96

d) 120

e) 102

63. (FUNDEP/2021 - Pref. Itapecerica) Augusto vai fazer um cadastro em um site e precisa criar uma senha. Para a construção dessa senha, ele deve fazer uma combinação de seis números sem repetição. Para isso, deverá utilizar os algarismos 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. O número possível de senhas, considerando os algarismos apresentados, que podem ser criadas é

a) 720

b) 5.040

c) 30.240

d) 151.200

64. (AVANÇASP/2021 - Rio Claro) O Número de Identificação Pessoal (PIN) é o nome usual para as senhas de quatro caracteres utilizados em chips de telefonia celular. Quantas senhas podem ser formadas de modo que sejam utilizados, somente, algarismos distintos e que o último dígito seja par?

a) 2540

b) 2520

c) 2550

d) 2530

e) 2510

65. (IBRASP/2021 - Pref. Rio Grande) Supondo que todos os alvarás emitidos por certo órgão público são compostos por um código de validação que permite a qualquer pessoa verificar a autenticidade do documento. Sabe-se que este código de validação é composto por quatro dígitos distintos, sendo sempre uma letra e um algarismo, uma letra e um algarismo, nesta ordem.

Considerando-se o alfabeto brasileiro composto por 26 letras, a quantidade máxima de códigos de validação distintos que poderão ser formados é igual a:

a) 45.600

b) 58.500

c) 67.600

d) 72.000

e) 81.900

66. (FAPEC/2021 - PC/MS) Diocrezas é uma anciã que atuou como professora de Matemática por muitos anos em Campo Grande - MS. Como algumas vezes lhe faltou a memória, ela escreveu dicas para lembrar sua senha do cartão do banco (os dígitos são todos distintos, e vão da esquerda para a direita).

Confira as dicas e veja a figura abaixo, na qual são colocados os dígitos da senha:

1º Vogal do meu nome.
2º Número primo do intervalo [0, 9].
3º Uma letra do meu nome.
4º Um número quadrado perfeito do intervalo [0, 9].
5º Uma letra do nosso alfabeto.
6º Um algarismo do intervalo [1, 9].

Assinale quantas são as possibilidades para formar a senha da professora Diocrezas:

a) 64.512 possibilidades

b) 82.944 possibilidades

c) 93.312 possibilidades

d) 116.640 possibilidades

e) 126.360 possibilidades

GABARITO

1. LETRA E
2. LETRA C
3. LETRA C
4. LETRA A
5. LETRA A
6. LETRA D
7. ERRADO
8. LETRA E
9. ERRADO
10. LETRA C
11. LETRA B
12. LETRA A
13. LETRA A
14. LETRA A
15. LETRA C
16. LETRA C
17. LETRA B
18. CERTO
19. ERRADO
20. CERTO
21. LETRA A
22. LETRA D
23. LETRA B
24. LETRA A
25. LETRA A
26. LETRA A
27. LETRA B
28. LETRA D
29. LETRA B
30. LETRA D
31. LETRA A
32. LETRA C
33. LETRA D
34. LETRA B
35. LETRA C
36. LETRA B
37. LETRA C
38. LETRA C
39. LETRA C
40. LETRA A
41. LETRA B
42. LETRA E
43. LETRA D
44. LETRA B
45. LETRA C
46. ERRADO
47. LETRA A
48. LETRA B
49. LETRA C
50. LETRA D
51. LETRA A
52. LETRA C
53. LETRA B
54. LETRA D
55. LETRA A
56. LETRA D
57. LETRA C
58. LETRA D
59. LETRA E
60. LETRA A
61. LETRA A
62. LETRA D
63. LETRA D
64. LETRA B
65. LETRA B
66. LETRA A

LISTA DE QUESTÕES – MULTIBANCAS

Permutação

1. (INAZ do Pará/2022 - SAGAZ) Um hacker descobriu que sua vítima escolheu colocar como senha de banco os algarismos referentes ao dia e ao mês de sua data de nascimento. Ele não sabe a ordem dos 4 (quatro) algarismos, então decidiu utilizar o método "força bruta", qual seja, tentar todas as combinações alterando a ordem dos algarismos.

03/12 → ___ ___ ___ ___

Dia Mês **Senha**

Sabendo-se que não há repetição de algarismos e que todos foram utilizados, qual o total de tentativas que o hacker pode fazer?

a) 16.

b) 24.

c) 30.

d) 36.

e) 42.

2. (NOSSO RUMO/2022 - Pref. Suzano/SP) Assinale a alternativa que apresenta o número de maneiras diferentes que 7 amigos podem se sentar em um banco para tirar foto.

a) 5.100 maneiras.

b) 4.980 maneiras.

c) 5.040 maneiras.

d) 5.580 maneiras.

e) 6.024 maneiras.

3. (Legalle/2022 - Pref. Hulha Negra/RS) Em uma sala há um total de 9 funcionários esperando para serem atendidos pelo prefeito municipal. Sabe-se que se formará uma fila com estes para iniciar o atendimento. A quantidade total de filas distintas que se pode formar com esses 9 funcionários é:

a) 3.024

b) 15.120

c) 60.480

d) 181.400

e) 362.800

4. (AOCP/2022 - PC/GO) Dentre as atribuições do Papiloscopista Policial da 3ª Classe, estão a execução, orientação, supervisão e fiscalização de todos os trabalhos papiloscópicos de coleta, análise, classificação, subclassificação, pesquisa e arquivamento e a emissão de pareceres técnicos. Jonas é Papiloscopista Policial da 3ª Classe e deseja marcar sua agenda de afazeres com cores diferentes para cada uma das funções, isto é, deve escolher uma cor diferente para cada tópico listado:

- **execução;**
- **orientação;**
- **supervisão;**
- **fiscalização;**
- **coleta;**
- **análise;**
- **classificação;**
- **subclassificação;**
- **pesquisa e arquivamento;**
- **emissão de pareceres técnicos.**

Considerando a disponibilidade de 10 cores diferentes, de quantas formas é possível que Jonas identifique os afazeres em sua agenda?

a) 10

b) Entre 11 e 50

c) Entre 51 e 100

d) Entre 101 e 150

e) Mais de 150

5. (Quadrix/2022 - CRM/SC) As cores em computadores geralmente são identificadas por um código chamado RGB. Usando-se esse código, cada cor é expressa por 6 números, cada um variando entre 0 e 15. Assim, os 2 primeiros números representam o vermelho na cor final, os seguintes representam o verde e os últimos 2 números, o azul.

Considerando essas informações, julgue o item.

Existem, no máximo, 720 cores diferentes descritas pelo mesmo conjunto de números.

6. (UNIFIL/2022 - SOMAR) Anagrama é a possibilidade de formar novas palavras a partir da troca de posição de suas letras. Considerando a palavra "SOMAR", assinale a alternativa que representa a quantidade de anagramas possíveis que terminam com a letra "R".

a) 12

b) 24

c) 36

d) 48

7. (IMPARH/2022 - Pref. Fortaleza/CE) Durante um jantar, uma família formada por quatro adultos e duas crianças irá sentar-se a uma mesa retangular com seis cadeiras, sendo três de cada lado. O número de maneiras que essa família poderá sentar-se à mesa de modo que as crianças não fiquem lado a lado é:

a) 120

b) 192

c) 528

d) 720

8. (ACCESS/2022 - CM Rio Acima) João possui seis livros de Matemática. São eles: Geometria I, Álgebra I, Álgebra II, Análise, Matemática Financeira e Números Complexos. O número de maneiras que ele pode empilhar esses livros de modo que os livros de Álgebra fiquem juntos é

a) 240

b) 120

c) 60

d) 20

9. (QUADRIX/2022 - CRT 4) Arthur, um entregador de encomendas, precisa entregar encomendas em 6 locais distintos em determinado dia.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item a seguir, quanto às diferentes ordens de entrega que Arthur poderá seguir nesse dia.

Há 720 modos diferentes de se montar a rota que define a ordem de entregas.

10. (QUADRIX/2022 - CRT 4) Arthur, um entregador de encomendas, precisa entregar encomendas em 6 locais distintos em determinado dia.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item a seguir, quanto às diferentes ordens de entrega que Arthur poderá seguir nesse dia.

Se Arthur definir que duas das entregas deverão ser feitas consecutivamente, então haverá, exatamente, 120 modos diferentes de se montar a rota de entregas.

11. (CONSULPLAN/2022 - SEED/PR) Suponha que as letras da palavra ÂNGULO precisam ser distribuídas nas seis lacunas a seguir:

O número de maneiras distintas que tais letras podem ser distribuídas de modo que todas as vogais fiquem em uma mesma coluna é:

a) 18

b) 36

c) 72

d) 144

12. (FAPEC/2022 - UFMS) No âmbito da Matemática e da Lógica, os anagramas estão relacionados com a análise combinatória e consistem na permutação das letras de uma palavra. A quantidade de anagramas é o total de possibilidades de formar palavras com ou sem sentido.

Determine a alternativa em que TODAS as palavras possuem o mesmo número de anagramas e seguem a mesma lógica específica no desenvolvimento do cálculo desses anagramas.

a) BANANA, TUIUIU, MACACA, BABADA, PIRIRI.

b) BABADA, ASSADA, BARBADA, AGUADA, PANACA.

c) CHÁ, CAFÉ, TRUPÉ, BACULÉ, TREMEMBÉ.

d) PÃO, PORÃO, CARRÃO, BRASÃO, CACHORRÃO.

e) PIRIRI, BABADA, BEBADA, TACACA, PANACA.

13. (Quadrix/2022 - CRC/AC) Assinale a alternativa que apresenta a quantidade de anagramas da palavra OFIÚCO.

a) 180

b) 360

c) 720

d) 900

14. (Quadrix/2022 - CAU/SC) Assinale a alternativa que apresenta o número de anagramas da palavra "SAMURAI".

a) 630

b) 1.260

c) 2.520

d) 5.040

e) 10.080

15. (AOCP/2022 - PM/ES) Determine o número de anagramas possíveis a partir da palavra PINOQUIO, de tal maneira que as consoantes sejam mantidas em suas posições originais.

a) $\frac{5!}{2!.2!}$

b) $8!$

c) $\frac{8!-3!}{2!.2!}$

d) $\frac{8!}{2!.2!}$

e) $\frac{3!}{2!.2!}$

16. (Objetiva/2022 - Pref. Roca Sales) Assinalar a alternativa que apresenta a quantidade de anagramas da palavra PLANETA:

a) 5.040

b) 4.480

c) 3.620

d) 2.520

17. (CETREDE/2022 - Pref. Ipaporanga) Anagramas são todas as diferentes disposições das letras de uma palavra (mesmo que não façam sentido na língua portuguesa), ou de números e símbolos, em uma sequência. Dessa forma, quantos anagramas é possível formar com a palavra "calculadora"?

a) 1543220

b) 1663200

c) 4566349

d) 1277600

e) 9887123

18. (Quadrix/2022 - CREMERO) Um liquidificador industrial possui formato cilíndrico e altura de 32 cm. O fabricante do produto recomenda que esse liquidificador só seja enchido até 78,125% de sua altura total, situação em que o volume ocupado dele é igual a 1,6π litros. Ao utilizar esse produto para misturar uma bebida, um estudante percebeu que se formava um cone de ar em meio ao líquido, sendo a base desse cone paralela à base do liquidificador e estando a base do cone à mesma distância do fundo do liquidificador que os pontos mais altos de líquido. A altura do cone, por sua vez, variava com a velocidade do liquidificador. Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Há 2.520 modos de organizar as consoantes da palavra "LIQUIDIFICADOR".

19. (QUADRIX/2022 - COREN/AP) Uma loja de doces decidiu fazer uma grande liquidação e, para isso, estabeleceu que seria possível comprar duas jujubas pelo preço de uma e 3 pirulitos pelo preço de 1, mas o chiclete não entraria na promoção. O preço original de cada doce era de R$ 1,00 e Léo foi para a loja com R$ 5,00. Sabe-se que a chance de ele escolher cada um dos doces é igual, que doces iguais são indistinguíveis e que ele saiu com pelo menos 1 doce. Com base nesse caso hipotético, julgue o item.

Se Léo tiver levado para casa 1 chiclete, duas jujubas e 3 pirulitos, então existem 60 ordens diferentes para ele comer seus doces.

20. (FEPESE/2022 - CINCATARINA) Quantos números diferentes podem ser formados permutando os algarismos do número 3.444.551.

a) Mais de 415

b) Mais de 400 e menos de 415

c) Mais de 385 e menos de 400

d) Mais de 370 e menos de 385

e) Menos de 370

21. (Quadrix/2022 - CRC/PR) Em 10 de dezembro de 2022, Cássia Rejane Eller, mais conhecida como Cássia Eller, completaria 60 anos de idade. Uma das maiores vozes da música brasileira, Cássia morreu no dia 29 de dezembro de 2001, em razão de um infarto do miocárdio repentino. Com base nessas informações, julgue o item.

O número de anagramas da palavra “REJANE” que terminam em E é igual a 120.

22. (Quadrix/2022 - CRC/PR) Em 10 de dezembro de 2022, Cássia Rejane Eller, mais conhecida como Cássia Eller, completaria 60 anos de idade. Uma das maiores vozes da música brasileira, Cássia morreu no dia 29 de dezembro de 2001, em razão de um infarto do miocárdio repentino. Com base nessas informações, julgue o item.

Desconsiderando-se o acento, o número de anagramas da palavra “CÁSSIA” é o sêxtuplo do número de anagramas da palavra “ELLER”.

23. (AOCP/2022 - PM/ES) Quantos anagramas da palavra CLARINETE começam por vogal?

a) 10.080

b) 20.160

c) 40.320

d) 60.480

e) 80.640

24. (Quadrix/2022 - CAU/SC) Julgue o item.

O resto da divisão do número de anagramas da palavra CLARICE por 2.022 é igual a 134.

25. (Quadrix/2022 - CRECI 24) Julgue o item.

O número de anagramas da palavra CRIME está para o número de anagramas da palavra CASTIGO, assim como 1 está para 42.

26. (Quadrix/2022 - CRP 18) Com relação a princípios de contagem e probabilidade e a arranjos e permutações, julgue o item.

O número de anagramas da palavra “MATO” está para o número de anagramas da palavra “GROSSO” assim como 2 está para 15.

27. (QUADRIX/2022 - Pref. Lagunas/SC) Em uma loja, há 6 tipos de refrigerante, 4 tipos de queijo e 3 tipos de carne. Com base nesse caso hipotético, julgue o item.

O número de anagramas da palavra QUEIJO está para o número de anagramas da palavra REFRIGERANTE assim como 1 está para 2^4 x 3 x 5 x 7 x 11.

28. (Quadrix/2022 - CRECI 11) Na matemática, o duplo fatorial de um número natural n, denotado por n!!, é o produto de todos os inteiros positivos de 1 até n que possuem a mesma paridade de n. Por exemplo, 7!! = 1 × 3 × 5 × 7 = 105 e 8!! = 2 × 4 × 6 × 8 = 384.

Considerando essas informações, julgue o item.

O número de anagramas da palavra EUROPA está para 7!!, assim como 1 está para 7.

29. (Quadrix/2022 - CRA/PR) Acerca dos anagramas da palavra NIRVANA, julgue o item.

O número de anagramas é igual a 1.620.

30. (Quadrix/2022 - CRA/PR) Acerca dos anagramas da palavra NIRVANA, julgue o item.

O número de anagramas que começam e terminam pela letra N é igual a $2^2 \times 3 \times 5$.

31. (Quadrix/2022 - CRA/PR) Acerca dos anagramas da palavra NIRVANA, julgue o item.

O número de anagramas que começam ou terminam pela letra A é igual a 720.

32. (Quadrix/2022 - CRP 18) Com relação a princípios de contagem e probabilidade e a arranjos e permutações, julgue o item.

O número de anagramas da palavra “GROSSO” que começam ou terminam com a letra O é igual a 120.

33. (Quadrix/2022 - CRECI 24) Julgue o item.

Mais de 4% dos anagramas da palavra ODISSEIA começam com S e terminam com A.

34. (GUALIMP/2022 - Pref. Carmo/RJ) Cecília escreveu todos os anagramas da palavra BANDOLIM em que as vogais aparecem juntas e em ordem alfabética. Quantos anagramas Cecília escreveu?

a) 120

b) 5.040

c) 840

d) 720

35. (Legalle/2022 - Pref. Hulha Negra/RS) A quantidade total de anagramas da palavra PANELA que contêm a sequência ELA é:

a) 6

b) 12

c) 18

d) 24

e) 48

36. (Quadrix/2022 - CRO/ES) Julgue o item.

O número de anagramas da palavra BRUXISMO que tem as vogais juntas é igual a 4.230.

37. (Quadrix/2022 - CRO/ES) Julgue o item.

O número de anagramas da palavra ODONTOLOGIA é igual a $2^5.3^2.5^3.7.11$.

38. (SELECON/2022 - CM São Gonçalo) Seja n o número total de permutações distintas formadas com as 6 letras da palavra VACINA e que possuam as três vogais juntas. O valor de n é igual a:

a) 720

b) 360

c) 72

d) 36

39. (Quadrix/2022 - CRECI 24) Julgue o item.

17.280 anagramas da palavra LISPECTOR têm as consoantes juntas.

40. (FEPESE/2022 - CINCATARINA) Um trem de passageiros é constituído de uma locomotiva e sete vagões distintos, sendo um deles o vagão do silêncio (onde não é permitido conversar) e outro o vagão restaurante. O trem deve ser formado com a locomotiva à frente e o vagão do silêncio não pode ser colocado imediatamente após a locomotiva e nem imediatamente após ou antes do vagão restaurante.

Portanto, o número de modos diferentes de montar a composição que forma o trem é:

a) Mais de 3100

b) Mais de 2900 e menos de 3100

c) Mais de 2700 e menos de 2900

d) Mais de 2500 e menos de 2700

e) Menos de 2500

41. (Quadrix/2022 - CRN 4) Quanto aos anagramas da palavra EUFORIA, julgue o item.

Podem ser formados por 5.040 anagramas.

42. (Quadrix/2022 - CRN 4) Quanto aos anagramas da palavra EUFORIA, julgue o item.

$\frac{1}{840}$ desses anagramas possui as letras FURIA juntas e nessa ordem.

43. (Quadrix/2022 - CRN 4) Quanto aos anagramas da palavra EUFORIA, julgue o item.

O número de anagramas que possuem as vogais e as consoantes juntas é um quadrado perfeito.

44. (Quadrix/2022 - CRN 4) Quanto aos anagramas da palavra EUFORIA, julgue o item.

Se se ordenar esses anagramas em ordem alfabética crescente, a palavra EUFORIA ocupará a posição de número 1.362.

45. (Quadrix/2022 - CRECI 11) Na aula de artes visuais, Bárbara aprendeu que as sete cores do arco-íris são: vermelho; laranja; amarelo; verde; azul; anil; e violeta. Na mesma aula, ela também aprendeu que o azul, o verde, o anil e o violeta são cores frias e que o vermelho, o laranja e o amarelo são cores quentes.

Com base nesse caso hipotético, julgue o item.

Se os anagramas da palavra ANIL forem colocados em ordem alfabética, a palavra LINA ocupará a décima sexta posição.

46. (ACCESS/2022 - Pref. Ouro Branco) Listando em ordem alfabética, como em um dicionário, todos os anagramas da palavra "BRANCO", a forma "BRANCO" ocuparia a

a) 125ª posição

b) 219ª posição

c) 312ª posição

d) 720ª posição

47. (IBADE/2022 - SEA/SC) Um anagrama de uma palavra é obtido ao trocar a ordem de suas letras.

Colocando em ordem alfabética todos os anagramas da palavra MILITAR, a posição ocupada pela palavra MILITAR é a:

a) 1556

b) 1557

c) 1558

d) 1559

e) 1560

48. (AOCP/2022 - IF/RO) Ao permutar os algarismos do conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5} sem os repetir, formamos 120 números de 5 algarismos.

Escrevendo esses números em ordem decrescente, qual ocupará a 83ª posição?

a) 24.135

b) 42.513

c) 42.531

d) 23.451

e) 24.153

49. (FCM/2022 - CM MDM) Felipe mora na Europa e, durante suas férias, resolveu visitar seus cinco irmãos que moram no Brasil, porém em cidades distintas. Na ordem das visitas para as cinco cidades, apenas duas delas precisam ocorrer de modo consecutivo. Assim, o número de formas em que essa ordem pode ser elaborada, obedecendo apenas a essa condição, é igual a

a) 36

b) 48

c) 72

d) 96

50. (RBO/2022 - SMFA-BH) Oito, entre eles, Ana, Fernanda, Maria e José, foram ao teatro. Compraram oito lugares contíguos. O número de maneiras distintas que esses oito amigos podem se assentar lado a lado, se Ana, Fernanda e Maria devem estar sempre juntas, além disso, José sempre deverá ocupar uma das extremidades dos lugares contíguos, é

a) 240

b) 720

c) 840

d) 1.200

e) 1.440

51. (Quadrix/2022 - COREN/AP) Em uma equipe de competição de jiu-jitsu, há 6 faixas brancas, 1 faixa azul, 4 faixas roxa, 2 faixas marrons e 1 faixa preta. Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Há exatamente 480 modos de se dispor os competidores faixas brancas em fila, sem que 2 determinados faixas brancas fiquem juntos.

52. (ACCESS/2022 - CPGI) Seis amigos se posicionam, um ao lado do outro, para tirar uma foto. Entre eles, estão Adão e Eva. O fotógrafo pediu para que os seis amigos se posicionassem para a foto de modo que Adão ficasse separado de Eva. O número de maneiras de isso ocorrer é

a) 600

b) 560

c) 540

d) 480

53. (GUALIMP/2022 - Pref. Carmo/RJ) Dez alunos (incluindo Rafael e Flávio) foram chamados para uma reunião. Ao final da reunião, foi solicitado para formarem uma fila para assinarem a lista de presença.

De quantas formas diferentes essa fila pode ser formada de forma que Rafael e Flávio não fiquem juntos?

a) 3.265.920.

b) 3.628.800.

c) 2.903.040.

d) 725.760.

54. (Legalle/2022 - BADESUL) Quantos anagramas podemos formar a partir da palavra FINANCEIRO?

a) 3.628.800.

b) 1.234.567.

c) 907.200.

d) 846.300.

e) 553.600.

55. (Quadrix/2022 - CRP 6) João trabalha há 7 anos no Conselho Regional de Psicologia. Ele passou 70% desse tempo na área financeira, 20% do tempo restante na área de recursos humanos e o resto, na área jurídica. Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

A palavra “financeira” possui 21.600 anagramas em que todas as vogais estão juntas.

56. (AOCP/2022 - IF/RO) Quantos anagramas da palavra INSTITUTO possuem as vogais sempre juntas e as consoantes, também, sempre juntas?

a) 240

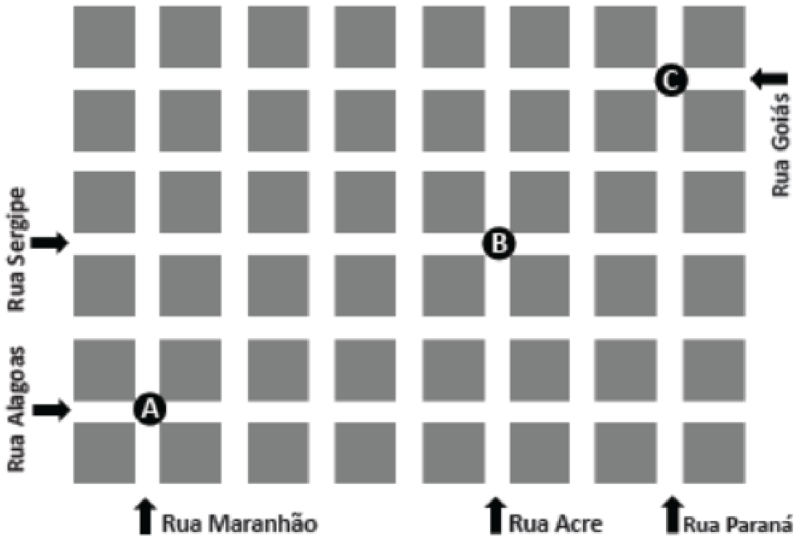
b) 480

c) 362.880

d) 30.240

e) 960

57. (FCM - CEFETMINAS/2022 - Pref. Santa Cruz do Escalvado) A figura a seguir é um mapa, mostrando parte das ruas de um bairro, em que todos os quarteirões, representados pelos quadrados, possuem o mesmo tamanho.



Considere que uma pessoa esteja em um automóvel no ponto A, esquina das ruas Maranhão e Alagoas, e pretenda chegar ao ponto C, esquina das ruas Goiás e Paraná, passando pelo ponto B, esquina das ruas Acre e Sergipe, de modo a percorrer sempre o trajeto mais curto possível.

Assim, considerando as informações dadas, o número de caminhos diferentes que essa pessoa pode fazer é igual a

a) 75

b) 90

c) 100

d) 120

58. (QUADRIX/2022 - CRP 10) Para a realização de uma dinâmica de grupo, deseja-se selecionar 6 pessoas de um conjunto de 10 pessoas (entre elas Anderson e Bárbara).

Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

As 6 pessoas que participarão dessa dinâmica de grupo poderão formar uma roda de 720 modos distintos.

59. (AVANÇASP/2022 - Pref. Laranjal Paul) Joana e suas 8 amigas saíram para jantar e a única mesa vaga no restaurante era uma mesa central redonda. Desse modo, de quantas formas elas podem se sentar nesta mesa?

a) 9!

b) 5!

c) 4!

d) 7!

e) 8!

60. (AOCP/2022 - Pref. Pinhais) Uma reunião será feita com o Prefeito, o vice, o chefe da Câmara dos vereadores e os 5 chefes das Secretarias Municipais. De quantas maneiras é possível alocar essas 8 pessoas em uma mesa circular de modo que Prefeito e vice fiquem sempre lado a lado?

a) 10.080 maneiras

b) 5.040 maneiras

c) 720 maneiras

d) 1.440 maneiras

e) 2.520 maneiras

61. (OMNI/2021 - Pref. Sete Lagos) Para ser campeão, um time ainda terá pela frente seis jogos, porém a ordem dessas partidas ainda não foi definida. Sabendo que nesses próximos jogos o time enfrentará seis times diferentes, é possível afirmar que os próximos seis jogos podem acontecer de:

a) 360 maneiras diferentes

b) 46.656 maneiras diferentes

c) 720 maneiras diferentes

d) 1.080 maneiras diferentes

62. (AVANÇASP/2021 - Pref. Vinhedo) O arco-íris tem 7 cores. Uma criança com 7 lápis coloridos pode pintar de quantas maneiras diferentes sem repetir as cores?

a) 7!

b) 7!/7

c) 6!/5

d) 7

e) 8!/7

63. (IBRASP/2021 - Pref. Rio Grande) Ao todo, quantos anagramas a palavra QUATRO possui a mais do que a palavra DOIS?

a) 620

b) 665

c) 696

d) 702

e) 716

64. (SELECON/2021 - Guarda Civil de Campo Grande) Cinco guardas civis metropolitanos, Ana, Bruna, Carlos, Davi e Edson, ao participarem de uma solenidade, foram colocados um ao lado do outro para uma fotografia. Levando em conta apenas a posição deles entre si, existem exatamente k arrumações diferentes, de modo que as pessoas do sexo feminino fiquem nas extremidades. O valor de k é:

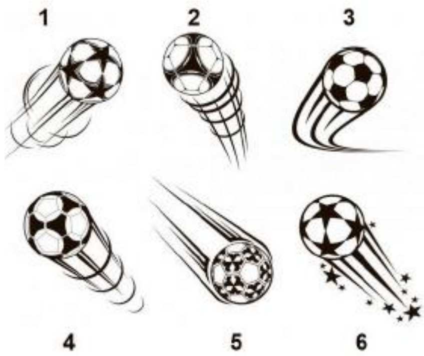
a) 8

b) 12

c) 18

d) 24

65. (AMAUC/2021 - Pref. Alto Bela Vista) Analise a seguir os desenhos que serão dispostos na parede do quarto de João:



Considerando que o desenho 1 somente poderá trocar de lugar com o desenho 6, assinale a alternativa que representa corretamente a quantidade de possibilidades de disposição desses desenhos na parede:

a) 52 possibilidades

b) 24 possibilidades

c) 40 possibilidades

d) 60 possibilidades

e) 48 possibilidades

66. (OBJETIVA/2021 - Pref. Venâncio Aires) Pedro possui 5 livros distintos de matemática, 3 livros distintos de português e 2 livros distintos de história. Sendo assim, o número de maneiras distintas pelas quais Pedro pode arrumar esses livros, lado a lado, em uma estante, de forma que os livros de mesma matéria permaneçam juntos, é igual a:

a) 1.728

b) 2.456

c) 8.640

d) 4.820

e) 3.742

67. (Quadrix 2021/CREFONO - 3ª Reg.) Julgue o item.

Exatamente 36 anagramas da palavra JÚNIOR possuem as vogais e as consoantes juntas.

68. (Quadrix 2021/CREFONO - 3ª Reg.) Julgue o item.

O número de anagramas da palavra FISCAL que começam com F ou terminam com L é igual a 240.

69. (Quadrix 2021/CRTR - 12ª Reg.) Assinale a alternativa que apresenta o número de anagramas da palavra QUADRIX que possuem as vogais e as consoantes alternadas.

a) 36

b) 144

c) 576

d) 720x

e) 840

70. (UNESC/2021 - Pref. Laguna) Quantos anagramas podemos escrever com as letras da palavra: LAGUNA?

a) 120

b) 240

c) 360

d) 480

e) 720

71. (OMNI/2021 - Pref. Sete Lagos) Josiana, em seu tempo livre, estava se desafiando e tentando formar todos os anagramas possíveis com o seu nome. É CORRETO afirmar que ela formará no total:

a) 7 anagramas

b) 5.040 anagramas

c) 2.520 anagramas

d) 1.520 anagramas

72. (OBJETIVA/2021 - TRENSURB) Em um torneio de xadrez, a equipe Catarinense obteve o seguinte desempenho: 5 vitórias, 8 empates e 2 derrotas, havendo, no total, 15 partidas. De quantas maneiras distintas esses resultados poderiam ter ocorrido?

a) 145.135

b) 145.145

c) 135.135

d) 135.145

e) 145.000

73. (Quadrix 2021/CRP - 22ª Reg.) Acerca dos anagramas da palavra SATURNO, julgue o item.

O número de anagramas que começam com S é igual ao número de anagramas da palavra NETUNO.

74. (Quadrix 2021/CRP - 22ª Reg.) A respeito dos anagramas da palavra TOPÁZIO, julgue o item.

O número de anagramas que têm as vogais e as consoantes alternadas é igual a 144.

Gabarito

1. LETRA B
2. LETRA C
3. LETRA E
4. LETRA E
5. CERTO
6. LETRA B
7. LETRA C
8. LETRA A
9. CERTO
10. ERRADO
11. LETRA C
12. LETRA A
13. LETRA B
14. LETRA C
15. LETRA A
16. LETRA D
17. LETRA B
18. CERTO
19. CERTO
20. LETRA A
21. CERTO
22. CERTO
23. LETRA E
24. ERRADO
25. CERTO
26. CERTO
27. CERTO
28. ERRADO
29. ERRADO
30. CERTO
31. ERRADO
32. ERRADO
33. ERRADO
34. LETRA D
35. LETRA D
36. ERRADO
37. ERRADO
38. LETRA C
39. CERTO
40. LETRA B
41. CERTO
42. CERTO
43. ERRADO
44. CERTO
45. CERTO
46. LETRA B
47. LETRA D
48. LETRA E
49. LETRA B
50. LETRA E
51. CERTO
52. LETRA D
53. LETRA C
54. LETRA C
55. ERRADO
56. LETRA B
57. LETRA B
58. ERRADO
59. LETRA E
60. LETRA D
61. LETRA C
62. LETRA A
63. LETRA C
64. LETRA B
65. LETRA E
66. LETRA C
67. ERRADO
68. ERRADO
69. LETRA B
70. LETRA C
71. LETRA C
72. LETRA C
73. ERRADO
74. ERRADO

LISTA DE QUESTÕES – MULTIBANCAS

Outros Tipos de Permutação

1. (QUADRIX/2022 - CRP 18) Com relação a princípios de contagem e probabilidade e a arranjos e permutações, julgue o item.

O número de desarranjos (permutações em que nenhuma letra permanece em sua posição original) da palavra “MATO” é igual a 10.

2. (QUADRIX/2021 - CRF/AP) Uma permutação de um conjunto de n elementos é dita caótica quando nenhum elemento está em seu lugar original. Com base nessa informação, julgue o item.

ROMA é uma permutação caótica das 4 letras da palavra AMOR, mas ARMO não é.

3. (QUADRIX/2021 - CRF/AP) Uma permutação de um conjunto de n elementos é dita caótica quando nenhum elemento está em seu lugar original. Com base nessa informação, julgue o item.

O número de permutações caóticas das 4 letras da palavra ANEL é igual a 9.

4. (QUADRIX/2021 - CRF/AP) Uma permutação de um conjunto de n elementos é dita caótica quando nenhum elemento está em seu lugar original. Com base nessa informação, julgue o item.

Exatamente 315 permutações da palavra DESAFIO têm exatamente 3 letras em seu lugar original.

5. (FUNDEP/2021 - CBM/MG) Em determinado dia, uma equipe de bombeiros recebeu 4 demandas de serviços, não emergenciais. Cada atendimento recebido foi classificado com as cores Roxo, Amarelo ou Verde. Nessa data, houve 1 demanda Roxa, 2 Amarelas e 1 Verde. A equipe pode definir a ordem de atendimento conforme desejar, desde que uma demanda Verde nunca seja realizada antes de uma Roxa. De quantos modos diferentes essa equipe poderá organizar a ordem dos seus atendimentos, para realizar os 4 serviços demandados?

a) 3

b) 6

c) 12

d) 24

GABARITO

1. ERRADO
2. CERTO
3. CERTO
4. CERTO
5. LETRA C

LISTA DE QUESTÕES – MULTIBANCAS

Arranjo e Combinação

1. (FCM-CEFETMINAS/2023 - Pref. Contagem/MG) Uma empresa possui dez funcionários, entre eles Carlos e Beatriz, e precisa selecionar uma comissão com quatro desses funcionários para viajarem a uma feira de negócios. Entretanto, é necessário que ao menos um deles, Carlos ou Beatriz, fique na empresa e, assim, não sejam escolhidos juntos para essa viagem. Desse modo, considerando-se essa situação, o número de comissões diferentes com seus funcionários que a empresa pode organizar para ir à feira de negócios é

a) 45

b) 112

c) 165

d) 182

e) 210

2. (MAIS/2022 - CM Praia Grande/SP) Carlos e Irina irão se casar e, para o bufê, devem escolher 4 tipos de doces em um cardápio que contém 7 opções. Assinale a alternativa que apresenta quantas são as combinações possíveis que Carlos e Irina podem escolher, sabendo que a ordem da escolha dos doces não é importante.

a) 35

b) 70

c) 105

d) 210

3. (AOCP/2022 - PM/ES) Ernesto é músico da Polícia Militar e precisa decidir, dentre 5 instrumentos, quais são os 3 cuja manutenção serão de sua responsabilidade. De quantas maneiras distintas ele poderá fazer essa escolha?

a) 10

b) 15

c) 20

d) 30

e) 60

4. (FEPESE/2022 - FCEE) Uma pessoa tem à sua disposição 9 vídeos diferentes, de 15 minutos cada, relativos a um assunto sobre o qual deseja se informar. Ela decide juntar os vídeos em grupos de 4 vídeos cada, formando vídeos de 1 hora.

Sem levar em consideração a ordem em que os vídeos de 15 minutos são apresentados no vídeo maior, quantos vídeos de 1 hora essa pessoa pode criar?

a) Mais de 125

b) Mais de 110 e menos de 125

c) Mais de 95 e menos de 110

d) Mais de 80 e menos de 95

e) Menos de 80

5. (IADES/2022 - CAU/SE) Em uma empresa de arquitetura, há 10 arquitetos, entre os quais 60% são paisagistas. Dois paisagistas serão escolhidos para realizar um projeto urbanístico. Quantas escolhas distintas poderão ser feitas para selecionar os dois arquitetos?

a) 10

b) 12

c) 15

d) 18

e) 21

6. (CONSULPLAN/2022 - SEED/PR) Em uma apresentação de final de ano de uma escola, os alunos do 2º ano do ensino fundamental ficaram responsáveis pela apresentação de um jogral. Para isso, a professora precisa escolher, entre seus 35 alunos, 2 meninos e uma menina para declamarem algumas partes dos poemas escolhidos. Como se trata de uma apresentação para toda a escola, a professora decidiu que iria ensaiar todos os alunos e, após, iria determinar quais seriam os escolhidos para o grande dia.

Sabendo-se que a turma do 2º ano do ensino fundamental conta com 20 meninos e 15 meninas, quantas combinações a professora poderá formar agrupando dois meninos e uma menina?

a) 2850

b) 3927

c) 5700

d) 6545

7. (AOCP/2022 - Pref. Pinhais) Uma comissão de Segurança do Trabalho será montada entre os servidores municipais da cidade de Pinhais. Voluntariam-se para o processo de seleção 10 pessoas, das quais, 7 homens e 3 mulheres.

De quantos modos essa comissão pode ser formada, sabendo que serão escolhidos exatamente dois homens e duas mulheres?

a) 24

b) 36

c) 63

d) 120

e) 240

8. (CONSULPLAN/2022 - PM/RN) No feriado municipal de uma determinada cidade, 4 médicos e 6 enfermeiros farão plantão em um centro de saúde.

Se certo procedimento necessitar de 2 médicos e 3 enfermeiros, quantas equipes distintas com esses profissionais poderão ser formadas?

a) 30

b) 60

c) 90

d) 120

e) 180

9. (CONSULPLAN/2022 - Pref. Rosário) Os estudantes de um departamento de pós-graduação formado por 8 mestrandos e 5 doutorandos foram convidados a apresentar seus trabalhos em um congresso. Entretanto, o departamento possui recursos para pagar os custos de viagem de apenas 7 desses estudantes. Considerando que, dentre os escolhidos, 3 estudantes devem ser de mestrado e 4 de doutorado, quantas maneiras distintas os estudantes podem ser selecionados?

a) 56

b) 128

c) 280

d) 360

10. (IBFC/2022 - PM/RN) Serão escolhidos 5 aspirantes para realizar um curso de primeiros socorros. Dentre 8 aspirantes do sexo feminino serão escolhidas 3 pra fazer parte do grupo e dentre 7 aspirantes serão escolhidos os outros 2 aspirantes para o grupo. Nessas condições, o total de grupos distintos que podem ser formados é igual a:

a) 1960

b) 380

c) 14112

d) 1176

e) 7056

11. (ACCESS/2022 - CM Arantina) Uma comissão de trabalho será formada entre os funcionários de um setor específico de uma Prefeitura. Este setor possui três Técnicos em Contabilidade, quatro Auxiliares de Serviços gerais e três Auxiliares de Secretaria. A comissão de trabalho será composta por um Técnico em Contabilidade, dois Auxiliares de serviços gerais e dois Auxiliares de Secretaria. O número de maneiras possíveis de formar essa comissão é:

a) 12

b) 24

c) 36

d) 50

e) 54

12. (IBADE/2022 - SEA/SC) Em uma turma de alunos do ensino médio há 14 alunas, 10 alunos e 5 professores. O número de maneiras que se pode organizar uma comissão de formatura composta por 1 professor, 2 alunos e 2 alunas é:

a) 20.400

b) 20.550

c) 20.455

d) 20.565

e) 20.475

13. (IBADE/2022 - SEA/SC) Considere que o conselho de uma empresa é formado por 3 diretores, 5 gerentes e 2 conselheiros. Sabendo que 10 pessoas se candidataram para a vaga de diretor, 8 para a de gerente e 5 para a de conselheiros, o número de possíveis conselhos é:

a) 67.000

b) 67.100

c) 67.200

d) 67.300

e) 67.400

14. (CETREDE/2022 - UFC) Uma floricultura possui cravos e tulipas, sendo que há 5 cores distintas de cravos e 6 cores distintas de tulipas, dentre elas cravos vermelhos e tulipas brancas. Quantas são as opções da floricultura para montar um arranjo floral constituído de 3 cravos de cores distintas e 3 tulipas de cores distintas, de forma que cravos vermelhos e tulipas brancas não sejam escolhidos?

a) 40

b) 30

c) 20

d) 50

15. (Quadrix/2022 - CAU/SC) Um professor tem um banco de exercícios que contém, no total, dez questões, sendo quatro fáceis, quatro médias e duas difíceis. Com base nessa situação hipotética, é correto afirmar que o professor pode selecionar quatro questões para uma prova, sendo uma fácil, duas médias e uma difícil, de

a) 24 modos distintos.

b) 48 modos distintos.

c) 72 modos distintos.

d) 96 modos distintos.

e) 120 modos distintos.

16. (Legalle/2022 - Pref. Hulha Negra/RS) Ao fazer uma compra de máscaras de tecido e álcool em gel na cidade, o prefeito encontrou 6 marcas de máscara e 4 de álcool em gel. Sendo assim, resolveu comprar 2 marcas de máscara e 2 de álcool em gel, um de cada modelo. É CORRETO afirmar que o número de compras distintas que o prefeito pode fazer é:

a) 15

b) 34

c) 45

d) 60

e) 90

17. (AOCP/2022 - PC/GO) Em geral, para a identificação de um suspeito por suas digitais, é necessário que coincidam de 12 a 20 pontos característicos (dentre esses, estão ponto, bifurcação, encerro, forquilha e cortada). Suponha que sejam exatamente 20 os pontos característicos de uma impressão digital e que haja duas possibilidades de resposta à correspondência, a saber: “coincide” ou “não coincide”. Se alguém foi identificado por mais de 14 pontos característicos de suas digitais, pode-se dizer que o total de variações dos 20 pontos possíveis para que se identifique o suspeito com mais de 14 pontos é igual a

a) 21.700

b) 10.000

c) 4.500

d) 2.215

e) 512

18. (CONSULPLAN/2022 - SEED/PR) Em um condomínio, Gabriela e Bruno participam de um grupo de 15 síndicos formado por 8 mulheres e 7 homens. Uma comissão com 6 síndicos deve ser realizada para avaliar novas propostas de melhorias na infraestrutura do local. De quantas maneiras distintas essa comissão pode ser formada de modo que Gabriela participe e Bruno não participe?

a) 504

b) 1287

c) 1450

d) 2002

19. (QUADRIX/2022 - CRP 10) Para a realização de uma dinâmica de grupo, deseja-se selecionar 6 pessoas de um conjunto de 10 pessoas (entre elas Anderson e Bárbara). Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Essa dinâmica de grupo pode ser realizada de 210 modos distintos.

20. (QUADRIX/2022 - CRP 10) Para a realização de uma dinâmica de grupo, deseja-se selecionar 6 pessoas de um conjunto de 10 pessoas (entre elas Anderson e Bárbara). Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Se Anderson e Bárbara são um casal inseparável, essa dinâmica de grupo pode ser realizada de 98 maneiras distintas.

21. (FEPESE/2022 - Pref. Guatambu) Doze colegas (entre eles Rafael e Bruno) vão jogar uma partida de futebol. Para isto, devem formar dois times de 6 jogadores cada time. Porém, Rafael e Bruno devem ficar em times diferentes.

Levando as informações acima em consideração, de quantas formas distintas os times podem ser formados?

a) Mais de 270

b) Mais de 260 e menos de 270

c) Mais de 250 e menos de 260

d) Mais de 240 e menos de 250

e) Menos de 240

22. (QUADRIX/2022 - CFFa) A fim de montar uma equipe para cuidar de um novo investimento de sua empresa, Gabriel precisa montar uma equipe de três funcionários. Ele dispõe de 18 funcionários diferentes para escolha, sendo oito desses funcionários graduados e dez não graduados.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Se não houver nenhuma restrição quanto à formação da equipe, Gabriel poderá montá-la de 818 modos diferentes.

23. (QUADRIX/2022 - CFFa) A fim de montar uma equipe para cuidar de um novo investimento de sua empresa, Gabriel precisa montar uma equipe de três funcionários. Ele dispõe de 18 funcionários diferentes para escolha, sendo oito desses funcionários graduados e dez não graduados.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Gabriel pode formar 696 grupos com, pelo menos, um graduado.

24. (QUADRIX/2022 - CFFa) A fim de montar uma equipe para cuidar de um novo investimento de sua empresa, Gabriel precisa montar uma equipe de três funcionários. Ele dispõe de 18 funcionários diferentes para escolha, sendo oito desses funcionários graduados e dez não graduados. Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Se Gabriel decidir que a equipe deverá ter dois graduados e um não graduado, ele poderá montar a equipe de 286 modos diferentes.

25. (CONSULPLAM/2022 - Pref. Irauçuba) Uma comissão será formada entre os senadores que compõem o senado federal. Espera-se que cada um dos 26 estados, como o Distrito Federal tenham, entre seus 3 representantes, 1 ou 2 senadores. De quantos modos essa comissão pode ser formada?

a) 3^{27}

b) 4^{27}

c) 5^{27}

d) 6^{27}

26. (FEPESE/2022 - FCEE) Um grupo de 8 pessoas, incluindo Luciano e Paula, deseja formar uma comitiva com três representantes. Quantas comitivas diferentes são possíveis formar, se Luciano e Paula não podem participar juntos na mesma comitiva?

a) Mais de 58

b) Mais de 53 e menos de 58

c) Mais de 48 e menos de 53

d) Mais de 43 e menos de 48

e) Menos de 43

27. (Legalle/2022 - Pref. Hulha Negra/RS) Em um campeonato de Padel, organizado pela secretaria municipal de desporto, haverá um sorteio para definir duplas a partir de um total de 10 jogadores. Considerando que cada dupla permanecerá a mesma até o fim do campeonato e que todas as duplas se enfrentarão uma única vez, assinale a alternativa que apresenta o intervalo em que há o número de disputas que ocorrerão neste campeonato:

a) 8

b) 10

c) 15

d) 20

e) 22

28. (FUNDATEC/2022 - Pref. Flores da Cunha/RS) Na Copa do Mundo de 2022, teremos 8 grupos de 4 times cada. Considere a notação em análise combinatória de que uma combinação é m à n é dada por $C_{m,n}$. Então, é possível afirmar que o total de jogos (um jogo entre cada equipe do seu grupo) na primeira fase é dado por:

a) $C_{6,3}$

b) $C_{4,3}$

c) $C_{4,2}$

d) $8C_{4,2}$

e) $4C_{8,2}$

29. (IDECAN/2022 - IF/PA) Em uma corrida de rua com 50 participantes inscritos com as numerações de 1 a 50 ficaram nos três primeiros lugares os atletas cuja soma das inscrições era um número par. Nesta corrida, os três primeiros eram considerados os campeões e recebiam a mesma premiação, independente da ordem.

Assinale a alternativa que apresenta de quantas maneiras essa situação pode acontecer.

a) 9800

b) 7500

c) 25

d) 300

30. (FEPESE/2022 - Pref. B Camboriú) De quantas maneiras podemos escolher três números distintos do conjunto A = {1, 2, 3, ..., 32, 33} de modo que sua soma seja um múltiplo de 2?

a) Mais de 3000

b) Mais de 2900 e menos de 3000

c) Mais de 2800 e menos de 2900

d) Mais de 2700 e menos de 2800

e) Menos de 2700

31. (Quadrix/2022 - CRP 11) As irmãs Bianca e Sofia estão jogando um jogo de cartas com um baralho que possui dez cartas, no total. Conforme as regras desse jogo, deve-se tirar três cartas desse baralho, memorizá-las e devolvê-las ao baralho, embaralhando-o. Em seguida, deve-se escolher três novas cartas e anotar o número de cartas que vierem repetidas nesse grupo. Então, embaralha-se novamente o baralho, e a outra irmã repete o mesmo processo. Quem tiver mais cartas repetidas vence o jogo. Se as duas irmãs tirarem o mesmo número de cartas repetidas, o jogo termina empatado.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Existem 720 modos de se tirarem três cartas do baralho.

32. (Quadrix/2022 - CRP 11) As irmãs Bianca e Sofia estão jogando um jogo de cartas com um baralho que possui dez cartas, no total. Conforme as regras desse jogo, deve-se tirar três cartas desse baralho, memorizá-las e devolvê-las ao baralho, embaralhando-o. Em seguida, deve-se escolher três novas cartas e anotar o número de cartas que vierem repetidas nesse grupo. Então, embaralha-se novamente o baralho, e a outra irmã repete o mesmo processo. Quem tiver mais cartas repetidas vence o jogo. Se as duas irmãs tirarem o mesmo número de cartas repetidas, o jogo termina empatado.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

A razão entre o número de formas de não se tirar nenhuma carta repetida e o número de formas de se tirarem duas cartas repetidas é igual a $\frac{5}{3}$.

33. (ACCESS/2022 - CM Rio Acima) Uma senha para acesso em um site de compras exige que o cliente escolha 3 caracteres distintos.

A senha deve apresentar as seguintes características:

- **deve conter duas letras distintas e um dígito;**
- **as letras que podem ser utilizadas são {A, B, C, X, Y}**
- **os dígitos que podem ser utilizados são apenas os ímpares.**

O número de senhas distintas que são possíveis neste caso é

a) 120

b) 240

c) 300

d) 320

34. (CONSULPLAN/2022 - CM Barbacena) Em uma pequena cidade do interior, foi realizado um campeonato de futebol envolvendo quatro times. Cada equipe participante enfrenta as demais equipes apenas uma única vez. Assuma que uma vitória concede 3 pontos ao time vencedor e não há pontuação para o time perdedor. Caso haja um empate, os dois times da partida ganham 1 ponto. Após todos os jogos do campeonato, a seguinte tabela aponta a classificação final:

Time	Pontuação
Macedos	7
Calcita	5
Olaria	3
Ilha	1

Qual o número de partidas que terminaram empatadas no campeonato?

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

35. (Quadrix/2022 - CRMV/MS) Poliana, uma amante da matemática, traçou 2 segmentos de reta, paralelos, na areia da praia de Boa Viagem. Depois, ela marcou 5 pontos distintos em cada um dos segmentos. Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Com vértices nos pontos marcados na areia, Poliana pode construir 120 triângulos.

36. (Quadrix/2022 - CRMV/MS) Poliana, uma amante da matemática, traçou 2 segmentos de reta, paralelos, na areia da praia de Boa Viagem. Depois, ela marcou 5 pontos distintos em cada um dos segmentos. Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Com vértices nos pontos marcados na areia, Poliana pode construir 210 quadriláteros.

37. (IBFC/2022 - EBSERH-UNIFAP) Para o seu casamento, Adriana deve escolher três músicas que serão tocadas na igreja, dentre 10 possíveis. Além disso, Adriana deve escolher em qual ordem cada uma dessas três músicas escolhidas serão tocadas. Nessas condições, o total de escolhas possíveis de Adriana é igual a:

a) 120

b) 360

c) 480

d) 720

e) 1440

38. (Legalle/2022 - Pref. Hulha Negra/RS) Dado o conjunto G = {2,3, 8, 9}. Se agruparmos os números desse conjunto de 3 em 3, de modo que os agrupamentos gerem subconjuntos com elementos distintos, podendo esses subconjuntos repetirem os mesmos elementos com ordens diferentes, o número de agrupamentos possíveis será:

a) 8

b) 12

c) 18

d) 24

e) 36

39. (FEPESE/2022 - Pref. Chapecó) Um partido deve escolher, entre 27 pessoas, uma chapa formada por um presidente e um vice-presidente, para participar de uma eleição.

De quantas maneiras diferentes esta chapa pode ser formada?

a) Mais de 1000

b) Mais de 900 e menos de 1000

c) Mais de 800 e menos de 900

d) Mais de 700 e menos de 800

e) Menos de 700

40. (IDECAN/2022 - CFO) Nos Jogos Nacionais dos Cursos de Formação de Oficiais, na modalidade barra, nove atletas se inscreveram dos quais quatro são de Mato Grosso do Sul.

De quantos modos é possível que pelo menos um cadete da Academia de Polícia do Mato Grosso do Sul fique em uma das três primeiras posições na modalidade barra?

a) 60

b) 444

c) 504

d) 669

e) 729

41. (GUALIMP/2022 - Pref. Carmo/RJ) Uma família possui 8 pessoas: pai, mãe e 6 filhos. Desses 6 filhos, apenas o Marcos é menor de idade (3 anos). Essa família possui um carro com 2 lugares na frente (motorista e acompanhante) e 3 lugares atrás.

Sabendo que Marcos não pode ocupar o banco da frente, de quantas formas diferentes esse carro pode ser ocupado?

a) 2.520

b) 5.640

c) 5.040

d) 2.820

42. (AOCP/2022 - PM/ES) Assinale a única alternativa em que possa figurar a razão R entre o número de arranjos de n elementos tomados p a p e o número de combinações dos mesmos n elementos tomados p a p.

a) R = 5

b) R = 10

c) R = 25

d) R = 100

e) R = 120

43. (Quadrix/2022 - CRBM 3) De um grupo de 6 homens e 6 mulheres, entre eles Anderson e Bárbara, deseja-se formar uma comissão de 4 pessoas. Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

A comissão pode ser formada de 495 modos distintos.

44. (Quadrix/2022 - CRBM 3) De um grupo de 6 homens e 6 mulheres, entre eles Anderson e Bárbara, deseja-se formar uma comissão de 4 pessoas. Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Se o número de homens e mulheres nessa comissão deve ser o mesmo, então ela pode ser formada de 252 modos distintos.

45. (Quadrix/2022 - CRBM 3) De um grupo de 6 homens e 6 mulheres, entre eles Anderson e Bárbara, deseja-se formar uma comissão de 4 pessoas. Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Se Anderson ou Bárbara deve participar dessa comissão, então ela pode ser formada de 330 modos distintos.

46. (NUCEPE/2022 - PM/PI) De quantos modos distintos um agente pode colocar 5 presos em 4 celas, sabendo-se que cada cela deve conter pelo menos um preso?

a) 240

b) 180

c) 120

d) 96

e) 60

47. (CETAP/2022 - AGE/PA) Em um grupo de cientistas formado por 6 homens e 4 mulheres, 5 devem ser selecionados para participar de um congresso, incluindo pelo menos 2 mulheres. De quantas formas essa delegação poderá ser formada?

a) 40

b) 186

c) 148

d) 88

48. (FEPESE/2022 - PCien/SC) De um grupo de 10 professores, 4 são professores de História e os outros são professores de outras disciplinas. De quantos modos pode-se formar uma comissão com 4 destes professores, de forma que ao menos 2 sejam professores de História?

a) Mais de 100

b) Mais de 85 e menos de 100

c) Mais de 70 e menos de 85

d) Mais de 55 e menos de 70

e) Menos de 55

49. (AOCP/2022 - SEAD/GO) Em um setor de uma Prefeitura, há 7 mulheres com mais de cinco anos de experiência em determinada área e há 5 homens também com mais de cinco anos de experiência nessa mesma área. O chefe desse setor pretende formar uma comissão com 5 desses servidores, com pelo menos 3 mulheres. Nesse caso, quantas comissões podem ser formadas?

a) 546

b) 584

c) 654

d) 1092

e) 1168

50. (SELECON/2022 - Pref. São Gonçalo/RJ) Um engenheiro trabalha com 8 equipes diferentes, distribuídas em três níveis conforme a tabela abaixo.

Nível	Quantidade de equipes por nível
A	3
B	1
C	4

Se este engenheiro escolher apenas 3 dessas equipes para realizar uma determinada tarefa, sendo pelo menos uma do nível C, o número total de escolhas distintas que ele poderá fazer é igual a:

a) 52

b) 54

c) 56

d) 58

51. (FADESP/2022 - PM/PA) Uma unidade possui 3 oficiais e 4 praças aptos a fazerem parte de comissões disciplinares com 3 componentes, sendo que a presidência tem que ser exercida por um dos oficiais. Sabendo-se que, por exemplo, a comissão A presidente, B e C Membros difere da comissão B presidente, A e C membros, o número de comissões distintas que se pode formar com esses militares, tendo pelo menos um praça em sua constituição, é igual a

a) 60

b) 52

c) 48

d) 42

52. (UFMT/2022 - CBM/MT) O Quadro de Oficiais de Saúde da Polícia Militar (QOSPM) é composto por:

Postos	Quantidade
Coronel	02
Tenente-Coronel e Major	30
Capitão	25
Primeiro Tenente e Segundo Tenente	30
TOTAL	87

Assinale a alternativa que apresenta o número total de comissões que podem ser formadas com 4 membros do QOSPM, dentre os Coronéis, os Capitães ortopedistas e os Capitães odontólogos, que contenham pelo menos um Coronel e que não seja uma comissão formada apenas por médicos, nem apenas por odontólogos.

Dados:

- **Dentre os Coronéis do QOSPM, um é médico e o outro é odontólogo;**
- **Dentre os Capitães do QOSPM, três são ortopedistas e três são odontólogos.**

a) 70

b) 55

c) 68

d) 53

e) 72

53. (FAPEC/2022 - UFMS) Para formar a comissão dos servidores da UFMS, são escolhidas 6 pessoas. É obrigatório que na formação dessa comissão, haja a presença de pelo menos duas pessoas do sexo feminino. Estão aptas a participarem do processo de escolha da comissão 11 pessoas, sendo 7 do sexo masculino e 4 do sexo feminino. Existem quantas formas diferentes (possibilidades) de escolha para se montar essa comissão?

a) 756 possibilidades

b) 371 possibilidades

c) 320 possibilidades

d) 120 possibilidades

e) 81 possibilidades

54. (IDECAN/2022 - CBM/ES) Em um baralho convencional de 52 cartas, desejamos escolher quatro cartas. Sem levarmos em consideração a ordem delas, queremos que em cada escolha haja pelo menos uma dama. De quantas formas podemos escolher essas quatro cartas?

a) $\binom{52}{4} - \binom{48}{4}$

b) $\binom{48}{4}$

c) $\binom{48}{4} - \binom{52}{4}$

d) $\binom{48}{4}^2$

55. (FCM-CEFETMINAS/2022 - Pref. Timóteo/MG) Considere os números naturais de quatro algarismos, ou seja, de 1000 a 9999. Alguns desses números têm os algarismos apresentados em ordem decrescente, como, por exemplo, os números 9862 e 8641. Já os números 8247 e 4479 não têm os algarismos escritos em ordem decrescente.

A quantidade de números naturais de quatro algarismos que apresentam os algarismos em ordem decrescente é igual a

a) 144

b) 176

c) 210

d) 252

56. (AOCP/2022 - SED/MS) Um professor solicitou a seus alunos que resolvessem a questão a seguir, justificando a resposta: “Quantos são os subconjuntos de $\{a_1, a_2, a_3 \cdots, a_n\}$, com p elementos, nos quais pelo menos um dos elementos a_1, a_2 figura?”. Esse professor recebeu as seguintes respostas:

Aluno A: Há C_{n-1}^{p-1} combinações em que o elemento a_1 figura e C_{n-1}^{p-1} combinações em que o elemento a_2 figura. Portanto, a resposta é $2C_{n-1}^{p-1}$.

Aluno B: Primeiro obtemos o total de combinações C_n^p e excluímos as C_{n-2}^p que não contém nem a_1 e nem a_2. Portanto a resposta é $C_n^p - C_{n-2}^p$.

Aluno C: Basta somar as combinações que contém a_1 mas não a_2 $\left(C_{n-2}^{p-1}\right)$ com as que contém a_2 mas não a_1 $\left(C_{n-2}^{p-1}\right)$ com as contém ambos os elementos $\left(C_{n-2}^{p-2}\right)$. A resposta é $2.C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$

A respeito das respostas e justificativas apresentadas, assinale a alternativa correta.

a) O aluno A apresentou uma justificativa correta, mas a resposta é incorreta.

b) O aluno A apresentou uma justificativa correta e a resposta é correta.

c) O aluno B apresentou uma justificativa incorreta.

d) O aluno B apresentou uma justificativa correta, mas a resposta é incorreta.

e) O aluno C apresentou uma justificativa correta e a resposta é correta.

57. (QUADRIX/2022 - CRMV/PR) Bárbara quer comprar 10 croissants em uma padaria onde há 3 tipos de croissant (presunto e queijo, pera com gorgonzola e chocolate).

Com base nessa situação hipotética, é correto afirmar que ela poderá fazer isso de

a) 44 maneiras distintas.

b) 55 maneiras distintas.

c) 66 maneiras distintas.

d) 77 maneiras distintas.

e) 88 maneiras distintas.

58. (QUADRIX/2022 - COREN/AP) Uma loja de doces decidiu fazer uma grande liquidação e, para isso, estabeleceu que seria possível comprar duas jujubas pelo preço de uma e 3 pirulitos pelo preço de 1, mas o chiclete não entraria na promoção. O preço original de cada doce era de R$ 1,00 e Léo foi para a loja com R$ 5,00. Sabe-se que a chance de ele escolher cada um dos doces é igual, que doces iguais são indistinguíveis e que ele saiu com pelo menos 1 doce. Com base nesse caso hipotético, julgue o item.

Há 21 modos de Léo comprar 5 doces.

59. (QUADRIX/2022 - Pref. Lagunas/SC) Em uma loja, há 6 tipos de refrigerante, 4 tipos de queijo e 3 tipos de carne. Com base nesse caso hipotético, julgue o item.

Há exatamente 64 modos de uma pessoa comprar 10 carnes nessa loja.

60. (AOCP/2022 - CBM/PA) Em um sorteio realizado por uma rede de supermercados, o bombeiro Abel recebeu 7 cartões vale-compras no valor de R$1.000,00 cada um. Sensibilizado por conta de um desastre climático recente e diante do instinto de proteger (razão pela qual escolheu a profissão), ele decide que renunciará ao seu prêmio em favor da população atingida pelo desastre. Após pesquisar, percebe que três ONGs (Organizações não Governamentais) encabeçam as ações de cuidados com os desabrigados. De quantas maneiras Abel poderia distribuir os 7 cartões entre as 3 ONGs, sabendo que é possível doar para apenas uma, apenas duas ou distribuir entre as três?

a) 210

b) 343

c) 7

d) 35

e) 36

61. (IBFC/2022 - PC/BA) Num restaurante há sempre 3 tipos de sobremesas. Ana vai almoçar todo dia e escolhe uma sobremesa. Nessas circunstâncias, o total de escolhas possíveis que Ana pode fazer em 4 dias almoçando nesse restaurante, considerando que o dia escolhido para qualquer uma das sobremesas não importa, é igual a:

a) 20

b) 18

c) 15

d) 12

e) 24

62. (FUNDATEC/2022 - SBC) Imagine que você esteja usando um aplicativo novo que ainda está em fase de testes. Por essa razão, uma pessoa só consegue instalar esse aplicativo se tiver recebido um convite de alguém que já era um usuário. Suponha que você tenha 10 convites para distribuir para 4 amigos.

De quantas maneiras isso pode ser feito levando em consideração que os convites são todos indistinguíveis, que você pode distribuir mais de um convite para um mesmo amigo e que cada amigo deva receber pelo menos um convite?

a) 84

b) 120

c) 126

d) 5040

e) 6561

63. (FUNDEP/2021 - CRM/MG) O diretor de uma empresa vai promover três de seus funcionários: um a gerente e os outros dois a supervisor e coordenador de vendas, respectivamente. Após uma entrevista, o diretor concluiu que 19 funcionários, dentre os entrevistados, tinham o perfil adequado às vagas e, seguindo a política da empresa, nenhum funcionário assumiria mais de um cargo. De quantas maneiras distintas o diretor poderá escolher os funcionários que ocuparão as vagas?

a) 5.814 maneiras

b) 6.156 maneiras

c) 6.498 maneiras

d) 6.859 maneiras

64. (IBFC/2021 - MGS) Para formar uma senha de um aplicativo são necessários 4 dígitos, sendo os dois primeiros vogais e os dois últimos números pares. Se cada senha é formada por dígitos diferentes, ou seja, não pode haver duas vogais ou dois números pares iguais, então o total de senhas distintas que poderão ser formadas é igual a:

a) 360

b) 625

c) 400

d) 480

65. (IBRASP/2021 - Pref. Rio Grande) Em um grupo composto por 6 candidatos a uma vaga de emprego, apenas 4 deverão ser selecionados para a próxima etapa da seleção. Sendo assim, ao todo, quantas combinações, poderão ser realizadas, sendo que as ordens das pessoas selecionadas não importam:

a) 12 combinações

b) 15 combinações

c) 18 combinações

d) 20 combinações

e) 24 combinações

66. (OBJETIVA/2021 - Pref. Horizontina) Durante uma convenção, foram disponibilizados 5 estandes para a apresentação dos produtos de certas empresas. Sabendo-se que 8 empresas se inscreveram para fazer essa apresentação, mas que apenas 5 serão escolhidas, de quantos modos distintos pode ser feita a escolha das empresas que irão se apresentar?

a) 6.720

b) 120

c) 56

d) 52

e) 200

67. (IBADE/2021 - CFQ) Um professor de química dispõe de 6 substâncias químicas para realizar uma experiência com seus alunos. Ele solicita que, a cada aula de laboratório, eles misturem 2 substâncias distintas e anotem os resultados e as propriedades observadas, não devendo repetir a mistura das aulas anteriores. Se há uma única aula de laboratório por semana, em quantas semanas os alunos finalizarão a experiência, realizando todas as combinações possíveis?

a) 12

b) 20

c) 18

d) 15

e) 10

68. (SELECON/2021 - CM Cuiabá) Para a construção de novas escolas, a prefeitura de um município recebeu 10 projetos, entre eles o projeto A. O número máximo de maneiras diferentes de se escolher três desses projetos, de modo que o projeto A seja sempre um dos escolhidos é:

a) 24

b) 36

c) 48

d) 54

e) 10

69. (UERJ 2021) Em um setor onde trabalham quatro professores e cinco pedagogos, quatro pessoas serão escolhidas para compor uma equipe, sendo pelo menos uma delas professor. Levando em conta apenas as pessoas que podem ser escolhidas, o número máximo de equipes distintas que podem ser formadas é igual a:

a) 84

b) 91

c) 104

d) 121

70. (Quadrix 2021/CRP-MG) Em uma determinada competição futebolística, em que cada um dos times enfrentou todos os demais duas vezes, foram realizadas trezentas e oitenta partidas. Com base nessa situação hipotética, assinale a alternativa que apresenta o número de times que participaram da competição.

a) 19

b) 20

c) 22

d) 24

e) 25

Gabarito

1. LETRA D
2. LETRA A
3. LETRA A
4. LETRA A
5. LETRA C
6. LETRA A
7. LETRA C
8. LETRA D
9. LETRA C
10. LETRA D
11. LETRA E
12. LETRA E
13. LETRA C
14. LETRA A
15. LETRA B
16. LETRA E
17. LETRA A
18. LETRA B
19. CERTO
20. CERTO
21. LETRA C
22. ERRADO
23. CERTO
24. ERRADO
25. LETRA D
26. LETRA C
27. LETRA B
28. LETRA D
29. LETRA A
30. LETRA D
31. ERRADO
32. CERTO
33. LETRA D
34. LETRA B
35. ERRADO
36. ERRADO
37. LETRA D
38. LETRA D
39. LETRA D
40. LETRA B
41. LETRA C
42. LETRA E
43. CERTO
44. ERRADO
45. ERRADO
46. LETRA A
47. LETRA B
48. LETRA A
49. LETRA A
50. LETRA A
51. LETRA D
52. LETRA D
53. LETRA B
54. LETRA A
55. LETRA C
56. LETRA E
57. LETRA C
58. CERTO
59. ERRADO
60. LETRA E
61. LETRA C
62. LETRA A
63. LETRA A
64. LETRA C
65. LETRA B
66. LETRA C
67. LETRA D
68. LETRA B
69. LETRA D
70. LETRA B

LISTA DE QUESTÕES – MULTIBANCAS

Partições

1. (CONSULPLAN/2022 - Pref. Linhares) Uma equipe composta por 7 alunos terá que realizar um trabalho escolar, em que serão necessárias as seguintes atividades: apresentação oral, elaboração do texto-base, confecção dos cartazes de exposição. Dessa forma, se a equipe decidir que serão dois alunos responsáveis pela apresentação oral, dois responsáveis pela elaboração do texto-base e três incumbidos da confecção dos cartazes de exposição, a quantidade de formas diferentes que essa equipe poderá se organizar para realizar o trabalho escolar está compreendida entre:

a) 1 e 200

b) 201 e 500

c) 501 e 1000

d) 1001 e 5040

2. (FUNCERN/2022 - SESCOOP/RN) Uma empresa resolve dividir os seus 10 gerentes em três grupos de trabalho, de modo que o primeiro grupo fique com 4 gerentes, o segundo com 3 gerentes e o terceiro também com 3 gerentes. Foi solicitado que os seus funcionários calculassem o número de maneiras distintas em que essa distribuição poderia ser feita. Realizaram os cálculos corretamente os funcionários que encontraram como resultado

a) 4.200.

b) 8.400.

c) 2.100.

d) 12.600.

3. (Quadrix/2022 - COREN/AP) Em uma equipe de competição de jiu-jitsu, há 6 faixas brancas, 1 faixa azul, 4 faixas roxa, 2 faixas marrons e 1 faixa preta. Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Há exatamente 91 modos de se dividir esses competidores em 7 duplas.

4. (IDIB/2021 - CREMEPE) Um professor de Matemática quer dividir um grupinho de 6 alunos que estão inquietos em sala em outros dois grupos de 3 pessoas cada, ou três duplas. Assinale a alternativa que possui a quantidade de maneiras diferentes disso acontecer para as duas situações distintas.

a) 15 e 10

b) 20 e 10

c) 10 e 15

d) 10 e 20

5. (QUADRIX/2021 - CREFITO 4) No convite de uma festa de aniversário infantil, foi pedido para que as crianças dissessem se gostavam ou não de refrigerante de uva, empada de frango e pastel de queijo.

Dentre as 50 crianças convidadas, 28 gostam de refrigerante de uva, 15 gostam de empada de frango, 26 gostam de pastel de queijo e duas não responderam ao convite. Dentre as crianças que gostam de refrigerante de uva, 9 gostam de empada de frango e 8 gostam de pastel de queijo. Dentre as que gostam de pastel de queijo, 6 gostam de empada de frango. Todas as crianças que responderam ao convite gostam de pelo menos uma das 3 opções.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Para participar de uma brincadeira na festa, há duas mil quinhentas e vinte maneiras de se formar 4 duplas com as crianças que gostam de pastel de queijo e ao menos uma das outras opções.

6. (IADES/2021 - BRB) Suponha que um banco de investimentos realizou um processo seletivo no qual foram contratados cinco novos analistas de tecnologia da informação, que serão distribuídos em duas agências, uma no bairro da Asa Sul e outra no bairro da Asa Norte. A agência da Asa Sul receberá três analistas e a agência da Asa Norte receberá dois analistas. De quantas maneiras distintas os cinco analistas recém-contratados podem ser distribuídos entre as duas agências?

a) 8

b) 10

c) 12

d) 15

e) 21

Gabarito

1. LETRA B
2. LETRA A
3. ERRADO
4. LETRA C
5. ERRADO
6. LETRA B

LISTA DE QUESTÕES – MULTIBANCAS

Lemas de Kaplansky

1. (CEBRASPE 2021/SEDUC-AL) O próximo item apresenta uma situação hipotética a ser julgada, acerca de problemas matemáticos envolvendo situação de uma escola.

Em 5 cadeiras de um auditório, só podem sentar professores e alunos, de tal forma que 2 alunos não podem sentar-se juntos, para se evitar conversa. Nessa situação hipotética, há exatamente 9 possibilidades diferentes de 5 pessoas, entre professores e alunos, sentarem-se nas 5 cadeiras.

2. (FGV/2015 – SSP-AM) Sete pessoas formam uma fila e duas delas serão escolhidas para receber um brinde. O número de maneiras diferentes de escolher duas pessoas da fila que não sejam vizinhas é:

a) 15

b) 18

c) 20

d) 24

e) 30

3. (FGV/2021 - Pref. Paulínia) O número de anagramas da palavra PAULINIA que não têm duas consoantes juntas é

a) 3600

b) 4800

c) 6400

d) 10800

e) 14400

GABARITO

1. ERRADO

2. LETRA A

3. LETRA A

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.