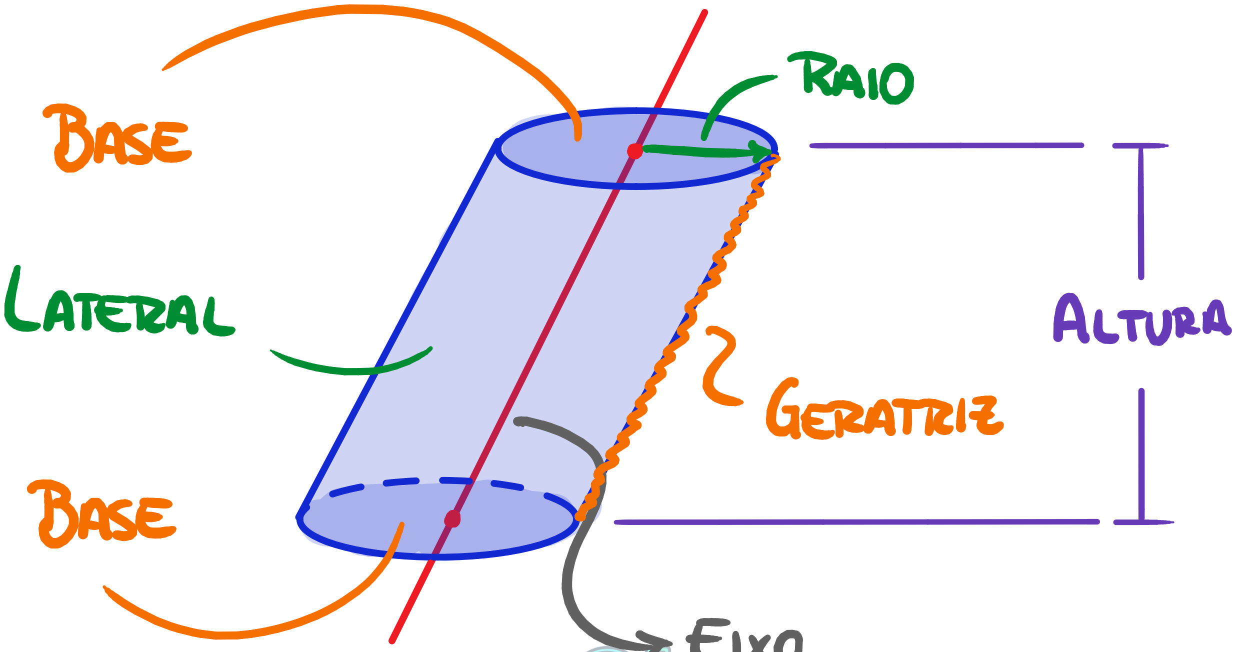
CILINDROS

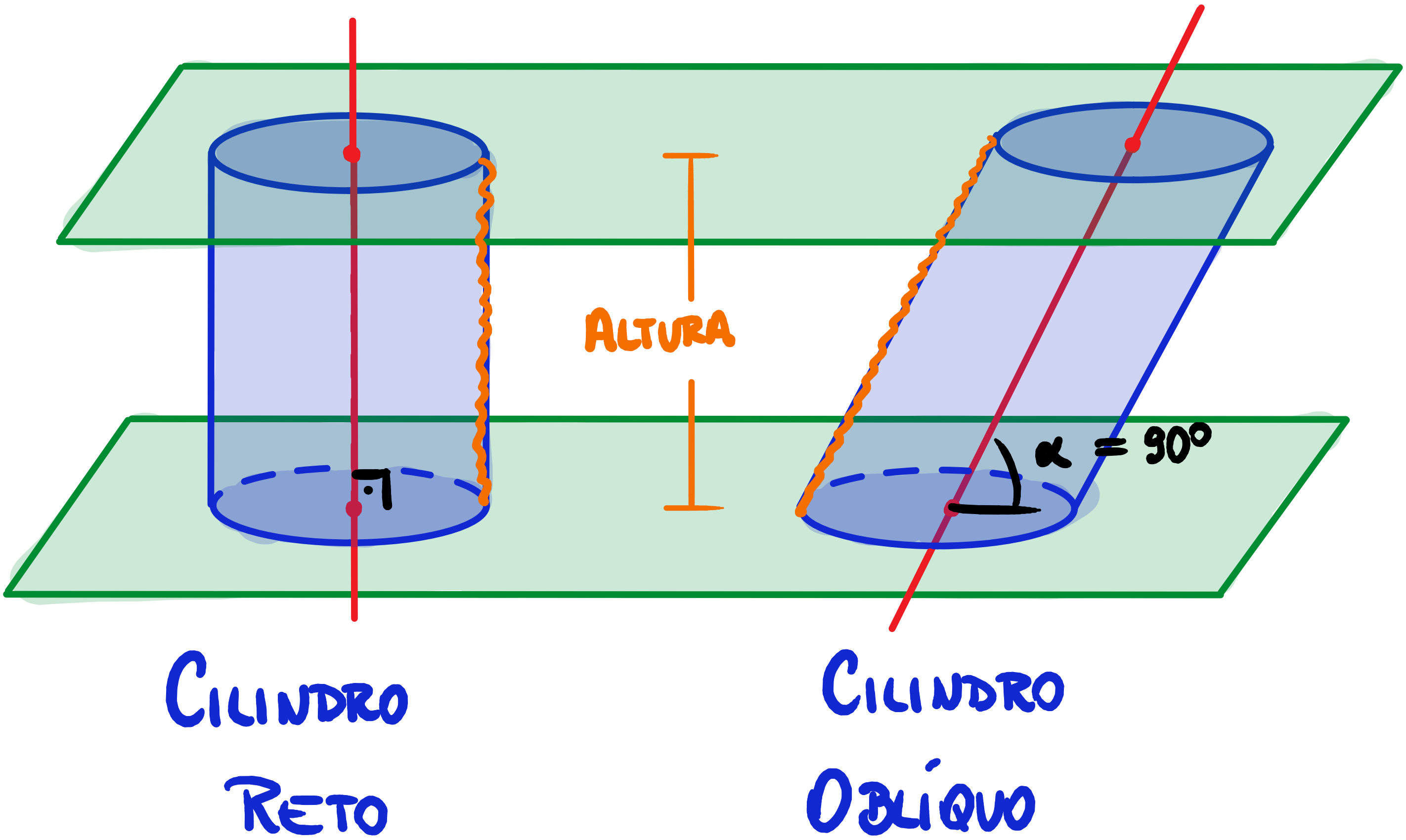
DEFINIÇÃO

SÓLIDO CUJAS BASES SÃO CÍRCULOS CONGRUENTES SITUADOS EM PLANOS PARALELOS.

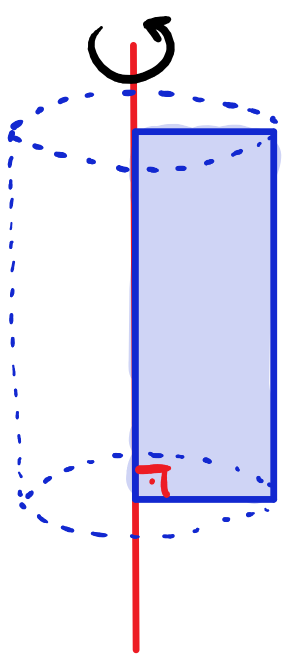
" " " PRISMA CIRCULAR " " "

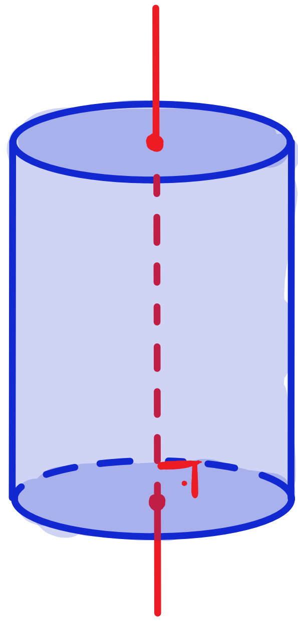


Classificação dos Cilindros



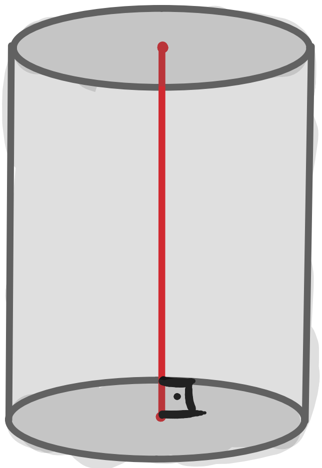
CILINDRO CIRCULAR RETO = **CILINDRO DE REVOLUÇÃO**

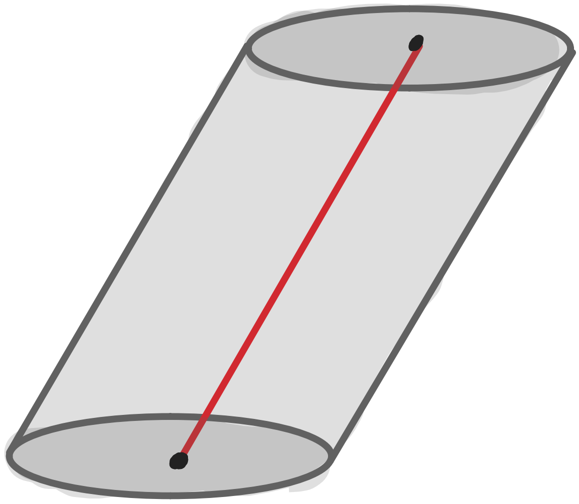




EXEMPLO

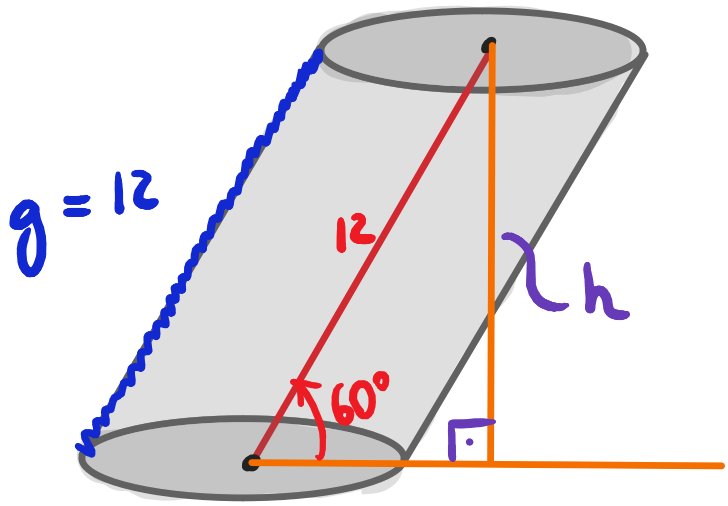
DESENHE UM CILINDRO CIRCULAR RETO E UM CILINDRO CIRCULAR OBLÍQUO.





EXEMPLO

UM CILINDRO OBLÍQUO TEM SEU EIXO, CUJO COMPRIMENTO É 12, FORMANDO 60º COM O PLANO DA BASE. CALCULE A GERATRIZ E A ALTURA DESSE CILINDRO.

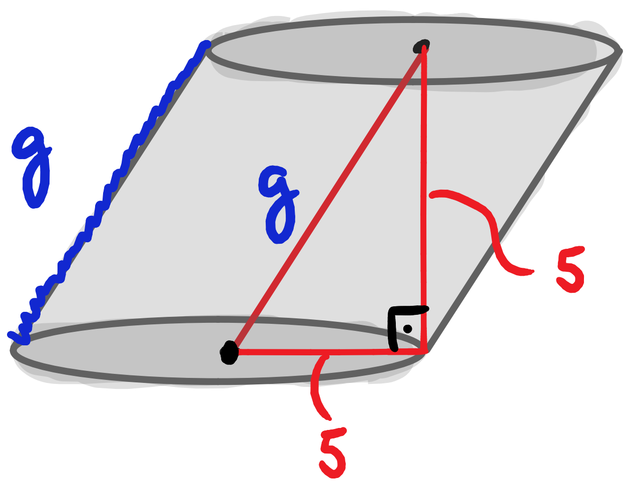


$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{12} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \frac{h}{\cancel{12}\,6}$$

$$\boxed{h = 6\sqrt{3}}$$

EXEMPLO

O CENTRO DA BASE SUPERIOR DE UM CILINDRO PROJETA-SE SOBRE A BORDA DA BASE INFERIOR. SE A ALTURA E O RAIO DESSE CILINDRO SÃO AMBOS IGUAIS A 5, CALCULE A O COMPRIMENTO DA GERATRIZ.



$$g^2 = 5^2 + 5^2$$

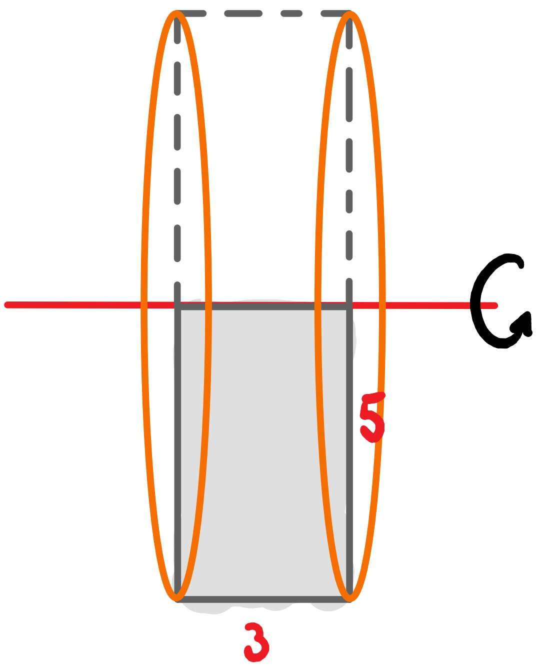
$$g^2 = 2 \cdot 5^2$$

$$\boxed{g = 5\sqrt{2}}$$

EXEMPLO

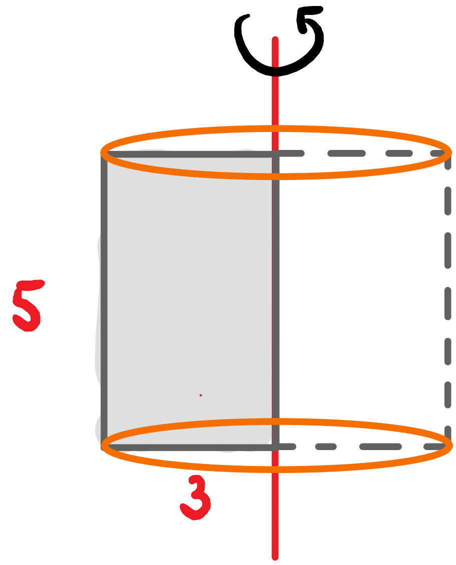
SEJA UM RETÂNGULO DE LADOS 3 E 5. CALCULE O RAIO E ALTURA DO CILINDRO GERADO AO ROTACIONAR ESSE RETÂNGULO:

a. EM TORNO DO MENOR LADO
b. EM TORNO DO MAIOR LADO.



$R = 5$

$h = 3$



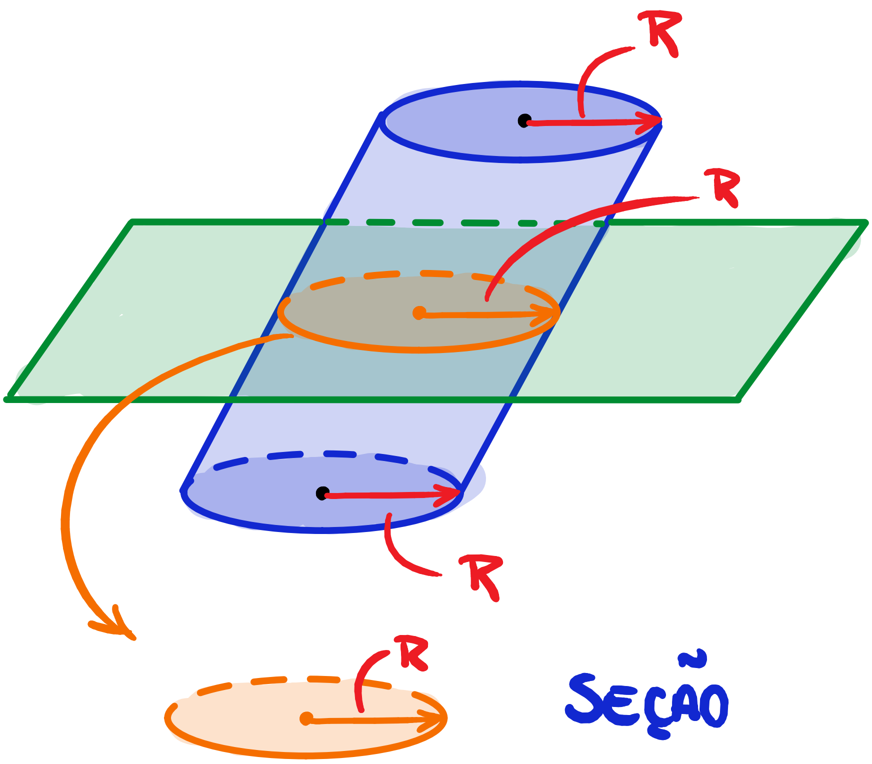
$R = 3$

$h = 5$

Seções De Um Cilindro

Seção Transversal

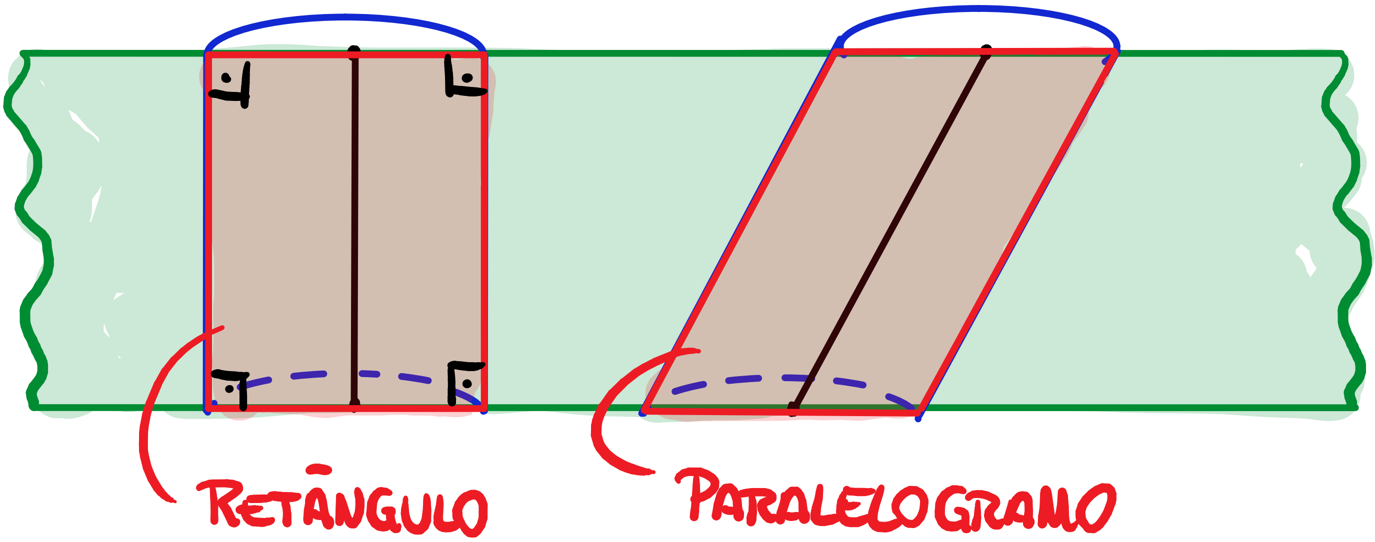
Seção paralela à base.



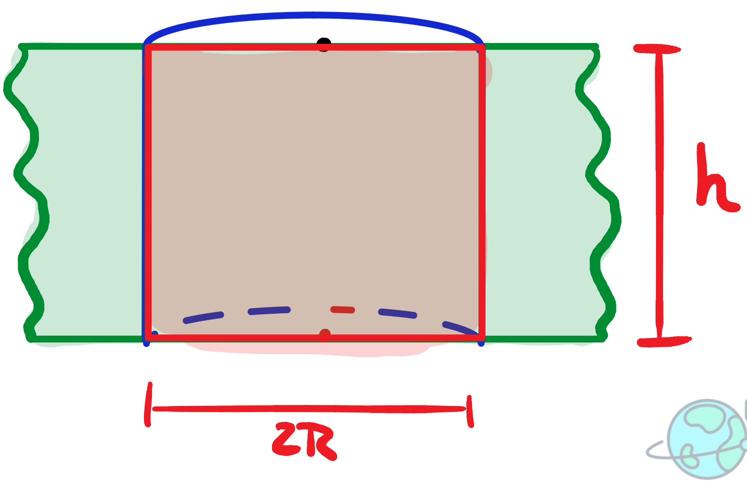
Seção Transversal

Seção Meridiana

Seção que contém o eixo do cilindro.



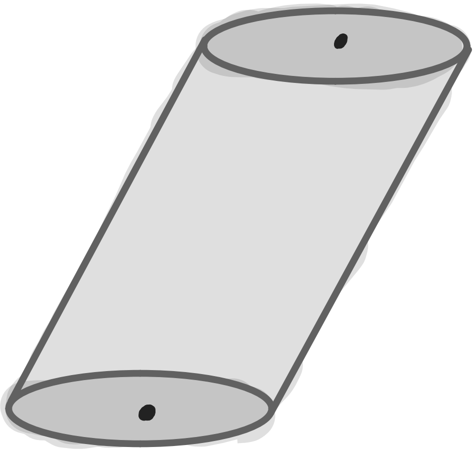
Cilindro Equilátero $\Rightarrow$ Cilindro cuja seção meridiana é um quadrado

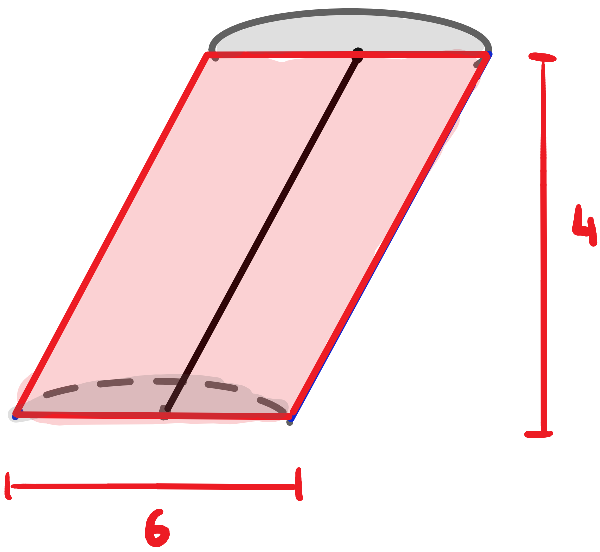


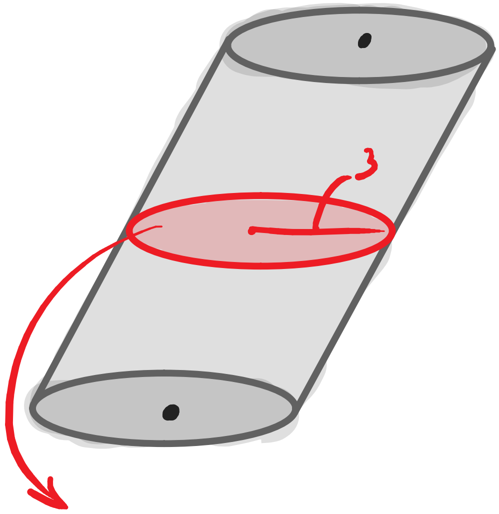
$$\boxed{h = 2R}$$

EXEMPLO

SEJA UM CILINDRO OBLÍQUO DE RAIO 3 E ALTURA 4. CALCULE A ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL E DA SEÇÃO MERIDIANA DESSE CILINDRO.







$A_{MER} = 6 \cdot 4$

$A_{MER} = 24$

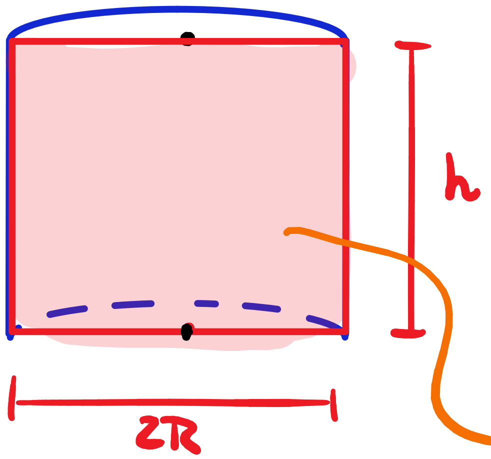
$A_{TRANSV} = \pi \cdot 3^2$

$A_{TRANSV} = 9\pi$

UNIVERSO NARRADO

EXEMPLO

CALCULE A ÁREA DA SEÇÃO MERIDIANA DE UM CILINDRO EQUILÁTERO DE RAIO 3.



$$h = 2\overset{3}{R}$$

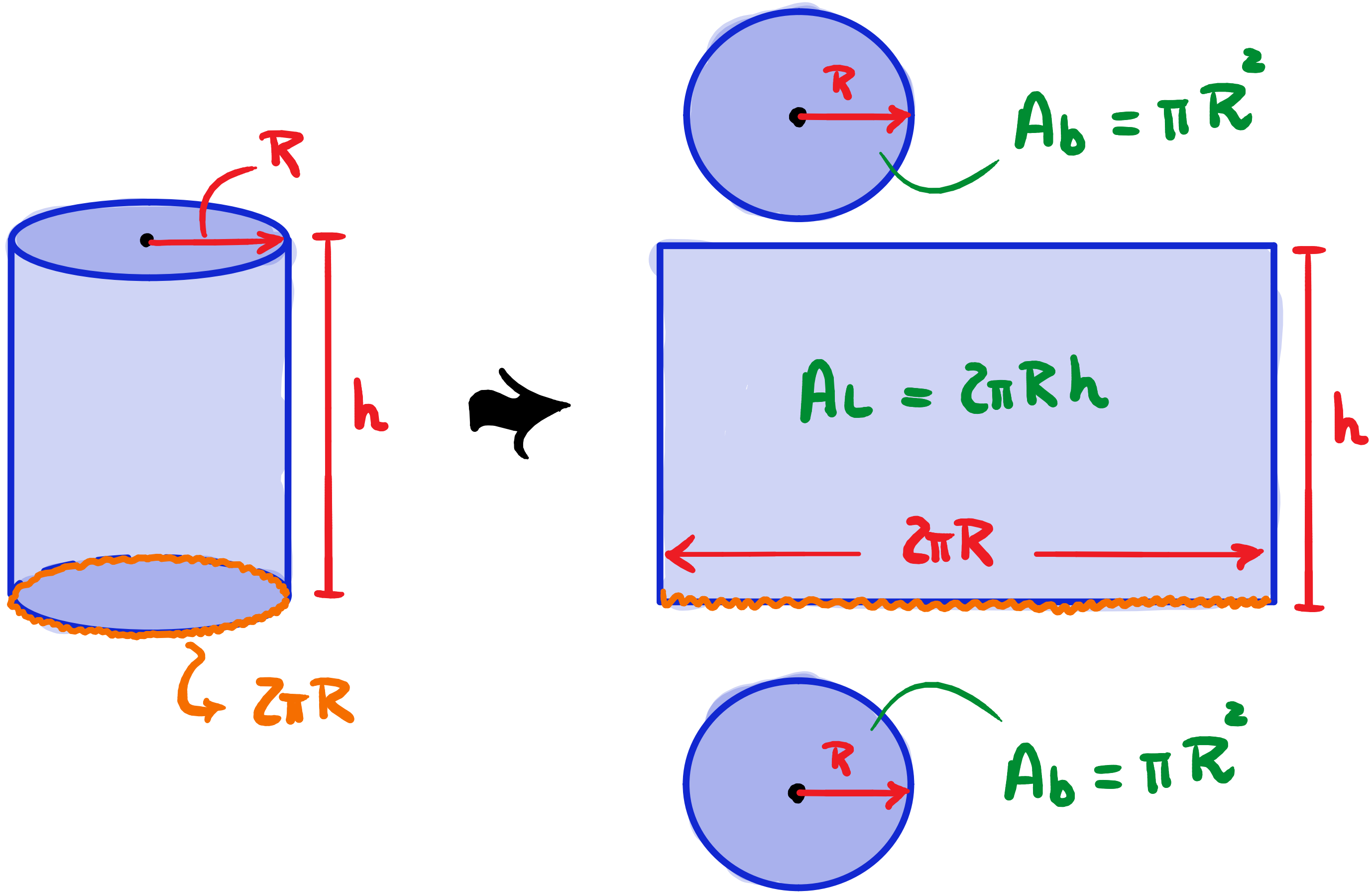
$$R = 3$$

$$h = 6$$

$$A = 6^2$$

$$\underline{A = 36}$$

ÁREAS

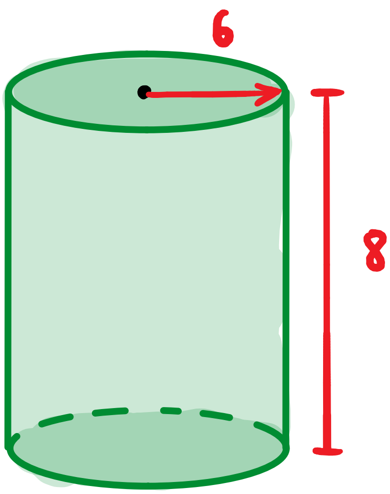


ÁREA DA BASE: $A_b = \pi R^2$

ÁREA LATERAL: $A_L = 2\pi R h$

ÁREA TOTAL: $A_T = 2A_b + A_L$

UNIVERSO NARRADO



$A_b = \pi R^2 \longrightarrow A_b = \pi 6^2 \rightarrow \underline{A_b = 36\pi}$

$A_L = 2\pi R h \rightarrow A_L = 2\pi . 6 . 8 \rightarrow \underline{A_L = 96\pi}$

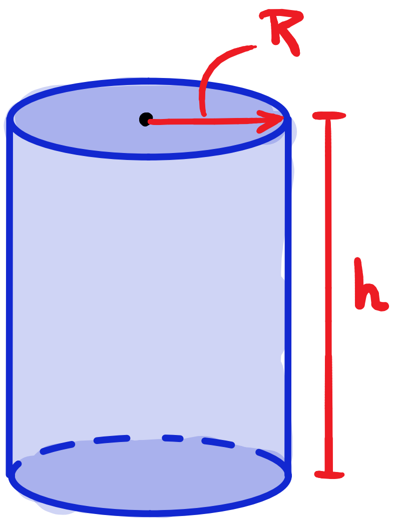
$A_T = 2 . A_b + A_L \rightarrow A_T = 2 . 36\pi + 96\pi$

$A_T = 72\pi + 96\pi$

$\underline{A_T = 168\pi}$

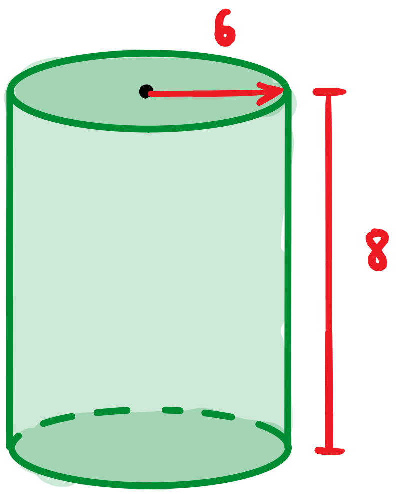
UNIVERSO NARRADO

VOLUME



$$V = A_b . h$$

$$\boxed{V = \pi R^2 h}$$



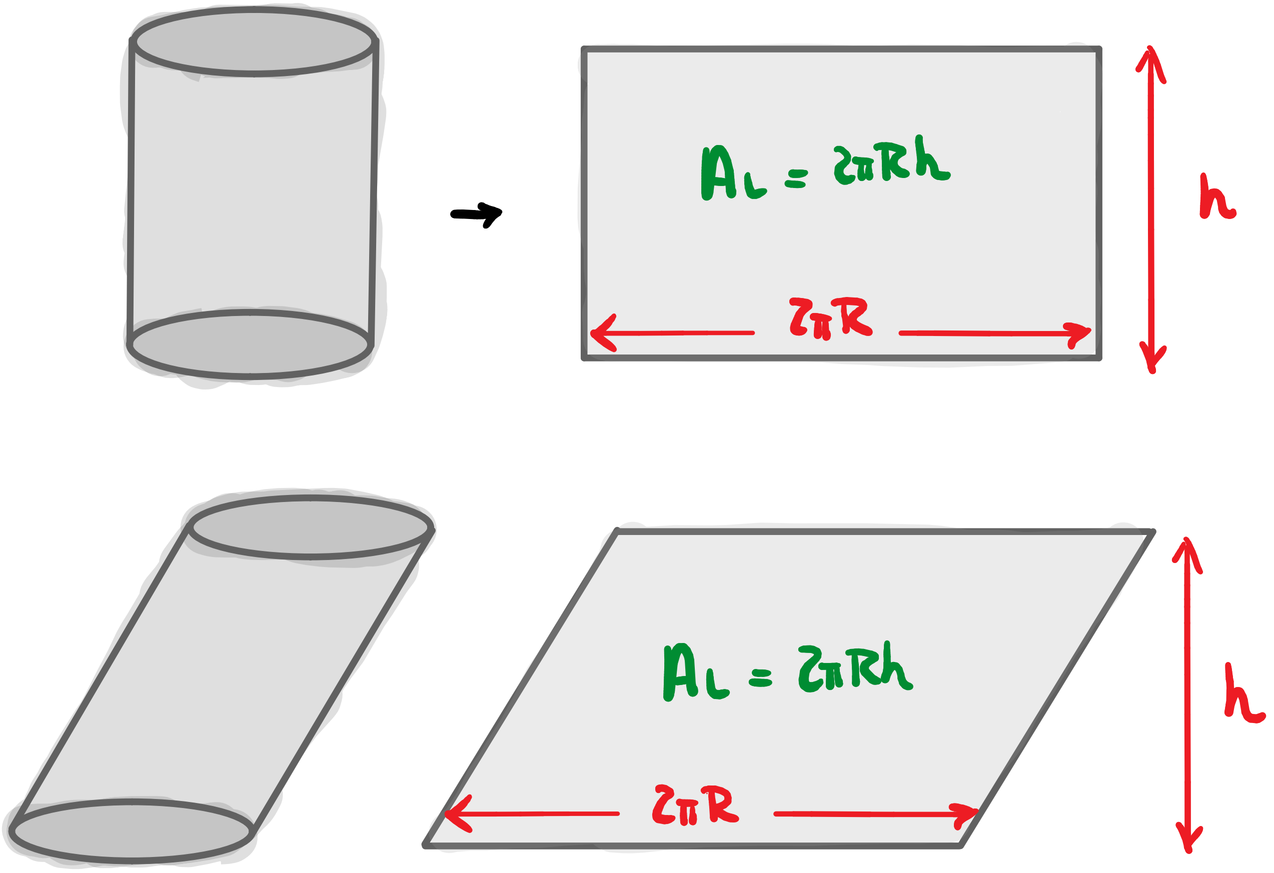
$$V = \pi R^2 h$$

$$V = \pi . 36 . 8$$

$$V = 288\pi$$

EXEMPLO

CALCULE A ÁREA TOTAL E O VOLUME DE UM CILINDRO DE ALTURA 6 E RAIO DA BASE 5.



$A_b = \pi R^2 = \pi . 5^2 \rightarrow A_b = 25\pi$

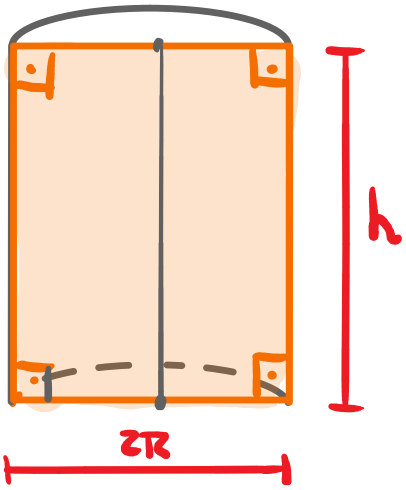
$A_L = 2\pi Rh = 2\pi . 5 . 6 \rightarrow A_L = 60\pi$

$A_T = 2A_b + A_L = 50\pi + 60\pi \rightarrow \underline{A_T = 110\pi}$

$V = \pi R^2 h = \pi . 5^2 . 6 \rightarrow \underline{V = 150\pi}$

EXEMPLO

UM CILINDRO RETO POSSUI VOLUME IGUAL A 50π E ÁREA LATERAL IGUAL A 20π. CALCULE A ÁREA DA SUA SEÇÃO MERIDIANA.



$$A_{MER} = 2Rh$$

$$A_L = 20\pi$$

$$2\cancel{\pi}Rh = 20\cancel{\pi}$$

$$2Rh = 20$$

$$V = 50\pi$$

$$\pi R^2 h = 50\pi$$

$$R^2 h = 50$$

$$A_L = 20\pi$$

$$2\cancel{\pi}Rh = 20\cancel{\pi}$$

$$Rh = 10$$

$$\frac{R^{\cancel{2}}\cancel{h}}{\cancel{R}\cancel{h}} = \frac{5\cancel{0}}{1\cancel{0}} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} R = 5 \\ h = 2 \end{matrix}}$$

$$A_{MER} = 2R.h$$

$$A_{MER} = 2.5.2$$

$$A_{MER} = 20$$

EXEMPLO

CALCULE A ALTURA DE UM CILINDRO RETO CUJA ÁREA LATERAL É O DOBRO DA ÁREA DA BASE E CUJA CIRCUNFERÊNCIA DA BASE TEM COMPRIMENTO 4π.

$$2\pi R = 4\pi$$

$$\underline{R = 2}$$

$$A_L = 2 . A_b$$

$$\cancel{2}\cancel{\pi}\cancel{R}h = \cancel{2} . \cancel{\pi}R^{\cancel{2}}$$

$$h = R$$

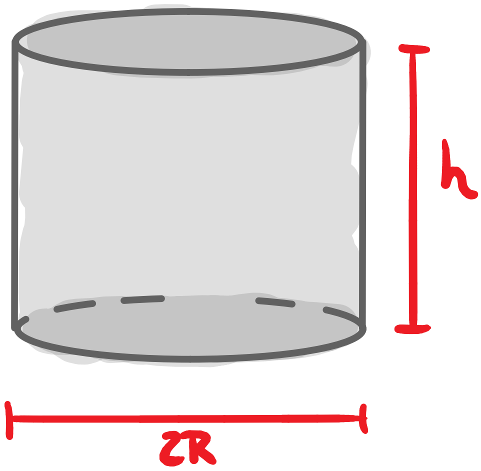
$$\underline{h = 2}$$

UNIVERSO NARRADO

EXEMPLO

CALCULE A ALTURA DE UM CILINDRO EQUILÁTERO DE VOLUME 250π.

CILINDRO EQUILÁTERO : $2R = h$



$$V = 250\pi$$

$$\pi R^2 h = 250\pi$$

$$\cancel{\pi} R^2 . 2R = 250\cancel{\pi}$$

$$R^3 = 125$$

$$R = \sqrt[3]{125}$$

$$\underline{R = 5}$$

$$h = 2R$$

$$\underline{h = 10}$$

EXEMPLO

SEJA UM CILINDRO RETO DE ALTURA 2. AUMENTANDO O RAIO OU A ALTURA EM 6 UNIDADES, O AUMENTO DO VOLUME É O MESMO. CALCULE O RAIO DESSE CILINDRO.

$h = 2$; RAIO $R = ?$

1ª → $V_{FINAL} = \pi (R+6)^2 \cdot 2 = \underline{2\pi (R+6)^2}$

2ª → $V_{FINAL} = \pi \cdot R^2 (2+6) = \underline{8\pi R^2}$

$$\cancel{2}\cancel{\pi}(R+6)^2 = \overset{4}{\cancel{8}}\cancel{\pi}R^2$$

$$R^2 + 12R + 36 = 4R^2$$

$$3R^2 - 12R - 36 = 0$$

$$\underline{R^2 - 4R - 12 = 0}$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1(-12)$$

$$\Delta = 16 + 48$$

$$\Delta = 64$$

$$R = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$\underline{R = 6}$ ✓ ou $\cancel{R = -2}$

EXEMPLO

DIGA O QUE ACONTECE COM O VOLUME DO CILINDRO AO FAZER AS SEGUINTES ALTERAÇÕES:

a. TRIPLICAR RAIO.
b. TRIPLICAR ALTURA.
c. DOBRAR ALTURA E REDUZIR RAIO À METADE.
d. DOBRAR RAIO E REDUZIR ALTURA À METADE.

$$V_{INICIAL} = \pi R^2 h$$

(a) $V = \pi (3R)^2 . h \rightarrow V = 9 \underline{\pi R^2 h} \rightarrow$ MULT. 9

(b) $V = \pi R^2 (3h) \rightarrow V = 3 \pi R^2 h \rightarrow$ MULT. 3

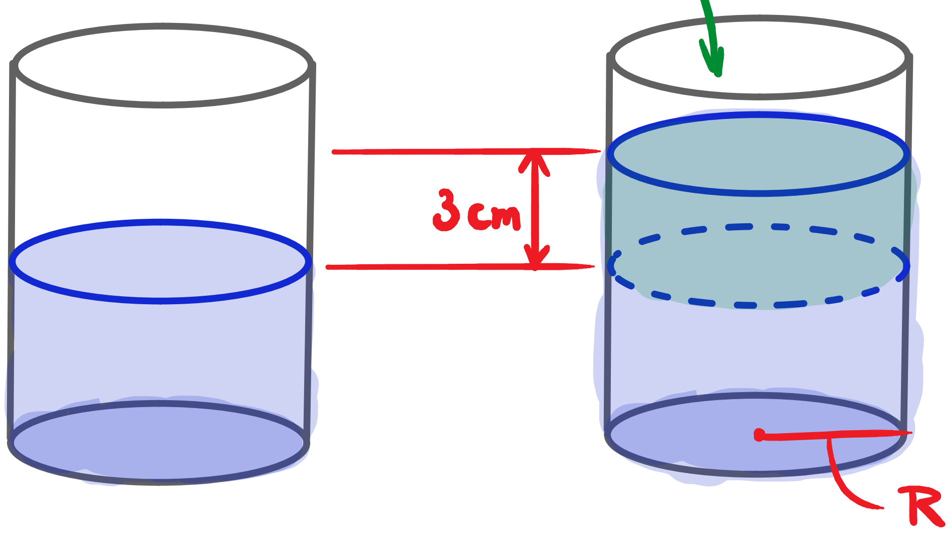
(c) $V = \pi . \left(\frac{R}{2}\right)^2 . (2h) \rightarrow V = \frac{1}{2} . \underline{\pi R^2 h} \rightarrow$ DIVIDIU POR 2

(d) $V = \pi . (2R)^2 . \frac{h}{2} \rightarrow V = 2 . \underline{\pi R^2 h} \rightarrow$ MULT. 2

EXEMPLO

UM CILINDRO POSSUI CERTA QUANTIDADE DE LÍQUIDO. AO ADICIONAR 300ml DE LÍQUIDO, A ALTURA SOBE 3cm. CALCULE O RAIO DO CILINDRO.

$300mL = 300\,cm^3$



$$V = \pi R^2 h$$

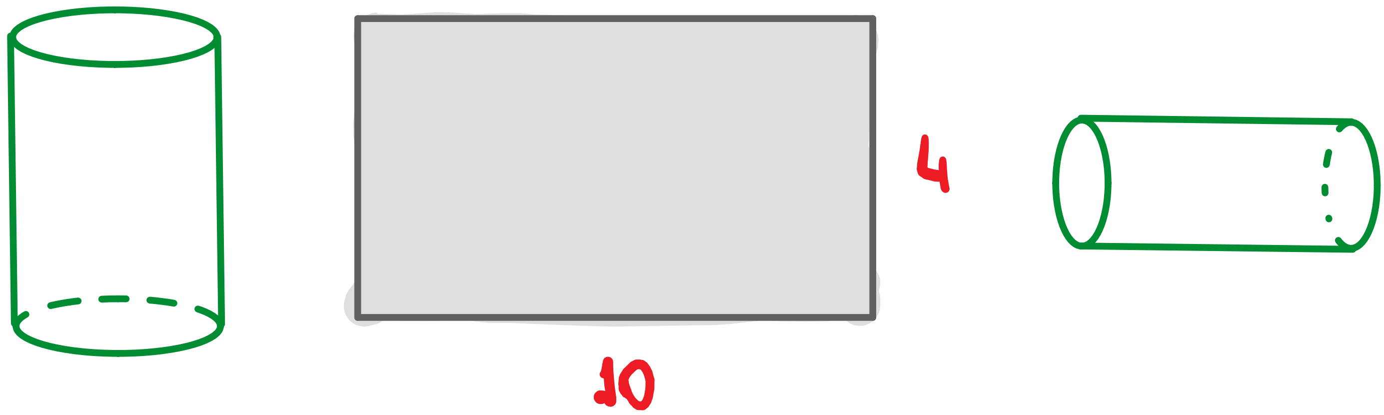
$$300 = \pi R^2 . 3$$

$$R^2 = \frac{100}{\pi}$$

$$\boxed{R = \frac{10}{\sqrt{\pi}}\ cm}$$

EXEMPLO

A FIGURA ABAIXO É A ÁREA LATERAL DE UM CILINDRO. CALCULE O VOLUME DESSE CILINDRO.



$2\pi R = 10$

$R = \frac{5}{\pi}$

$h = 4$

$\rightarrow V = \pi R^2 h$

$V = \pi \cdot \left(\frac{5}{\pi}\right)^2 \cdot 4$

$\boxed{V = \frac{100}{\pi}}$

$2\pi R = 4 \rightarrow R = \frac{2}{\pi}$

$h = 10$

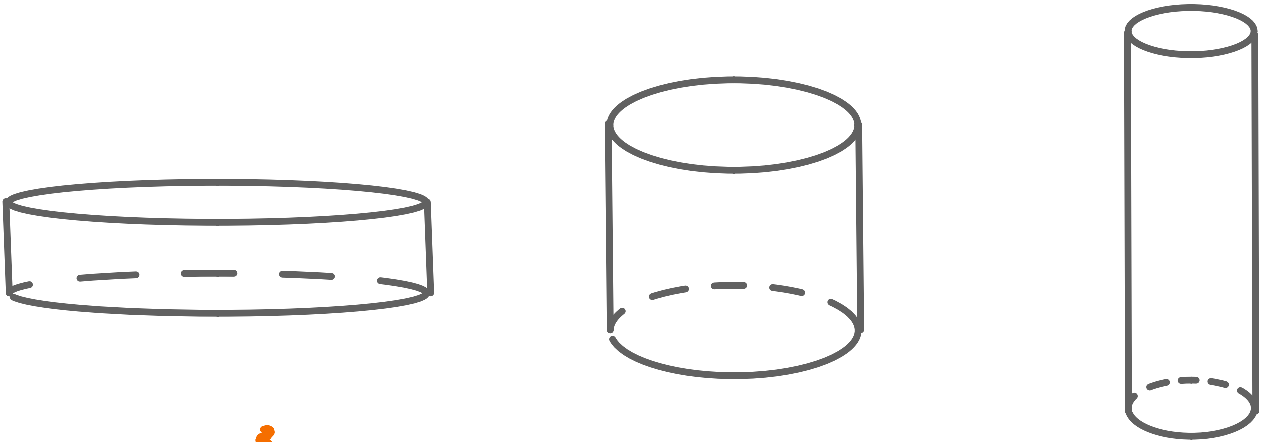
$\rightarrow$

$V = \pi \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \cdot 10$

$\boxed{V = \frac{40}{\pi}}$

EXEMPLO

SEJA UM CILINDRO RETO DE ÁREA TOTAL FIXA. MOSTRE QUE, NESSE CASO, O CILINDRO DE VOLUME MÁXIMO É O CILINDRO EQUILÁTERO.



$$V = \pi R^2 h$$

$$A = 2.\pi R^2 + 2\pi R h$$

$$2\pi R h = A - 2\pi R^2 \rightarrow h = \frac{A}{2\pi R} - \frac{2\pi R^2}{2\pi R}$$

$$\boxed{h = \frac{A}{2\pi R} - R}$$

$$V = \pi R^2 \left(\frac{A}{2\pi R} - R \right) \rightarrow \boxed{V = \frac{A.R}{2} - \pi R^3}$$

UNIVERSO NARRADO

$$V = \frac{A.R}{2} - \pi R^3$$

$$\frac{dV}{dR} = \boxed{V' = \frac{A}{2} - 3\pi R^2}$$

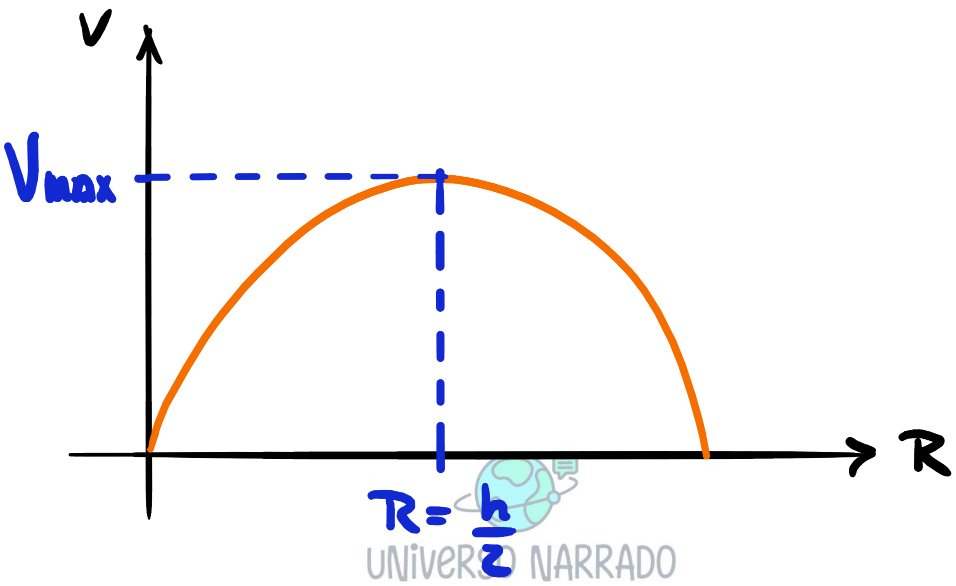
$$V' = 0 \rightarrow 3\pi R^2 = \frac{A}{2} \rightarrow \underline{A = 6\pi R^2}$$

$$2.\pi R^2 + 2\pi R h = 6\pi R^2$$

$$\cancel{2}\cancel{\pi}Rh = \cancel{4}^{2}\cancel{\pi}R^{\cancel{2}}$$

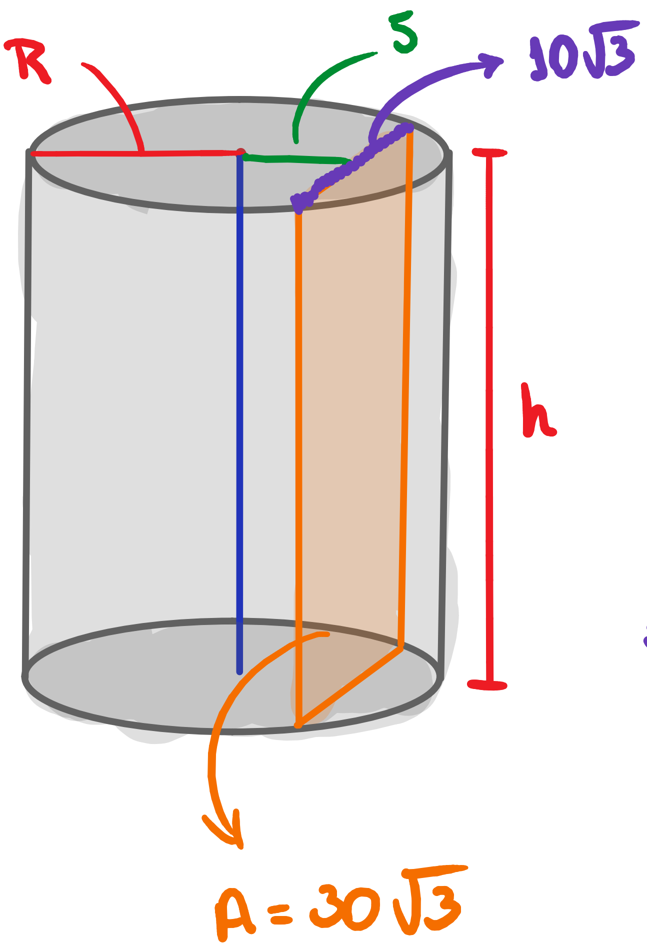
$$\boxed{h = 2R} \rightarrow \text{CILINDRO EQUILÁTERO}$$

$$V'' = \frac{dV'}{dR} = -6\pi R < 0 \rightarrow \text{CONCAVIDADE PARA BAIXO}$$

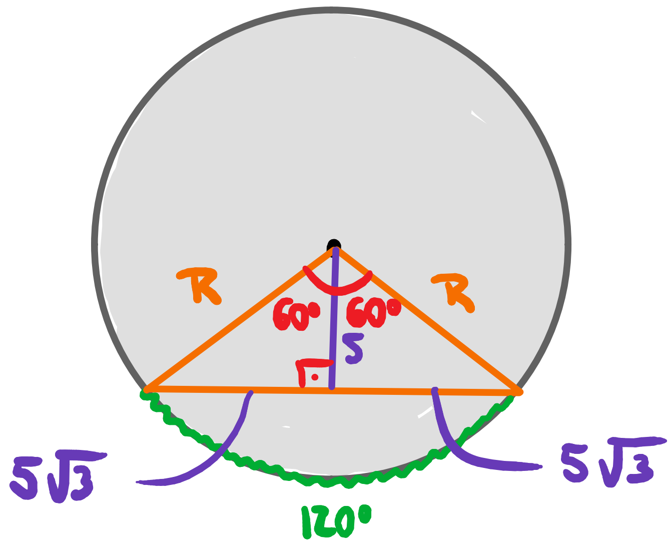


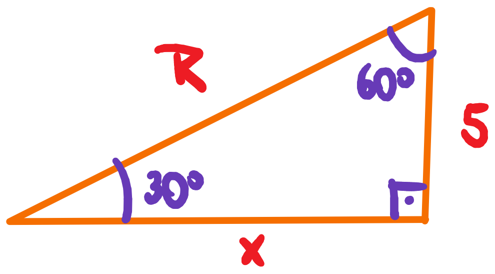
EXEMPLO

UM CILINDRO RETO É SECCIONADO POR UM PLANO PARALELO AO EIXO E DISTANTE 5 UNIDADES DESSE. ESSE PLANO SEPARA NA BASE UM ARCO DE 120°. SE A SEÇÃO TEM ÁREA $30\sqrt{3}$, CALCULE O VOLUME DO CILINDRO.



Vista Superior



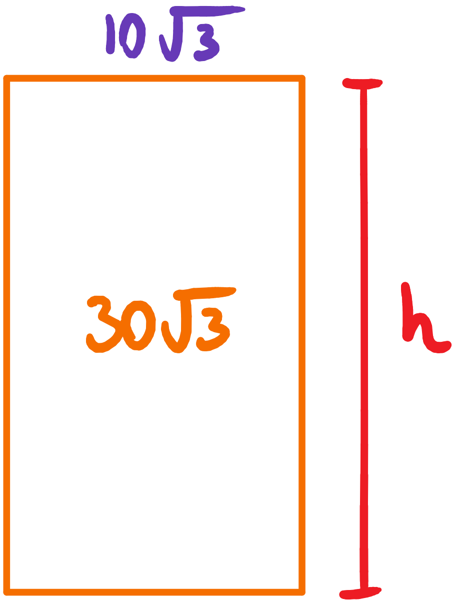


$$\operatorname{sen} 30° = \frac{5}{R}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{R} \rightarrow \underline{R = 10}$$

$$\cos 30° = \frac{x}{R}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{10} \rightarrow \underline{x = 5\sqrt{3}}$$



$$1\cancel{0}\,\cancel{\sqrt{3}} \cdot h = 3\cancel{0}\,\cancel{\sqrt{3}}$$

$$\underline{h = 3}$$

$$V = \pi R^2 h$$

$$V = \pi \cdot 10^2 \cdot 3$$

$$\underline{V = 300\pi}$$

EXEMPLO

A MÉDIA HARMÔNICA ENTRE O RAIO R E A ALTURA H DE UM CILINDRO CIRCULAR RETO É 4 E A ÁREA TOTAL DESSE CILINDRO E 2π. ENCONTRE UMA EQUAÇÃO DE GRAU 3 EM QUE UMA DAS RAÍZES SEJA O RAIO DESSE CILINDRO.

$$A_T = 2 . A_b + A_L$$

$$\cancel{2\pi} = \cancel{2\pi} R^2 + \cancel{2\pi} RH$$

$$1 = R^2 + RH$$

$$\frac{2}{\frac{1}{R} + \frac{1}{H}} = 4 \rightarrow \frac{1}{R} + \frac{1}{H} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{2} - \frac{1}{R} = \frac{R-2}{2R}$$

$$H = \frac{2R}{R-2}$$

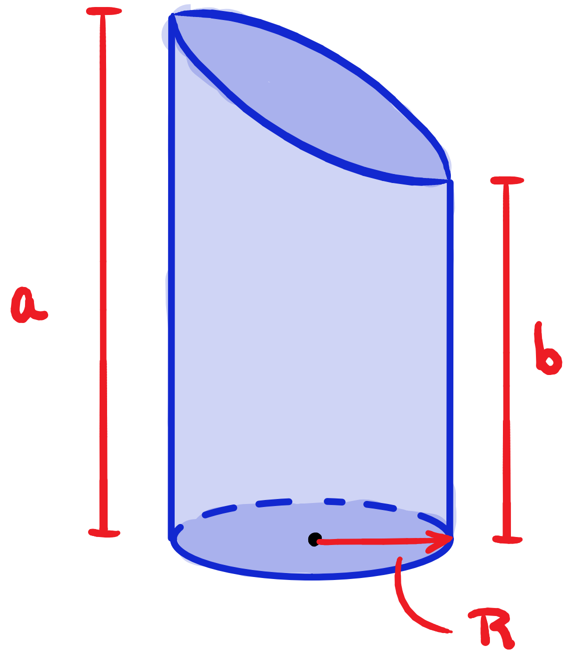
$$R^2 + R \cdot \frac{2R}{R-2} = 1$$

$$\frac{R^2(R-2) + 2R^2}{\cancel{R-2}} = \frac{R-2}{\cancel{R-2}}$$

$$R^3 - \cancel{2R^2} + \cancel{2R^2} = R - 2$$

$$R^3 - R + 2 = 0$$

Tronco de Cilindro



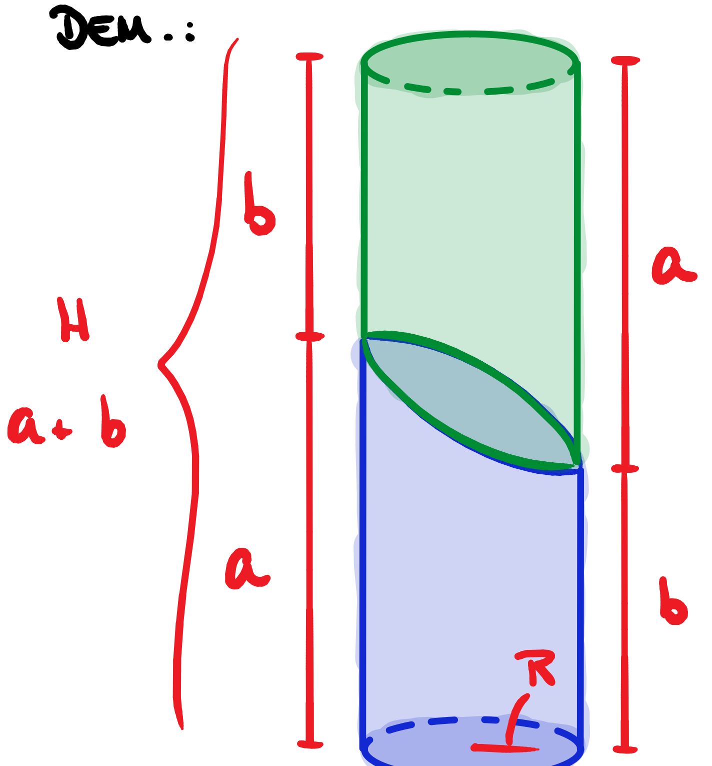
Altura Media h_m:

$$\boxed{h_m = \frac{a+b}{2}}$$

$$\boxed{V = \pi R^2 h_m}$$

$$\boxed{A_L = 2\pi R h_m}$$

Dem.:

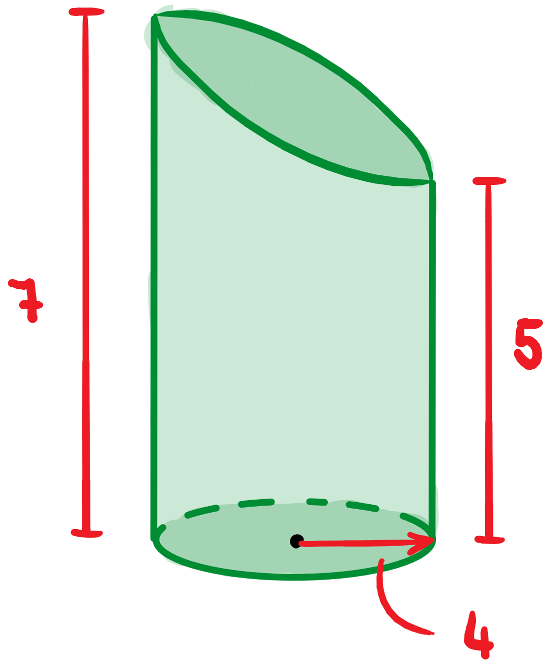


$$2 \cdot V_T = \pi R^2 \cdot (a+b)$$

$$V_T = \pi R^2 \cdot \underbrace{\frac{(a+b)}{2}}_{h_m}$$

$$2 \cdot A_L = 2\pi R(a+b)$$

$$A_L = 2\pi R \cdot \underbrace{\frac{(a+b)}{2}}_{h_m}$$



$$h_m = \frac{5+7}{2} = 6$$

$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 6$$

$$\underline{V = 96\pi}$$

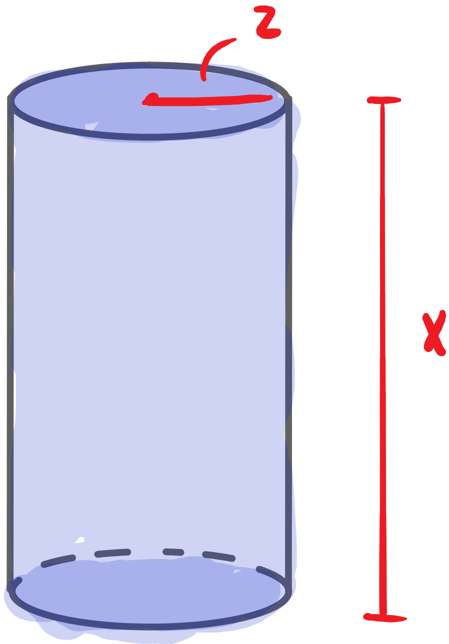
$$A_L = 2\pi R \cdot h_m$$

$$A_L = 2\pi \cdot 4 \cdot 6$$

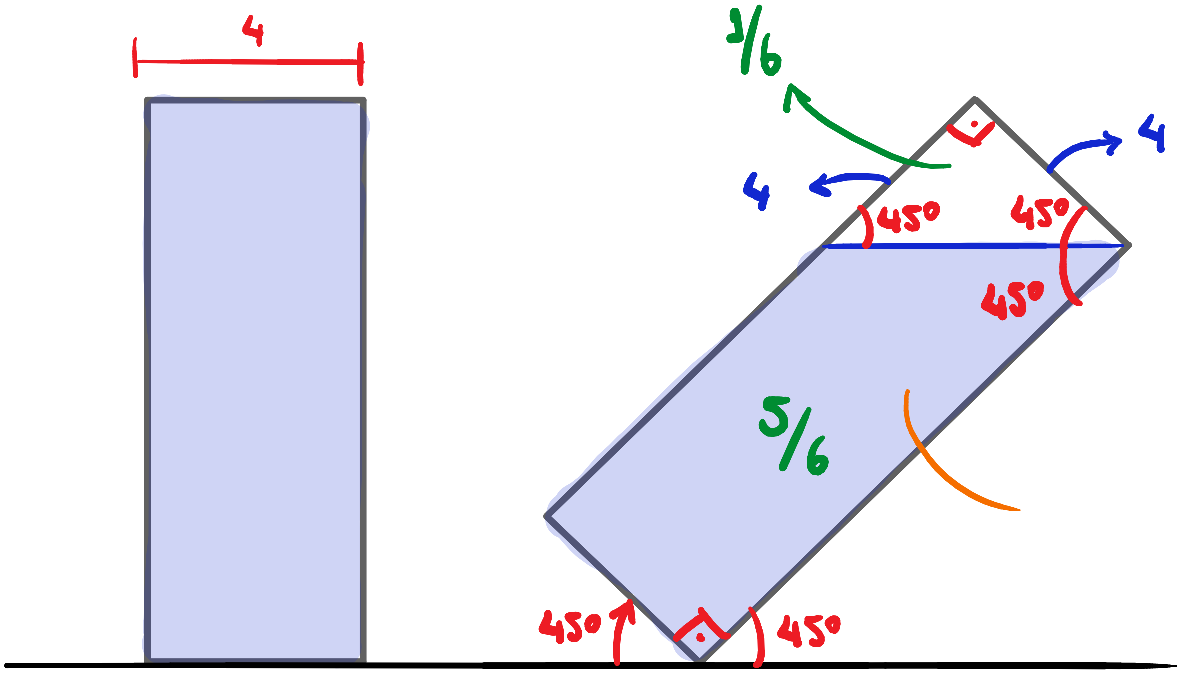
$$\boxed{A_L = 48\pi}$$

EXEMPLO

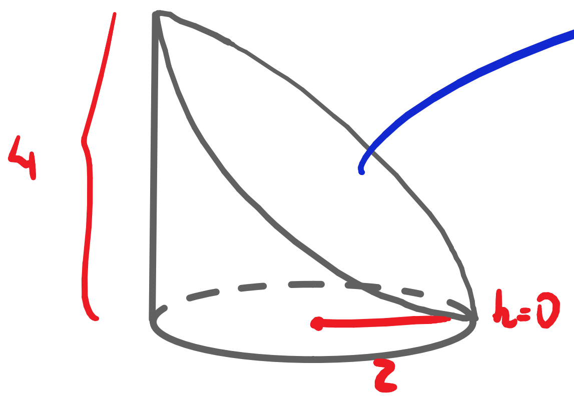
SEJA UM CILINDRO DE RAIO DA BASE 2 E ALTURA X QUE SE ENCONTRA CHEIO DE ÁGUA. AO INCLINAR ESSE CILINDRO 45°, DERRAMA-SE 1/6 DE SEU VOLUME. CALCULE A ALTURA DO CILINDRO.



Vista Frontal:



$$V_{TOTAL} = \pi \cdot 2^2 \cdot x$$
$$= 4\pi x$$



$$h_m = \frac{4+0}{2} = 2$$

$$V = \pi \cdot 2^2 \cdot 2$$

$$\underline{V = 8\pi} \quad \left(1/6\right)$$

$$\underline{V_{TOTAL} = 48\pi}$$

$$\pi R^2 \cdot x = 48\pi \rightarrow \cancel{\pi} \cdot 2^2 \cdot x = 48\cancel{\pi} \rightarrow \underline{x = 12}$$