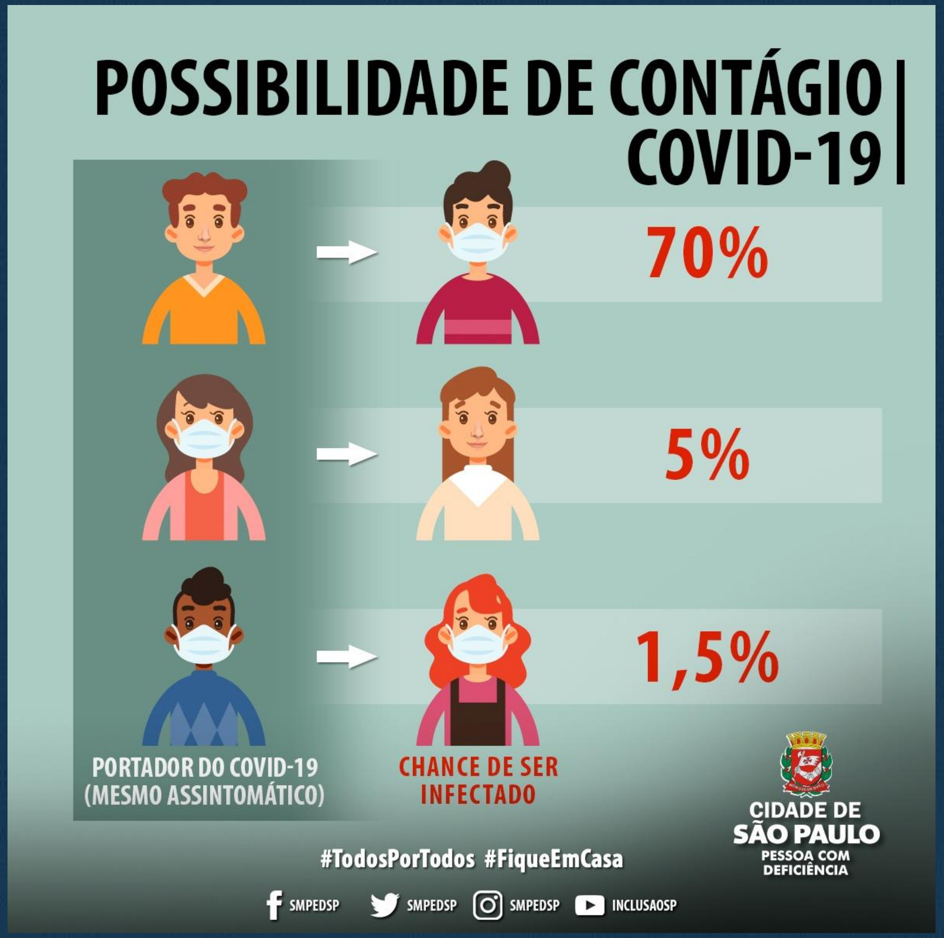
PROBABILIDADE

Por que é importante?

- Ciência de dados: modelos de classificação
- Economia e finanças
- Sports Analytics
- Seguro; ciências atuariais



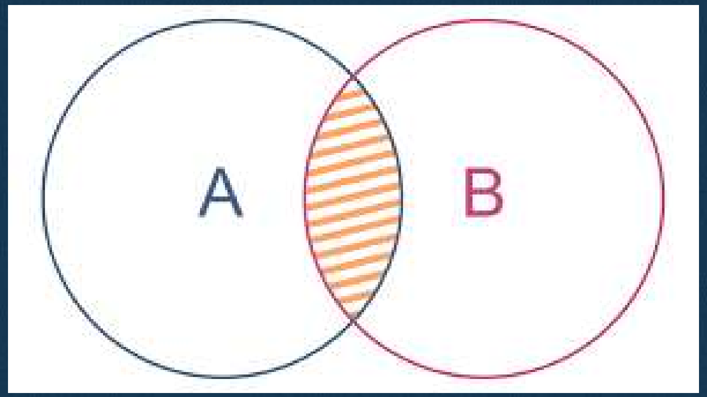
O caso Linda

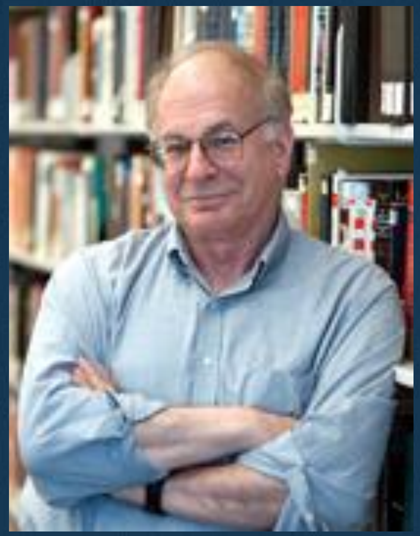
Linda tem 31 anos, solteira, sincera e muito esperta. Se formou em filosofia, e enquanto estudante, se preocupava com discriminação e justiça social.

O que é mais provável?

(1) Linda trabalha em um banco

(2) Linda trabalha em um banco e participa do movimento feminista





Caso Janet Collins

CARACTERÍSTICA	PROBABILIDADE INDIVIDUAL
Automóvel parcialmente amarelo	$^1/_{10}$
Homem com bigode	$^1/_4$
Homem negro com barba	$^1/_{10}$
Garota com rabo de cavalo	$^1/_{10}$
Garota loira	$^1/_3$
Casal inter-racial num carro	$^1/_1$ mil

A chance de que um casal se encaixe em todas essas características distintivas é de 1/12 milhões

- As categorias devem ser independentes
- Qual a população na região?

Probabilidade

- Probabilidade x Estatística
- Espaço amostral
- Evento
- União
- Interseção
- Propriedades da probabilidade
- Regras da probabilidade
- Probabilidade condicional
- Teorema de Bayes

Probability Rules Cheat Sheet

complement rule

$P(A) = 1 - P(A')$

multiplication rules (joint probability)

dependent $P(A \cap B) = P(A) * P(B|A)$

independent $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

mutually exclusive $P(A \cap B) = 0$

addition rules (union of events)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

mutually exclusive $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

conditional probability

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Bayes' Theorem

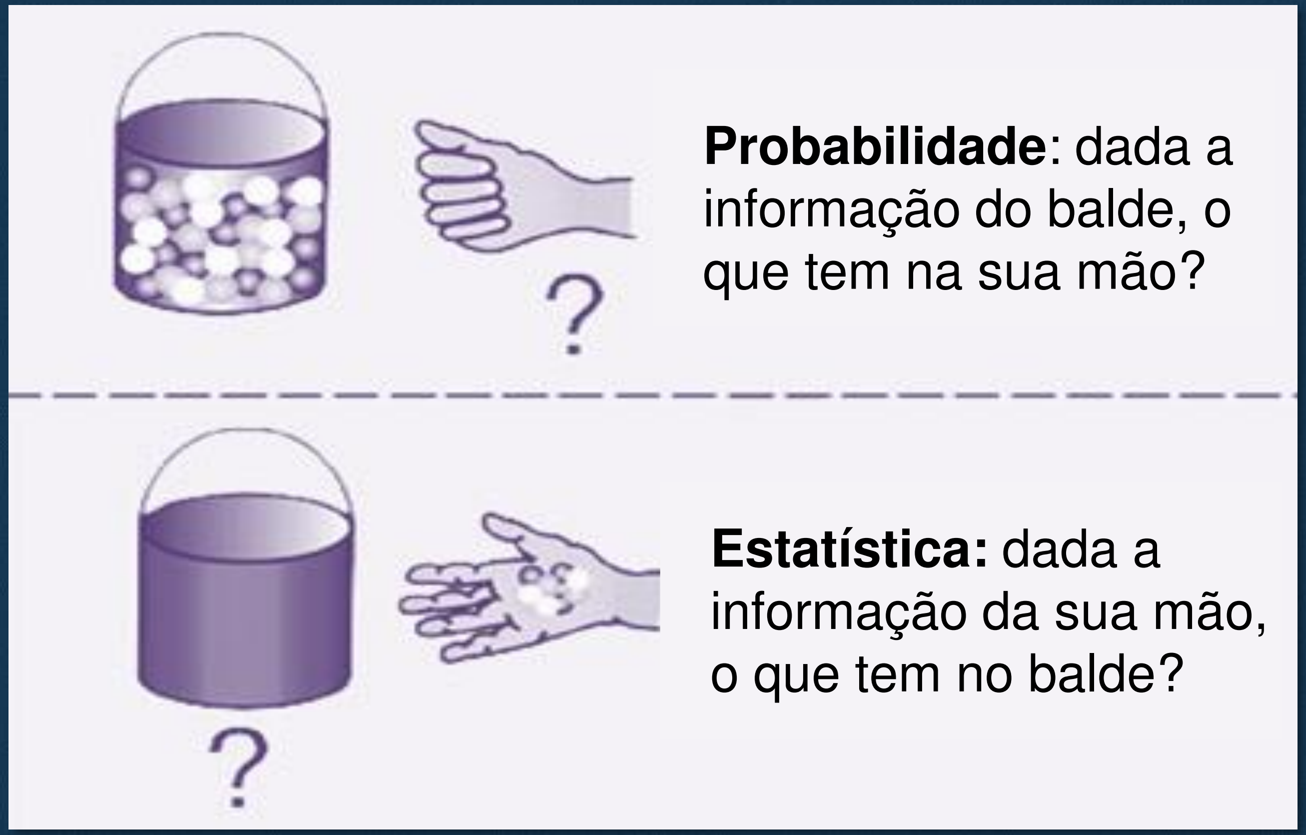
$$P(A|B) = \frac{P(B|A) * P(A)}{P(B)}$$

PROBABILIDADE

Probabilidade x Estatística

<u>Probabilidade</u>: os parâmetros da população são conhecidos; o que acontece quando você pega uma amostra?

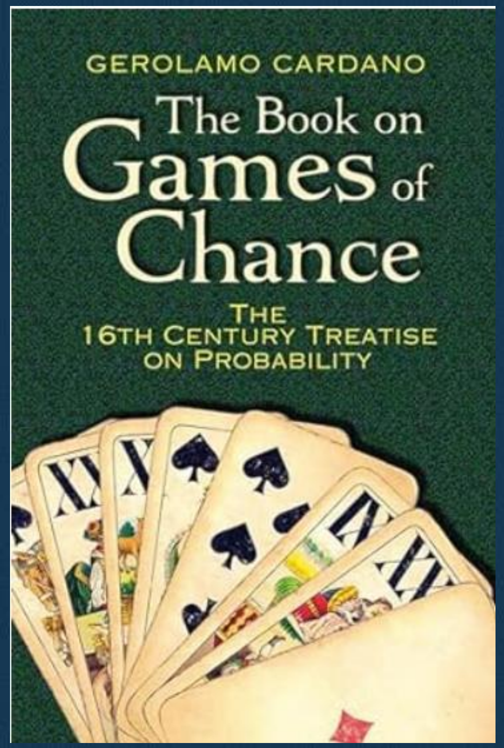
<u>(Inferência) Estatística</u>: os parâmetros da população são desconhecidos; pegue uma amostra e deduza algo sobre a população



Como tudo começou

Gerolamo Cardano

- *Liber de ludo aleae* (Livro sobre Jogos de Azar)
- Publicado em 1663
- Primeiro a tratar da teoria da aleatoriedade



Formulou algumas das ideias básicas da área mais de um século antes da mais conhecida correspondência de Pascal e Fermat.

Como tudo começou

Para Cardano, os jogos podiam ser classificados em dois tipos:

- os que envolviam alguma estratégia ou habilidade
- os que eram governados pelo puro acaso

Tendo uma compreensão da probabilidade de vencer, ele tinha mais vantagem em jogos governados pelo acaso.

Não é intuitiva

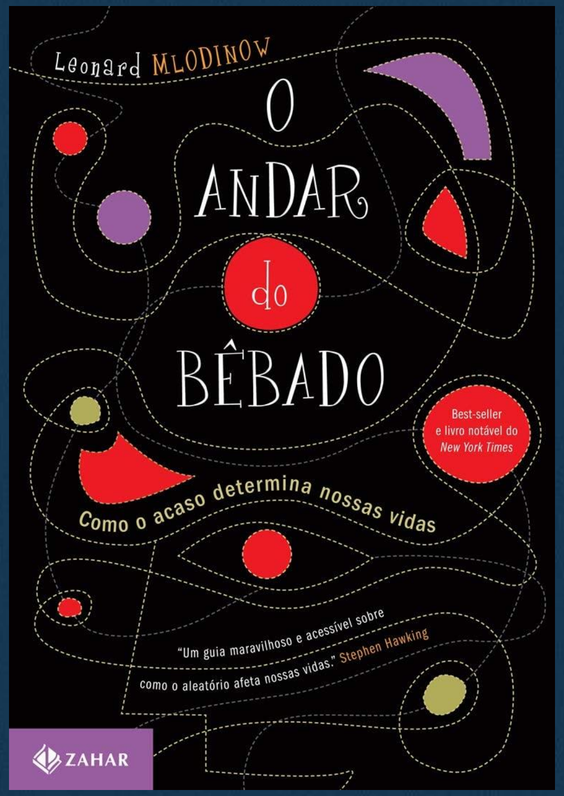
Matemático D'Alembert

Probabilidade de obter 2 caras ao jogar 2 moedas:

- Caras: 0, 1, 2
- Logo, 1 em 3

Os resultados possíveis são:

- cara, cara
- cara, coroa
- coroa, cara
- coroa, coroa



Probabilidade

A teoria da Probabilidade é a análise matemática de um fenômeno aleatório (chamado de experimento).

Aleatório significa que os resultados individuais de um processo são incertos, mas há um padrão de resultado no longo prazo.

Exemplo: Ao jogar uma moeda, o resultado é incerto.

Mas ao jogar uma moeda muitas vezes, esperamos que aproximadamente na metade das vezes, sairá cara.

Probabilidade

Uma probabilidade é um valor numérico que mede a probabilidade de um resultado ocorrer no longo prazo.

Por exemplo, ao jogarmos uma moeda, dizemos que a probabilidade de cair cara é $\frac{1}{2}$, uma vez que, se ocorrerem muitos lançamentos, cerca de metade sairá cara.

Jeanne Calment

Nos anos 60, uma senhora francesa de 90 e poucos anos fez um negócio com seu advogado de 47 anos.

Ele pagaria subsídios mensais até sua morte, então o advogado poderia ficar com o apartamento.

Porém Jeanne só faleceu em 1997 com 122 anos.

O advogado faleceu em 1995.

Tabela de Graunt

IDADE	LONDRES, 1662	AFEGANISTÃO	MOÇAMBIQUE	CHINA	BRASIL	REINO UNIDO	ALEMANHA	ESTADOS UNIDOS	FRANÇA	JAPÃO
0	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
6	74	85	97	97	99	100	99	100	100	100
16	40	71	82	96	96	99	99	99	99	100
26	25	67	79	96	95	99	99	98	99	99
36	16	60	67	95	93	98	98	97	98	99
46	10	52	50	93	90	97	97	95	97	98
56	6	43	39	88	84	94	94	92	93	95
66	3	31	29	78	72	87	87	83	86	89
76	1	16	17	55	51	69	71	66	72	77
86	–	4	5	21	23	37	40	38	46	52
96	–	0	0	2	3	8	8	9	11	17

TERMINOLOGIA

Espaço amostral

Um espaço amostral (S) de um experimento inclui todos os resultados possíveis de um experimento.

Jogar um dado: S={1, 2, 3, 4, 5, 6}

Jogar um par de dados e somar os números: S={2, 3, 4,..., 10, 11, 12}

Observar o número de anos que uma ação sobe nos próximos três anos: S={0, 1, 2, 3}

Evento

Um evento é um subconjunto de um espaço amostral.

Exemplo: A jogada de um dado.

- Evento A: “o número é par”
- A={2, 4, 6}

- Evento B: “o número é menor que 3”
- B={1, 2}

Evento

Dois ou mais eventos podem ser considerados:

Exaustivos: se todos os resultados possíveis de um experimento estão incluídos nos eventos (compõem todo o espaço amostral).

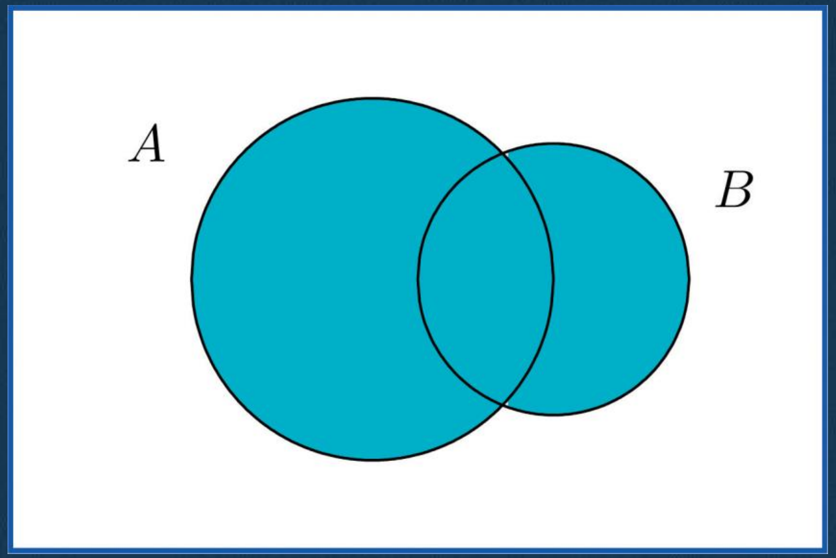
Mutuamente exclusivos: se eles não tem nenhum resultado em comum.

Exemplo: A jogada de um dado.
Evento A: “valores pares” = {2,4,6}
Evento B: “valores ímpares” = {1,3,5}

União

A união de dois eventos (A U B) é um evento que consiste em todos os resultados em A ou B.

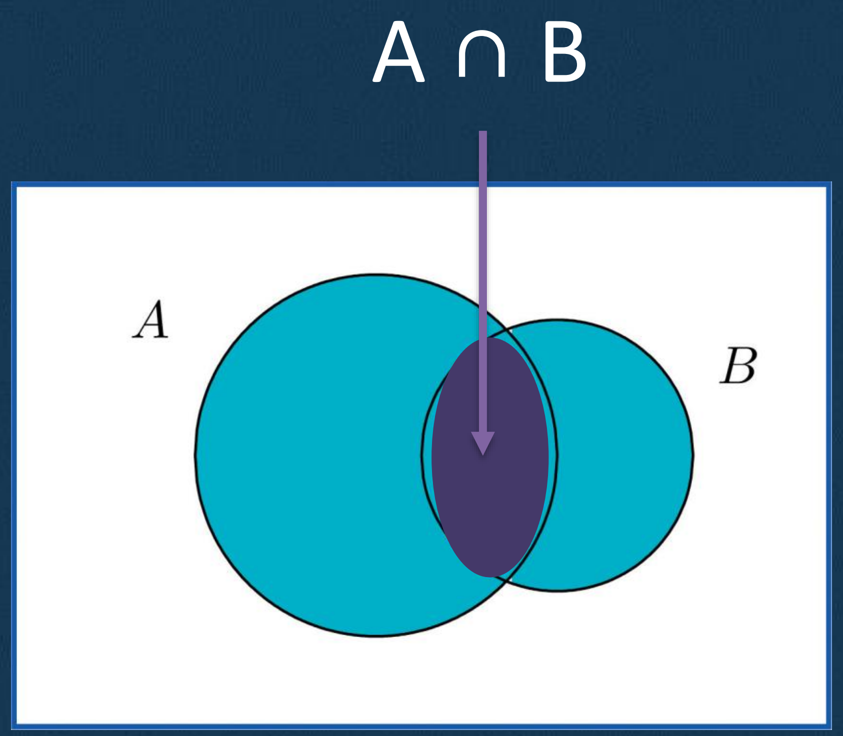
- Um OU outro
- O Diagrama de Venn representa o espaço amostral (retângulo) com um ou mais eventos (círculos).



Interseção

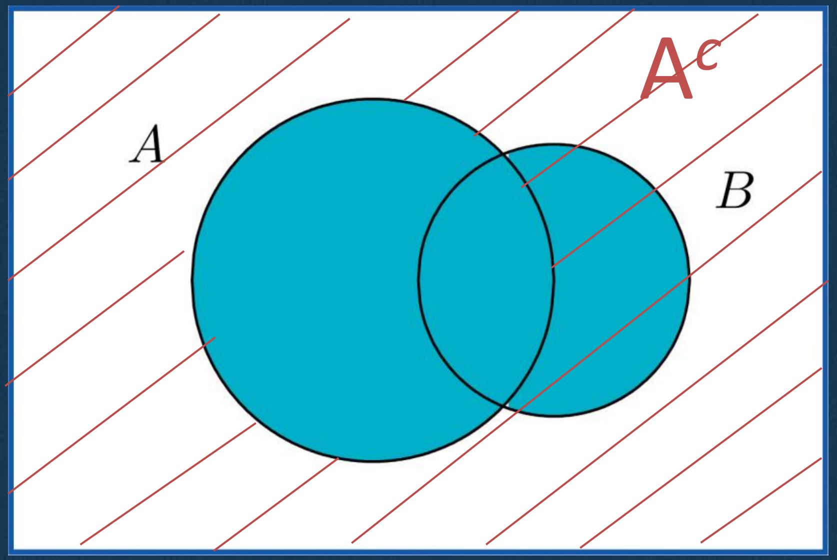
A interseção de dois eventos (A ∩ B) consiste em todos os resultados em ambos A e B.

- Um <u>E</u> outro



Complemento

O complemento do evento A (A^c) é um evento que consiste de todos os resultados no espaço amostral S que não estão em A.



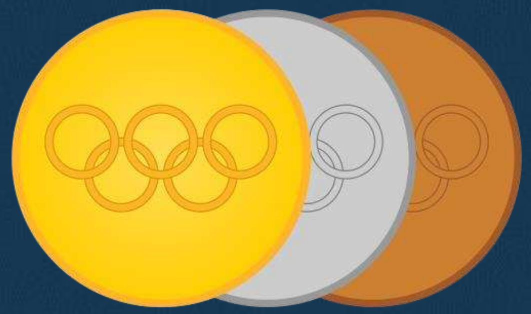
Exemplo

O espaço amostral de um resultado olímpico é definido como S = {ouro, prata, bronze, sem medalha}. Dado a seguinte informação:

A = {ouro, prata, bronze}; B = {prata, bronze, sem medalha}; C = {sem medalha}.

Ache $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$, and B^c.

- $A \cup B$ = {ouro, prata, bronze, sem medalha}
- $A \cap B$ = {prata, bronze}
- $A \cap C = \varnothing$ ou { }
- B^c = {ouro}



Desafio

Imagine que vou jogar dois dados e somar os valores obtidos. Em qual valor você apostaria?

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

PROPRIEDADES DA PROBABILIDADE

Propriedades

1. A probabilidade de qualquer evento A é um valor entre 0 e 1: $0 \leq P(A) \leq 1$

2. A soma das probabilidades de todos os resultados possíveis de um experimento é 1.

Calculando as Probabilidades

Se pudermos listar todos os resultados em um evento A, a probabilidade de A pode ser calculada da seguinte forma:

1. A probabilidade de A é a soma das probabilidades dos resultados em A.

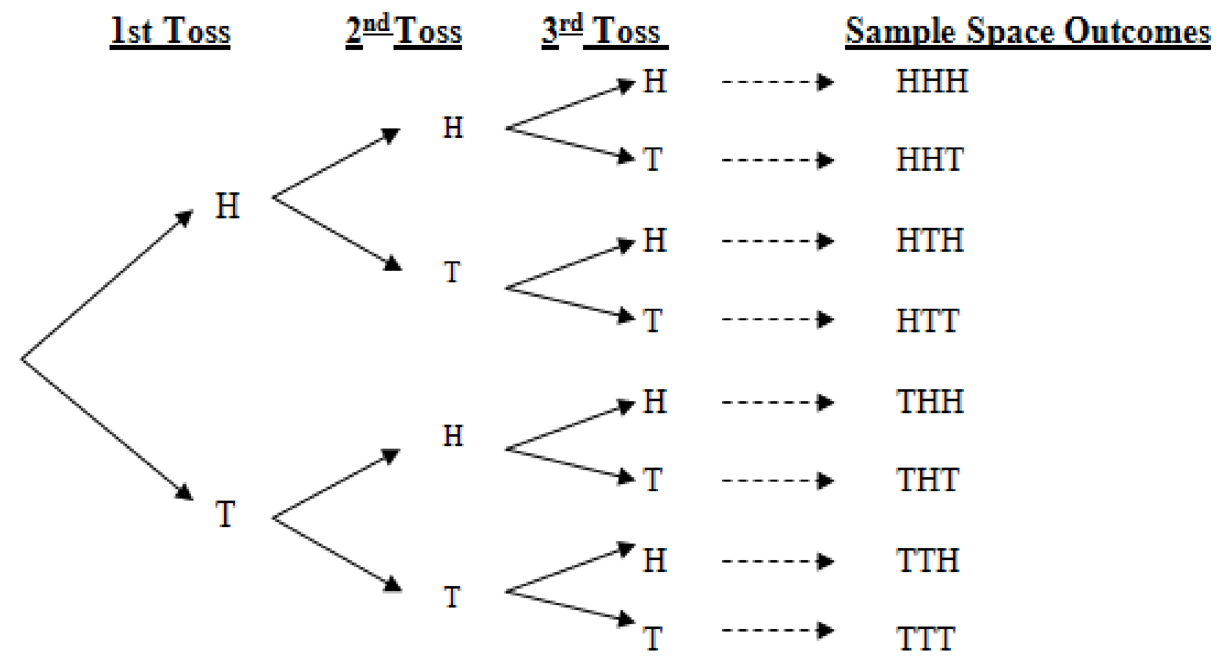
2. Quando todos os resultados de um experimento têm a mesma chance de ocorrer, dizemos que os resultados são igualmente prováveis. Para tal experimento, a probabilidade de um evento A é

$$P(A) = \frac{\text{Número de resultados em A}}{\text{Número de resultados em S}}$$

Resultados com a mesma chance

Suponha que jogamos uma moeda 3 vezes.
Qual é a probabilidade de obter:

H: cara, T: coroa



(a) Exatamente duas caras em três lançamentos?

3/8

(b) Pelo menos duas caras em três lançamentos?

4/8 ou 1/2

(c) Nenhuma coroa?

1/8

REGRAS DA PROBABILIDADE

Regra do Complemento

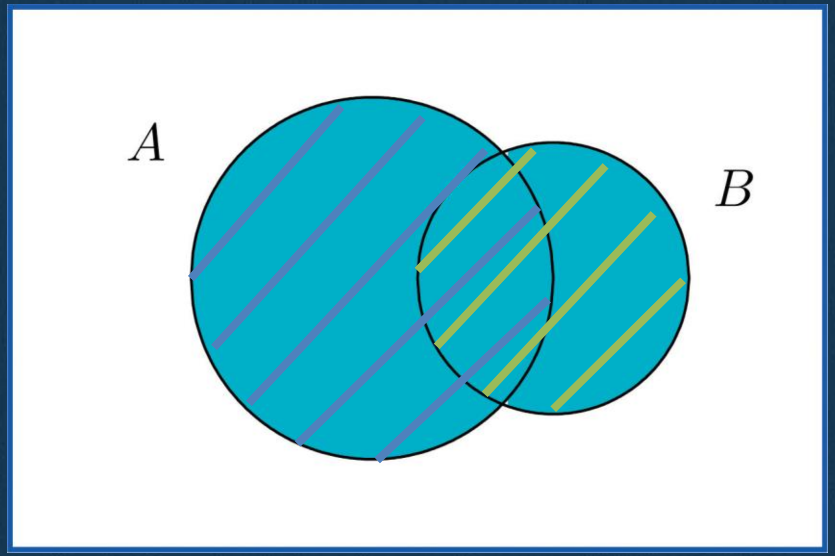
A probabilidade do complemento de um evento, $P(A^C)$, é igual a um menos a probabilidade do evento:

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

Regra da Adição

A probabilidade de que o evento A ou B ocorra, ou de que pelo menos um desses eventos ocorra, é: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

A = {ouro, prata, bronze}; B = {prata, bronze, sem medalha}; C = {sem medalha}



Regra da Adição

A probabilidade de que o evento A ou B ocorra, ou de que pelo menos um desses eventos ocorra, é: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Se os eventos A e B forem mutuamente exclusivos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Isso ocorre, pois, se A e B são mutuamente exclusivos,
$A \cap B$ é vazio, logo $P(A \cap B) = 0$.

Exemplo

Seja $P(A) = 0{,}55$, $P(B) = 0{,}30$, e $P(A \cap B) = 0{,}10$. Encontre:

(a) $P(A \cup B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}55 + 0{,}30 – 0{,}10 = 0{,}75$

(b) $P((A \cap B)^C)$

$P((A \cap B)^C) = 1 - P(A \cap B) = 1 – 0{,}10 = 0{,}90$

Exemplo

Um banco pergunta para 200 clientes qual o tipo de conta eles possuem. Na amostra, 70 possuem conta corrente, 120 conta poupança, 50 conta corrente e poupança e 60 não possuem nenhuma. Calcule a probabilidade:

a) P(tem conta corrente)

b) P(não tem conta corrente)

c) P(ambos)

d) P(tem conta corrente ou poupança)

e) P(ambos ou nenhum)

f) P(tem conta corrente, mas não tem poupança)

Exemplo

Uma empresa está lançando dois produtos, A e B, e a equipe de marketing está interessada na probabilidade de sucesso de pelo menos um dos produtos.

Definimos que A = “Produto A é um sucesso”, B = “Produto B é um sucesso”, AUB = “pelo menos um dos produtos ser um sucesso”.

Exemplo

Após análises de mercado e pesquisas de consumidores, a equipe de marketing determina que: P(A) = 0,6 e P(B) = 0,4.

Além disso, a probabilidade dos dois serem sucesso ao mesmo tempo é 0,2.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}8$

Interseção

Se não soubermos a probabilidade da interseção, não podemos calcular a probabilidade da união corretamente.

Poderíamos, no máximo, assumir que a interseção não existe (se fizer sentido no problema).

Nesse caso, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Interseção

Lembrando que dois eventos são:

Exaustivos se só existirem essas duas opções. Se na minha loja eu só vendo esses 2 produtos, eles são exaustivos (englobam todo o espaço amostral).

Mutualmente exclusivos se não existir interseção entre eles. Um cliente não pode comprar os 2 produtos simultaneamente.

Interseção

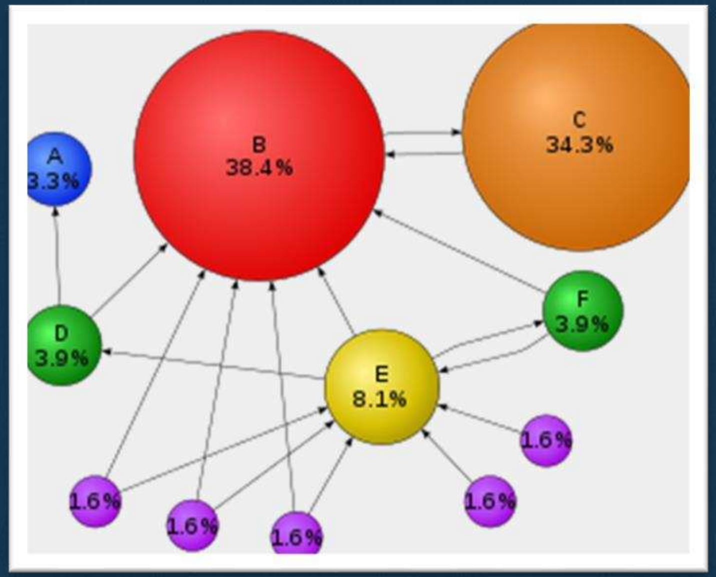
Exemplo: Quero calcular o número de seguidores nas redes sociais de uma pessoa que usa só o Instagram e o Youtube.

- Esses dois eventos são exaustivos.
- Não são mutualmente exclusivos.

Nesse caso, eu poderia estimar a interseção, usando um questionário.

APLICAÇÕES

PageRank



PageRank é um algoritmo do Google que classifica sites nos resultados de pesquisa.

Mede a importância desses sites.

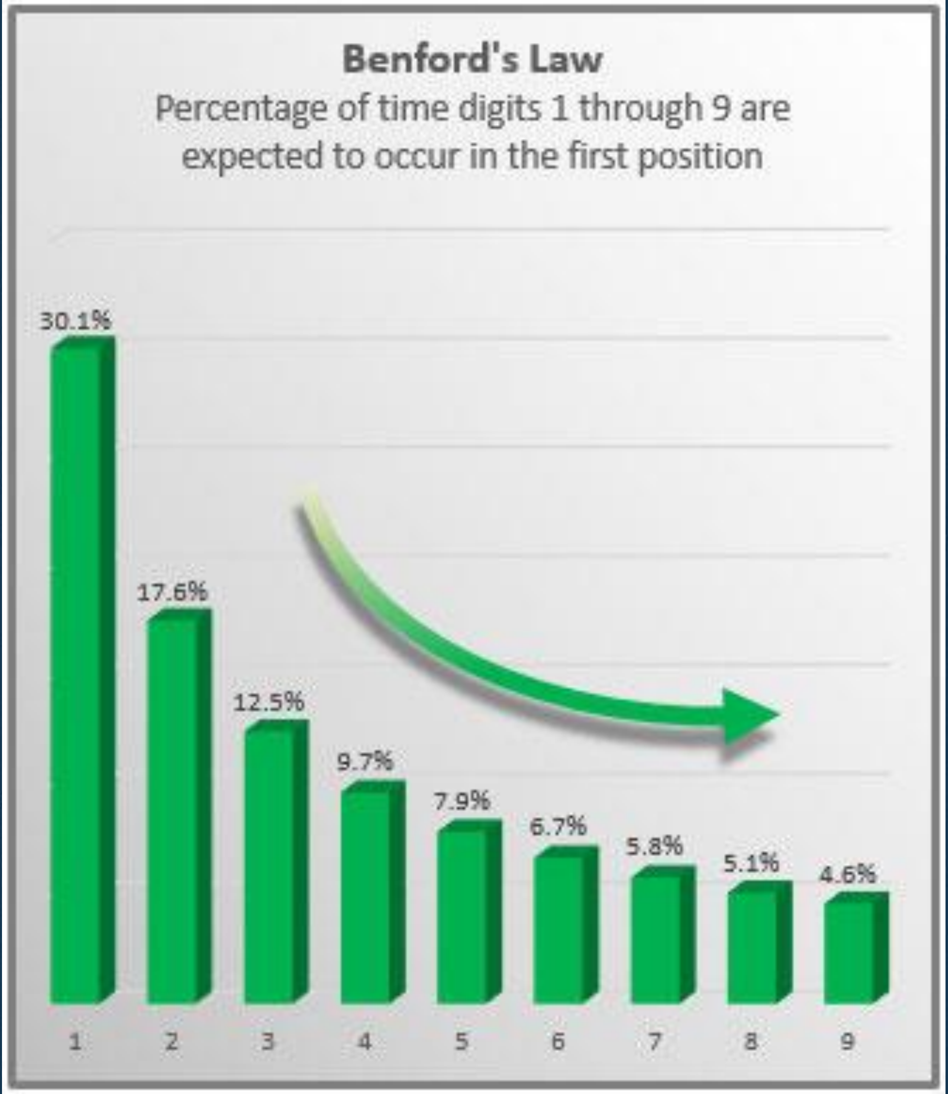
“O PageRank conta o número e a qualidade dos links de uma página para determinar uma estimativa aproximada da importância do site. A suposição é que sites mais importantes provavelmente recebem mais links de outros sites.”

Lei de Benford

Provada por Ted Hill, em 1995

Detecção de fraude

“Connected: Está tudo ligado”



Problema do Aniversário

Quantas pessoas preciso ter em uma sala para que 2 façam aniversário no mesmo dia? Considerando:

- Uma distribuição uniforme de aniversários ao longo do ano
- 365 dias no ano
- Não termos gêmeos no grupo

23 pessoas: 50%

50 pessoas: 97%

70 pessoas: 99,9%

Problema do Aniversário

n	$p(n)$
1	0.0%
5	2.7%
10	11.7%
20	41.1%
23	50.7%
30	70.6%
40	89.1%
50	97.0%
60	99.4%
70	99.9%
75	99.97%
100	99.999 97%
200	99.999 999 999 999 999 999 999 999 9998%
300	$(100 - 6 \times 10^{-80})\%$
350	$(100 - 3 \times 10^{-129})\%$
365	$(100 - 1.45 \times 10^{-155})\%$
≥ 366	100%

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Probabilidade Condicional

Probabilidade condicional é a probabilidade de ocorrer um evento, dado que outro evento já ocorreu.

Na probabilidade condicional, o símbolo “|” significa “dado que”. O que vier depois de “|”, já ocorreu.

$P(A|B)$

$P(B|A)$

Probabilidade Condicional

Por exemplo, A: receber uma multa, e B: estacionar em local proibido .

P (A) = probabilidade de receber uma multa.

P (A|B) = probabilidade de receber uma multa, dado que estacionou em um lugar proibido.

P (B) = probabilidade estacionar em um local proibido.

P (B|A) = probabilidade de estacionar em um local proibido, dado que recebeu uma multa.

Exemplo

Suponha que você jogue um dado. Qual é a probabilidade do número mostrado ser 4?

Você joga o dado, mas não pode ver o resultado. Eu te digo que o número é par. Agora, qual é a probabilidade de o número mostrado ser 4?

A segunda situação é um exemplo de probabilidade condicional: você sabe que o número é par. Saber disso muda a probabilidade de que seja 4.

O seu espaço amostral é reduzido.

Calculando

Dados dois eventos A e B, a probabilidade de que A ocorra dado que B tenha ocorrido é:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A probabilidade de que B ocorra dado que A ocorreu é:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exemplo do dado

Qual é a probabilidade de o número ser 4 dado que é par?

A: o número é 4

B: o número é par

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A∩B: o número é 4 e par -> $P(A \cap B) = 1/6$

$P(B) = 1/2$

$$P(A|B) = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{6} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{3}$$

$P(A \cap B) \times P(A|B)$

Escolha uma carta de um baralho de 52 cartas.
Qual é a probabilidade de ser:

(a) Uma carta JQK e copas?

R: carta JQK

C: carta é de copas

$P(R \cap C) = \frac{3}{52}$

$P(A \cap B) \times P(A|B)$

Escolha uma carta de um baralho de 52 cartas.
Qual é a probabilidade de ser:

(b) Uma carta JQK dado que é de copas?

R: carta JQK

C: carta é de copas

$$P(R|C) = \frac{P(R \cap C)}{P(C)}$$

$$= \frac{3/52}{13/52} = \frac{3}{52} \times \frac{52}{13} = \frac{3}{13}$$

P(A∩B) x P(A|B)

Em P(R∩C), o espaço amostral é o espaço amostral do experimento (total de 52 cartas).

As informações fornecidas mudam o espaço amostral.

Em P(R|C), o espaço amostral é C, o número de cartas de copas.

EVENTOS INDEPENDENTES E PROBABILIDADE CONJUNTA

Eventos Independentes

Dois eventos são independentes se a ocorrência de um não altera a probabilidade do outro.

A contratação de um desenvolvedor qualificado é independente da contratação de um gerente de vendas qualificado, pois são processos de recrutamento diferentes com critérios de seleção distintos.

Definição matemática: os eventos A e B são independentes se:

$P(A|B) = P(A)$

$P(B|A) = P(B)$

Exemplos

(1) Jogue um dado duas vezes. A segunda jogada é independente da primeira.

P(3 na segunda|3 na primeira) = P(3 na segunda) = 1/6

(2) Jogue um dado. Os eventos “4” e “par” são dependentes.

P(4|par) = 1/3 mas P(4)=1/6;

Então P(4|par) ≠P(4)

Exemplos

(1) Pegue uma carta de um baralho de 52 cartas

P(K|ouros) = 1/13

P(K) = 4/52 = 1/13

Os eventos “rei” e “ouros” são independentes

(2) Os eventos K e “carta JQK” não são independentes.

P(K|JQK) = 4/12 = 1/3

mas P(K) = 1/13;

Então, P(K|JQK) ≠ P (K)

Eventos dependentes

Ana foi convidada para uma festa.

Sua decisão é baseada (ou dependente) do fato de seu crush ir para a festa:

P(Ana ir para a festa) = 50%

P(Ana ir para a festa | crush também vai) = 100%.

Outro exemplo de eventos dependentes:

Receber uma multa e estacionar em local proibido.

Probabilidade Conjunta

A probabilidade conjunta é usada para calcular a probabilidade da interseção de dois eventos.

$$P(A \cap B) = P(A|B)\ P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(B|A)\ P(A)$$

Estas fórmulas são derivadas das fórmulas da probabilidade condicional:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{e} \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Prob Conjunta x Independência

Se A e B são independentes, a probabilidade de que A e B ocorram é igual ao produto das probabilidades individuais de A e B:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Isso ocorre porque, se A e B são independentes, $P(A|B) = P(A)$.

Exemplo: Jogue um dado duas vezes.

Qual é a probabilidade de ambos serem 3?

P (3 no primeiro e 3 no segundo) =

$P(3)\ P(3) = (1/6)\ (1/6) = 1/36$

Sistema de Classificação

Um sistema quer classificar uma paciente como “grávida” ou “não grávida”.

Verdadeiro Positivo (TP): Paciente grávida é classificada como “grávida”.
Falso Positivo (FP): Paciente não grávida é classificada como “grávida”.
Verdadeiro Negativo (TN): Paciente não grávida é classificada como “não grávida”.
Falso Negativo (FN): Paciente grávida é classificada como “não grávida”.

TP = 100
FP = 10
TN = 90
FN = 10

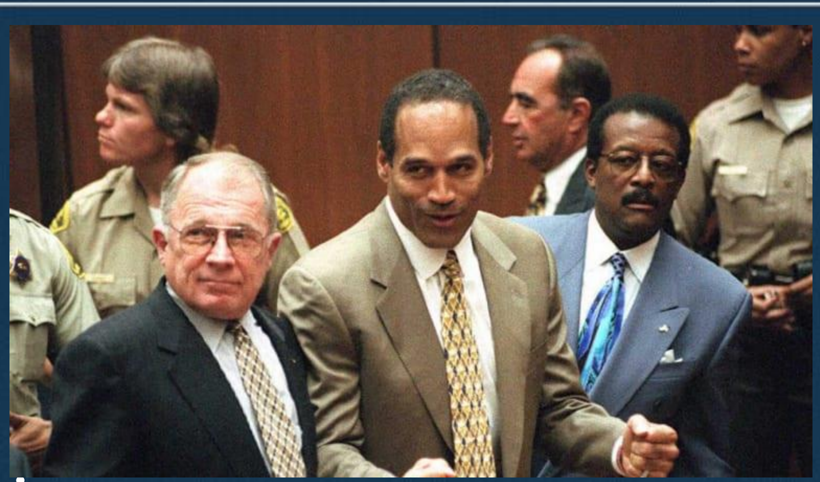
Sistema de Classificação

TP = 100, FP = 10, TN = 90, FN = 10

Probabilidade da paciente estar grávida se foi classificada como grávida:
P(paciente grávida | “grávida”) = 100 / (100 + 10) = 0.909 (90.9%)

Probabilidade da paciente estar grávida se foi classificada como não grávida:
P(paciente grávida | “não grávida”) = 10 / (10 + 90) = 0.1 (10%)

O.J. Simpson



Julgado pelo assassinato de sua ex-mulher, Nicole Brown Simpson.

Defesa: “4 milhões de mulheres são espancadas anualmente por seus parceiros nos EUA, mas segundo as estatísticas do FBI, 1.432 dessas mulheres, ou 1/2.500, foram assassinadas por seus maridos ou namorados.”

Probabilidade de um homem bater na esposa E matá-la: 1 em 2.500.

Probabilidade de que uma mulher espancada que foi assassinada tenha sido assassinada pelo espancador: 90%.

“O Povo contra O.J. Simpson”

TEOREMA DE BAYES

Teorema de Bayes

O Teorema de Bayes usa a probabilidade condicional para atualizar nossas previsões ou crenças com base em novas informações.

Ele relaciona a probabilidade de um evento A dado que B ocorreu, com a probabilidade de B dado que A ocorreu.

Teorema de Bayes

- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

- $P(A \cap B) = P(A|B)\ P(B)$
- $P(A \cap B) = P(B|A)\ P(A)$

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(B|A)\ P(A)}{P(B)}}$$

Exemplo

Qual a probabilidade de uma pessoa ter a doença dado que o teste deu positivo?

D: ter a doença

T: teste positivo

Queremos encontrar P(D|T)

$$P(D|T) = \frac{P(T|D)\,P(D)}{P(T)}$$

Exemplo

Temos as seguintes informações:

- Probabilidade de ter a doença (P(D)): 1% ou 0,01
- Probabilidade de um teste positivo dado que a pessoa tem a doença (P(T|D)): 99% ou 0,99
- Probabilidade de um teste positivo dado que a pessoa não tem a doença (P(T|D^c)): 5% ou 0,05

Exemplo

Para obter $P(T)$, precisamos calcular:

- Probabilidade de não ter a doença ($P(D^c)$):

$$P(D^c)=1-P(D)=1-0{,}01=0{,}99$$

- Probabilidade total de um teste positivo ($P(T)$):

$$P(T)=P(T|D)\cdot P(D)+P(T|D^c)\cdot P(D^c)$$
$$= 0{,}99\cdot 0{,}01 + 0{,}05\cdot 0{,}99 = 0{,}0594$$

Exemplo

$$P(D|T) = \frac{P(T|D)\,P(D)}{P(T)}$$

$$P(D|T) = \frac{0{,}99 \cdot 0{,}01}{0{,}0594} = 0{,}1667$$

A probabilidade de uma pessoa ter a doença dado que o teste deu positivo é de 16,67%.

Fórmulas

1. Regra do complemento: $P(A^c) = 1 - P(A)$
2. Regra da adição: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3. Regra de adição para eventos mutuamente exclusivos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
4. Probabilidade condicional: $P\,(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
5. Probabilidade conjunta: $P(A \cap B) = P(A|B)\ P(B)$ ou $P(A \cap B) = P(B|A)\ P(A)$
6. Probabilidade conjunta para eventos independentes: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
7. Teorema de Bayes: $\mathrm{P(A|B)} = \dfrac{P(B|A)\ P(A)}{\mathrm{P(B)}}$

PROBLEMA DE MONTY HALL

Problema de Monty Hall

No Brasil...

Problema das 3 portas

$P(P1) = 1/3$
$P(P2) = 1/3$
$P(P3) = 1/3$

Problema das 3 portas

P(Ganhar|Permanecer) = 1/3
P(Ganhar|Trocar) = 2/3

Problema das 3 portas

Imagine agora que você tem 12 portas: P(Pi)=1/12.

P(Ganhar|Permanecer) = 1/12

P(Ganhar|Trocar) = 11/12

Problema das 3 portas

Escolhemos a porta 1 (P1), o carro está na porta 2 (C2).
Ai é a porta que o apresentador vai abrir.

$P(A3|P1 \cap C2) = 1$
$P(A3|P1 \cap C3) = 0$
$P(A3|P1) = 1/2$

Problema das 3 portas

Escolhemos a porta 1 (P1), o carro está na porta 2 (C2).
Ai é a porta que o apresentador vai abrir.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

$$P(C2|P1 \cap A3) = \frac{P(C2 \cap P1 \cap A3)}{P(P1 \cap A3)} = \frac{P(A3|P1 \cap C2) \cdot P(P1 \cap C2)}{P(A3|P1) \cdot P(P1)} = \frac{P(A3|P1 \cap C2) \cdot P(P1) \cdot P(C2)}{P(A3|P1) \cdot P(P1)}$$

Problema das 3 portas

Escolhemos a porta 1 (P1), o carro está na porta 2 (C2).
Ai é a porta que o apresentador vai abrir.

$P(A3|P1 \cap C2) = 1$
$P(A3|P1 \cap C3) = 0$
$P(A3|P1) = 1/2$

$$P(C2|P1 \cap A3) = \frac{P(A3|P1 \cap C2) \cdot P(P1) \cdot P(C2)}{P(A3|P1) \cdot P(P1)}$$

$$= \frac{1 \cdot 1/3 \cdot 1/3}{1/2 \cdot 1/3} = \frac{2}{3}$$

Problema das 3 portas

https://www.mathwarehouse.com/monty-hall-simulation-online/