By @kakashi_copiador

DISTRIBUIÇÃO DE BERNOULLI

Uma variável aleatória discreta X com Distribuição de Bernoulli assume apenas **2 valores possíveis**, **0** ou **1**, em um experimento realizado uma **única vez**. Esse experimento é chamado de **Ensaio de Bernoulli**. Um exemplo clássico dessa distribuição é o **lançamento de uma moeda**, que estamos vendo ao longo dos nossos estudos.

Chamamos os resultados possíveis de **sucesso** (em que a variável assume o valor **X = 1**) ou **fracasso** (em que a variável assume o valor **X = 0**). Se estivermos interessados na face CARA, esta representaria o sucesso e COROA representaria o fracasso (ou o contrário, se estivéssemos interessados na outra face). Nesse exemplo, não faz muita diferença qual face corresponde ao sucesso ou ao fracasso, porque a probabilidade de ambas é a mesma: 50%.

Agora, vamos supor que estejamos torcendo para que o resultado do lançamento de um dado seja **múltiplo de 3**. Nesse caso, os resultados 3 e 6 correspondem ao **sucesso** e os **demais** resultados correspondem ao **fracasso**. Assim, teríamos **2 resultados de sucesso** (em que X = 1) e **4 resultados de fracasso** (em que X = 0). Logo, as probabilidades seriam as seguintes:

$$P(X = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 0) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Normalmente, denotamos a probabilidade de **sucesso** por $\boldsymbol{p}$ e a probabilidade de **fracasso** por $\boldsymbol{q}$.

$$\boldsymbol{p} = P(X = 1)$$

$$\boldsymbol{q} = P(X = 0)$$

Para esse exemplo, temos $\boldsymbol{p} = \frac{1}{3}$ e $\boldsymbol{q} = \frac{2}{3}$.

Alternativamente, poderíamos associar o sucesso a apenas **uma das faces** do dado, por exemplo, a face 3. Nesse caso, teríamos **1 resultado de sucesso** (X = 1) e **5 resultados de fracasso** (X = 0):

$$\boldsymbol{p} = P(X = 1) = \frac{1}{6}$$

$$\boldsymbol{q} = P(X = 0) = \frac{5}{6}$$

Como há apenas **2 resultados possíveis**, as probabilidades de sucesso e de fracasso são complementares, isto é, a **soma** dessas 2 probabilidades é igual a **1**:

$$\boldsymbol{p + q = 1}$$

$$\boldsymbol{q = 1 - p}$$

A **probabilidade de sucesso** $\boldsymbol{p}$ é a única informação necessária para caracterizar uma distribuição de Bernoulli, uma vez que a probabilidade de fracasso é complementar. Essa informação que caracteriza uma distribuição de probabilidade é chamada de **parâmetro**.

Um **mesmo experimento** pode estar associado a variáveis aleatórias com distribuições **distintas** de probabilidade. O lançamento de um dado, por exemplo, pode estar associado a uma variável uniforme, com 6 valores equiprováveis; ou a distribuições de Bernoulli com parâmetros distintos; dentre outras distribuições possíveis.

Agora, vamos calcular a **esperança matemática** da distribuição de Bernoulli. A fórmula geral da esperança é:

$$E(X) = \sum x.P(X = x)$$

$$E(X) = 0 \times q + 1 \times p$$

$$\boldsymbol{E(X) = p}$$

Para calcular a **variância**, primeiro calculamos $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \sum x^2.P(X = x)$$

$$E(X^2) = 0^2 \times q + 1^2 \times p$$

$$E(X^2) = \boldsymbol{p}$$

Logo, a variância é:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$V(X) = p - p^2 = p(1-p)$$

$$\boxed{\boldsymbol{V(X) = p.q}}$$

Para o exemplo em que o sucesso corresponde a um múltiplo de 3, vimos que $\boldsymbol{p} = \frac{1}{3}$ e $\boldsymbol{q} = \frac{2}{3}$. Nesse caso, a esperança e a variância são:

$$E(X) = \boldsymbol{p} = \frac{1}{3}$$

$$V(X) = \boldsymbol{p}.\boldsymbol{q} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

Para o exemplo em que o sucesso corresponde a uma das faces, vimos que $\boldsymbol{p} = \frac{1}{6}$ e $\boldsymbol{q} = \frac{5}{6}$. Nesse caso, a esperança e a variância são:

$$E(X) = \boldsymbol{p} = \frac{1}{6}$$

$$V(X) = \boldsymbol{p}.\boldsymbol{q} = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

ESQUEMATIZANDO

Distribuição de Bernoulli (p)

1 experimento: **Ensaio de Bernoulli**

2 resultados possíveis: sucesso ($X = 1$) ou fracasso ($X = 0$)

Probabilidade de sucesso: $P[X = 1] = \boldsymbol{p}$

Probabilidade de fracasso: $P[X = 0] = \boldsymbol{q} = \boldsymbol{1 - p}$

Esperança: $E(X) = \boldsymbol{p}$; Variância: $V(X) = \boldsymbol{p.q}$

(2017 – SES/DF) Considere o lançamento de um dado cúbico honesto cujas faces são numeradas de 1 a 6, após o qual é observado se o número da face voltada para cima é múltiplo de 3. Tendo em vista que um experimento como esse pode apresentar apenas dois resultados possíveis (sucesso ou falha), é correto afirmar que tal experiência denomina-se distribuição

a) de Bernoulli.

b) hipergeométrica.

c) de Poisson.

d) normal.

e) qui-quadrado.

Comentários:

A distribuição que trabalha com apenas 2 resultados possíveis (sucesso ou fracasso) para 1 ensaio (no caso, 1 lançamento do dado) é a distribuição de Bernoulli.

Gabarito: A.

(CESPE/2016 – TCE/PA) Se as variáveis aleatórias X e Y seguem distribuições de Bernoulli, tais que P[X = 1] = P[Y = 0] = 0,9, então a média de Y é superior a 0,5.

Comentários:

A questão indaga sobre a **média (esperança) de Y**.

O enunciado informa que Y segue distribuição de Bernoulli, com probabilidade de **fracasso** de:

$$P(Y = 0) = q = 0{,}9$$

Logo, a probabilidade de **sucesso** é **complementar**:

$$p + q = 1$$

$$p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$$

Assim, a esperança de Y é:

$$E(Y) = p = 0{,}1$$

Que é **inferior** a 0,5.

Gabarito: Errado.

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Quando **repetimos um mesmo Ensaio de Bernoulli** (isto é, o experimento com **2 resultados possíveis**), damos origem à **Distribuição Binomial**.

Mais precisamente, $\boldsymbol{n}$ repetições **independentes** de um Ensaio de Bernoulli, com a **mesma probabilidade de sucesso**, resultam na **Distribuição Binomial.** O conceito de repetições independentes significa que o resultado de um experimento **não afeta** o resultado de outro.

Um exemplo de distribuição binomial é o lançamento de um dado **n** = **3** vezes, em que o sucesso, corresponde à face 6 e que o fracasso corresponde às demais faces. Ou seja, em cada uma dessas vezes, podemos obter sucesso (X_{Ber} = 1) ou fracasso (X_{Ber} = 0), isto é, **2** resultados possíveis. Assim, o número de possibilidades é (pelo princípio multiplicativo de combinatória):

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

As 8 possibilidades são:

{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)}

A variável X com distribuição binomial representa o **número de sucessos** obtidos. Sabendo que cada sucesso terá o valor **1** e que cada fracasso terá o valor 0, então o número de sucessos corresponde à **soma** dos resultados dos Ensaios. Para o nosso exemplo dos 3 lançamentos, a variável binomial pode assumir os seguintes valores:

- X = 0 (nenhum sucesso): {(0,0,0)}
- X = 1 (1 sucesso): {0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)}
- X = 2 (2 sucessos): {(0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)}
- X = 3 (3 sucessos): {(1,1,1)}

Ou seja, uma **Distribuição Binomial** corresponde à **soma** de n variáveis com **Distribuição de Bernoulli** independentes, com **mesmo parâmetro** p.

Inclusive, podemos **somar variáveis binomiais independentes** com **mesmo parâmetro** p. Sendo $n_X = 3$ o número de ensaios da variável X e $n_Y = 4$ o número de ensaios da variável Y, então a soma das variáveis $S = X + Y$ terá **distribuição binomial** com o seguinte número de ensaios:

$$n_S = n_X + n_Y = 4 + 3 = 7$$

Agora, vejamos como calcular a **probabilidade** de cada valor da variável binomial.

Para o nosso exemplo, a probabilidade de obter a face 6 (sucesso) em um **único lançamento** é:

$$p = \frac{1}{6}$$

E a probabilidade de não obter a face 6 (fracasso) em um **único lançamento** é complementar:

$$q = 1 - p = \frac{5}{6}$$

Logo, a probabilidade de ter fracasso nos $\boldsymbol{n}$ = 3 lançamentos (e, portanto 0 sucesso: X = 0) corresponde à **interseção** de $n = 3$ fracassos. Por serem eventos **independentes**, a interseção é o **produto das probabilidades**:

$$P(X = 0) = \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{q} = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

Generalizando, para $\boldsymbol{n}$ **repetições**, a probabilidade de ter **0 sucesso** e, portanto, $\boldsymbol{n}$ **fracassos**, é o produto:

$$P(X = 0) = \underbrace{\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{q} \times \ldots \times \boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{n}\text{ vezes}} = \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{n}}$$

Similarmente, a probabilidade de obter somente sucessos (nenhum fracasso) nos $\boldsymbol{n}$ = 3 lançamentos (X = 3) corresponde à **interseção** desses eventos **independentes**. Logo, é o **produto**:

$$P(X = 3) = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{p} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

Generalizando, para $\boldsymbol{n}$ **repetições**, a probabilidade de ter $\boldsymbol{n}$ **sucessos** e, portanto, 0 fracassos, é o produto:

$$P(X = n) = \underbrace{\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{p} \times \ldots \times \boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{n}\text{ vezes}} = \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{n}}$$

Voltando ao nosso exemplo, a probabilidade de obter exatamente 1 sucesso (e, portanto, 2 fracassos) é igual à probabilidade de obter 1 sucesso no **primeiro experimento** **OU** 1 sucesso no **segundo experimento** **OU** 1 sucesso no **terceiro experimento**:

$$P(X=1) = P(\{1,0,0\} \cup \{0,1,0\} \cup \{0,0,1\})$$

Como são eventos **mutuamente excludentes**, a probabilidade da união desses eventos é a **soma** dessas probabilidades:

$$P(X=1) = P(\{1,0,0\} \cup \{0,1,0\} \cup \{0,0,1\}) = P(\{1,0,0\}) + P(\{0,1,0\}) + P(\{0,0,1\})$$

Agora, vamos calcular essas probabilidades para o nosso exemplo:

$$P(\{1,0,0\}) = p \times q \times q = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$$

$$P(\{0,1,0\}) = q \times p \times q = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$$

$P(\{0,0,1\}) = q \times q \times p = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$Como as probabilidades são todas **iguais**, em vez de somá-las, basta **MULTIPLICAR** o resultado por 3:

$$P(X=1) = 3 \times p \times q \times q = 3 \times \frac{25}{216} = \frac{75}{216}$$

Similarmente, a probabilidade de obter exatamente 2 sucessos (e, portanto, 1 fracasso) é igual à probabilidade de obter 1 fracasso no primeiro **OU** no segundo **OU** no terceiro experimento:

$$P(\{0,1,1\}) = q \times p \times p = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$$

$$P(\{1,0,1\}) = p \times q \times p = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$$

$$P(\{1,1,0\}) = p \times p \times q = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{216}$$

Esses eventos também são mutuamente excludentes, então a probabilidade da união também corresponde à **soma** das probabilidades. Como elas são iguais, então, podemos **multiplicar** o resultado por 3:

$$P(X=2) = 3 \times p \times p \times q = 3 \times \frac{5}{216} = \frac{15}{216}$$

Generalizando, para $\boldsymbol{n}$ **repetições**, vamos calcular a probabilidade de obter $\boldsymbol{k}$ **sucessos**, por exemplo, **nas primeiras $\boldsymbol{k}$ tentativas** e, portanto, $\boldsymbol{n-k}$ **fracassos** nas demais tentativas:

$$\underbrace{p \times p \times \ldots \times p}_{\boldsymbol{k}\text{ vezes}} \times \underbrace{q \times q \times \ldots \times q}_{\boldsymbol{n-k}\text{ vezes}} = p^{\boldsymbol{k}} \times q^{\boldsymbol{n-k}}$$

Porém, a ordem não precisa ser exatamente essa. Podemos obter k sucessos em **quaisquer** k tentativas. Por isso, devemos **multiplicar** esse resultado pelo número de maneiras de **reorganizar** os resultados de sucesso e fracasso.

Para isso, podemos simplesmente "escolher" quais serão as tentativas que resultarão em $\boldsymbol{k}$ **sucessos**, pois as outras $\boldsymbol{n-k}$ tentativas serão, necessariamente, **fracassos**.

O número de maneiras de escolher $\boldsymbol{k}$ tentativas, dentre $\boldsymbol{n}$ tentativas no total, corresponde à combinação de $\boldsymbol{k}$ elementos, dentre $\boldsymbol{n}$:

$$\boxed{C_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{k}} = \frac{n!}{(n-k)! \times k!}}$$

Logo, a probabilidade de ter exatamente k sucessos (e, portanto, $n-k$ fracassos) é o produto da probabilidade $p^k \times q^{n-k}$ com a combinação $C_{n,k}$.

TOME NOTA!

$$\boxed{\boldsymbol{P(X=k) = C_{n,k} \times p^k \times q^{n-k}}}$$

Lembre que $\boldsymbol{C_{n,k}}$ também pode ser indicado por $\boldsymbol{C_n^k}$ ou por $\boldsymbol{\binom{n}{k}}$.

Observe que, para calcularmos todas as probabilidades de uma distribuição binomial, precisamos de 2 **parâmetros**: $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{p}$**.** Por isso, podemos representá-la por $X \sim B(\boldsymbol{n},\boldsymbol{p})$.

Pontue-se que a variável binomial pode assumir qualquer valor entre **0 e $\boldsymbol{n}$**.

É possível calcular também a probabilidade de um **intervalo** da variável binomial, por exemplo, obter 1 **OU** 2 sucessos, em 3 lançamentos de uma moeda (com p = q = 0,5). Como são eventos exclusivos, devemos **somar** as probabilidades:

$$P(X = 1 \cup X = 2) = P(X = 1) + P(X = 2)$$

A probabilidade de obter 1 sucesso é:

$$P(X = 1) = C_{3,1} \times 0{,}5^1 \times 0{,}5^2 = 3 \times 0{,}5 \times 0{,}25 = 0{,}375$$

A probabilidade de obter 2 sucessos é:

$$P(X = 2) = C_{3,2} \times 0{,}5^2 \times 0{,}5^1 = 3 \times 0{,}25 \times 0{,}5 = 0{,}375$$

Então, a probabilidade de obter 1 OU 2 sucessos é:

$$P(X = 1 \cup X = 2) = 0{,}375 + 0{,}375 = 0{,}75$$

Também podemos calcular a probabilidade de obter **pelo menos um** sucesso.

Normalmente, nesses casos, é mais fácil calcular a probabilidade do complemento:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$$

A probabilidade de obter 0 sucesso é:

$$P(X = 0) = C_{3,0} \times 0{,}5^3 \times 0{,}5^0 = 1 \times 0{,}125 \times 1 = 0{,}125$$

Logo, a probabilidade de obter pelo menos um sucesso é:

$$P(X \geq 1) = 1 - 0{,}125 = 0{,}875$$

Também podemos nos referir a uma distribuição binomial como uma **amostra de tamanho n** de uma **população** que segue uma **Distribuição de Bernoulli**.

Por exemplo, vamos supor uma população de peças, das quais 20% delas são **defeituosas**. Nesse caso, a seleção de uma **única peça** corresponde a um Ensaio de Bernoulli, pois há 2 resultados possíveis: sucesso (peça defeituosa) ou fracasso (peça não defeituosa).

A probabilidade de sucesso desse experimento equivale à proporção de peças defeituosas na população:

$$p = 20\% = 0{,}2$$

Suponha que vamos selecionar uma **amostra de $n = 5$** peças ao acaso. Nessa situação, o número de peças defeituosas encontradas na amostra segue uma distribuição binomial com parâmetros $n = 5$ e $p = 0{,}2$.

Lembrando que a probabilidade de fracasso é complementar, temos $q = 1 - p = 0{,}8$. Assim, a probabilidade de obter $k = 3$ peças defeituosas (portanto, $n - k = 2$ peças não defeituosas) é dada por:

$$P(X = k) = C_{n,k} \times p^k \times q^{n-k}$$

$$P(X = 3) = C_{5,3} \times 0{,}2^3 \times 0{,}8^2$$

A combinação de 3 elementos, dentre 5, no total é:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

Logo, a probabilidade de obter 3 é igual a:

$$P(X = 3) = 10 \times 0{,}008 \times 0{,}64 = 0{,}0512$$

FIQUE ATENTO!

Para que as seleções sejam **independentes** (condição necessária para termos uma **distribuição binomial**), isto é, para que o resultado de uma **não influencie** no resultado da outra, a **proporção** de peças defeituosas **não pode ser alterada** a cada extração.

Para que essa condição seja satisfeita, temos duas alternativas:

- A seleção das peças é feita **com reposição**, isto é, a peça selecionada é **devolvida**; ou
- A população é **infinita** (ou **grande o suficiente**, em comparação com o tamanho da amostra, para permitir tal aproximação).

(2020 – Universidade do Estado do Pará – *Adaptada*) Julgue as seguintes afirmações:

I. As distribuições de Bernoulli e Binomial apresentam as mesmas características e, portanto, os mesmos parâmetros.

II. Repetições independentes de um ensaio de Bernoulli, com a mesma probabilidade de ocorrência de “sucesso”, dão origem ao modelo Binomial;

Comentários:

Em relação à afirmativa I, o parâmetro de uma distribuição de Bernoulli é a probabilidade de sucesso p; e os parâmetros de uma distribuição binomial são a probabilidade de sucesso p e o número de repetições n.

Portanto, a afirmativa I está errada.

Em relação à afirmativa II, o modelo Binomial realmente consiste em repetições independentes de um ensaio de Bernoulli, com a mesma probabilidade de sucesso p. Logo, a afirmativa II está certa.

Gabarito: I – Errado; II – Certo.

(CESPE/2016 – Auditor de Controle Externo TCE/PA) Considere um processo de amostragem de uma população finita cuja variável de interesse seja binária e assuma valor 0 ou 1, sendo a proporção de indivíduos com valor 1 igual a p = 0,3.

Considere, ainda, que a probabilidade de cada indivíduo ser sorteado seja a mesma para todos os indivíduos da amostragem e que, após cada sorteio, haja reposição do indivíduo selecionado na amostragem.

A partir dessas informações, julgue o item subsequente.

Se for coletada uma amostra de tamanho n = 20, o número total de observações sorteadas com valor 1 terá distribuição binomial com parâmetros n e p.

Comentários:

A variável binária corresponde a uma distribuição de Bernoulli.

Coletando uma amostra de tamanho n, então o número de observações com o atributo sucesso corresponde a uma variável binomial, com parâmetros n e p.

Gabarito: Certo.

(CESPE/2016 – TCE/PA) Se as variáveis aleatórias X e Y seguem distribuições de Bernoulli, tais que $P[X = 1] = P[Y = 0] = 0,9$, então X + Y segue uma distribuição binomial com parâmetros n = 2 e p = 0,3, se X e Y forem variáveis aleatórias independentes.

Comentários:

A binomial é caracterizada por **repetições independentes** das distribuições de Bernoulli, com o **mesmo parâmetro p**.

O enunciado informa que:

- $P[X = 1] = 0,9$, ou seja, a probabilidade de sucesso de X é $p_X = 0,9$.
- $P[Y = 0] = 0,9$, ou seja, a probabilidade de fracasso de Y é $q_Y = 0,9$. Portanto, a probabilidade de sucesso de Y é: $p_Y = 1 – 0,9 = 0,1$

Como $p_X \neq p_Y$, então X + Y **não** segue uma distribuição binomial.

Gabarito: Errado.

(2018 – Câmara de Goiânia) Considere uma variável aleatória X com distribuição binomial e parâmetros p = 1/3 e n = 4. Qual é a probabilidade de X = 2?

a) 4/81

b) 1/9

c) 2/9

d) 8/27

Comentários:

Vimos que a probabilidade P(X = k) é dada por:

$$P(X = k) = C_{n,k}.p^k.(1 - p)^{n-k}$$

Para p = 1/3, n = 4 e k = 2, temos:

$$P(X = 2) = \frac{4!}{2!.2!}.\left(\frac{1}{3}\right)^2.\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4 \times 3}{2}.\frac{1}{9}.\frac{4}{9} = \frac{8}{27}$$

Gabarito: D

(2016 – ANAC) Em um determinado município, 70% da população é favorável a um certo projeto. Se uma amostra aleatória de cinco pessoas dessa população for selecionada, então a probabilidade de exatamente três pessoas serem favoráveis ao projeto é igual a

a) 40,58%

b) 35,79%

c) 42,37%

d) 30,87%

e) 37,46%

Comentários:

Considerando que a pessoa pode ser favorável ou não (não há outra possibilidade) e que o resultado da seleção de uma pessoa não afeta o de outra, então se trata de uma distribuição **binomial**.

Sabemos que:

- a proporção de pessoas favoráveis é p = 70% = 0,7 (logo, q = 1 – p = 0,3); e
- serão selecionadas n = 5 pessoas.

Então, a probabilidade de selecionar k = 3 pessoas favoráveis, P(X = 3), é dado por:

$$P(X = k) = C_{n,k} \times p^k \times q^{n-k}$$

$$P(X = 3) = C_{5,3} \times (0{,}7)^3 \times (0{,}3)^2$$

A combinação de 3 elementos, dentre 5, é:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

Assim, P(X = 3) é:

$$P(X = 3) = 10 \times 0{,}343 \times 0{,}09 = 0{,}3087 = 30{,}87\%$$

Gabarito: D

(FGV/2018 – ALE/RO) Uma moeda é lançada quatro vezes. A probabilidade de saírem mais caras do que coroas é de

a) $\frac{4}{16}$

b) $\frac{5}{16}$

c) $\frac{6}{16}$

d) $\frac{7}{16}$

e) $\frac{8}{16}$

Comentários:

Para saírem **mais caras** do que coroas em 4 lançamentos de uma moeda, é necessário que saiam 3 **OU** 4 caras. Note que temos uma distribuição binomial com n = 4 e p = ½ (e também q = ½).

A probabilidade de saírem k = 4 caras (4 sucessos e 0 fracasso) é:

$$P(X = k) = C_{n,k} \times p^k \times q^{n-k}$$

$$P(X = 4) = C_{4,4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \times \frac{1}{16} \times 1 = \frac{1}{16}$$

A probabilidade de saírem k = 3 caras (3 sucessos e 1 fracasso) é:

$$P(X = 3) = C_{4,3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 4 \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{16}$$

Portanto, a probabilidade de obter 3 OU 4 caras, considerando que são eventos exclusivos, é:

$$P(X = 4) + P(X = 3) = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} = \frac{5}{16}$$

Gabarito: B.

(VUNESP/2019 – TJ/SP) Em uma eleição, sabe-se que 40% dos eleitores são favoráveis ao candidato X e o restante ao candidato Y. Extraindo uma amostra aleatória, com reposição, de tamanho 3 da população de eleitores, obtém-se que a probabilidade de que no máximo 1 eleitor da amostra seja favorável ao candidato X é igual a

a) 35,2%

b) 64,8%

c) 36,0%

d) 43,2%.

e) 78,4%

Comentários:

O enunciado informa que 40% dos eleitores são favoráveis a X (sucesso) e que os demais são favoráveis a Y (fracasso), ou seja, a seleção de uma pessoa ao acaso segue distribuição de Bernoulli.

Logo, a seleção de 3 pessoas **com reposição** (seleções independentes) implica em uma **distribuição binomial** com n = 3 e p = 0,4 (q = 1 – p = 0,6).

Nessa distribuição, a probabilidade de encontrar k sucessos é dada por:

$$\boldsymbol{P(X = k) = C_{n,k} \times p^k \times q^{n-k}}$$

A probabilidade de obter **no máximo 1** eleitor favorável corresponde a obter 0 ou 1 sucesso:

$$\boldsymbol{P = P(X = 0) + P(X = 1)}$$

Para k = 0, temos:

$$P(X = 0) = C_{3,0} \times 0{,}4^0 \times 0{,}6^3 = 1 \times 1 \times 0{,}36 = 0{,}216$$

Para k = 1, temos:

$$P(X = 1) = C_{3,1} \times 0{,}4^1 \times 0{,}6^2 = 3 \times 0{,}4 \times 0{,}36 = 0{,}432$$

Assim, a probabilidade desejada é:

$$\boldsymbol{P(X = 0 \cup X = 1) = 0{,}216 + 0{,}432 = 0{,}648 = 64{,}8\%}$$

Gabarito: B

Esperança e Variância

E quanto à **esperança** dessa distribuição? Bem, vamos considerar o experimento de lançar uma moeda 100 vezes. Quantos resultados "CARA" você espera? 50, certo?

Qual é a intuição por trás desse valor? Bem, se a probabilidade de obter sucesso é $\boldsymbol{p}$ e se estamos realizando esse experimento $\boldsymbol{n}$ vezes, então, espera-se que o número de sucessos obtidos mantenha essa proporção.

Ou seja, o valor esperado é:

$$\boldsymbol{E(X) = n \times p}$$

Para o exemplo dos 3 lançamentos de uma moeda, temos $\boldsymbol{p} = \frac{1}{2}$ e $\boldsymbol{n} = 3$. Então, o número de vezes que esperamos obter a face CARA é:

$$E(X) = n \times p = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Mas esse valor não é inteiro! Tudo bem! Algumas vezes obteremos mais CARAS, outras vezes menos, de modo que, **em média**, obteremos 1,5 CARA.

E a **variância** da distribuição binomial? A sua fórmula é:

$$\boldsymbol{V(X) = n \times p \times q}$$

Para esse mesmo exemplo, com $\boldsymbol{q} = \frac{1}{2}$, a variância é:

$$V(X) = n \times p \times q = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

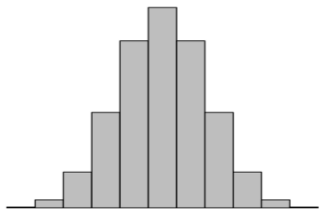
Lembre-se que o **desvio padrão** é a **raiz quadrada da variância**!

Da aula de análise de combinatória, sabemos que a combinação de k elementos, dentre n, é igual à combinação de n – k elementos, dentre n: $C_{n,k} = C_{n,n-k}$.

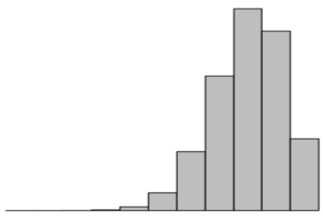
Ou seja, o **número de maneiras** de obter 0 sucesso é igual ao de obter n sucessos; o **número de maneiras** de obter 1 sucesso é igual ao de obter n – 1 sucessos; etc.

Assim, se tivermos $\boldsymbol{p = q}$, a **probabilidade** de obter 0 sucesso será igual à probabilidade de obter n sucessos; a probabilidade de obter 1 sucesso será igual à probabilidade de n – 1 sucessos, ou seja: P(X = k) = P(X = n – k)

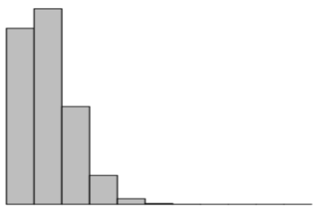
Por isso, temos uma distribuição **simétrica** se $\boldsymbol{p = q}$, conforme ilustrado a seguir**.** Sabendo que $\boldsymbol{p + q = 1}$, essas probabilidades são iguais quando $\boldsymbol{p = q = 0,5}$**.**



Quando a probabilidade de sucesso for maior $\boldsymbol{p > 0,5}$, a média $E(X) = n.p$ será maior e, portanto, haverá mais resultados **menores que a média**, conforme ilustrado abaixo. Assim, temos uma distribuição **assimétrica negativa**.



Analogamente, quando a probabilidade de sucesso for menor $\boldsymbol{p < 0,5}$, a média $E(X) = n.p$ será menor e, portanto, haverá mais resultados **maiores que a média** possíveis, conforme abaixo. Assim, temos uma distribuição **assimétrica positiva**.



Apesar de a distribuição binomial ser assimétrica sempre que $p \neq 0{,}5$, sempre que o produto $n \times p$ for um número **inteiro**, esse será o valor da **média**, da **mediana** e da **moda**!

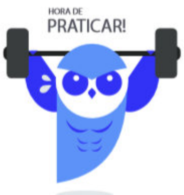
Distribuição Binomial (n, p)
n Ensaios de Bernoulli **independentes**, com probabilidade de sucesso p
$P(X = k) = C_{n,k} . p^k . q^{n-k}$
Esperança: $E(X) = n.p$; Variância: $V(X) = n.p.q$

Observe que:

- A **esperança da binomial** é igual a n **vezes a esperança da Bernoulli**; e
- A **variância da binomial** é igual a n **vezes a variância da Bernoulli**.

$$E(X_{Binomial}) = n.E(X_{Bernoulli})$$

$$V(X_{Binomial}) = n.V(X_{Bernoulli})$$



(2019 – Universidade Federal do Acre) Seja X uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros n e p. Então, pode-se dizer que a variância de X é dado por.

a) n

b) n.p

c) n.p(1 – p).

d) $n.p^2$

e) $n.p^2(1 – p)$

Comentários:

Vimos que a variância de uma variável com distribuição binomial é dada por:

$$V(X) = n.p.q = n.p.(1 - p)$$

Gabarito: C

(CESPE/2013 – TRT 17ª Região) Em toda distribuição binomial, a média será menor que a variância.

Comentários:

Em uma distribuição binomial, a média é E(X) = n.p e a variância V(X) = n.p.q.

Como q < 1 (por ser uma probabilidade), então:

$$V(X) = n.p.q < n.p.1 = E(X)$$

Portanto, a média é sempre **maior** que a variância.

Gabarito: Errado.

(2016 – IBGE) Quando um pesquisador vai a campo e aborda pessoas na rua para serem entrevistadas, o número de pessoas que aceita responder à pesquisa segue uma distribuição binomial. Se o valor esperado dessa distribuição é 8, e sua variância é 1,6, então a probabilidade de uma pessoa aceitar responder à pesquisa é de

a) 1,6%

b) 16%

c) 20%

d) 50%

e) 80%

Comentários:

O enunciado informa que o valor esperado de uma variável com distribuição binomial é E(X) = 8. Sabendo que, para uma distribuição binomial, temos E(X) = n.p, então:

$$E(X) = n.p = 8$$

$$n = \frac{8}{p}$$

O enunciado informa, ainda, que a variância é V(X) = 1,6. Sabemos que:

$$V(X) = n.p.q = n.p.(1 - p) = n.p - n.p^2$$

Então:

$$V(X) = n.p - n.p^2 = 1{,}6$$

Considerando que $n = \frac{8}{p}$, temos:

$$V(X) = \frac{8}{p}.p - \frac{8}{p}.p^2 = 1{,}6$$

$$8 - 8.p = 1{,}6$$

$$8.p = 6{,}4$$

$$p = 0{,}8 = 80\%$$

Gabarito: E.

(FCC/2014 – Auditor Fiscal da SEFAZ/RJ) Sabe-se que:

I. X é uma variável aleatória com distribuição binomial com média 2p e variância (2p-2p2).

II. Y é uma variável aleatória com distribuição binomial com média 5p e variância (5p-5p2).

III. A probabilidade de X ser inferior a 2 é igual a 15/16.

Nessas condições, a probabilidade de Y ser superior a 3 é igual a

a) 3/1.024

b) 1/64

c) 5/512

d) 15/1.024

e) 7/512

Comentários:

Sendo X uma variável com distribuição binomial, com média 2p, então:

$$E(X) = n_X.p = 2p$$

$$n_X = 2$$

O enunciado informa que a probabilidade de X ser inferior a 2 é P(X < 2) = 15/16, isto é:

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 15/16$$

Sabendo que $P(X = k) = C_{n,k}.p^k.q^{n-k}$, com n = 2 temos:

$$P(X = 0) = C_{2,0}.p^0.q^2 = 1 \times 1 \times q^2 = q^2 = (1-p)^2$$

$$P(X = 1) = C_{2,1}.p^1.q^1 = 2.p.q = 2.p.(1-p)$$

Sabendo que a soma dessas probabilidades é igual a 15/16, então:

$$(1-p)^2 + 2.p.(1-p) = \frac{15}{16}$$

$$1 - 2p + p^2 + 2.p - 2p^2 = \frac{15}{16}$$

$$1 - p^2 = \frac{15}{16}$$

$$p^2 = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16}$$

Extraindo a raiz de ambos os lados da equação, sabendo que $p \geq 0$, temos:

$$p = \frac{1}{4}$$

Sabendo que, para Y, temos E(Y) = 5.p, então o valor de n para Y é:

$$E(Y) = n_Y.p = 5p$$

$$n_Y = 5$$

A probabilidade de Y ser superior a 3 corresponde à probabilidade de Y ser igual 4 OU igual a 5:

$$P(Y > 3) = P(Y = 4) + P(Y = 5)$$

Sabendo que p = ¼ (logo q = 1 – p = ¾) e $n_Y = 5$, temos:

$$P(Y = 4) = C_{5,4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1 = 5 \times \frac{1}{4^4} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{1024}$$

$$P(Y = 5) = C_{5,5} \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1 \times \frac{1}{4^5} \times 1 = \frac{1}{1024}$$

Assim, a probabilidade de Y ser superior a 3 é:

$$P(Y > 3) = \frac{15}{1024} + \frac{1}{1024} = \frac{16}{1.024} = \frac{1}{64}$$

Gabarito: B

(FGV/2022 – TCU) A média e a variância de uma distribuição binomial são, respectivamente, 20 e 4. O número de ensaios (n) dessa distribuição é:

a) 20

b) 22

c) 25

d) 50

e) 100

Comentários:

Segundo o enunciado, a média de uma distribuição binomial é igual a 20 e a variância é igual a 4:

$$E(X) = n \times p = 20$$

$$V(X) = n \times p \times q = 4$$

Note que a fórmula da variância é igual à da esperança, multiplicada por q:

$$V(X) = \underbrace{n \times p}_{E(X)} \times q = E(X) \times q$$

Sabendo que E(X) = 20 e que V(X) = 4, podemos calcular a probabilidade de fracasso:

$$V(X) = 20 \times q = 4$$

$$q = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

A probabilidade de sucesso é complementar:

$$p = 1 - q = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Sabendo que $E(X) = n \times p = 20$, podemos calcular o número de ensaios n:

$$E(X) = n \times \frac{4}{5} = 20$$

$$n = \frac{20}{\frac{4}{5}} = 20 \times \frac{5}{4} = \frac{100}{4} = 25$$

Gabarito: C

DISTRIBUIÇÃO AMOSTRAL

Nesta seção, estudaremos a distribuição de probabilidade dos principais estimadores, chamada de **Distribuição Amostral**. Vale ressaltar que os **estimadores** são **variáveis aleatórias**.

Inicialmente, cabe pontuar que a **distribuição** de uma **amostra aleatória** qualquer segue a **mesma distribuição populacional**.

Para entender melhor esse conceito, vamos considerar uma moeda com 2 faces, que vamos denominar face 0 e face 1. Tratando-se de uma moeda equilibrada, a probabilidade de cada face é de $\frac{1}{2} = 0{,}5$ e a esperança e variância são, respectivamente:

$$\mu = E(X) = \sum x.P(X = x)$$

$$E(X) = 0 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}5 = 0{,}5$$

$$V(X) = \sum (x - \mu)^2.P(X = x)$$

$$V(X) = (0 - 0{,}5)^2 \times \frac{1}{2} + (1 - 0{,}5)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{0{,}25 + 0{,}25}{2} = 0{,}25$$

Suponha que vamos extrair uma amostra aleatórias de tamanho 3, ou seja, vamos lançar a moeda 3 vezes. Podemos representar essa amostra por X_1, X_2, X_3.

Considerando que os possíveis resultados das amostras são os mesmos da população (0 ou 1) e com as mesmas probabilidades de $\frac{1}{2} = 0{,}5$ para cada face, então temos:

$$E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = 0 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}5 = 0{,}5$$

$$V(X_1) = V(X_2) = V(X_3) = (0 - 0{,}5)^2 \times \frac{1}{2} + (1 - 0{,}5)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{0{,}25 + 0{,}25}{2} = 0{,}25$$

Ou seja, a esperança e a variância de cada amostra são **iguais** às da população:

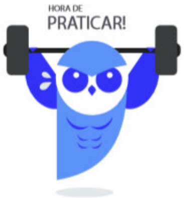
$$E(X_i) = E(X) = \mu$$

$$V(X_i) = V(X) = \sigma^2$$

Mais precisamente, **toda** a **distribuição de probabilidade da amostra** é **igual** à **distribuição de probabilidade da população** (as esperanças e as variâncias são iguais como consequência desse fato).

No exemplo do lançamento da moeda, a **população** é **infinita**, pois podemos lançar a moeda infinitas vezes. Quando a população é **infinita** (ou muito grande em comparação com o tamanho da amostra) **ou** quando a **amostra** é extraída **com reposição** dos elementos selecionados, então as amostras são **independentes**.

Nesses casos, dizemos que as variáveis que representam as amostras, $X_1, X_2, X_3, \ldots$, são **independentes e identicamente distribuídas** (**i.i.d.**), isto é, são independentes e apresentam a mesma distribuição.



(FGV/2021 – FunSaúde/CE) Se $X_1, X_2, \ldots X_n$ é uma amostra aleatória simples de uma determinada distribuição de probabilidades f(x), avalie se as afirmativas a seguir estão corretas.

I. $X_1, X_2, \ldots X_n$ são independentes.

II. $X_1, X_2, \ldots X_n$ são identicamente distribuídos.

III. Nem sempre cada X_i, i = 1,..., n, tem distribuição f(x).

Está correto o que se afirma em

a) I, apenas.

b) I e II, apenas.

c) I e III, apenas.

d) II e III, apenas.

e) I, II e III.

Comentários:

Essa questão trabalha com conceitos de distribuição amostral. A base da distribuição amostral é que os elementos de uma amostra (que o enunciado denotou por $X_1, X_2, \ldots X_n$) são variáveis aleatórias independentes que apresentam a mesma distribuição da população (consequentemente, apresentam a mesma média e a mesma variância).

Assim, as afirmativas I e II estão corretas, enquanto a afirmativa III está incorreta, pois cada variável X_i apresenta a mesma distribuição f(x) da população (sempre).

Gabarito: B

Agora, estudaremos a distribuição dos estimadores mais utilizados, quais sejam, a média, a proporção e a variância amostrais.

Distribuição Amostral da Média

Para estimarmos a **média da população $\boldsymbol{\mu}$**, utilizamos como **estimador** a **média amostral $\bar{X}$**. Sendo $X_1, X_2, \dots, X_n$ os valores observados da amostra, a média amostral é a razão entre a soma dos valores observados, $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, e o número de elementos observados, n:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Assim como os demais estimadores, a média amostral é uma **variável aleatória**, uma vez que $\bar{X}$ **varia** de acordo com os valores observados da amostra $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Vamos ao exemplo da moeda lançada 3 vezes. Se o resultado for {0, 0, 1}, a média amostral será:

$$\bar{X} = \frac{0+0+1}{3} = \frac{1}{3} \cong 0{,}33$$

Se o resultado for {0, 1, 1}, por exemplo, a média amostral será:

$$\bar{X} = \frac{0+1+1}{3} = \frac{2}{3} \cong 0{,}67$$

E qual seria a esperança desse estimador? Bem, sabendo que as faces possíveis são 0 e 1, cada uma com 50% de chance, esperamos que as médias desse experimento estejam em torno de 0,5.

Ou seja, a **esperança da média amostral** é igual à **média populacional**?

$$E(\bar{X}) = \boldsymbol{\mu}$$

E quanto à variância? A **variância da média amostral** é dada por:

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Para o exemplo dos 3 lançamentos da moeda, em que V(X) = 0,25 e n = 3, a variância da média amostral é:

$$V(\bar{X}) = \frac{0{,}25}{3} \cong 0{,}08$$

Note que a **variância da média amostral, $\boldsymbol{V(\bar{X})}$**, é **menor** do que a **variância populacional, $\boldsymbol{V(X)}$**. Além disso, quanto **maior o tamanho da amostra, $\boldsymbol{n}$**, **menor será a variância da média amostral**.

Isso ocorre porque a média das observações, $\bar{X}$, costuma ser um valor bem mais próximo da média μ (ou seja, apresenta bem menos valores extremos) do que as observações X por si só. Isso significa que a **variância** da média amostral, $\bar{X}$, é **menor** do que a variância das observações, X. Lembrando que as observações da amostra seguem a mesma distribuição da população, então a **variância da média amostral**, $V(\bar{X})$, é **menor** do que a variância da população.

O **desvio padrão** (raiz quadrada da variância) de um estimador pode ser chamado de **erro padrão**.

O erro padrão (ou desvio padrão) da média amostral é dado por:

$$EP(\bar{X}) = \sqrt{V(\bar{X})} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Ou seja, o erro padrão (ou devio padrão) da média amostral pode ser calculado como a **raiz quadrada da variância da média amostral, $\sqrt{\boldsymbol{V(\bar{X})}}$**, ou como a **razão entre o desvio padrão populacional e a raiz do número de elementos da amostra, $\boldsymbol{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.**

Também podemos denotar o erro padrão (ou desvio padrão) da média amostral por $\sigma_{\bar{X}}$. Para o nosso exemplo, o erro padrão da média amostral pode ser calculado como:

$$EP(\bar{X}) = \sqrt{V(\bar{X})} = \sqrt{\frac{0{,}25}{3}} \cong 0{,}29$$

INDO MAIS FUNDO!

As fórmulas da esperança e variância podem ser obtidas a partir das respectivas propriedades. Sendo $\bar{X} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$, a esperança $E(\bar{X})$ é dada por:

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right) = E\left(\frac{X_1}{n}\right) + E\left(\frac{X_2}{n}\right) + \cdots + E\left(\frac{X_n}{n}\right)$$

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}E(X_1) + \frac{1}{n}E(X_2) + \cdots + \frac{1}{n}E(X_n)$$

Vimos que a esperança amostral é igual à esperança populacional, $E(X_i) = E(X) = \mu$:

$$\boldsymbol{E(\bar{X})} = \frac{1}{n}\mu + \frac{1}{n}\mu + \cdots + \frac{1}{n}\mu = n \times \frac{1}{n} \times \mu = \boldsymbol{\mu}$$

Considerando que as variáveis $X_1, X_2, \dots, X_n$ são **independentes**, a **variância** $V(\bar{X})$ é:

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right) = V\left(\frac{X_1}{n}\right) + V\left(\frac{X_2}{n}\right) + \cdots + V\left(\frac{X_n}{n}\right)$$

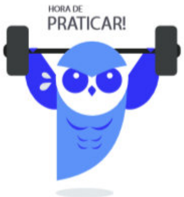
$$V(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}V(X_1) + \frac{1}{n^2}V(X_2) + \cdots + \frac{1}{n^2}V(X_n)$$

Sabendo que a variância amostral é igual à variância populacional, $V(X_i) = V(X) = \sigma^2$:

$$\boldsymbol{V(\bar{X})} = \frac{1}{n^2}\sigma^2 + \frac{1}{n^2}\sigma^2 + \cdots + \frac{1}{n^2}\sigma^2 = n \times \frac{1}{n^2} \times \sigma^2 = \boldsymbol{\frac{\sigma^2}{n}}$$

A **variância amostral** é **igual** à **variância populacional**, $V(X_i) = V(X) = \sigma^2$. O que é **diferente** é a **variância da média amostral**, $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$.

Note que a **variância da média amostral** é **menor** do que a **variância populacional**. Isso faz sentido, certo? As médias sempre variam menos do que os valores individuais, pois os valores extremos acabam sendo compensados quando calculamos a média. Logo, **a distribuição da média amostral é menos dispersa do que a distribuição populacional**.



(CESPE/2016 – TCE/PA) Uma amostra aleatória, com n = 16 observações independentes e identicamente distribuídas (IID), foi obtida a partir de uma população infinita, com média e desvio padrão desconhecidos e distribuição normal. Tendo essa informação como referência inicial, julgue o seguinte item.

Para essa amostra aleatória simples, o valor esperado da média amostral é igual à média populacional.

Comentários:

Vimos que, de fato, o valor esperado da média amostral (para uma amostra aleatória) é igual à média populacional.

Gabarito: Certo.

(2019 – UEPA) Considere uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de uma população normal de média μ e variância σ^2 = 9. Então, a média e a variância de $\overline{X_n} = \frac{X_1, X_2, \ldots, X_n}{n}$, são, respectivamente,

a) μ e $\frac{3}{n}$.

b) $\frac{\mu}{n}$ e $\frac{9}{n}$.

c) μ e $\frac{9}{n}$.

d) μ e $\frac{n}{9}$.

Comentários:

Vimos que a média e a variância da média amostral são, respectivamente:

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n} = \frac{9}{n}$$

Gabarito: C.

(VUNESP/2015 – TJ-SP) Resultados de uma pesquisa declaram que o desvio padrão da média amostral é 32. Sabendo que o desvio padrão populacional é 192, então o tamanho da amostra que foi utilizada no estudo foi

a) 6.

b) 25.

c) 36.

d) 49.

e) 70.

Comentários:

O desvio padrão (ou erro padrão) da média amostral pode ser calculado como a razão entre o desvio padrão da população e a raiz do número de elementos da amostra:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

O enunciado informa que o desvio padrão da média amostral é $\sigma_{\bar{X}} = 32$ e o desvio padrão populacional é $\sigma = 192$. Logo:

$$32 = \frac{192}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n} = \frac{192}{32} = 6$$

$$n = (6)^2 = 36$$

Gabarito: C.

(FCC/2012 – TRE-SP) Uma variável aleatória U tem distribuição uniforme contínua no intervalo $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{3\alpha}]$. Sabe-se que U tem média 12. Uma amostra aleatória simples de tamanho n, com reposição, é selecionada da distribuição de U e sabe-se que a variância da média dessa amostra é 0,1. Nessas condições, o valor de n é

a) 80.

b) 100.

c) 120.

d) 140.

e) 150.

Comentários:

O que essa questão exige a respeito da matéria que acabamos de estudar é a fórmula do desvio padrão da média amostral:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Assim, podemos escrever o tamanho amostral como:

$$\sqrt{n} = \frac{\sigma}{\sigma_{\bar{X}}}$$

$$n = \left(\frac{\sigma}{\sigma_{\bar{X}}}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma_{\bar{X}}^2}$$

Ou seja, o tamanho amostral é a razão entre a variância populacional σ^2 (quadrado do desvio padrão populacional σ) e a variância da média amostral $\sigma_{\bar{X}}^2$ (quadrado do desvio padrão da média amostral $\sigma_{\bar{X}}$).

O enunciado informa que a variância da média amostral é $\sigma_{\bar{X}}^2 = 0{,}1$.

Pronto! A matéria desta aula acabou. Agora, para calcular a variância populacional, precisamos saber calcular a média e a variância da distribuição contínua uniforme.

A média (esperança) dessa distribuição é igual à média aritmética dos limites do intervalo, a e b. Sabendo que a = $\boldsymbol{\alpha}$, b = 3.$\boldsymbol{\alpha}$ e E(X) = 12, conforme dados do enunciado, temos:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$12 = \frac{\alpha + 3\alpha}{2} = \frac{4\alpha}{2} = 2\alpha$$

$$\alpha = 6$$

Ou seja, a = 6 e b = 3x6 = 18. Então, a variância é dada por:

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(18-6)^2}{12} = \frac{(12)^2}{12} = 12$$

Voltando à nossa fórmula para encontrar o tamanho amostral, temos:

$$n = \frac{\sigma^2}{\sigma_{\bar{X}}^2} = \frac{12}{0{,}1} = 120$$

Gabarito: C

Fator de Correção para População Finita

Os resultados da variância e do desvio padrão da média amostral são válidos para variáveis $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **independentes**, ou seja, quando a população é **infinita ou** quando as amostras são extraídas **com reposição**.

Quando isso não ocorre, ou seja, quando a **população é finita e** as amostras são extraídas **sem reposição**, precisamos fazer um **ajuste**. Sendo n o tamanho da amostra e N o tamanho da população, precisamos multiplicar a **variância** da média amostral, pelo **fator de correção de população finita** $\frac{N-n}{N-1}$.

$$V(\bar{X}_*) = \frac{\sigma^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1}$$

Observe que o fator de correção é **menor do que 1**, pois $N - n < N - 1$, logo, o ajuste para populações finitas, cuja amostras são extraídas com reposição, **diminui** a variância da média amostral.

Distribuição da Média Amostral e a Curva Normal

Quando a **população** segue **distribuição normal (ou gaussiana)**, a **média amostral** também seguirá **distribuição normal**. Como vimos anteriormente, a esperança, a variância e o desvio padrão (chamado erro padrão) dessa distribuição serão:

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

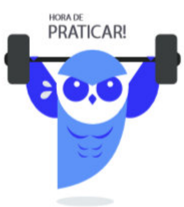
$$EP(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Ainda que a população **não** siga **distribuição normal**, pelo **Teorema Central do Limite**, é possível **aproximar** a distribuição da média amostral, a uma **normal**, também com média $E(\bar{X}) = \mu$, variância $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ e desvio padrão (erro padrão) $EP(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

De modo equivalente, também podemos dizer que a variável $Z_{\bar{X}}$, definida abaixo, segue distribuição **normal padrão (ou reduzida)**, isto é, com média igual a 0 e desvio padrão igual a 1, o que representamos como $N(0,1)$:

$$Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

A possibilidade de tal aproximação **depende** do **tamanho da amostra** e da **distribuição da população**. Quanto maior o tamanho da amostra e quanto mais próximo de uma normal for a distribuição da população, **melhor** será a aproximação. Usualmente, considera-se que para uma amostra grande, com $\boldsymbol{n \geq 30}$, a aproximação será satisfatória, para **qualquer distribuição** populacional.



(CESPE/2014 – ANATEL) Com base no teorema limite central, julgue o item abaixo.

Sendo uma amostra aleatória simples retirada de uma distribuição X com média μ e variância 1, a distribuição da média amostral dessa amostra, $\bar{X}$, converge para uma distribuição normal de média nμ e variância 1, à medida que n aumenta.

Comentários:

Vimos que a distribuição da média amostral, $\bar{X}$, converge para uma distribuição normal à medida que n aumenta. Porém, a média dessa distribuição é $E(\bar{X}) = \mu$ e variância $V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n}$. Sabendo que $V(X) = 1$, a variância da média amostral é $V(\bar{X}) = \frac{1}{n}$.

Gabarito: Errado.

(CESPE 2018/PF) O tempo gasto (em dias) na preparação para determinada operação policial é uma variável aleatória X que segue distribuição normal com média M, desconhecida, e desvio padrão igual a 3 dias. A observação de uma amostra aleatória de 100 outras operações policiais semelhantes a essa produziu uma média amostral igual a 10 dias. Com referência a essas informações, julgue o item que se segue, sabendo que $P(Z > 2) = 0{,}025$, em que Z denota uma variável aleatória normal padrão.

O erro padrão da média amostral foi inferior a 0,5 dia.

Comentários:

O erro padrão da média amostral é dado por:

$$EP(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Na fórmula acima, temos: n é o tamanho da amostra (=10); σ é o desvio padrão amostral (=3).

$$EP(\bar{X}) = \frac{3}{\sqrt{100}} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

Gabarito: Certo.

(CESPE/2019 – Analista Judiciário TJ) Um pesquisador deseja comparar a diferença entre as médias de duas amostras independentes oriundas de uma ou duas populações gaussianas. Considerando essa situação hipotética, julgue o próximo item.

Para que a referida comparação seja efetuada, é necessário que ambas as amostras tenham N ≥ 30.

Comentários:

Quando a população segue uma distribuição normal (ou gaussiana), a média amostral também seguirá uma distribuição normal, independente do tamanho da amostra. Logo, o item está errado.

Para fins de complementação, se a amostra for grande o suficiente (normalmente, consideramos isso para $n \geq 30$), a média amostral seguirá aproximadamente uma distribuição normal, independente da distribuição populacional.

Gabarito: Errado.

(FCC 2015/SEFAZ-PI) Instrução: Para responder à questão utilize, dentre as informações dadas a seguir, as que julgar apropriadas. Se Z tem distribuição normal padrão, então:

P(Z < 0,4) = 0,655; P(Z < 1,2) = 0,885; P(Z < 1,6) = 0,945; P(Z < 1,8) = 0,964; P(Z < 2) = 0,977.

Uma auditoria feita em uma grande empresa considerou uma amostra aleatória de 64 contas a receber. Se a população de onde essa amostra provém é infinita e tem distribuição normal com desvio padrão igual a R$

200,00 e média igual a R$ 950,00, a probabilidade da variável aleatória média amostral, usualmente denotada por $\boldsymbol{X}$, estar situada entre R$ 980,00 e R$ 1.000,00 é dada por

a) 18,4%

b) 9,2%

c) 28,5%

d) 47,7%

e) 86,2%

Comentários:

O enunciado informa que a população segue distribuição normal, logo, a média amostral também terá distribuição normal. Assim, utilizamos a seguinte transformação para a normal padrão:

$$Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

O enunciado informa que o tamanho da amostra é n = 64, logo, $\sqrt{n} = 8$; que a média populacional é $\mu = 950$ e que o desvio padrão populacional é $\sigma = 200$. Substituindo esses valores, a transformação para $\overline{X_{inf}} = 980$ é:

$$Z_{\bar{X}} = \frac{980 - 950}{\frac{200}{8}} = 30 \times \frac{8}{200} = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

Para $\overline{X_{sup}} = 1000$, temos:

$$Z_{\bar{X}} = \frac{1000 - 950}{\frac{200}{8}} = 50 \times \frac{8}{200} = 2$$

Ou seja, a probabilidade desejada corresponde a $P(1{,}2 < Z < 2)$, que pode ser calculada pelos dados fornecidos no enunciado:

$$P(1{,}2 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < 1{,}2) = 0{,}977 - 0{,}885 = 0{,}092 = 9{,}2\%$$

Gabarito: B

Distribuição Amostral da Proporção

Agora, vamos trabalhar com uma população em que **determinada característica** está presente em uma **proporção $\boldsymbol{p}$** dessa população, por exemplo, 15% da população apresenta olhos azuis; 20% da população está doente, 1% da produção apresenta defeito, etc.

Um elemento qualquer da população X pode **apresentar** a característica estudada, o que chamamos de **sucesso** ($X = 1$), ou **não**, o que chamamos de **fracasso** ($X = 0$). A probabilidade de sucesso é $\boldsymbol{p}$ e a probabilidade de fracasso é $q = 1 - p$. Assim, essa população apresenta uma distribuição de **Bernoulli**, com parâmetro $\boldsymbol{p}$.

Sendo essa proporção populacional desconhecida, precisamos **estimá-la** a partir da proporção de sucessos na **amostra**, denotada por $\hat{\boldsymbol{p}}$. Considerando que cada observação X_i da amostra será $X_i = 0$ ou $X_i = 1$ (como para a população), então a proporção de sucessos na amostra pode ser calculada por:

$$\boxed{\hat{p} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}}$$

Vamos supor, por exemplo, que estejamos interessados na proporção de defeitos em uma produção de medicamentos. Para estimá-la, extraímos uma amostra de 10 medicamentos, que apresentou o seguinte resultado, em que 0 representa um item não defeituoso e 1 representa um item defeituoso:

{0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0}

Logo, a proporção encontrada nessa amostra é:

$$\hat{p} = \frac{0+0+1+0+0+0+1+0+0+0}{10} = \frac{2}{10} = 0{,}2$$

Note que o estimador $\hat{p}$ é calculado da mesma forma que $\boldsymbol{\bar{X}}$. Logo, a **esperança** de $\hat{p}$ é calculada da mesma forma que para $\bar{X}$, utilizando $\boldsymbol{p}$ no lugar de μ:

$$\boxed{E(\hat{p}) = \boldsymbol{p}}$$

Ou seja, a **esperança** do estimador é igual à **proporção populacional**. Em outras palavras, a proporção amostral **tende** à **proporção populacional**.

A **variância** de $\hat{p}$ também é calculada da mesma forma que para $\bar{X}$, ou seja:

$$V(\hat{p}) = \frac{V(p)}{n}$$

Sabendo que X segue distribuição de Bernoulli, temos $V(p) = p.q$, então:

$$\boxed{V(\hat{p}) = \frac{p.q}{n}}$$

E o **erro padrão** (ou desvio padrão) para $\hat{p}$, raiz quadrada da sua variância é dado por:

$$\boxed{EP(\hat{p}) = \sqrt{\frac{p.q}{n}}}$$

Sem conhecer a proporção populacional, p, não podemos calcular a variância da população, $V(p) = p.q$. Assim, utilizamos o estimador $\hat{\boldsymbol{p}}$ calculado a partir da amostra para **estimar** a variância e o desvio padrão.

A **estimativa da variância populacional** é dada por:

$$V(p) = \hat{p}.\hat{q}$$

Em que $\hat{q} = 1 - \hat{p}$. E a **estimativa da variância do estimador $\hat{\boldsymbol{p}}$** é:

$$V(\hat{p}) = \frac{\hat{p}.\hat{q}}{n}$$

Para o nosso exemplo, em que encontramos $\hat{p} = 0{,}2$ (logo, $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0{,}8$). A estimativa da **variância** da proporção **populacional** é:

$$V(p) = \hat{p}.\hat{q} = 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}16$$

E a estimativa da **variância** da proporção **amostral** é:

$$V(\hat{p}) = \frac{\hat{p}.\hat{q}}{n} = \frac{0{,}2 \times 0{,}8}{10} = 0{,}016$$

Logo, a estimativa para o **erro padrão** (ou desvio padrão) da **proporção amostral** é:

$$EP(\hat{p}) = \sqrt{V(\hat{p})} = \sqrt{0{,}016} \cong 0{,}126$$

Considerando que cada elemento da população segue distribuição de Bernoulli, então o número de elementos com o atributo sucesso encontrados em uma **amostra** de tamanho n segue uma distribuição **binomial**, com parâmetros n e p. Para o nosso exemplo, temos uma distribuição binomial com $n = 10$ e proporção estimada $\hat{p} = 0{,}2$.

Porém, assim, como vimos para a média amostral, também podemos aproximar, pelo **Teorema Central do Limite**, essa distribuição a uma **normal**, com média $E(\hat{p}) = p$ e variância $V(\hat{p}) = \frac{p.q}{n}$, quando o tamanho da amostra, $\boldsymbol{n}$, é **grande**.

Por outro lado, se a população for **finita** e a amostra for extraída **sem reposição**, será necessário aplicar o fator de correção para população finita, multiplicando a **variância** por $\frac{N-n}{N-1}$:

$$V(\hat{p}) = \frac{p.q}{n} \times \frac{N-n}{N-1}$$

(CESPE 2016/TCE-PA) Em estudo acerca da situação do CNPJ das empresas de determinado município, as empresas que estavam com o CNPJ regular foram representadas por 1, ao passo que as com CNPJ irregular foram representadas por 0.

Considerando que a amostra

{0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1}

Foi extraída para realizar um teste de hipóteses, julgue o item subsequente.

A estimativa pontual da proporção de empresas da amostra com CNPJ regular é superior a 50%.

Comentários:

O estimador da proporção $\hat{p}$ é dado por:

$$\hat{p} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

$$\hat{p} = \frac{0+1+1+0+0+1+0+1+0+1+1+0+0+1+1+0+1+1+1+1}{20} = \frac{12}{20} = 0{,}6$$

Logo a proporção é de 60%.

Gabarito: Certo

(CESPE/2019 – TJ-AM) Para estimar a proporção de menores infratores reincidentes em determinado município, foi realizado um levantamento estatístico. Da população-alvo desse estudo, constituída por 10.050 menores infratores, foi retirada uma amostra aleatória simples sem reposição, composta por 201 indivíduos. Nessa amostra foram encontrados 67 reincidentes. Com relação a essa situação hipotética, julgue o seguinte item.

A estimativa do erro padrão da proporção amostral foi inferior a 0,04.

Comentários:

O erro padrão da proporção é dada pela relação:

$$E = \sqrt{\frac{p \times q}{n}}$$

A questão nos diz que a amostra é composta por 201 indivíduos, sendo 67 deles reincidentes. Assim, temos que $n = 201$ e $p = 67/201 = 1/3$. Logo, temos $q = 1 - p = 2/3$. Como consequência, o erro padrão é de:

$$E = \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{201}} = \sqrt{\frac{2}{1809}} \cong 0{,}033$$

Gabarito: Certo.

RESUMINDO

Estimador para a média: $\bar{X} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$

Esperança: $E(\bar{X}) = \mu$; Variância: $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$; Erro Padrão: $EP(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Estimador para a proporção: $\hat{p} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$

Esperança: $E(\hat{p}) = p$; Variância: $V(\hat{p}) = \frac{p.q}{n}$; Erro Padrão: $EP(\bar{X}) = \sqrt{\frac{p.q}{n}}$

Distribuição Amostral da Variância

Quando a variância da população é desconhecida, precisamos estimá-la a partir da amostra, assim como fizemos com a média e a proporção. O **estimador da variância** que utilizamos para uma amostra de tamanho n é:

$$s^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{\boldsymbol{n-1}}$$

Utilizamos esse estimador, com a divisão por $\boldsymbol{n-1}$, pelo fato de ele ser melhor do que o estimador que apresenta a divisão por n.

EXEMPLIFICANDO

Vamos supor que a variância da altura de determinado grupo de adultos seja desconhecida, assim como a sua média. Para estimar esses parâmetros, obtemos uma amostra de 5 pessoas com os seguintes resultados:

{1,65; 1,75; 1,8; 1,85; 1,95}

Primeiro, precisamos calcular a média da amostra (que continua sendo calculada pelo somatório das observações, dividido por n):

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{1,65+1,75+1,8+1,85+1,95}{5} = \frac{9}{5} = 1,8$$

Agora, calculamos o estimador da variância, somando os desvios em relação à média, elevados ao quadrado, e dividindo o somatório por $\boldsymbol{n-1}$:

$$s^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{\boldsymbol{n-1}}$$

$$s^2 = \frac{(1{,}65-1{,}8)^2+(1{,}75-1{,}8)^2+(1{,}8-1{,}8)^2+(1{,}85-1{,}8)^2+(1{,}95-1{,}8)^2}{4}$$

$$s^2 = \frac{(-0{,}15)^2+(-0{,}05)^2+(0)^2+(0{,}05)^2+(0{,}15)^2}{4}$$

$$s^2 = \frac{0{,}0225+0{,}0025+0{,}0025+0{,}0225}{4} = \frac{0{,}05}{4} = 0{,}0125$$

INDO MAIS FUNDO!

Sabe-se que uma maneira alternativa de calcular a variância (populacional) é:

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Para a variância amostral, também podemos utilizar uma fórmula similar a essa, mas com as devidas adaptações. No lugar de $E(X)$, utilizamos a média amostral $\bar{X}$; e, no lugar de $E(X^2)$, utilizamos $\overline{X^2}$, que é a média dos valores elevados ao quadrado:

$$\overline{X^2} = \frac{\sum X_i^2}{n}$$

Para o exemplo anterior, teríamos:

$$\overline{X^2} = \frac{(1{,}65)^2+(1{,}75)^2+(1{,}8)^2+(1{,}85)^2+(1{,}95)^2}{5} = \frac{16{,}25}{5} = 3{,}25$$

Por fim, ajustamos o denominador. Para calcular a variância populacional, dividimos por n e para a variância amostral, dividimos por $\boldsymbol{n-1}$. Logo, precisamos multiplicar o resultado por $\frac{n}{\boldsymbol{n-1}}$:

$$s^2 = \left[\overline{X^2} - (\bar{X})^2\right] \times \frac{n}{\boldsymbol{n-1}}$$

Para o nosso exemplo, em que $\overline{X^2} = 3{,}25$, $\bar{X} = 1{,}8$ e $n = 5$, a variância amostral pode ser calculada como:

$$s^2 = [3{,}25 - (1{,}8)^2] \times \frac{5}{4} = [3{,}25 - 3{,}24] \times \frac{5}{4} = \frac{0{,}01 \times 5}{4} = 0{,}0125$$

Para esse estimador, a sua **esperança** é igual à **variância populacional**, análogo ao que ocorreu com os demais estimadores. A sua variância e erro padrão são dados por:

$$E(s^2) = \sigma^2$$

$$V(s^2) = \frac{2.\sigma^4}{n-1}$$

$$EP(s^2) = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\sigma^2$$

Sem conhecer a variância populacional, σ^2, não podemos calcular esses parâmetros. Para isso, utilizamos, no lugar de σ^2, a própria estimativa s^2.

Para o nosso exemplo, em que calculamos $s^2 = 0{,}0125$, para a amostra com $n = 5$ observações, o desvio padrão (ou erro padrão) de s^2 pode ser estimado como:

$$EP(s^2) = \sqrt{\frac{2}{n-1}}s^2 = \sqrt{\frac{2}{4}} \times 0{,}0125 \cong 0{,}009$$

Se a **população** seguir uma **distribuição normal**, então o estimador s^2, multiplicado pelo fator $\frac{n-1}{\sigma^2}$, segue uma **distribuição qui-quadrado** com $n - 1$ **graus de liberdade**:

$$\mathcal{X}^2_{n-1} = \left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right).s^2$$

Em outras palavras, o estimador s^2 é uma variável com distribuição qui-quadrado, com $n-1$ graus de liberdade, multiplicada por $\frac{\sigma^2}{n-1}$:

$$s^2 = \left(\frac{\sigma^2}{n-1}\right).\mathcal{X}^2_{n-1}$$

Vamos supor que, para uma população normal, a variância populacional seja $\sigma^2 = 1$, e que vamos extrair amostras de tamanho $n = 5$. Nesse caso, a variância amostral s^2 terá a seguinte distribuição:

$$s^2 = \left(\frac{1}{5-1}\right).\mathcal{X}^2_{5-1} = \frac{\mathcal{X}^2_4}{4}$$

Ou seja, a variância amostral seguirá uma distribuição qui-quadrado com $n - 1 = 4$ graus de liberdade, dividida por 4.

Assim, inserimos a tabela da distribuição qui-quadrado com 4 graus de liberdade, que apresenta os valores de probabilidade $P(\mathcal{X}^2_4 < x)$ e os respectivos valores de x. Como a variância amostral segue essa distribuição, dividida por 4, criamos uma terceira coluna, dividindo os valores de x por 4:

$P(\mathcal{X}_4^2 < x)$	**0,005**	**0,01**	**0,025**	**0,05**	**0,1**	**0,25**	**0,5**	**0,75**	**0,9**	**0,95**	**0,975**	**0,99**	**0,995**
x	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
$x/4$	0,05	0,07	0,12	0,18	0,27	0,48	0,84	1,35	1,94	2,37	2,79	3,32	3,72

Ou seja, a probabilidade de a variância amostral observada ser inferior a 0,48 é:

$$P(s^2 < 0{,}48) = \mathbf{0,25}$$

A partir desse resultado, podemos calcular a esperança e a variância do estimador. A esperança é dada por:

$$s^2 = \left(\frac{\sigma^2}{n-1}\right).\mathcal{X}_{n-1}^2$$

$$E[s^2] = E\left[\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\right).\mathcal{X}_{n-1}^2\right] = \left(\frac{\sigma^2}{n-1}\right).E[\mathcal{X}_{n-1}^2]$$

Considerando que a média de uma distribuição qui-quadrado com k graus de liberdade é igual a k, então fazendo $k = n - 1$, temos:

$$E[\mathcal{X}_{n-1}^2] = k = n - 1$$

Substituindo no resultado anterior, temos:

$$E[s^2] = \left(\frac{\sigma^2}{n-1}\right).(n-1) = \sigma^2$$

Esse é o resultado que vimos no início da seção. A variância do estimador é:

$$V[s^2] = V\left[\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\right)\mathcal{X}_{n-1}^2\right] = \left(\frac{\sigma^2}{n-1}\right)^2.V[\mathcal{X}_{n-1}^2] = \left(\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}\right).V[\mathcal{X}_{n-1}^2]$$

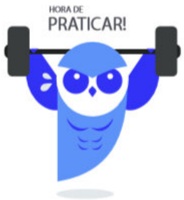
Considerando que a variância de uma distribuição qui-quadrado com k graus de liberdade é igual a $2k$, então fazendo $k = n - 1$, temos:

$$V[\mathcal{X}_{n-1}^2] = 2.k = 2.(n-1)$$

Substituindo no resultado anterior, temos:

$$V[s^2] = \left(\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}\right).2.(n-1) = \frac{2.\sigma^4}{n-1}$$

Vale acrescentar que uma população normal depende dos dois parâmetros, variância e média, os quais são independentes. Consequentemente, os estimadores correspondentes também serão **independentes**.



(FGV/2016 – IBGE) Suponha que uma amostra de tamanho $\boldsymbol{n} = \mathbf{5}$ é extraída de uma população normal, com média desconhecida, obtendo as seguintes observações:

$$\boldsymbol{X_1} = \mathbf{3},\ \boldsymbol{X_2} = \mathbf{5},\ \boldsymbol{X_3} = \mathbf{6},\ \boldsymbol{X_4} = \mathbf{9} \text{ e } \boldsymbol{X_5} = \mathbf{12}$$

São dados ainda os seguintes valores, retirados da tabela da distribuição qui-quadrado:

- $P(\chi_4^2 < \mathbf{5}) \cong \mathbf{0{,}713}$
- $P(\chi_4^2 < \mathbf{12{,}5}) \cong \mathbf{0{,}986}$
- $P(\chi_5^2 > \mathbf{5}) \cong \mathbf{0{,}854}$
- $P(\chi_5^2 > \mathbf{12{,}5}) \cong \mathbf{0{,}971}$

Se a população tem variância verdadeira $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{2}} = \mathbf{4}$, em nova amostra ($\boldsymbol{n} = \mathbf{5}$), a probabilidade de se observar uma variância amostral maior do que a anterior é de:

a) 0,014

b) 0,029

c) 0,146

d) 0,287

e) 0,713

Comentários:

Para resolver essa questão, vamos primeiro calcular a variância amostral obtida nessa primeira amostra:

$$s^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{\boldsymbol{n - 1}}$$

Para isso, precisamos da média amostral:

$$\bar{X} = \frac{3 + 5 + 6 + 9 + 12}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

Agora, podemos calcular a variância amostral dessa primeira amostra:

$$s_1^2 = \frac{(3-7)^2 + (5-7)^2 + (6-7)^2 + (9-7)^2 + (12-7)^2}{4}$$

$$s_1^2 = \frac{(-4)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (2)^2 + (5)^2}{4} = \frac{16 + 4 + 1 + 4 + 25}{4} = \frac{50}{4} = 12{,}5$$

Para calcular a probabilidade de a variância amostral ser $s^2 > 12{,}5$, consideramos que esse estimador é uma distribuição qui-quadrado com n – 1 graus de liberdade, multiplicada por $\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\right)$:

$$s^2 = \left(\frac{\sigma^2}{n-1}\right).\mathcal{X}^2_{n-1}$$

Sabendo que a variância populacional é $\sigma^2 = 4$ e que o tamanho da amostra é $n = 5$, então:

$$s^2 = \left(\frac{4}{5-1}\right).\mathcal{X}^2_{5-1} = \mathcal{X}^2_4$$

Portanto, a variância amostral segue a mesma distribuição de $\mathcal{X}^2_4$. A probabilidade de $s^2 > 12{,}5$ é, portanto:

$$P(s^2 > 12{,}5) = P(\mathcal{X}^2_4 > 12{,}5)$$

O enunciado informa que $P(\mathcal{X}^2_4 < 12{,}5) = 0{,}986$. A probabilidade $P(\mathcal{X}^2_4 > 12{,}5)$ é complementar:

$$P(\mathcal{X}^2_4 > 12{,}5) = 1 - P(\mathcal{X}^2_4 < 12{,}5) = 1 - 0{,}986 = 0{,}014$$

Gabarito: A

Distribuições para Amostragem Estratificada

Para uma amostragem estratificada, com k estratos, a **média amostral** será dada por:

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{k} \frac{N_i}{N}\bar{x_i}$$

Nessa expressão, N_i é o tamanho de cada estrato; N é o tamanho total da população; e $\bar{x_i}$, a média amostral observada para cada estrato.

Ou seja, calculamos a média $\bar{x_i}$ para cada estrato i, multiplicamos cada valor pelo tamanho do estrato N_i e dividimos pelo tamanho total N.

Para ilustrar, vamos supor uma população dividida em 3 estratos, com os seguintes tamanhos N_i e os seguintes valores de média amostral $\bar{x_i}$ para cada estrato i:

Estrato	N_i	n_i	$\bar{x_i}$
1	50	5	2
2	30	3	3
3	20	2	4

A média amostral para toda a população corresponde, então, às médias amostrais dos estratos, ponderadas pelos respectivos tamanhos dos estratos:

$$\bar{X} = \frac{50 \times 2 + 30 \times 3 + 20 \times 4}{100} = \frac{100 + 90 + 80}{100} = 2{,}7$$

Considerando a fórmula da média amostral, podemos calcular **a variância da média amostral**:

$$V(\bar{X}) = V\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{N_i}{N} \bar{x}_i\right)$$

Pelas propriedades da variância, temos:

$$V(\bar{X}) = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{N_i}{N}\right)^2 V(\bar{x}_i)$$

Sendo a variância populacional de cada estrato **desconhecida**, precisamos estimá-la a partir da estimativa da variância para cada estrato encontrada na amostra estratificada. Substituindo, na fórmula acima, $V(\bar{X})$ por $s_{\bar{x}}^2$ e $V(\bar{x}_i)$ por $s_{\bar{x}_i}^2$, temos:

$$s_{\bar{x}}^2 = \sum_{h=1}^{k} \left(\frac{N_i}{N}\right)^2 \times s_{\bar{x}_i}^2$$

Além disso, a estimativa da variância da média amostral para cada estrato i, $s_{\bar{x}_i}^2$, considerando uma amostra de tamanho n_i para tal estrato, já com a correção para população finita é dada por:

$$s_{\bar{x}_i}^2 = \frac{s_{x_i}^2}{n_i}\left(\frac{N_i - n_i}{N_i - 1}\right)$$

Vamos supor que as estimativas da variância para cada estrato sejam:

Estrato	N_i	n_i	$\bar{x}_i$	$s_{x_i}^2$
1	50	5	2	2
2	30	3	3	1,5
3	20	2	4	1

Assim, as variâncias das médias amostrais para cada estrato são:

$$s_{\bar{x}_1}^2 = \frac{2}{5}\left(\frac{50-5}{50-1}\right) \cong 0{,}367$$

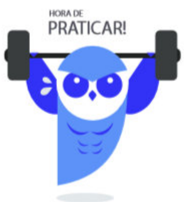
$$s_{\bar{x}_2}^2 = \frac{1{,}5}{3}\left(\frac{30-3}{30-1}\right) \cong 0{,}466$$

$$s_{\bar{x}_3}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{20-2}{20-1}\right) \cong 0{,}474$$

E a variância da média amostral global é dada por:

$$s_{\bar{x}}^2 = \left(\frac{50}{100}\right)^2 \times 0{,}367 + \left(\frac{30}{100}\right)^2 \times 0{,}466 + \left(\frac{20}{100}\right)^2 \times 0{,}474$$

$$s_{\bar{x}}^2 = 0{,}25 \times 0{,}367 + 0{,}09 \times 0{,}466 + 0{,}04 \times 0{,}474 = 0{,}092 + 0{,}042 + 0{,}019 = 0{,}153$$



(CESPE/2018 – STM) Um estudo acerca do tempo (x, em anos) de guarda de autos findos em determinada seção judiciária considerou uma amostragem aleatória estratificada. A população consiste de uma listagem de autos findos, que foi segmentada em quatro estratos, segundo a classe de cada processo (as classes foram estabelecidas por resolução de autoridade judiciária.) A tabela a seguir mostra os tamanhos populacionais (N) e amostrais (n), a média amostral ($\bar{x}$) e a variância amostral dos tempos (s^2) correspondentes a cada estrato.

Estratos	Tamanhos Populacionais (N)	Tamanhos Amostra (n)	$\bar{x}$	s^2
A	30.000	300	20	3
B	40.000	400	15	16
C	50.000	500	10	5
D	80.000	800	5	8
Total	200.000	2.000	-	-

Considerando que o objetivo do estudo seja estimar o tempo médio populacional (em anos) de guarda dos autos findos, julgue os itens a seguir.

(CESPE/2018 – STM) A estimativa do tempo médio populacional da guarda dos autos findos é maior ou igual a 12 anos.

Comentários:

Em uma amostra aleatória por estratificação, a média da população é calculada pela relação

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{k} \frac{N_i}{N} \overline{x_i}$$

Em que k é a quantidade de estratos; N_i o tamanho de cada estrato; e $\overline{x_i}$ a média de cada estrato.

Vinculando os estratos A, B, C e D aos números 1, 2, 3 e 4, respectivamente, temos:

$$\bar{X} = \frac{N_1 \times \overline{x_1} + N_2 \times \overline{x_2} + N_3 \times \overline{x_3} + N_4 \times \overline{x_4}}{N}$$

$$\bar{X} = \frac{30000 \times 20 + 40000 \times 15 + 50000 \times 10 + 80000 \times 5}{200000}$$

$$\bar{X} = \frac{60 + 60 + 50 + 40}{20}$$

$$\bar{X} = 10{,}5$$

Gabarito: Errado.

(CESPE/2018 – STM) Combinando-se todos os estratos envolvidos, a estimativa da variância do tempo médio amostral da guarda dos autos findos é inferior a $0{,}005\ ano^2$.

Comentários:

Em uma amostragem estratificada, a estimativa da variância da média da amostragem é dada pela relação:

$$s_{\bar{x}}^2 = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{N_i}{N}\right)^2 \times s_{\bar{x}_i}^2$$

Em que

$$s_{\bar{x}_i}^2 = \frac{s_{x_i}^2}{n_i}\left(\frac{N_i - n_i}{N_i - 1}\right)$$

Pelos valores apresentados na tabela, teremos:

$$s_{\bar{x}_A}^2 = \frac{3}{300}\left(\frac{30000 - 300}{30000 - 1}\right) = 0{,}0099$$

$$s^2_{\bar{x}_B} = \frac{16}{400}\left(\frac{40000 - 400}{40000 - 1}\right) = 0{,}0396$$

$$s^2_{\bar{x}_C} = \frac{5}{500}\left(\frac{50000 - 500}{50000 - 1}\right) = 0{,}0099$$

$$s^2_{\bar{x}_D} = \frac{8}{800}\left(\frac{80000 - 800}{80000 - 1}\right) = 0{,}0099$$

Além disso, temos que:

$$\left(\frac{N_A}{N}\right)^2 = \left(\frac{30000}{200000}\right)^2 = 0{,}0225$$

$$\left(\frac{N_B}{N}\right)^2 = \left(\frac{40000}{200000}\right)^2 = 0{,}04$$

$$\left(\frac{N_C}{N}\right)^2 = \left(\frac{50000}{200000}\right)^2 = 0{,}0625$$

$$\left(\frac{N_D}{N}\right)^2 = \left(\frac{80000}{200000}\right)^2 = 0{,}16$$

Portanto:

$$s^2_{\bar{x}} = \sum_{h=1}^{L} \left(\frac{N_h}{N}\right)^2 \times s^2_{\bar{x}_h}$$

$$s^2_{\bar{x}} = (0{,}0225 \cdot 0{,}0099 + 0{,}04 \cdot 0{,}0396 + 0{,}0625 \cdot 0{,}0099 + 0{,}16 \cdot 0{,}0099)$$

$$s^2_{\bar{x}} = (0{,}0225 + 0{,}0625 + 0{,}16) \cdot 0{,}0099 + 0{,}04 \cdot 0{,}0396$$

$$s^2_{\bar{x}} \cong 0{,}0041.$$

Gabarito: Certo.