Aula 01

BNB (Analista Bancário) Matemática Financeira - 2023 (Pré-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

22 de Março de 2023

Índice

Capitalização Composta - Aspectos Matemáticos

Na parte conceitual (aula 00) vimos que no cálculo dos **Juros Compostos**, os **rendimentos em cada período são incorporados ao Capital**, de forma que os Juros, ao final do período seguinte, **incidem NÃO SÓ sobre o Capital Inicial, MAS TAMBÉM sobre os Juros anteriores** que foram incorporados ao Capital (e assim Capitalizados).

Em Juros Compostos, a sequência formada pelos valores dos Montantes em cada período é caracterizada por uma **PROGRESSÃO GEOMÉTRICA CRESCENTE** onde a **razão é sempre igual a**:

$$\boxed{q = 1 + i}$$

Cálculo do Montante Composto

Em **Regime de Juros Compostos**, o Montante é calculado pela seguinte equação:

$$\boxed{\boldsymbol{M = C \times (1 + i)^t}}$$

Onde,

$M = Montante$

$C = Capital$

$i = Taxa\ de\ Juros$

$t = tempo$

Duas observações importantes são necessárias na hora de aplicar essa fórmula:

1. Atente-se para as unidades do Tempo e da Taxa de Juros. **OBRIGATORIAMENTE** elas devem estar na mesma unidade de grandeza.

Então, se a Taxa, por exemplo, estiver em "por cento ao mês", a unidade de tempo **NECESSARIAMENTE** deve estar em "meses".

2. A Taxa de Juros deve ser inserida na equação na **forma unitária**, ou seja, em números decimais.

Cálculo dos Juros Compostos

Estudamos que, em termos matemáticos, **Juro** é definido pela **diferença do Montante da operação menos o Capital inicial**.

$$\boxed{\boldsymbol{J = M - C}}$$

Então, se uma questão pedir para você calcular os Juros Compostos de uma operação, **primeiro** você calcula o Montante desta operação e, **posteriormente**, subtrai o Capital deste Montante, pois, como vimos, o Montante menos o Capital será igual ao Juros.

<u>Cálculos dos Juros Compostos:</u>

1º - Calcula-se o **Montante** da operação pela seguinte fórmula:

$$\boxed{M = C \times (1 + i)^t}$$

2º - Em seguida, calculam-se os **Juros** pela equação:

$$\boxed{J = M - C}$$

"Professor, existe alguma fórmula que eu possa calcular diretamente os Juros (igual no Regime Simples)?"

Existe sim. Vamos substituir a fórmula do Montante na fórmula dos Juros e proceder com as operações matemáticas.

$$J = M - C$$

$$J = C \times (1 + i)^t - C$$

Iremos colocar o Capital C em evidência e, assim, encontramos a **fórmula dos Juros em Regime Composto**.

$$J = C \times (1 + i)^t - C \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J = C \times [(1 + i)^t - 1]}}$$

Observe que fizemos os mesmos dois passos que foram apresentados na esquematização acima. Porém, nesse caso, **trabalhamos com incógnitas** em vez de um resultado numérico.

Então, na hora da prova, você calcula os Juros, **ou** achando o Montante e depois diminuindo do Capital, **ou** aplicando diretamente a fórmula acima.

Particularmente, prefiro fazer passo a passo, isto é, calcular primeiro o Montante e, posteriormente, subtrair o Capital e encontrar os Juros.

Juros Compostos

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$J = M - C \quad ou \quad J = C \times [(1 + i)^t - 1]$$

- "i" e "t" ***obrigatoriamente*** *na* ***mesma unidade*** *de grandeza*

<u>Antes de passar para alguns exercícios sobre esse tópico</u>, vamos a uma **dica** que pode **facilitar suas contas** e poupar preciosos minutos na sua prova.

Esta dica é sempre passada pelo professor Brunno Lima em suas vídeo aulas e irei transcrevê-las aqui para você.

Iremos trabalhar constantemente com a potência $(\mathbf{1} + \boldsymbol{i})^{\mathbf{2}}$ e a Taxa i variando de 1 até 9%. Nesse caso, vamos usar um macete para acelerar o resultado e não precisar fazer a conta.

- A dica serve para potências da forma "um vírgula zero alguma coisa ao quadrado".

$$\boxed{(1{,}0\_)^2}$$

O macete consiste em "**PRIMEIRO DOBRA, DEPOIS ELEVA AO QUADRADO**".

Observe e verá que é mais fácil do que imagina. Fique comigo que esse macete poupará preciosos minutos na sua prova.

- $1{,}05^2 \rightarrow$ Pegamos o que está depois da vírgula (05). Primeiro dobra $05 \times 2 = \mathbf{10}$. Depois eleva ao quadrado $05^2 = \mathbf{25}$.

Logo, $1{,}05^2 = 1{,}1025$

Perceba que você conseguirá fazer essas contas em segundos na hora da prova (de forma automática até). Diferente de multiplicar $1{,}05 \times 1{,}05$.

Vamos testar mais um.

- $1{,}04^2 \rightarrow$ Primeiro dobra $04 \times 2 =$ **08**. Eleva ao quadrado $04^2 =$ **16**.

$1{,}04^2 = 1{,}0816$

"Verdade professor. Estou entendendo. Parece ser bem rápido. Deixa eu testar mais uma para ver se funciona mesmo".

- $1{,}07^2 \rightarrow$ Dobra $=$ **14**. Eleva ao quadrado $=$ **49**.

$1{,}07^2 = 1{,}1449$

"Não pode ser. Vou fazer na calculadora para ver se é verdade mesmo."

Vamos testar mais uma potência.

- $1{,}08^2 \rightarrow$ Dobra $=$ **16**. Quadrado $=$ **64**.

$1{,}08^2 = 1{,}1664$

Percebeu como essa última já foi feita de cabeça e no modo automático?!. Agora tente fazer $1{,}08 \times 1{,}08$ no papel e constate quantos segundos preciosos você ganhará na resolução dos exercícios.

Lembrando que essa dica serve para potências da forma "<u>um vírgula zero alguma coisa ao quadrado</u>".

$$\boxed{(1{,}0\_)^2}$$

$$1{,}01^2 = 1{,}0201$$

$$1{,}02^2 = 1{,}0404$$

$$\vdots$$

$$1{,}06^2 = 1{,}1236$$

$$\vdots$$

$$1{,}09^2 = 1{,}1881$$

(FGV / EPE - 2022) Um cliente de um banco fez um investimento inicial de R$ 5.000. Ao final de 3 anos tinha um montante de R$ 8.640.

Sabendo que $\sqrt[3]{1,728} = 1,2$ e supondo que a taxa de juros utilizada pelo banco é composta e que não se alterou ao longo do tempo, a taxa de juros anual aplicada ao investimento foi de

a) 0,2%.
b) 2%.
c) 10%.
d) 20%.
e) 50%.

Comentários:

Vamos aplicar diretamente a fórmula do Montante em regime de Juros Compostos e calcular o valor da taxa de juros anual.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Em que:

$M = Montante = 8.640$

$C = Capital = 5.000$

$i = taxa\ de\ juros = ?$

$t = tempo = 3\ anos$

Substituindo na equação teremos:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$8.640 = 5.000 \times (1 + i)^3$$

$$(1 + i)^3 = \frac{8.640}{5.000}$$

$$(1 + i)^3 = 1{,}728$$

$$1 + i = \sqrt[3]{1{,}728}$$

O enunciado nos fornece $\sqrt[3]{1{,}728} = 1{,}2$. Substituindo:

$$1 + i = 1{,}2$$

$$i = 1{,}2 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i = 0{,}2\ ou\ 20\%\ ao\ ano}$$

Gabarito: Alternativa **D**

(Inédita - 2022) Após passar para Auditor, um ex-concurseiro contraiu um consignado de R$ 100.000,00 a uma taxa de juros compostos de 3% ao mês sobre o saldo devedor. O pagamento será feito em duas parcelas. A primeira, no valor de R$ 46.000,00, será paga ao final do segundo mês e a segunda, ao final do quinto mês.

Sendo assim, o valor da segunda parcela será igual a:

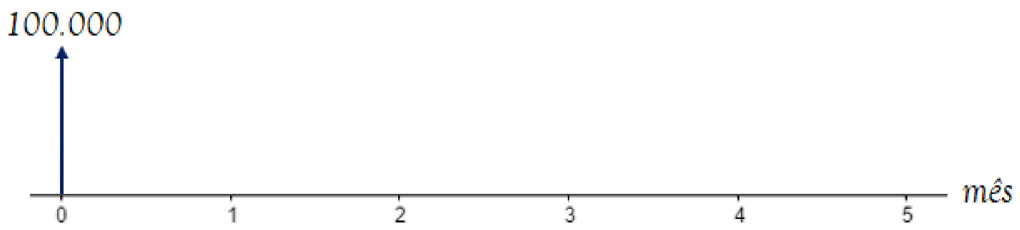
a) R$ 71.661,96.
b) R$ 69. 661,96.

c) R$ 67. 661,96.
d) R$ 65. 661,96.
e) R$ 64. 661,96.

Comentários:

Resolvemos esta mesma questão na aula anterior. Agora, iremos resolvê-la com a taxa de juros em regime de **Juros Compostos**.

Um ex-concurseiro contraiu um consignado de R$ 100.000,00.



Vamos calcular o Saldo Devedor deste empréstimo ao final do segundo mês, já que haverá o pagamento de uma parcela.

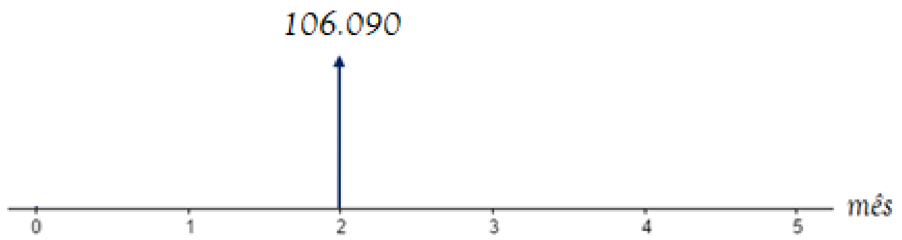
Iremos aplicar diretamente a **fórmula do Montante em regime de Juros Compostos** e calcular o Saldo Devedor ao final do segundo mês.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

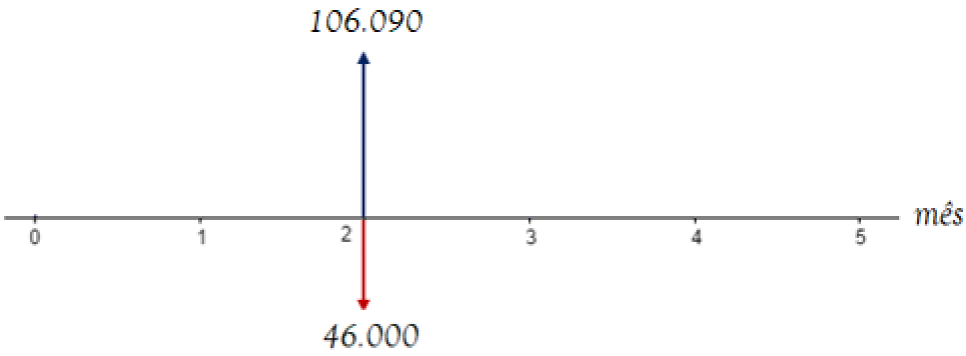
$$M = 100.000 \times (1 + 0{,}03)^2$$

$$M = 100.000 \times 1{,}03^2$$

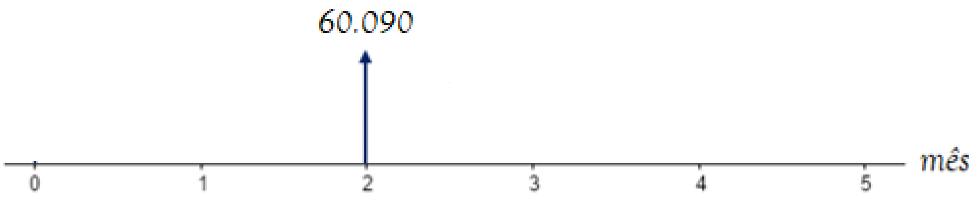
$$M = 100.000 \times 1{,}0609 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 106.090}}$$



Ao final do segundo mês, há um pagamento de R$ 46.000,00.



Sendo assim, o Saldo Devedor ao final do segundo mês será de 60.090 (106.090 – 46.000).



Os juros **continuarão incidindo sobre este Saldo Devedor** por mais três meses, uma vez que o pagamento da segundo parcela acontece ao final do quinto mês.

Vamos então aplicar novamente a fórmula do Montante em regime de Juros Compostos e calcular o Saldo Devedor ao final do quinto mês.

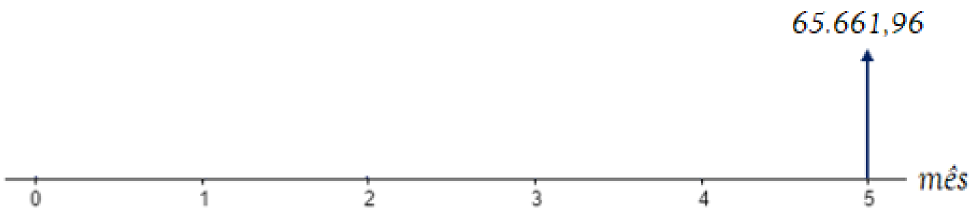
$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 60.090 \times (1 + 0{,}03)^3$$

Observe que o Capital desta fórmula é o valor de R$ 60.090,00, afinal é em cima desse valor que os Juros incidirão. E o tempo é igual a 3 meses, pois já estamos no mês 2 e queremoso valor do Saldo Devedor no mês 5. Continuando:

$$M = 60.090 \times (1{,}03)^3$$

$$M = 60.090 \times 1{,}0927 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M = 65.661,96}$$



Logo, para quitar este financiamento, **o pagamento da segunda parcela**, ao final do quinto mês, deverá ser de R$ 65.661,96.

Gabarito: Alternativa **D**

(CRMV – 2020) Para formar sua empresa, Josué tomou R$ 50.000,00 emprestados a juros simples de 3% ao mês.

Com base nesse caso hipotético, julgue o item.

Josué alugou uma máquina digital por R$ 1.000,00, por 2 meses, a juros compostos de 5% ao mês. Assim, ao final do período, Josué pagou R$ 1.102,50.

Comentários:

O aluguel da máquina é realizado em **regime de Juros Compostos**. Nesse regime, o Montante é calculado pela seguinte equação:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 1.000$

$i = Taxa\ de\ Juros = 5\%\ ao\ mês = 0{,}05$

$t = tempo = 2\ meses$

Vamos substituir os valores na equação e calcular o valor pago por José ao final do período de 2 meses.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 1.000 \times (1 + 0{,}05)^2$$

$$M = 1.000 \times 1{,}05^2$$

$$M = 1.000 \times 1{,}1025 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M = 1.102,50}$$

Gabarito: **CERTO**

(CRO AC- 2019) Quanto a noções básicas de matemática financeira, finanças, orçamento e tributos, julgue o item.

Se determinado investidor tem R$ 25.000,00 de capital e quer comprar uma televisão que custa R$ 3.000,00, colocando seu capital a juros compostos de 6% ao mês por 2 meses, ao final do período, ele poderá comprar a televisão usando apenas os juros recebidos na aplicação

Comentários:

Vamos calcular o Montante resultante da aplicação de um Capital de R$ 25.000,00 submetido a uma Taxa de Juros compostos de 6% ao mês por 2 meses. Em **regime de Juros Compostos**, o Montante é calculado pela seguinte equação:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 25.000$

$i = Taxa\ de\ Juros = 6\%\ ao\ mês = 0{,}06$

$t = tempo = 2\ meses$

Iremos substituir os valores e calcular o Montante.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 25.000 \times (1 + 0{,}06)^2$$

$$M = 25.000 \times 1{,}06^2$$

$$M = 25.000 \times 1{,}1236 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 28.090}}$$

▪

De posse do Montante e do Capital, calculamos os **Juros**.

Sabemos que os Juros são calculados pela diferença do Montante resultante menos o Capital aplicado.

$$J = M - C$$

$$J = 28.090 - 25.000 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{J = 3.090}$$

Ou seja, como a televisão custa R$ 3.000,00 e os Juros da aplicação são iguais a R$ 3.090,00, ele **poderá (sim) comprar a televisão** usando apenas os juros recebidos na aplicação.

Gabarito: **CERTO**

(Pref. Três Palmares RS - 2018) O juro composto obtido na aplicação de um capital de R$ 2.000,00 durante um bimestre, com uma taxa de 10% ao mês, é:

a) R$ 420,00
b) R$ 600,00
c) R$ 1.600,00

d) R$ 2.400,00
e) R$ 2.420,00

Comentários:

Em **regime de Juros Compostos**, o Montante é calculado pela seguinte equação:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 2.000$

$i = Taxa\ de\ Juros = 10\%\ ao\ mês = 0{,}1$

$t = tempo = 1\ bimestre = 2\ meses$

Atente-se para a **conversão** da unidade do tempo de aplicação (bimestre) para a unidade da taxa de juros (mês) pois **necessariamente** devem coincidir. Em 1 bimestre há 2 meses.

Vamos substituir os valores e calcular o Montante.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 2.000 \times (1 + 0{,}1)^2$$

$$M = 2.000 \times (1{,}1)^2$$

$$M = 2.000 \times 1{,}21 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 2.420}}$$

De posse do Montante e do Capital, calcularemos os Juros relativos à aplicação em regime de juros compostos, uma vez que **os Juros são calculados pela diferença do Montante recebido menos o Capital Aplicado**.

$$J = M - C$$

$$J = 2.420 - 2.000 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{J = 420}$$

Gabarito: Alternativa **A**

(Pref. Pinhais - 2017 - Adaptada) Uma pessoa contratou um empréstimo de R$ 6.000,00 em uma agência bancária, a juros compostos de 10% ao mês. Exatamente dois meses após contratar esse empréstimo, essa

pessoa foi ao banco e pagou R$ 4.000,00 e dois meses, após esse pagamento, essa pessoa quitou o seu empréstimo. Dessa forma, o valor do último pagamento foi de

a) R$ 1.244,60
b) R$ 2.346,00
c) R$ 2.586,00
d) R$ 3.944,60
e) R$ 7.260,00

Comentários:

Vamos transcrever os trechos do enunciado e resolver passo a passo.

Uma pessoa contratou um empréstimo de R$ 6.000,00 em uma agência bancária, a juros compostos i de 10% ao mês por um tempo t de 2 meses. Logo, o Montante após 2 meses será igual a:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 6.000 \times (1 + 0{,}1)^2$$

$$M = 6.000 \times 1{,}21 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 7.260}}$$

Exatamente dois meses após contratar esse empréstimo, essa pessoa foi ao banco e pagou R$ 4.000,00. Logo, o **valor que resta a pagar** é igual a:

$$resta\ pagar = 7.260 - 4.000 \quad \rightarrow \quad resta\ pagar = 3.260$$

e dois meses após esse pagamento, a pessoa quitou o seu empréstimo. Vamos calcular o Montante final em 2 meses deste valor que resta a pagar.

Iremos utilizar novamente a fórmula do Montante em regime de Juros Compostos, pois em cima deste valor que resta a pagar irão incidir juros por mais 2 meses. Dessa forma, o valor do último pagamento foi de:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 3.260 \times (1 + 0{,}1)^2$$

$$M = 3.260 \times (1{,}1)^2$$

$$M = 3.260 \times 1{,}21 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M = 3.944{,}60}$$

Gabarito: Alternativa **D**

TAXA NOMINAL E TAXA EFETIVA

Algumas questões irão trabalhar com essas duas taxas. **Não podemos confundi-las** na hora da prova. Iremos entender o que cada uma significa e como fazer a conversão entre elas.

Taxa Efetiva

É a Taxa de Juros em que a unidade de tempo da Taxa **é coincidente** com a unidade de tempo do período de capitalização.

Exemplos:

- $\boldsymbol{i_1} = 5\%\ ao\ mês\ capitalizados\ mensalmente$

Perceba que a unidade de tempo da Taxa (ao mês) é coincidente com a unidade de tempo do período de capitalização (mensal).

- $\boldsymbol{i_2} = 8\%\ ao\ trimestre\ capitalizados\ trimestralmente$

- $\boldsymbol{i_3} = 15\%\ ao\ ano\ capitalizados\ anualmente$

Quando a **Taxa for efetiva**, isto é, quando as unidades de tempo da taxa e da capitalização forem iguais, a taxa pode ser escrita somente em termos da sua unidade de tempo. Então, nos casos acima, as taxas poderiam ser escritas da seguinte forma:

- $\boldsymbol{i_1} = 5\%\ ao\ mês$

- $\boldsymbol{i_2} = 8\%\ ao\ trimestre$

- $\boldsymbol{i_3} = 15\%\ ao\ ano$

Até agora, em todos os exercícios, trabalhamos com a Taxa Efetiva.

Então, tenha em mente que se a taxa for escrita da forma acima (apenas com a unidade de tempo) é porque se trata de uma Taxa Efetiva e está **implícito que a unidade de capitalização é a mesma da unidade de tempo**.

Taxa Nominal

É a Taxa de Juros em que a unidade de tempo da Taxa **NÃO É coincidente** com a unidade de tempo do período de capitalização.

Exemplos:

- $\boldsymbol{i_1} = 10\%\ ao\ bimestre\ capitalizados\ mensalmente$

Perceba que a unidade de tempo da Taxa (ao bimestre) não é coincidente com a unidade de tempo do período de capitalização (mensal).

- $\boldsymbol{i_2} = 12\%\ ao\ semestre\ capitalizados\ bimestralmente$

- $\boldsymbol{i_3} = 15\%\ ao\ semestre\ capitalizados\ anualmente$

Conversão entre Taxa Nominal ↔ Taxa Efetiva

Nas fórmulas matemáticas de Juros Compostos **NÃO podemos utilizar a Taxa Nominal**.

Antes de proceder com os cálculos, **certifique-se que a Taxa a ser utilizada é a Taxa Efetiva**, ou seja, aquela em que a unidade de tempo da Taxa é coincidente com a unidade de tempo do período de capitalização.

Então, **nunca resolva um exercício de Juros Compostos usando a Taxa Nominal**.

"E, professor, se a questão der a Taxa Nominal, como eu transformo para a Taxa Efetiva?"

Primeiro, tenha em mente que "**QUEM MANDA É O PERÍODO DE CAPITALIZAÇÃO**". Sendo assim, devemos passar para a unidade de tempo do período de capitalização

"E como passamos da unidade de tempo do período da taxa para a unidade de tempo do período de capitalização?"

Basta fazermos uma **simples divisão/multiplicação**.

Vejamos com os mesmos exemplos da teoria acima de Taxa Nominal.

EXEMPLIFICANDO

- $\boldsymbol{i_1} = 10\%\ ao\ bimestre\ capitalizados\ mensalmente$

Como vimos, a Taxa está com a unidade de tempo em bimestre e a capitalização é mensal.

Devemos passar para a unidade da capitalização, isto é, para a unidade "mês".

Em 1 bimestre há 2 meses. Logo, a Taxa Efetiva será igual a:

$$i_{1\ Efetiva} = \frac{10\%}{2} \rightarrow i_{1\ Efetiva} = 5\%\ ao\ mês\ capitalizados\ mensalmente$$

Ou, simplesmente,

$$\boldsymbol{i_{1\ Efetiva}} = 5\%\ ao\ mês$$

- $\boldsymbol{i_2} = 12\%\ ao\ semestre\ capitalizados\ bimestralmente$

Em 1 semestre há 3 bimestres. Logo, a Taxa Efetiva será igual a:

$$i_{2\ Efetiva} = \frac{12\%}{3} \rightarrow i_{2\ Efetiva} = 4\%\ ao\ bimestre\ capitalizados\ bimestralmente$$

Ou, simplesmente,

$$\boldsymbol{i_{2\ Efetiva}} = 4\%\ ao\ bimestre$$

- $\boldsymbol{i_3} = 15\%\ ao\ semestre\ capitalizados\ anualmente$

Em 1 ano há 2 semestres. Logo, a Taxa Efetiva será:

$$i_{3\ Efetiva} = 15\% \times 2 \rightarrow i_{Efetiva} = 30\%\ ao\ ano\ capitalizados\ anualmente$$

Ou, simplesmente,

$$\boldsymbol{i_{3\ Efetiva}} = 30\%\ ao\ ano$$

ESQUEMATIZANDO

Divisão/Multiplicação → "Quem manda é o período de capitalização"

Taxa Efetiva	Taxa Nominal
Unidade de tempo da taxa **é coincidente** com a unidade de tempo do período de capitalização	Unidade de tempo da taxa **NÃO É coincidente** com a unidade de tempo do período de capitalização

HORA DE PRATICAR!

(Inédita - 2022) João faz um investimento de R$ 10.000,00 a uma taxa de juros compostos de 12% a.a. com capitalizações bimestrais.

Após 4 meses, por estar passando por dificuldades financeiras, João resolve sacar R$ 1.904,00 e deixar o restante aplicado.

10 meses após o início do investimento, qual o valor aproximadamente que João terá na sua conta investimento?

a) R$ 8.500,27
b) R$ 9.020,27
c) R$ 9.220,27
d) R$ 9.420,27
e) R$ 9.620,27

Comentários:

Primeiro passo é <u>converter a Taxa Nominal para a Taxa Efetiva</u>.

Taxa Nominal é a taxa de juros cuja unidade de tempo não coincide com a unidade de tempo do período de capitalização. Observe que a taxa fornecida no enunciado é uma taxa nominal.

$$i_{Nominal} = 12\%\ ao\ ano\ capitalizada\ bimestralmente$$

Nunca resolva um exercício usando a taxa nominal. Sempre devemos passar para a unidade de tempo do período de capitalização. Então tenha em mente: "**quem manda é o período de capitalização**".

E como passamos da unidade de tempo do período da taxa nominal (ano) para a unidade de tempo do período de capitalização (bimestre)?

Basta fazermos uma simples divisão/multiplicação.

Em 1 ano há 6 bimestres. Então, a Taxa Efetiva bimestral será um sexto da taxa anual.

$$i_{Efetiva\ Bimestral} = \frac{12\%}{6} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{i_{Efetiva\ Bimestral} = 2\%\ a.b.}}$$

✓ Essa será a taxa que devemos utilizar no exercício.

Depois desse primeiro passo (perceba que a explicação é extensa para que você possa entender o passo a passo. Mas, na hora da prova, você consegue fazer essa passagem em apenas uma linha ou até mesmo fazer a divisão "de cabeça"), iremos calcular o Montante após 4 meses de aplicação.

"Após 4 meses, por estar passando por dificuldades financeiras, ..."

Em regime de Juros Compostos, o Montante é calculado pela seguinte equação:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 10.000$

$i = Taxa\ de\ Juros = 2\%\ ao\ bimestre = 0{,}02$

$t = tempo = 4\ meses = 2\ bimestres$

Atente-se para a conversão da unidade do tempo de aplicação (meses) para a unidade da taxa de juros (bimestre) pois **necessariamente** devem coincidir. Em 4 meses há 2 bimestres.

Vamos substituir os valores e calcular o Montante.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 10.000 \times (1 + 0{,}02)^2$$

$$M = 10.000 \times (1{,}02)^2$$

$$M = 10.000 \times 1{,}0404 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 10.404}}$$

"João resolve sacar R$ 1.904,00..."

Logo, ainda restará na conta investimento o valor de:

$$valor = 10.404 - 1.904 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{valor = 8.500}}$$

"João resolve sacar R$ 1.904,00 e deixar o restante aplicado."

Ou seja, esse valor de R$ 8.500 continuará aplicado por mais (6 meses=3bimestre) a uma taxa de juros de 2% ao bimestre.

Observe que a aplicação total ocorre em 10 meses. Porém, como já se passaram 4 meses, ainda **restam 6 meses (3 bimestres) de aplicação**.

Iremos aplicar novamente a fórmula do Montante em regime de Juros Compostos e calcular o Montante final desta aplicação.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 8.500$

$i = Taxa\ de\ Juros = 2\%\ ao\ bimestre = 0{,}02$

$t = tempo = 6\ meses = 3\ bimestre$

Vamos substituir os valores e calcular o Montante.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 8.500 \times (1 + 0{,}02)^3$$

$$M = 8.500 \times 1{,}0612 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M = 9.020,27}$$

Gabarito: Alternativa **C**

(Pref. São Cristóvão - 2019) Um indivíduo aplicou R$ 10.000 em um investimento que paga taxa de juros compostos de 12% ao ano com capitalização bimestral.

Considerando 1,27 como valor aproximado para $1{,}02^{12}$, julgue o item que se segue.

O montante 2 anos após o início da aplicação terá sido superior a R$ 12.000.

Comentários:

Primeiro passo é converter a Taxa Nominal para a Taxa Efetiva.

Taxa Nominal é a taxa de juros cuja unidade de tempo **não coincide** com a unidade de tempo do período de capitalização. Observe que a taxa fornecida no enunciado é uma taxa nominal.

$$i_{Nominal} = 12\%\ ao\ ano\ capitalizados\ bimestralmente$$

Nunca resolva um exercício usando a taxa nominal. Sempre devemos passar para a unidade de tempo do período de capitalização. Então, tenha em mente: "**quem manda é o período de capitalização**".

E como passamos da unidade de tempo do período da taxa nominal para a unidade de tempo do período de capitalização?

Basta fazermos uma simples divisão/multiplicação. Em 1 ano há 6 bimestres. Então, a Taxa Efetiva bimestral será um sexto da taxa anual.

$$i_{Efetiva} = \frac{12\%}{6} \rightarrow i_{Efetiva} = 2\%\ ao\ bimestre\ capitalizados\ bimestralmente$$

Ou simplesmente,

$$\boxed{\boldsymbol{i_{Efetiva} = 2\%\ ao\ bimestre}}$$

- ✓ Essa será a taxa que devemos utilizar no exercício.

Depois desse primeiro passo (perceba que a explicação é extensa para que você possa entender o passo a passo. Mas, na hora da prova, você consegue fazer essa passagem em apenas uma linha ou até mesmo fazer a divisão "de cabeça"), iremos calcular o Montante após 2 anos de aplicação.

Em **regime de Juros Compostos**, o Montante é calculado pela seguinte equação:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 10.000$

$i = Taxa\ de\ Juros = 2\%\ ao\ bimestre = 0{,}02$

$t = tempo = 2\ anos = 12\ bimestres$

Atente-se para a **conversão** da unidade do tempo de aplicação (ano) para a unidade da taxa de juros (bimestre) pois **necessariamente** devem coincidir. Em 1 ano há 6 bimestres. Logo, em 2 anos haverá 12 bimestres.

Vamos substituir os valores e calcular o Montante.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 10.000 \times (1 + 0{,}02)^{12}$$

$$M = 10.000 \times 1{,}02^{12}$$

$$M = 10.000 \times 1{,}27 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M = 12.700}$$

Ou seja, o montante 2 anos após o início da aplicação terá sido **SUPERIOR** a R$ 12.000.

Gabarito: **CERTO**

(CAGE RS – 2018) Um indivíduo investiu a quantia de R$ 1.000 em determinada aplicação, com taxa nominal anual de juros de 40%, pelo período de 6 meses, com capitalização trimestral. Nesse caso, ao final do período de capitalização, o montante será de

a) R$ 1.200
b) R$ 1.210
c) R$ 1.331
d) R$ 1.400
e) R$ 1.100

Comentários:

Primeiro passo é converter a Taxa Nominal para a Taxa Efetiva.

Taxa Nominal é a taxa de juros cuja unidade de tempo **não coincide** com a unidade de tempo do período de capitalização.

Observe que a taxa fornecida no enunciado é uma taxa nominal.

$$i_{Nominal} = 40\%\ ao\ ano\ capitalizados\ trimestralmente$$

Nunca resolva um exercício usando a taxa nominal. Sempre devemos passar para a unidade de tempo do período de capitalização. Então tenha em mente: "**quem manda é o período de capitalização**".

E como passamos da unidade de tempo do período da taxa nominal para a unidade de tempo do período de capitalização?

Basta fazermos uma simples divisão/multiplicação. Em 1 ano há 4 trimestres. Então, a Taxa Efetiva trimestral será um quarto da taxa anual.

$$i_{Efetiva} = \frac{40\%}{4} \quad \rightarrow \quad i_{Efetiva} = 10\% \; ao \; trimestre \; capitalizados \; trimestralmente$$

Ou, simplesmente,

$$\boxed{\boldsymbol{i_{Efetiva} = 10\% \; ao \; trimestre}}$$

Essa será a taxa que devemos utilizar no exercício.

Depois desse primeiro passo (perceba que a explicação é extensa para que você possa entender o passo a passo. Mas, na hora da prova, você consegue fazer essa passagem em apenas uma linha ou até mesmo fazer a divisão "de cabeça"), iremos calcular o Montante após 6 meses de aplicação.

Em **regime de Juros Compostos**, o Montante é calculado pela seguinte equação:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 1.000$

$i = Taxa \; de \; Juros = 10\% \; ao \; trimestre = 0{,}1$

$t = tempo = 6 \; meses = 2 \; trimestres$

Atente-se para a **conversão** da unidade do tempo de aplicação (meses) para a unidade da taxa de juros (trimestre) pois **necessariamente** devem coincidir. Em 6 meses há 2 trimestres.

Sendo assim, o Montante será igual a:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 1.000 \times (1 + 0{,}1)^2$$

$$M = 1.000 \times 1{,}21 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M = 1.210}$$

Gabarito: Alternativa **B**

INTERVALO

TAXAS EQUIVALENTES

DESPENCA NA PROVA!

Taxas Equivalentes são as taxas de juros com **unidades de tempo diferentes** que **aplicadas a um mesmo Capital,** por um mesmo período, sob o regime de juros compostos, produziriam **o mesmo Montante** (e, por consequência, mesmo Juro).

Diferentemente do que ocorre no Regime de Capitalização Simples, em Juros Compostos, **as Taxas Equivalentes NÃO SÃO proporcionais**.

Para calcular a Taxa Equivalente, iremos tomar como base a **potenciação**.

TOME NOTA!

Iremos resolver alguns exemplos para você **entender a sistemática** da mecânica de capitalização e, posteriormente, apresentarei a fórmula para cálculo.

Perceba que a fórmula será apresentada depois dos exemplos porque eu quero que você entenda o que está sendo feito. Decorar fórmula é simples. Saber o que fazer com ela é mais complicado.

Eu, particularmente, nunca utilizei a fórmula de Taxa Equivalente, pois, **uma vez entendido o sistema de capitalização entre datas**, você **não precisará decorar nada**. Tudo estará entendido.

EXEMPLIFICANDO

- **Exemplo 1:** Qual a Taxa composta bimestral Equivalente a 5% ao mês?

Observe que para calcular a Taxa bimestral temos de capitalizar a Taxa mensal por 2 meses (1 bimestre). Ou seja, a Taxa mensal de 5% capitalizada por 2 meses (1 bimestre) será igual a que Taxa Equivalente bimestral?

$$(1 + i_{mensal})^2 = (1 + i_{bimestral})$$

$$(1+0{,}05)^2 = (1 + i_{bimestral})$$

$$1{,}05^2 = 1 + i_{bimestral}$$

Lembra-se do macete "primeiro dobra e depois eleva ao quadrado"? $1{,}05^2 = 1{,}1025$

$$1{,}1025 = 1 + i_{bimestral}$$

$$i_{bimestral} = 1{,}1025 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{bimestral} = 0{,}1025 \ \ ou \ \ 10{,}25\%}$$

Então, **5% ao mês é equivalente a 10,25% ao bimestre**.

Isso quer dizer que, se aplicarmos essa Taxa em um mesmo Capital, por um mesmo período de tempo, em regime de Juros Compostos, produziria o mesmo Montante.

Vamos testar. Imagine um Capital de R$ 100 aplicado por 4 meses. A primeira operação ocorreu a Juros Compostos de 5% ao mês e a segunda a 10,25% ao bimestre. Iremos calcular o Montante ao final de 4 meses para as 2 operações.

$$M_1 = C \times (1+i)^t$$

$$M_1 = 100 \times (1+0{,}05)^4$$

$$M_1 = 100 \times 1{,}05^4$$

$$M_1 = 100 \times 1{,}2155 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M_1 = 121{,}55}}$$

Agora vamos calcular o Montante da segunda operação.

$$M_2 = C \times (1+i)^t$$

$$M_2 = 100 \times (1+0{,}1025)^2$$

Atente-se para a **conversão** da unidade do tempo de aplicação (mês) para a unidade da taxa de juros (bimestre) pois **necessariamente** devem coincidir. Em 4 meses há 2 bimestres.

$$M_2 = 100 \times 1{,}1025^2$$

$$M_2 = 100 \times 1{,}2155 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M_2 = 121{,}55}}$$

Perceba que os Montantes foram iguais como queríamos demonstrar.

Exemplo 2: Qual a Taxa composta anual Equivalente a 16% ao semestre?

Ou seja, a Taxa semestral capitalizada por 2 semestres (1 ano) será igual a que Taxa Equivalente anual?

$$(1 + i_{semestral})^2 = (1 + i_{anual})$$

$$(1 + 0{,}16)^2 = (1 + i_{anual})$$

$$1{,}16^2 = 1 + i_{anual}$$

$$1{,}3456 = 1 + i_{anual}$$

$$i_{anual} = 1{,}3456 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{anual} = 0{,}3456 \ \ ou \ \ 34{,}56\%}$$

Logo, **34,56% ao ano é equivalente a 16% ao semestre**.

Exemplo 3: Qual a Taxa composta mensal Equivalente a 33,10% ao trimestre?

Nesse caso, estamos procurando a Taxa mensal que, capitalizada por 3 meses (1 trimestre), será equivalente a 33,10% ao trimestre.

$$(1 + i_{mensal})^3 = (1 + i_{trimestral})$$

$$(1 + i_{mensal})^3 = (1 + 0{,}331)$$

$$(1 + i_{mensal})^3 = 1{,}331$$

$$1 + i_{mensal} = \sqrt[3]{1{,}331}$$

$$1 + i_{mensal} = 1{,}1$$

$$i_{mensal} = 1{,}1 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{mensal} = 0{,}1 \ \ ou \ \ 10\%}$$

Logo, **10% ao mês é equivalente a 33,10% ao trimestre**.

Exemplo 4: Qual a Taxa composta bimestral Equivalente a 14,49% ao quadrimestre?

Nesse exemplo, iremos calcular a Taxa bimestral que, capitalizada por 2 bimestres (1 quadrimestre), será equivalente a 14,49% ao quadrimestre.

$$(1+i_{bimestral})^2 = \left(1+i_{quadrimestral}\right)$$

$$(1+i_{bimestral})^2 = (1+0{,}1449)$$

$$(1+i_{bimestral})^2 = 1{,}1449$$

$$1+i_{bimestral} = \sqrt{1{,}1449}$$

$$1+i_{bimestral} = 1{,}07$$

$$i_{bimestral} = 1{,}07-1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{bimestral} = 0{,}07 \ \ ou \ \ 7\%}$$

Sendo assim, **7% ao bimestre é equivalente a 14,49% ao quadrimestre**.

Vamos começar a complicar um pouco? Iremos <u>misturar alguns conceitos de Taxas</u> estudados nessa aula. As bancas amam esse tipo de mescla de assuntos.

- **Exemplo 5:** Qual a Taxa composta trimestral Equivalente a 6% ao semestre capitalizados mensalmente?

Observe que a banca nos fornece uma Taxa Nominal.

Taxa Nominal é a taxa de juros cuja unidade de tempo **não coincide** com a unidade de tempo do período de capitalização. Observe que a taxa fornecida no enunciado é uma taxa nominal.

$$i_{Nominal} = 6\% \ ao \ semestre \ capitalizados \ mensalmente$$

Então, **antes de calcular a Taxa Equivalente**, devemos <u>converter a Taxa Nominal em Taxa Efetiva</u>. Lembra como se faz a conversão?

Devemos passar para a unidade de tempo do período de capitalização. Então, tenha em mente: "**quem manda é o período de capitalização**".

E como passamos da unidade de tempo do período da taxa nominal para a unidade de tempo do período de capitalização?

Basta fazermos uma simples divisão/multiplicação. Em 1 semestre há 6 meses. Logo, a Taxa Efetiva será igual a:

$$i_{efetiva} = \frac{6\%}{6} \quad \rightarrow \quad i_{efetiva} = 1\% \text{ } ao \text{ } mês \text{ } capitalizados \text{ } mensalmente$$

Ou, simplesmente,

$$\boxed{\boldsymbol{i_{efetiva} = 1\% \text{ } ao \text{ } mês}}$$

Vamos, agora, calcular a Taxa trimestral equivalente à Taxa mensal de 1%. Ou seja, a Taxa mensal capitalizada por 3 meses (1 trimestre) será igual a que Taxa Equivalente trimestral?

$$(1 + i_{mensal})^3 = (1 + i_{trimestral})$$

$$(1 + 0{,}01)^3 = (1 + i_{trimestral})$$

$$1{,}01^3 = 1 + i_{trimestral}$$

$$1{,}030301 = 1 + i_{trimestral}$$

$$i_{trimestral} = 1{,}030301 - 1 \quad \rightarrow \boldsymbol{i_{trimestral} \cong 0{,}0303 \text{ } ou \text{ } 3{,}03\%}$$

Exemplo 6: Qual a Taxa composta bimestral Equivalente a 10% ao ano capitalizados semestralmente?

Dados: $\sqrt[3]{1{,}05} = 1{,}0164$

Observe que a banca nos fornece uma Taxa Nominal.

Taxa Nominal é a taxa de juros cuja unidade de tempo **não coincide** com a unidade de tempo do período de capitalização. Observe que a taxa fornecida no enunciado é uma taxa nominal.

$$i_{Nominal} = 10\% \text{ } ao \text{ } ano \text{ } capitalizados \text{ } semestralmente$$

Então, **antes de calcular a Taxa Equivalente**, devemos converter a Taxa Nominal em Taxa Efetiva. Lembra como se faz a conversão?

Devemos passar para a unidade de tempo do período de capitalização. Então, tenha em mente: "**quem manda é o período de capitalização**".

E como passamos da unidade de tempo do período da taxa nominal para a unidade de tempo do período de capitalização?

Basta fazermos uma simples divisão/multiplicação. Em 1 ano há 2 semestres. Logo, a Taxa Efetiva será igual a:

$$i_{efetiva} = \frac{10\%}{2} \quad \rightarrow \quad i_{efetiva} = 5\% \; ao \; semestre \; capitalizados \; semestralmente$$

Ou, simplesmente,

$$\boxed{\boldsymbol{i_{efetiva} = 5\% \; ao \; semestre}}$$

Vamos, agora, calcular a Taxa bimestral equivalente à Taxa semestral de 5%. Ou seja, qual Taxa bimestral que capitalizada por 3 bimestres (1 semestre) será equivalente a 5% ao semestre?

$$(1 + i_{bimestral})^3 = (1 + i_{semestral})$$

$$(1 + i_{bimestral})^3 = (1 + 0{,}05)$$

$$(1 + i_{bimestral})^3 = 1{,}05$$

$$1 + i_{bimestral} = \sqrt[3]{1{,}05}$$

$$1 + i_{bimestral} = 1{,}0164$$

$$i_{bimestral} = 1{,}0164 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{bimestral} = 0{,}0164 \;\; ou \;\; 1{,}64\%}$$

Conforme comentei, irei apresentar a **fórmula para o cálculo da Taxa Equivalente** ao final dos exemplos. Porém, não apenas a decore. Tente entender o uso da fórmula de acordo com os exemplos acima e com as questões de concursos que faremos em seguida.

$$\boxed{\boldsymbol{i_{quero} = (1 + i_{enunciado})^{(n_{quero}/n_{enunciado})} - 1}}$$

Atente-se para o fato que **a Taxa do enunciado DEVE ser a Taxa Efetiva**. Então, se a banca fornecer a Taxa Nominal, antes de aplicar a fórmula, certifique-se de fazer a conversão da Taxa Nominal para a Taxa Efetiva.

Vejamos o segundo Exemplo resolvido com essa equação:

- **Exemplo 2:** Qual a Taxa composta anual Equivalente a 16% ao semestre?

$$i_{quero} = (1 + i_{enunciado})^{(n_{quero}/n_{enunciado})} - 1$$

$$i_{quero} = (1 + 0{,}16)^{(2/1)} - 1$$

$$i_{quero} = 1{,}16^2 - 1$$

$$i_{quero} = 1{,}3456 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{quero} = 0,3456 \ \ ou \ \ 34,56\%}$$

Observe que n_{quero} é igual a 2, uma vez que, em 1 ano há 2 semestres.

Vamos às questões de concursos sobre esse tópico.

HORA DE PRATICAR!

(Inédita - 2022) Um financiamento, sob regime de juros compostos, é firmado com taxa semestral de juros de 12% capitalizados bimestralmente.

A taxa semestral efetiva nessa contratação é de aproximadamente:

a) 12,00%
b) 12,25%
c) 12,36%
d) 12,49%
e) 12,56%

Comentários:

Primeiro passo é converter a Taxa Nominal para a Taxa Efetiva.

Taxa Nominal é a taxa de juros cuja unidade de tempo **não coincide** com a unidade de tempo do período de capitalização. Observe que a taxa fornecida no enunciado é uma taxa nominal.

$$i_{Nominal} = 12\% \ ao \ ano \ capitalizada \ bimestralmente$$

Em 1 semestre há 3 bimestres. Então, a Taxa Efetiva bimestral será igual a:

$$i_{Efetiva \ Bimestral} = \frac{12\%}{3} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{i_{Efetiva \ Bimestral} = 4\% \ a.b.}}$$

Segundo passo é calcular a Taxa Efetiva semestral equivalente à Taxa Efetiva trimestral de 4%.

Ou seja, uma taxa efetiva bimestral capitalizada por 3 bimestres (1 semestre) resultará em que taxa efetiva semestral?

Para acharmos a taxa equivalente tomamos como base a **potenciação**.

$$(1+i_{bimestral})^3 = (1+i_{semestral})$$

$$(1+0{,}04)^3 = (1+i_{semestral})$$

$$1{,}04^3 = 1+i_{semestral}$$

$$1{,}1249 = 1+i_{semestral}$$

$$i_{semestral} = 1{,}1249 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{semestral} = 0{,}1249 \ \ ou \ \ 12{,}49\%}$$

Gabarito: Alternativa **C**

(Pref. Porto Alegre – 2019 - Adaptada) Em um sistema composto de capitalização, a taxa de 5% ao mês é equivalente a uma taxa anual de:

Dado: $\mathbf{1{,}05^6 = 1{,}3401}$

a) 60%
b) 65%
c) 70,29%
d) 75,49%
e) 79,59%

Comentários:

O enunciado nos questiona a Taxa Equivalente anual. Ou seja, a Taxa mensal capitalizada por 12 meses (1 ano) será igual a que Taxa Equivalente anual?

$$(1+i_{mensal})^{12} = (1+i_{anual})$$

$$(1+0{,}05)^{12} = (1+i_{anual})$$

$$1{,}05^{12} = 1+i_{anual}$$

Observe que a banca não fornece a potência de 1,05 elevado a 12 e sim elevado a 6. Neste ponto, iremos manipular algebricamente a potência e continuar com os cálculos.

$$1{,}05^{12} = 1+i_{anual}$$

$$1{,}05^6 \times 1{,}05^6 = 1+i_{anual}$$

$$1{,}3401 \times 1{,}3401 = 1+i_{anual}$$

$$1{,}7959 = 1 + i_{anual}$$

$$i_{anual} = 1{,}7959 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{anual} = 0,7959 \ \ ou \ \ 79,59\%}$$

Gabarito: Alternativa **E**

(CGE RN - 2019) Uma financeira deseja aplicar uma taxa mensal, no regime de capitalização composta, que é equivalente a taxa bimestral de 5,0625%. Desse modo a taxa aplicada pela financeira deve ser de:

Considere $\left(1,050625^{0,5} = 1,025\right)$; $\left(0,050625^{0,5} = 0,225\right)$ e $\left(1,50625^{0,5} = 1,2273\right)$

a) 2,5%
b) 2,53125%
c) 2,25%
d) 2,27%

Comentários:

O enunciado nos questiona a Taxa mensal equivalente à Taxa bimestral de 5,0625%. Ou seja, qual Taxa mensal que capitalizada por 2 meses (1 bimestre) será igual a 5,0625%?

$$(1 + i_{mensal})^2 = (1 + i_{bimestral})$$

$$(1 + i_{mensal})^2 = (1 + 0{,}050625)$$

$$(1 + i_{mensal})^2 = 1{,}050625$$

$$1 + i_{mensal} = \sqrt{1{,}050625}$$

Lembrando que calcular a raiz quadrada de um número é a mesma operação que elevar este número a 1/2.

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$

$$para\ n = 2 \ \rightarrow \ \sqrt[2]{x} = x^{1/2}$$

Continuando com os cálculos.

$$1 + i_{mensal} = (1{,}050625)^{1/2}$$

$$1 + i_{mensal} = (1{,}050625)^{0,5}$$

$$1 + i_{mensal} = 1{,}025$$

$$i_{mensal} = 1{,}025 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{mensal} = 0,025 \ \ ou \ \ 2,5\%}$$

Gabarito: Alternativa **A**

(CGE RN - 2019) A taxa efetiva bimestral que é equivalente a uma taxa nominal anual de 36% capitalizados mensalmente é:

Considere $(\mathbf{1,03^2 = 1,0609})$; $\left(\mathbf{1,36^{1/6} = 1,0526}\right)$ $\boldsymbol{e}$ $(\mathbf{0,3^2 = 0,09})$

a) 6%
b) 6,09%
c) 9%
d) 5,26%

Comentários:

Observe que a banca nos fornece uma Taxa Nominal.

Taxa Nominal é a taxa de juros cuja unidade de tempo **não coincide** com a unidade de tempo do período de capitalização. Observe que a taxa fornecida no enunciado é uma taxa nominal.

$$i_{Nominal} = 36\% \ ao \ ano \ capitalizados \ mensalmente$$

Então, antes de calcular a Taxa Equivalente, devemos converter a Taxa Nominal em Taxa Efetiva. Em 1 ano há 12 meses. Logo, a Taxa Efetiva será igual a:

$$i_{efetiva} = \frac{36\%}{12} \quad \rightarrow \quad i_{efetiva} = 3\% \ ao \ mês \ capitalizados \ mensalmente$$

Ou, simplesmente,

$$\boxed{\boldsymbol{i_{efetiva} = 3\% \ ao \ mês}}$$

Vamos, agora, calcular a Taxa bimestral equivalente à Taxa mensal de 3%. Ou seja, a Taxa mensal capitalizada por 2 meses (1 bimestre) será igual a que Taxa Equivalente bimestral?

$$(1 + i_{mensal})^2 = (1 + i_{bimestral})$$

$$(1 + 0{,}03)^2 = (1 + i_{bimestral})$$

$$1{,}03^2 = 1 + i_{bimestral}$$

$$1{,}0609 = 1 + i_{bimestral}$$

$$i_{bimestral} = 1{,}0609 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{bimestral} = 0,0609 \ \ ou \ \ 6,09\%}$$

Gabarito: Alternativa **B**

(Pref. Porto Alegre - 2019) A taxa de 15% ao ano, capitalizada ao quadrimestre, tem como taxa efetiva anual:

a) 60%
b) 45%
c) 25,24%
d) 15,76%
e) 12,68%

Comentários:

Perceba que a banca nos fornece uma Taxa Nominal, isto é, uma taxa cuja unidade de tempo **não coincide** com a unidade de tempo do período de capitalização.

$$i_{Nominal} = 15\% \text{ } ao \text{ } ano \text{ } capitalizados \text{ } quadrimestralmente$$

Então, antes de calcular a Taxa Equivalente questionada pela banca, vamos converter a Taxa Nominal em Taxa Efetiva. Em 1 ano há 3 quadrimestres.

$$i_{efetiva} = \frac{15\%}{3} \quad \rightarrow \quad i_{efetiva} = 5\% \text{ } ao \text{ } quadrimestre \text{ } capitalizados \text{ } quadrimestralmente$$

Ou, simplesmente,

$$\boxed{i_{efetiva} = 5\% \text{ } ao \text{ } quadrimestre}$$

Vamos, agora, calcular a Taxa anual equivalente a Taxa quadrimestral de 5%. Ou seja, a Taxa Quadrimestral de 5% capitalizada por 3 quadrimestres (1 ano), será equivalente a qual Taxa anual?

$$\left(1 + i_{quadrimestral}\right)^3 = (1 + i_{anual})$$

$$(1 + 0{,}05)^3 = (1 + i_{anual})$$

$$1{,}05^3 = 1 + i_{anual}$$

$$1{,}1576 = 1 + i_{anual}$$

$$i_{anual} = 1{,}1576 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{anual} = 0{,}1576 \text{ } ou \text{ } 15{,}76\%}$$

Gabarito: Alternativa **D**

CONVENÇÃO EXPONENCIAL X CONVENÇÃO LINEAR

Até então, nos exercícios, estávamos calculando o Montante e os Juros para períodos inteiros de tempo. Por exemplo, a Taxa era mensal e o período (também) era em meses.

Mas se, nesse mesmo exemplo, a Taxa fosse igual a 10% ao mês e o tempo de aplicação fosse igual a, digamos, quatro meses e quinze dias. Como proceder?

Perceba que o período é composto por **uma parte inteira** (quatro meses) **e outra fracionária** (15 dias). Nesse caso, para calcular o Montante, 2 convenções são utilizadas: a Convenção Exponencial e a Convenção Linear.

Convenção Exponencial

Nessa convenção, é utilizado o **regime de Capitalização Composta para TODO o período**, isto é, tanto para a parte inteira quanto para a parte fracionária.

A fórmula a ser utilizada é a mesma que aprendemos no início da aula.

$$\boxed{\boldsymbol{M = C \times (1 + i)^t}}$$

Em nosso exemplo acima, que a Taxa i é de 10% ao mês e o tempo de aplicação t é de 4 meses e 15 dias, o Montante de uma aplicação de Capital C igual a R$ 100,00 seria igual a:

Dados: $1{,}1^{4{,}5} = 1{,}5356$

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 100 \times (1 + 0{,}1)^{4{,}5}$$

$$M = 100 \times 1{,}1^{4{,}5}$$

$$M = 100 \times 1{,}5356 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M = 153{,}56}$$

Atente-se para a **conversão** da unidade do tempo de aplicação (mês e dia) para a unidade da taxa de juros (mensal) pois **necessariamente** devem coincidir. 4 meses e 15 dias é igual a 4 meses e meio, isto é, 4,5 meses.

Fique tranquilo que, em questões que exigem convenção exponencial, a banca fornece os dados que serão necessários para o cálculo da potência.

Convenção Linear

Já na Convenção Linear, iremos utilizar o **regime de Capitalização Composta para a parte inteira** do tempo de aplicação e o **regime de Capitalização Simples para a parte fracionária**.

Então, no mesmo exemplo anterior, calcularíamos o Montante para um período de 4 meses (parte inteira) utilizando a fórmula de Juros Compostos e, posteriormente, com o resultado calculado, aplicaríamos a fórmula dos Juros Simples para a parte fracionária (meio mês).

Vejamos como resolver.

Dados: $1{,}1^4 = 1{,}4641$

1. Calcular o Montante em **regime de Juros Compostos para a parte inteira** do período de aplicação (4 meses):

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 100 \times (1 + 0{,}1)^4$$

$$M = 100 \times 1{,}1^4$$

$$M = 100 \times 1{,}4641 \quad \rightarrow \quad M = 146{,}41$$

2. De posse do Montante calculado acima, utilizar a **fórmula dos Juros Simples para a parte fracionária** (15 dias):

$$M = C \times (1 + i \times t)$$

$$M = 146{,}41 \times (1 + 0{,}1 \times 0{,}5)$$

Observe que convertemos a unidade do tempo de aplicação (15 dias) para a unidade da taxa de juros (mensal) pois **necessariamente** devem coincidir. 15 dias é igual a meio (0,5) mês.

$$M = 146{,}41 \times (1 + 0{,}05)$$

$$M = 146{,}41 \times 1{,}05 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M = 157{,}73}$$

Existe uma fórmula para o cálculo direto do Montante pela Convenção Linear. Mas, como expliquei na parte de Taxas Equivalentes, **uma vez entendido o que fazer**, **não precisa decorar a fórmula**.

FIQUE ATENTO!

Fórmula do Montante pela **Convenção Linear:**

$$\boxed{\boldsymbol{M = C \times (1+i)^{t_1} \times (1 + i \times t_2)}}$$

Onde,

$t_1 = parte\ inteira\ do\ período\ de\ aplicação$

$t_2 = parte\ fracionária\ do\ período\ de\ aplicação$

Perceba que essa fórmula, nada mais é que a aglutinação dos dois passos que fizemos acima.

Primeiro, aplicamos **Juros Compostos para a parte inteira** do período de aplicação e, posteriormente, **Juros Simples para a parte fracionária**.

$$M = C \times \underbrace{(1+i)^{t_1}}_{\substack{parte\\inteira}} \times \underbrace{(1 + i \times t_2)}_{\substack{parte\\fracionária}}$$

Vamos esquematizar essa distinção entre as convenções:

ESQUEMATIZANDO

$$\text{Convenção Exponencial} \quad x \quad \text{Convenção Linear}$$

Convenção Exponencial

$\downarrow$

Juros Compostos para TODO o período
(tanto parte inteira quanto parte fracionária)

$\downarrow$

$$M = C \times (1+i)^t$$

Convenção Linear

$\downarrow$

Juros Compostos $\rightarrow$ Parte inteira

Juros Simples $\rightarrow$ Parte fracionária

$\downarrow$

$$M = C \times \underbrace{(1+i)^{t_1}}_{\substack{parte\\inteira}} \times \underbrace{(1 + i \times t_2)}_{\substack{parte\\fracionária}}$$

Vejamos como esse tópico é cobrado em concursos.

HORA DE PRATICAR!

(SMF Campinas - 2019) A empresa A contrata a empresa B para prestação de um serviço cujo valor à vista é V. Pelo contrato, A vai pagar B no prazo de 2 anos e meio, em uma única parcela que incluirá o valor à vista mais juros contratuais de 10% ao ano. Se o contrato firmado entre as partes para a quitação da dívida prevê taxa de juros compostos com convenção linear, então o valor mais próximo do total de juros que B deve pagar a A ao quitar a dívida no prazo é de, aproximadamente:

a) 0,25V
b) 0,20V
c) 0,27V
d) 0,30V
e) 2,50V

Comentários:

Observe que a Taxa é anual e o prazo de pagamento é composto por uma parte inteira (2 anos) e outra fracionária (meio ano). O enunciado nos informa que é adotada a Convenção Linear.

Iremos calcular, então, o Montante para a parte inteira do período (2 anos) utilizando a fórmula dos Juros Compostos.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = V \times (1 + 0{,}1)^2$$

$$M = V \times 1{,}1^2 \quad \rightarrow \quad M = 1{,}21V$$

E, em seguida, calcular o Montante final utilizando a fórmula dos Juros Simples para a parte fracionária (meio ano).

$$M = C \times (1 + i \times t)$$

$$M = 1{,}21V \times (1 + 0{,}1 \times 0{,}5)$$

$$M = 1{,}21V \times (1 + 0{,}05)$$

$$M = 1{,}21V \times 1{,}05 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M \cong 1{,}27V}}$$

Então o valor mais próximo do total de juros que B deve pagar a A ao quitar a dívida no prazo é de, aproximadamente:

$$J = M - C$$

$$J = 1{,}27V - V \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{J = 0,27V}$$

Gabarito: Alternativa **C**

(SEFAZ RJ – 2014) Sabe-se que um capital é aplicado, durante 2 meses e 12 dias, à taxa de juros compostos de 2% ao mês. Utilizando a convenção linear, obteve-se que, no final do prazo de aplicação, o valor dos juros simples correspondente ao período de 12 dias foi igual a R$ 104,04. Este mesmo capital, aplicado durante 2 bimestres, a uma taxa de juros compostos de 4% ao bimestre, apresentará no final do período um total de juros igual a

a) R$ 1.020,00
b) R$ 959,60
c) R$ 938,40
d) R$ 897,60
e) R$ 877,20

Comentários:

Questão bastante interessante que caiu na prova de Auditor Fiscal da Secretaria da Fazenda do Estado do Rio de Janeiro.

Um capital é aplicado, durante 2 meses e 12 dias, à taxa de juros compostos de 2% ao mês pela convenção linear. O valor dos juros simples correspondente ao período de 12 dias foi igual a R$ 104,04.

Estudamos que, pela convenção linear, a parte fracionária é calculada pelas fórmulas do Regime de Juros Simples. Então, o valor do Capital para o cálculo da parte fracionária será:

$$J = C \times i \times t$$

$$104{,}04 = C \times 0{,}02 \times \frac{12}{30}$$

Atente-se para a conversão da unidade do tempo fracionário de aplicação (dia) para a unidade da taxa de juros (mensal) pois **necessariamente** devem coincidir. 12 dias é igual a 12/30 do mês.

$$104{,}04 = C \times 0{,}02 \times \frac{12}{30}$$

$$C = \frac{104{,}04 \times 30}{12 \times 0{,}02} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{C = 13.005}}$$

Perceba que esse Capital que calculamos equivale ao Montante final da aplicação da parte inteira.

Vamos esmiuçar essa parte para você entender.

Na convenção linear, aplicamos um Capital Inicial e achamos o Montante para o período inteiro do tempo de aplicação. Depois, de posse desse Montante (que agora é o Capital da fórmula dos Juros Simples) calculamos a parte final relativa à parte fracionária.

Observe que este exercício é o **"caminho inverso"** do que estamos acostumados a fazer. O Capital calculado de R$ 13.005 é o Montante resultante da parte inteira que foi capitalizado em Juros Simples na parte fracionária e rende R$ 104,04 de Juros.

Iremos agora calcular o Capital Inicial da operação e vamos utilizar a fórmula dos Juros Compostos para a parte inteira do tempo de aplicação.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$13.005 = C \times (1 + 0{,}02)^2$$

$$13.005 = C \times 1{,}02^2$$

$$13.005 = C \times 1{,}0404$$

$$C = \frac{13.005}{1{,}0404} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{C = 12.500}}$$

Este mesmo capital, aplicado durante 2 bimestres, a uma taxa de juros compostos de 4% ao bimestre, apresentará ao final do período um Montante de:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 12.500 \times (1 + 0{,}04)^2$$

$$M = 12.500 \times 1{,}04^2$$

$$M = 12.500 \times 1{,}0816 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{M = 13.520}}$$

De posse do Montante e do Capital, calculamos os Juros questionados pela banca.

$$J = M - C$$

$$J = 13.520 - 12.500 \rightarrow \boldsymbol{J = 1.020}$$

Gabarito: Alternativa **A**

(SEFAZ PB – 2006) Um capital no valor de R$ 20.000,00 foi investido a uma taxa de juros compostos de 10% ao ano, durante 2 anos e 3 meses. O montante no final do período, adotando a convenção linear, foi igual a

a) R$ 22.755,00
b) R$ 23.780,00
c) R$ 24.805,00
d) R$ 24.932,05
e) R$ 25.500,00

Comentários:

Vamos utilizar diretamente a fórmula do Montante na Convenção Linear.

$$M = C \times (1+i)^{t_1} \times (1 + i \times t_2)$$

Onde,

$t_1 = parte\ inteira\ do\ período\ de\ aplicação = 2\ anos$

$t_2 = parte\ fracionária\ do\ período\ de\ aplicação = 3\ meses = 0{,}25\ ano$

Atente-se para a **conversão** da unidade do tempo fracionário de aplicação (mês) para a unidade da taxa de juros (anual) pois **necessariamente** devem coincidir.

$$t_2 = 3\ meses \ \rightarrow \ t_2 = \frac{3}{12}\ ano \ \rightarrow \ t_2 = 0{,}25\ ano$$

Logo, o Montante será igual a:

$$M = C \times (1+i)^{t_1} \times (1 + i \times t_2)$$

$$M = 20.000 \times (1+0{,}1)^2 \times (1 + 0{,}1 \times 0{,}25)$$

$$M = 20.000 \times 1{,}1^2 \times (1 + 0{,}025)$$

$$M = 20.000 \times 1{,}21 \times 1{,}025 \ \rightarrow \ \boldsymbol{M = 24.805}$$

Gabarito: Alternativa **C**

TABELA FINANCEIRA - FATOR DE ACUMULAÇÃO DE CAPITAIS

Em Juros Compostos, utilizaremos constantemente a potência relacionada ao **Fator de Acumulação de Capitais** $(1+i)^t$, que é a série que nos informa a acumulação de capitais tomando como base uma taxa em determinado período de tempo.

$$\boldsymbol{(1+i)^t} \quad \rightarrow \quad \mathit{fator\ de\ acumulação\ de\ capitais}$$

Pense como seria trabalhoso em uma prova, no meio de uma questão de Juros Compostos, resolver a seguinte passagem:

$$(1+0{,}07)^9$$

Seria bastante complicado, certo? Algumas bancas fornecem esse valor nos dados do enunciado. Já outras, fornecem uma tabela financeira para que o candidato busque o valor.

Vamos aprender agora como usar esta tabela em Juros Compostos.

Uma **tabela financeira de fator de acumulação de capitais** tem o seguinte aspecto:

Fator de Acumulação de Capitais $(1+i)^t$

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	1,0100	1,0200	1,0300	1,0400	1,0500	1,0600	1,0700	1,0800	1,0900	1,1000
2	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664	1,1881	1,2100
3	1,0303	1,0612	1,0927	1,1249	1,1576	1,1910	1,2250	1,2597	1,2950	1,3310
4	1,0406	1,0824	1,1255	1,1699	1,2155	1,2625	1,3108	1,3605	1,4116	1,4641
5	1,0510	1,1041	1,1593	1,2167	1,2763	1,3382	1,4026	1,4693	1,5386	1,6105
6	1,0615	1,1262	1,1941	1,2653	1,3401	1,4185	1,5007	1,5869	1,6771	1,7716
7	1,0721	1,1487	1,2299	1,3159	1,4071	1,5036	1,6058	1,7138	1,8280	1,9487
8	1,0829	1,1717	1,2668	1,3686	1,4775	1,5938	1,7182	1,8509	1,9926	2,1436
9	1,0937	1,1951	1,3048	1,4233	1,5513	1,6895	1,8385	1,9990	2,1719	2,3579
10	1,1046	1,2190	1,3439	1,4802	1,6289	1,7908	1,9672	2,1589	2,3674	2,5937
11	1,1157	1,2434	1,3842	1,5395	1,7103	1,8983	2,1049	2,3316	2,5804	2,8531
12	1,1268	1,2682	1,4258	1,6010	1,7959	2,0122	2,2522	2,5182	2,8127	3,1384
13	1,1381	1,2936	1,4685	1,6651	1,8856	2,1329	2,4098	2,7196	3,0658	3,4523
14	1,1495	1,3195	1,5126	1,7317	1,9799	2,2609	2,5785	2,9372	3,3417	3,7975
15	1,1610	1,3459	1,5580	1,8009	2,0789	2,3966	2,7590	3,1722	3,6425	4,1772

- Essa é uma tabela para o fator $(1+\mathrm{i})^{\mathrm{t}}$ na qual "i" está na coluna e "t" está na linha.

Perceba que precisamos entrar com a Taxa na coluna e com o tempo de aplicação na linha e, assim, a tabela nos retornará o valor da potência.

Então, vamos voltar ao nosso exemplo e calcular a potência $(1+0{,}07)^9$.

Neste exemplo, $i = 0{,}07 \rightarrow 7\%$ e $t = 9$.

Buscaremos, então, o valor de 7% na coluna e de 9 unidades de tempo na linha.

$i = 7\%$

$t = 9$

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	1,0100	1,0200	1,0300	1,0400	1,0500	1,0600	1,0700	1,0800	1,0900	1,1000
2	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664	1,1881	1,2100
3	1,0303	1,0612	1,0927	1,1249	1,1576	1,1910	1,2250	1,2597	1,2950	1,3310
4	1,0406	1,0824	1,1255	1,1699	1,2155	1,2625	1,3108	1,3605	1,4116	1,4641
5	1,0510	1,1041	1,1593	1,2167	1,2763	1,3382	1,4026	1,4693	1,5386	1,6105
6	1,0615	1,1262	1,1941	1,2653	1,3401	1,4185	1,5007	1,5869	1,6771	1,7716
7	1,0721	1,1487	1,2299	1,3159	1,4071	1,5036	1,6058	1,7138	1,8280	1,9487
8	1,0829	1,1717	1,2668	1,3686	1,4775	1,5938	1,7182	1,8509	1,9926	2,1436
9	1,0937	1,1951	1,3048	1,4233	1,5513	1,6895	$\boxed{1{,}8385}$	1,9990	2,1719	2,3579
10	1,1046	1,2190	1,3439	1,4802	1,6289	1,7908	1,9672	2,1589	2,3674	2,5937
11	1,1157	1,2434	1,3842	1,5395	1,7103	1,8983	2,1049	2,3316	2,5804	2,8531
12	1,1268	1,2682	1,4258	1,6010	1,7959	2,0122	2,2522	2,5182	2,8127	3,1384
13	1,1381	1,2936	1,4685	1,6651	1,8856	2,1329	2,4098	2,7196	3,0658	3,4523
14	1,1495	1,3195	1,5126	1,7317	1,9799	2,2609	2,5785	2,9372	3,3417	3,7975
15	1,1610	1,3459	1,5580	1,8009	2,0789	2,3966	2,7590	3,1722	3,6425	4,1772

Ou seja,

$$(1+0{,}07)^9 = 1{,}8385$$

Vejamos algumas questões de concursos em que a banca fornece a tabela financeira para o candidato encontrar o resultado da potência.

(Pref. Porto Alegre RS – 2019) Qual o valor do montante composto recebido na aplicação de R$ 50.000,00, durante oito meses, o qual rende com uma taxa de 6% ao trimestre, capitalizada mensalmente?

Tabela para o fator $(1+i)^n$ na qual "i" está na coluna e "n" está na linha.

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	1,0100	1,0200	1,0300	1,0400	1,0500	1,0600	1,0700	1,0800	1,0900	1,1000
2	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664	1,1881	1,2100
3	1,0303	1,0612	1,0927	1,1249	1,1576	1,1910	1,2250	1,2597	1,2950	1,3310
4	1,0406	1,0824	1,1255	1,1699	1,2155	1,2625	1,3108	1,3605	1,4116	1,4641
5	1,0510	1,1041	1,1593	1,2167	1,2763	1,3382	1,4026	1,4693	1,5386	1,6105
6	1,0615	1,1262	1,1941	1,2653	1,3401	1,4185	1,5007	1,5869	1,6771	1,7716
7	1,0721	1,1487	1,2299	1,3159	1,4071	1,5036	1,6058	1,7138	1,8280	1,9487
8	1,0829	1,1717	1,2668	1,3686	1,4775	1,5938	1,7182	1,8509	1,9926	2,1436
9	1,0937	1,1951	1,3048	1,4233	1,5513	1,6895	1,8385	1,9990	2,1719	2,3579
10	1,1046	1,2190	1,3439	1,4802	1,6289	1,7908	1,9672	2,1589	2,3674	2,5937
11	1,1157	1,2434	1,3842	1,5395	1,7103	1,8983	2,1049	2,3316	2,5804	2,8531
12	1,1268	1,2682	1,4258	1,6010	1,7959	2,0122	2,2522	2,5182	2,8127	3,1384
13	1,1381	1,2936	1,4685	1,6651	1,8856	2,1329	2,4098	2,7196	3,0658	3,4523
14	1,1495	1,3195	1,5126	1,7317	1,9799	2,2609	2,5785	2,9372	3,3417	3,7975
15	1,1610	1,3459	1,5580	1,8009	2,0789	2,3966	2,7590	3,1722	3,6425	4,1772

a) R$ 56.585,00
b) R$ 57.585,00
c) R$ 58.585,00
d) R$ 59.585,00
e) R$ 60.585,00

Comentários:

Primeiro passo é converter a Taxa Nominal para a Taxa Efetiva.

Taxa Nominal, como vimos, é a taxa de juros cuja unidade de tempo **não coincide** com a unidade de tempo do período de capitalização. Observe que a taxa fornecida no enunciado é uma taxa nominal.

$$i_{Nominal} = 6\% \ ao \ trimestre \ capitalizada \ mensalmente$$

Nunca resolva um exercício usando a taxa nominal. Sempre devemos passar para a unidade de tempo do período de capitalização. Então tenha em mente: "**quem manda é o período de capitalização**".

E como passamos da unidade de tempo do período da taxa nominal para a unidade de tempo do período de capitalização?

Basta fazermos uma simples divisão/multiplicação. Em 1 trimestre há 3 meses. Então, a Taxa Efetiva mensal será igual a:

$$i_{Efetiva\ mensal} = \frac{6\%}{3} \quad \rightarrow \quad i_{Efetiva\ mensal} = 2\% \ ao \ mês \ capitalizados \ mensalmente$$

Ou, simplesmente,

$$\boxed{i_{Efetiva} = 2\% \text{ } \boldsymbol{ao\ mês}}$$

- ✓ Essa será a taxa que iremos usar no problema.

Em regime de Juros Compostos, o Montante é calculado pela seguinte equação:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 50.000$

$i = Taxa\ de\ Juros = 2\%\ ao\ mês = 0{,}02$

$t = tempo = 8\ meses$

Vamos substituir os valores e calcular o Montante.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 50.000 \times (1 + 0{,}02)^8$$

Para calcular o valor da potência usaremos a Tabela Financeira com fator $(1 + i)^n$ pra $i = 2\%$ e $n = 8$.

Observe o valor na tabela abaixo.

$i = 2\%$
$\downarrow$

$t = 8 \rightarrow$

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	1,0100	[illegible]	1,0300	1,0400	1,0500	1,0600	1,0700	1,0800	1,0900	1,1000
2	1,0201	[illegible]	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664	1,1881	1,2100
3	1,0303	[illegible]	1,0927	1,1249	1,1576	1,1910	1,2250	1,2597	1,2950	1,3310
4	1,0406	[illegible]	1,1255	1,1699	1,2155	1,2625	1,3108	1,3605	1,4116	1,4641
5	1,0510	[illegible]	1,1593	1,2167	1,2763	1,3382	1,4026	1,4693	1,5386	1,6105
6	1,0615	[illegible]	1,1941	1,2653	1,3401	1,4185	1,5007	1,5869	1,6771	1,7716
7	1,0721	[illegible]	1,2299	1,3159	1,4071	1,5036	1,6058	1,7138	1,8280	1,9487
8	[illegible]	1,1717	1,2668	1,3686	1,4775	1,5938	1,7182	1,8509	1,9926	2,1436
9	1,0937	1,1951	1,3048	1,4233	1,5513	1,6895	1,8385	1,9990	2,1719	2,3579
10	1,1046	1,2190	1,3439	1,4802	1,6289	1,7908	1,9672	2,1589	2,3674	2,5937
11	1,1157	1,2434	1,3842	1,5395	1,7103	1,8983	2,1049	2,3316	2,5804	2,8531
12	1,1268	1,2682	1,4258	1,6010	1,7959	2,0122	2,2522	2,5182	2,8127	3,1384
13	1,1381	1,2936	1,4685	1,6651	1,8856	2,1329	2,4098	2,7196	3,0658	3,4523
14	1,1495	1,3195	1,5126	1,7317	1,9799	2,2609	2,5785	2,9372	3,3417	3,7975
15	1,1610	1,3459	1,5580	1,8009	2,0789	2,3966	2,7590	3,1722	3,6425	4,1772

Ou seja,

$$(1+0{,}02)^8 = 1{,}1717$$

Iremos substituir o valor da potência e calcular o Montante final.

$$M = 50.000 \times (1+0{,}02)^8$$

$$M = 50.000 \times 1{,}1717 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M = 58.585}$$

Gabarito: Alternativa **C**

(BRDE – 2015) A Industrial Rio da Prata Ltda. contratou um financiamento bancário no valor de R$ 120.000,00 para ser liquidado em uma única vez, após 12 meses. A operação foi contratada a uma taxa de juros compostos, com capitalização mensal de 3% ao mês. Calcule o valor de liquidação do empréstimo, sabendo que quatro meses antes do vencimento a empresa fez um pagamento extra de R$ 40.000,00.

TABELA FINANCEIRA - FATOR DE ACUMULAÇÃO DE CAPITAL EM JUROS COMPOSTOS							
FATOR	(1+i)^n						
n/i	0,5%	1,5%	2,0%	2,5%	3,0%	3,5%	4,0%
1	1,005000	1,015000	1,020000	1,025000	1,030000	1,035000	1,040000
2	1,010025	1,030225	1,040400	1,050625	1,060900	1,071225	1,081600
3	1,015075	1,045678	1,061208	1,076891	1,092727	1,108718	1,124864
4	1,020151	1,061364	1,082432	1,103813	1,125509	1,147523	1,169859
5	1,025251	1,077284	1,104081	1,131408	1,159274	1,187686	1,216653
6	1,030378	1,093443	1,126162	1,159693	1,194052	1,229255	1,265319
7	1,035529	1,109845	1,148686	1,188686	1,229874	1,272279	1,315932
8	1,040707	1,126493	1,171659	1,218403	1,266770	1,316809	1,368569
9	1,045911	1,143390	1,195093	1,248863	1,304773	1,362897	1,423312
10	1,051140	1,160541	1,218994	1,280085	1,343916	1,410599	1,480244
11	1,056396	1,177949	1,243374	1,312087	1,384234	1,459970	1,539454
12	1,061678	1,195618	1,268242	1,344889	1,425761	1,511069	1,601032

a) R$ 171.910,30
b) R$ 171.091,30
c) R$ 126.070,91
d) R$ 126.060,91
e) R$ 126.007,91

Comentários:

4 meses antes do vencimento, a empresa fez um pagamento de R$ 40.000,00. Ou seja, primeiro precisamos calcular o valor do Montante em 8 meses de financiamento. Se a empresa pagou este valor faltando 4 meses e o tempo total do financiamento é de 12 meses, o primeiro montante a ser calculado é o Montante decorrido 8 meses do início.

Vamos calcular, então, o Montante resultante de um Capital C de R$ 120.000 a uma taxa de juros i de 3% ao mês por um período t de 8 meses.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 120.000 \times (1 + 0{,}03)^8$$

Para calcular o valor da potência usaremos a Tabela Financeira com fator $(1 + i)^n$ pra $i = 3\%$ e $n = 8$.

Observe o valor na tabela abaixo.

TABELA FINANCEIRA - FATOR DE ACUMULAÇÃO DE CAPITAL EM JUROS COMPOSTOS							
FATOR	(1+i)^n						
n/i	0,5%	1,5%	2,0%	2,5%	3,0%	3,5%	4,0%
1	1,005000	1,015000	1,020000	1,025000	1,030000	1,035000	1,040000
2	1,010025	1,030225	1,040400	1,050625	1,060900	1,071225	1,081600
3	1,015075	1,045678	1,061208	1,076891	1,092727	1,108718	1,124864
4	1,020151	1,061364	1,082432	1,103813	1,125509	1,147523	1,169859
5	1,025251	1,077284	1,104081	1,131408	1,159274	1,187686	1,216653
6	1,030378	1,093443	1,126162	1,159693	1,194052	1,229255	1,265319
7	1,035529	1,109845	1,148686	1,188686	1,229874	1,272279	1,315932
8	1,040707	1,126493	1,171659	1,218403	$\boxed{1,266770}$	1,316809	1,368569
9	1,045911	1,143390	1,195093	1,248863	1,304773	1,362897	1,423312
10	1,051140	1,160541	1,218994	1,280085	1,343916	1,410599	1,480244
11	1,056396	1,177949	1,243374	1,312087	1,384234	1,459970	1,539454
12	1,061678	1,195618	1,268242	1,344889	1,425761	1,511069	1,601032

Ou seja,

$$(1 + 0{,}03)^8 = 1{,}26677$$

Iremos substituir o valor da potência e calcular o Montante em 8 meses.

$$M = 120.000 \times (1 + 0{,}03)^8$$

$$M = 120.000 \times 1{,}26677 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{M = 152.012,40}}$$

Ao final desses 8 meses, houve um pagamento de R$ 40.000, restando a pagar um valor igual a:

$$pagar = 152.012{,}40 - 40.000{,}00 \quad \rightarrow \quad pagar = 112.012{,}40$$

Em cima desse Capital que resta a pagar, **incidirão Juros Compostos por mais 4 meses**.

Iremos utilizar novamente a fórmula do Montante em regime de Juros Compostos e calcular o Montante a pagar para liquidar o empréstimo que será igual a:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 112.012{,}40 \times (1 + 0{,}03)^4$$

Para calcular o valor da potência iremos utilizar novamente a Tabela Financeira com fator $(1+i)^n$ pra $i = 3\%$ e $n = 4$.

TABELA FINANCEIRA - FATOR DE ACUMULAÇÃO DE CAPITAL EM JUROS COMPOSTOS							
FATOR		(1+i)^n					
n/i	0,5%	1,5%	2,0%	2,5%	3,0%	3,5%	4,0%
1	1,005000	1,015000	1,020000	1,025000	1,030000	1,035000	1,040000
2	1,010025	1,030225	1,040400	1,050625	1,060900	1,071225	1,081600
3	1,015075	1,045678	1,061208	1,076891	1,092727	1,108718	1,124864
4	1,020151	1,061364	1,082432	1,103813	1,125509	1,147523	1,169859
5	1,025251	1,077284	1,104081	1,131408	1,159274	1,187686	1,216653
6	1,030378	1,093443	1,126162	1,159693	1,194052	1,229255	1,265319
7	1,035529	1,109845	1,148686	1,188686	1,229874	1,272279	1,315932
8	1,040707	1,126493	1,171659	1,218403	1,266770	1,316809	1,368569
9	1,045911	1,143390	1,195093	1,248863	1,304773	1,362897	1,423312
10	1,051140	1,160541	1,218994	1,280085	1,343916	1,410599	1,480244
11	1,056396	1,177949	1,243374	1,312087	1,384234	1,459970	1,539454
12	1,061678	1,195618	1,268242	1,344889	1,425761	1,511069	1,601032

Ou seja,

$$(1+0{,}03)^4 \approx 1{,}1255$$

E, por fim, substituímos na equação acima e calculamos nosso gabarito:

$$M = 112.012{,}40 \times (1+0{,}03)^4$$

$$M = 112.012{,}40 \times 1{,}1255 \quad \rightarrow \boldsymbol{M \approx 126.070{,}00}$$

Observe que **não poderíamos arredondar muito** pois as alternativas estão muito próximas umas das outras em termos de valor.

Gabarito: Alternativa **C**

(Pref. Porto Alegre – 2019) Em um sistema composto de capitalização, a taxa de 5% ao mês é equivalente a uma taxa anual de:

Tabela para o fator $\frac{1}{(1+i)^n}$ na qual "i" está na coluna e "n" está na linha.

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	0,9901	0,9804	0,9709	0,9615	0,9524	0,9434	0,9346	0,9259	0,9174	0,9091
2	0,9803	0,9612	0,9426	0,9246	0,9070	0,8900	0,8734	0,8573	0,8417	0,8264
3	0,9706	0,9423	0,9151	0,8890	0,8638	0,8396	0,8163	0,7938	0,7722	0,7513
4	0,9610	0,9238	0,8885	0,8548	0,8227	0,7921	0,7629	0,7350	0,7084	0,6830
5	0,9515	0,9057	0,8626	0,8219	0,7835	0,7473	0,7130	0,6806	0,6499	0,6209
6	0,9420	0,8880	0,8375	0,7903	0,7462	0,7050	0,6663	0,6302	0,5963	0,5645
7	0,9327	0,8706	0,8131	0,7599	0,7107	0,6651	0,6227	0,5835	0,5470	0,5132
8	0,9235	0,8535	0,7894	0,7307	0.6768	0,6274	0,5820	0,5403	0,5019	0,4665
9	0,9143	0,8368	0,7664	0,7026	0,6446	0,5919	0,5439	0,5002	0,4604	0,4241
10	0,9053	0,8203	0,7441	0,6756	0,6139	0,5584	0,5083	0,4632	0,4224	0,3855
11	0,8963	0,8043	0,7224	0,6496	0,5847	0,5268	0,4751	0,4289	0,3875	0,3505
12	0,8874	0,7885	0,7014	0,6246	0,5568	0,4970	0,4440	0,3971	0,3555	0,3186
13	0,8787	0,7730	0,6810	0,6006	0,5303	0,4688	0,4150	0,3677	0,3262	0,2897
14	0,8700	0,7579	0,6611	0,5775	0,5051	0,4423	0,3878	0,3405	0,2992	0,2633
15	0,8613	0,7430	0,6419	0,5553	0,4810	0,4173	0,3624	0,3152	0,2745	0,2394

a) 60%
b) 65%
c) 70,29%
d) 75,49%
e) 79,59%

Comentários:

Resolvemos essa mesma questão na parte de Taxas Equivalentes e, agora, vamos resolver através do auxílio da tabela financeira e irei mostrar **uma particularidade** que a banca pode cobrar na hora da prova.

O enunciado nos questiona a Taxa Equivalente anual. Ou seja, a Taxa mensal de 5% capitalizada por 12 meses (1 ano) será igual a que Taxa Equivalente anual?

$$(1 + i_{mensal})^{12} = (1 + i_{anual})$$

$$(1 + 0{,}05)^{12} = (1 + i_{anual})$$

Iremos utilizar a tabela financeira para o cálculo da potência. Porém, **observe que a banca nos fornece a tabela financeira**, **mas não para o valor** de $(1 + i)^t$, e sim para o valor de $1/(1 + i)^t$.

Então, **vamos calcular o valor na tabela dada e fazer o inverso do resultado encontrado**.

Tabela para o fator $\frac{1}{(1+i)^n}$ na qual "i" está na coluna e "n" está na linha.

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	0,9901	0,9804	0,9709	0,9615	0,9524	0,9434	0,9346	0,9259	0,9174	0,9091
2	0,9803	0,9612	0,9426	0,9246	0,9070	0,8900	0,8734	0,8573	0,8417	0,8264
3	0,9706	0,9423	0,9151	0,8890	0,8638	0,8396	0,8163	0,7938	0,7722	0,7513
4	0,9610	0,9238	0,8885	0,8548	0,8227	0,7921	0,7629	0,7350	0,7084	0,6830
5	0,9515	0,9057	0,8626	0,8219	0,7835	0,7473	0,7130	0,6806	0,6499	0,6209
6	0,9420	0,8880	0,8375	0,7903	0,7462	0,7050	0,6663	0,6302	0,5963	0,5645
7	0,9327	0,8706	0,8131	0,7599	0,7107	0,6651	0,6227	0,5835	0,5470	0,5132
8	0,9235	0,8535	0,7894	0,7307	0,6768	0,6274	0,5820	0,5403	0,5019	0,4665
9	0,9143	0,8368	0,7664	0,7026	0,6446	0,5919	0,5439	0,5002	0,4604	0,4241
10	0,9053	0,8203	0,7441	0,6756	0,6139	0,5584	0,5083	0,4632	0,4224	0,3855
11	0,8963	0,8043	0,7224	0,6496	0,5847	0,5268	0,4751	0,4289	0,3875	0,3505
12	0,8874	0,7885	0,7014	0,6246	0,5568	0,4970	0,4440	0,3971	0,3555	0,3186
13	0,8787	0,7730	0,6810	0,6006	0,5303	0,4688	0,4150	0,3677	0,3262	0,2897
14	0,8700	0,7579	0,6611	0,5775	0,5051	0,4423	0,3878	0,3405	0,2992	0,2633
15	0,8613	0,7430	0,6419	0,5553	0,4810	0,4173	0,3624	0,3152	0,2745	0,2394

$$\frac{1}{(1+0{,}05)^{12}} = 0{,}5568$$

$$(1+0{,}05)^{12} = \frac{1}{0{,}5568} \quad \rightarrow \quad (1+0{,}05)^{12} = 1{,}7959$$

Vamos substituir na equação e calcular a Taxa mensal equivalente.

$$(1+0{,}05)^{12} = (1+i_{anual})$$

$$1{,}7959 = 1 + i_{anual}$$

$$i_{anual} = 1{,}7959 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{anual} = 0{,}7959 \ \ ou \ \ 79{,}59\%}$$

Gabarito: Alternativa **E**

Chegamos ao fim da teoria. Iremos comentar agora uma **bateria de questões de concursos** que sintetizam todo o conteúdo estudado.

RESUMO DA AULA

Cálculo do Montante e dos Juros Compostos

Juros Compostos

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$J = M - C \quad ou \quad J = C \times [(1 + i)^t - 1]$$

- "i" e "t" ***obrigatoriamente*** na ***mesma unidade*** *de grandeza*

Taxa Nominal e Taxa Efetiva

Divisão/Multiplicação $\longrightarrow$ "Quem manda é o período de capitalização"

Taxa Efetiva

Unidade de tempo da taxa **é coincidente** com a unidade de tempo do período de capitalização

Taxa Nominal

Unidade de tempo da taxa **NÃO É coincidente** com a unidade de tempo do período de capitalização

Taxas Equivalentes

Taxas Equivalentes são as taxas de juros com **unidades de tempo diferentes** que, **aplicadas a um mesmo Capital,** por um mesmo período, sob o regime de juros compostos, produziriam **o mesmo Montante** (e, por consequência, mesmo Juro).

Diferentemente do que ocorre no Regime de Capitalização Simples, em Juros Compostos, **as Taxas Equivalentes NÃO SÃO proporcionais**.

Para calcular a Taxa Equivalente, iremos tomar como base a **potenciação**.

Convenção Exponencial x Convenção Linear

Convenção Exponecial	x	Convenção Linear
Juros Compostos para TODO o período (tanto parte inteira quanto parte fracionária)		Juros Compostos → Parte inteira Juros Simples → Parte fracionária
$M = C \times (1+i)^t$		$M = C \times \underbrace{(1+i)^{t_1}}_{\text{parte inteira}} \times \underbrace{(1+i \times t_2)}_{\text{parte fracionária}}$

Tabela Financeira – Fator de Acumulação de Capitais

Uma **tabela financeira de fator de acumulação de capitais** tem o seguinte aspecto:

Fator de Acumulação de Capitais $(1+i)^t$

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	1,0100	1,0200	1,0300	1,0400	1,0500	1,0600	1,0700	1,0800	1,0900	1,1000
2	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664	1,1881	1,2100
3	1,0303	1,0612	1,0927	1,1249	1,1576	1,1910	1,2250	1,2597	1,2950	1,3310
4	1,0406	1,0824	1,1255	1,1699	1,2155	1,2625	1,3108	1,3605	1,4116	1,4641
5	1,0510	1,1041	1,1593	1,2167	1,2763	1,3382	1,4026	1,4693	1,5386	1,6105
6	1,0615	1,1262	1,1941	1,2653	1,3401	1,4185	1,5007	1,5869	1,6771	1,7716
7	1,0721	1,1487	1,2299	1,3159	1,4071	1,5036	1,6058	1,7138	1,8280	1,9487
8	1,0829	1,1717	1,2668	1,3686	1,4775	1,5938	1,7182	1,8509	1,9926	2,1436
9	1,0937	1,1951	1,3048	1,4233	1,5513	1,6895	1,8385	1,9990	2,1719	2,3579
10	1,1046	1,2190	1,3439	1,4802	1,6289	1,7908	1,9672	2,1589	2,3674	2,5937
11	1,1157	1,2434	1,3842	1,5395	1,7103	1,8983	2,1049	2,3316	2,5804	2,8531
12	1,1268	1,2682	1,4258	1,6010	1,7959	2,0122	2,2522	2,5182	2,8127	3,1384
13	1,1381	1,2936	1,4685	1,6651	1,8856	2,1329	2,4098	2,7196	3,0658	3,4523
14	1,1495	1,3195	1,5126	1,7317	1,9799	2,2609	2,5785	2,9372	3,3417	3,7975
15	1,1610	1,3459	1,5580	1,8009	2,0789	2,3966	2,7590	3,1722	3,6425	4,1772

- Essa é uma tabela para o fator $(1+\mathrm{i})^{\mathrm{t}}$ na qual "i" está na coluna e "t" está na linha.

Questões Comentadas – CESGRANRIO

Capitalização Composta - Aspectos Matemáticos

1. **(CESGRANRIO / BB - 2021) Um cliente deseja fazer uma aplicação em uma instituição financeira, que paga uma taxa de juros compostos de 10% ao ano, por um período de 3 anos, já que, ao final da aplicação, planeja comprar uma TV no valor de $R\$\ 3.500,00$ à vista.**

Qual o valor aproximado a ser investido para esse objetivo ser alcançado?

a) $R\$\ 2.629{,}60$
b) $R\$\ 2.450{,}00$
c) $R\$\ 2.692{,}31$
d) $R\$\ 2.341{,}50$
e) $R\$\ 2.525{,}00$

Comentários:

O cliente deseja aplicar um Capital C para obter um Montante de $R\$\ 3.500{,}00$ em 3 anos para poder comprar uma TV.

No regime de Juros Compostos, o Montante é calculado pela seguinte equação:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = 3.500$

$C = Capital = ?$

$i = taxa\ de\ juros = 10\%\ ao\ ano = 0{,}1$

$t = tempo = 3\ anos$

Substituindo os valores teremos:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$3.500 = C \times (1 + 0{,}1)^3$$

$$3.500 = C \times 1,1^3$$

$$3.500 = C \times 1,331$$

$$C = \frac{3.500}{1,331} \rightarrow \boldsymbol{C = 2.629,60}$$

Gabarito: Alternativa **A**

2. (CESGRANRIO / BB - 2021) Em uma carta aos clientes, um investimento é oferecido com a promessa de recebimento de um montante de $R\$\ 8.200,00$ líquidos, após 2 anos, para quem aderisse investindo inicialmente $R\$\ 5.000,00$. O valor líquido pago é obtido após descontados $R\$\ 250,00$ de taxas e impostos. Para melhorar a comunicação com os clientes, julgaram interessante acrescentar a taxa de juros compostos usada no cálculo do valor bruto, isto é, sem o desconto.

Qual é o valor da taxa anual que deve ser acrescentada na carta?

a) 2%
b) 3%
c) 20%
d) 25%
e) 30%

Comentários:

Observe que, conforme o enunciado nos diz, **a taxa de juros a ser acrescentada é aquela usada no cálculo do valor bruto, isto é, sem o desconto.**

O Montante bruto é igual ao Montante líquido mais taxas e impostos:

$$M = 8.200 + 250 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{M = 8.450}}$$

No regime de Juros Compostos, o Montante é calculado pela seguinte equação:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = 8.450$

$C = Capital = 5.000$

$i = taxa\ de\ juros = ?$

$t = tempo = 2\ anos$

Substituindo os valores teremos:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$8.450 = 5.000 \times (1 + i)^2$$

$$(1 + i)^2 = \frac{8.450}{5.000}$$

$$(1 + i)^2 = 1{,}69$$

$$1 + i = \sqrt{1{,}69}$$

$$1 + i = 1{,}3$$

$$i = 1{,}3 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i = 0{,}3\ ou\ 30\%\ a.a.}$$

Gabarito: Alternativa **E**

3. **(CESGRANRIO / BB - 2021) Uma pessoa deixou de pagar a fatura do cartão de crédito, de modo que, após dois meses, o valor inicial da fatura se transformou em uma dívida de $\boldsymbol{R\$\ 26.450,00}$. Nunca foram feitas compras parceladas e não foram feitas compras adicionais durante esses dois meses.**

Considerando-se que foram cobrados, indevidamente, juros compostos de 15% ao mês e que, por determinação judicial, o valor inicial deva ser reconsiderado para uma nova negociação entre as partes, o valor inicial da dívida era de

a) $R\$\ 18.515{,}00$
b) $R\$\ 18.815{,}00$
c) $R\$\ 20.000{,}00$
d) $R\$\ 21.000{,}00$
e) $R\$\ 21.115{,}00$

Comentários:

Vamos aplicar diretamente a **fórmula do Montante em regime de Juros Compostos** e determinar o valor do Capital (dívida) que após 2 meses submetido a uma taxa de 15% ao mês tenha gerado um Montante de $R\$\ 26.450{,}00$.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$26.450 = C \times (1 + 0{,}15)^2$$

$$26.450 = C \times 1{,}15^2$$

$$26.450 = C \times 1{,}3225$$

$$C = \frac{26.450}{1{,}3225} \rightarrow \boldsymbol{C = 20.000}$$

Gabarito: Alternativa **C**

4. **(CESGRANRIO / CEF - 2021) Para ampliar o capital de giro de um novo negócio, um microempreendedor tomou um empréstimo no valor de $R\$\ 20.000,00$, em janeiro de 2021, a uma taxa de juros de 5% ao mês, no regime de juros compostos. Exatamente dois meses depois, em março de 2021, pagou 60% do valor do empréstimo, ou seja, dos $R\$\ 20.000,00$, e liquidou tudo o que devia desse empréstimo em abril de 2021. A quantia paga, em abril de 2021, que liquidou a referida dívida, em reais, foi de**

a) 11.352,50
b) 11.152,50
c) 10.552,50
d) 10.452,50
e) 10.152,50

Comentários:

Vamos passo a passo. Primeiramente, um microempreendedor tomou um empréstimo no valor de $R\$\ 20.000{,}00$, a uma taxa de juros de 5% ao mês, no regime de juros compostos por 2 meses.

Sendo assim, após os 2 meses o Montante desse empréstimo será igual a:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 20.000 \times (1 + 0{,}05)^2$$

$$M = 20.000 \times 1{,}05^2$$

$$M=20.000\times 1{,}1025 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M=22.050}}$$

Em março de 2021, pagou 60% do valor do inicial do empréstimo, ou seja, dos $R\$\ 20.000{,}00$.

Observe que **ele paga 60% do valor inicial do empréstimo** e não do valor que calculamos. Cuidado para não errar a questão por falta de atenção.

$$paga=\frac{60}{100}\times 20.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{paga=12.000}}$$

Logo, do Monante de $R\$\ 22.050{,}00$, o microempreendedor paga $R\$\ 12.000{,}00$. Sendo assim, ainda resta a pagar um valor igual a:

$$resta\ a\ pagar=22.050-12.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{resta\ a\ pagar=10.050}}$$

Todavia, ele paga este valor em abril, isto é, 1 mês após. Então, este valor que "resta a pagar" será capitalizado por mais 1 mês e irá gerar um novo Montante no valor de:

$$M=C\times(1+i)^t$$

$$M=10.050\times(1+0{,}05)^1$$

$$M=10.050\times 1{,}05 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M=10.552,50}$$

Gabarito: Alternativa **C**

5. **(CESGRANRIO / CEF - 2021) Uma pessoa tem uma dívida no valor de $R\$\ 2.000,00$, vencendo no dia de hoje. Com dificuldade de quitá-la, pediu o adiamento do pagamento para daqui a 3 meses.**

Considerando-se uma taxa de juros compostos de $2\%\ a.m.$, qual é o valor equivalente, aproximadamente, que o gerente do banco propôs que ela pagasse, em reais?

a) 2.020,40
b) 2.040,00
c) 2.080,82
d) 2.120,20

e) 2.122,42

Comentários:

Vamos aplicar diretamente a **fórmula do Montante em regime de Juros Compostos**. No regime de Juros Compostos, o Montante é calculado pela seguinte equação:

$$M = C \times (1+i)^t$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 2.000$

$i = taxa\ de\ juros = \ 2\%\ ao\ mês = 0{,}02$

$t = tempo = 3\ meses$

Substituindo os valores teremos:

$$M = C \times (1+i)^t$$

$$M = 2.000 \times (1+0{,}02)^3$$

$$M = 2.000 \times 1{,}02^3$$

$$M \cong 2.000 \times 1{,}0612 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M \cong 2.122,40}$$

Gabarito: Alternativa **E**

6. **(CESGRANRIO / BB - 2013) Um cliente contraiu um empréstimo, junto a um banco, no valor de R$ 20.000,00, a uma taxa de juros compostos de 4% ao mês, com prazo de 2 trimestres, contados a partir da liberação dos recursos. O cliente quitou a dívida exatamente no final do prazo determinado, não pagando nenhum valor antes disso.**

Dados
$1{,}04^2 \cong 1{,}082$
$1{,}04^3 \cong 1{,}125$
$1{,}04^4 \cong 1{,}170$
$1{,}04^5 \cong 1{,}217$
$1{,}04^6 \cong 1{,}265$
$1{,}04^7 \cong 1{,}316$

Qual o valor dos juros pagos pelo cliente na data da quitação dessa dívida?

a) R$ 5.300,00
b) R$ 2.650,00
c) R$ 1.250,00
d) R$ 1.640,00
e) R$ 2.500,00

Comentários:

O enunciado nos afirma que o cliente contraiu um empréstimo em regime de Juros Compostos. Neste regime, o Montante é calculado pela seguinte fórmula:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 20.000$

$i = taxa\ de\ juros = 4\%\ ao\ mês = 0{,}04$

$t = tempo = 2\ trimestres$

Na aula passada, pedi sua atenção constantemente para a unidade da taxa de juros e do tempo.

A **CESGRANRIO** vai sempre tentar confundir o cadidato nessa "pegadinha". Lembre-se de que a Taxa de Juros e o tempo devem estar, **OBRIGATORIAMENTE**, na mesma unidade de grandeza.

Então, vamos transformar o tempo da unidade "trimestre" para a unidade "mês". 1 trimestre é equivalente a 3 meses. Logo, 2 trimestres são 6 meses.

$$\boxed{\boldsymbol{t = 6\ meses}}$$

Vamos substituir os valores e calcular o Montante devido ao final de 6 meses.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 20.000 \times (1 + 0{,}04)^6$$

$$M = 20.000 \times 1{,}04^6$$

O enunciado nos informa que $1{,}04^6 = 1{,}265$.

$$M = 20.000 \times 1{,}265 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 25.300}}$$

Mas atenção que a banca nos questiona qual <u>o valor dos Juros pagos</u> pelo cliente.

$$M = C + J$$

$$25.300 = 20.000 + J$$

$$J = 25.300 - 20.000 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{J = 5.300}$$

Gabarito: Alternativa **A**

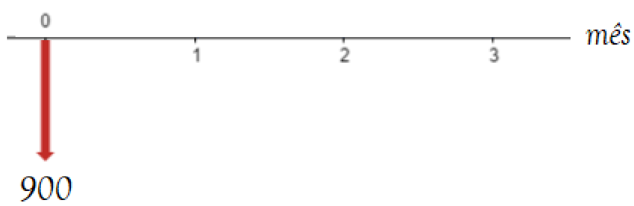
7. (CESGRANRIO / BB - 2012) João tomou um empréstimo de R$ 900,00 a juros compostos de 10% ao mês. Dois meses depois, João pagou R$ 600,00 e, um mês após esse pagamento, liquidou o empréstimo.

O valor desse último pagamento foi, em reais, aproximadamente,

a) 240,00
b) 330,00
c) 429,00
d) 489,00
e) 538,00

Comentários:

João tomou um empréstimo de R$ 900,00 a juros compostos de 10% ao mês (0,1).



Vamos calcular o valor do Montante desta dívida 2 meses após.

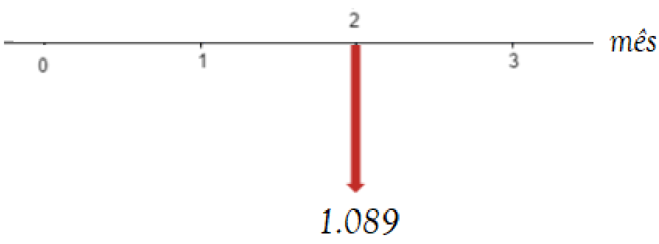
$$M = C \times (1+i)^t$$

$$M = 900 \times (1+0{,}1)^2$$

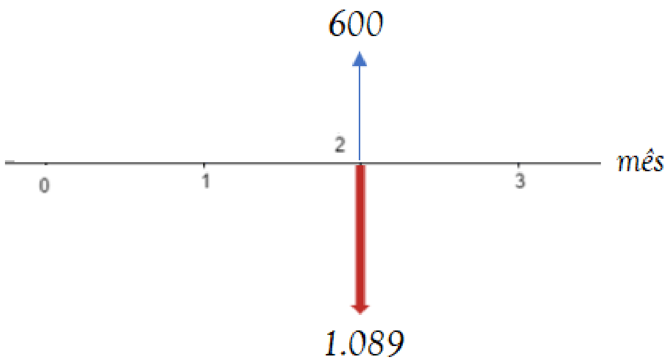
$$M = 900 \times 1{,}1^2$$

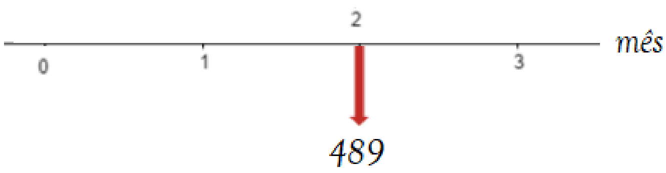
$$M = 900 \times 1{,}21 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 1.089}}$$

Então, 2 meses após, esta dívida estava no valor de R$ 1.089,00.



João pagou R$ 600,00 desta dívida no mês 2. Se a dívida estava no valor de R$ 1.089,00 e João pagou R$ 600,00 logo, <u>ainda falta a João pagar R$ 489,00</u>.





Atenção!

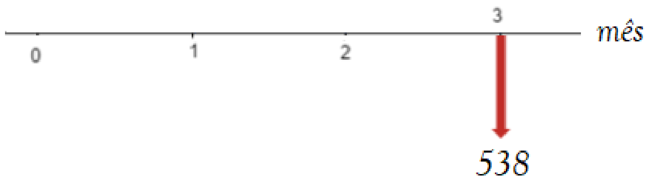
Ele paga o restante da dívida 1 mês após. Cuidado para não marcar a Alternativa D que é o valor da dívida depois dele ter pagado os R$ 600,00.

Iremos então, calcular o valor do Montante desta dívida restante de R$ 489,00 um mês após.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 489 \times (1 + 0{,}1)^1$$

$$M = 489 \times 1{,}1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M \cong 538}$$



Sendo assim, o valor desse último pagamento foi, em reais igual a 538.

ESCLARECENDO!

Na hora da sua prova, **você não precisa desenhar o fluxo de caixa**. Eu trouxe o fluxo para podermos "enxergar" a dinâmica da dívida ao longo do tempo e também, para começarmos a nos familiarizar com o valor do dinheiro no tempo (deslocamento). Este domínio será muito importante na aula de Equivalência de Capitais.

▪

Dito isto,

Gabarito: Alternativa **E**

8. **(CESGRANRIO / BB - 2015) Um cliente foi a um banco tomar um empréstimo de 100 mil reais, no regime de juros compostos, a serem pagos após 3 meses por meio de um único pagamento.**

Para conseguir o dinheiro, foram apresentadas as seguintes condições:

I - taxa de juros de 5% ao mês, incidindo sobre o saldo devedor acumulado do mês anterior;

II - impostos mais taxas que poderão ser financiados juntamente com os 100 mil reais.

Ao fazer a simulação, o gerente informou que o valor total de quitação após os 3 meses seria de 117.500 reais.

O valor mais próximo do custo real efetivo mensal, ou seja, a taxa mensal equivalente desse empréstimo, comparando o que pegou com o que pagou, é de

a) $\left[\left(1{,}175^{1/3} - 1\right) \times 100\right]\%$
b) $\left[\left(1{,}193^{1/3} - 1\right) \times 100\right]\%$
c) $\left[\left(1{,}050^{1/3} - 1\right) \times 100\right]\%$
d) $\left[\left(1{,}158^{1/3} - 1\right) \times 100\right]\%$
e) $\left[\left(1{,}189^{1/3} - 1\right) \times 100\right]\%$

Comentários:

Um cliente foi ao banco tomar um empréstimo de 100 mil reais e, ao final de 3 meses a juros compostos de 5% ao mês, pagaria um **Montante** igual a 117.500 reais.

Observe que a taxa de juros incide sobre o saldo devedor acumulado do mês anterior, caracaterizando assim, como estudamos na aula anterior, **regime de Juros Compostos**.

Vamos aplicar a fórmula do Montante em Juros Compostos e calcuar a taxa mensal de juros.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$117.500 = 100.000 \times (1 + i)^3$$

$$(1 + i)^3 = \frac{117.500}{100.000}$$

$$(1 + i)^3 = 1{,}175$$

$$1 + i = 1{,}175^{1/3}$$

$$i = 1{,}175^{1/3} - 1$$

Para calcularmos em termos percentuais, basta multiplicar a taxa por 100.

$$\boldsymbol{i} = \left[\left(\mathbf{1{,}175^{1/3}} - \mathbf{1}\right) \times \mathbf{100}\right]\%$$

Gabarito: Alternativa **A**

9. **(CESGRANRIO / BB - 2015) Uma conta de R$ 1.000,00 foi paga com atraso de 2 meses e 10 dias. Considere o mês comercial, isto é, com 30 dias; considere, também, que foi adotado o regime de capitalização composta para cobrar juros relativos aos 2 meses, e que, em seguida, aplicou-se o regime de capitalização simples para cobrar juros relativos aos 10 dias.**

Se a taxa de juros é de 3% ao mês, o juro cobrado foi de

a) R$ 64,08
b) R$ 79,17
c) R$ 40,30
d) R$ 71,51
e) R$ 61,96

Comentários:

Observe que a questão trata da Convenção Linear, onde iremos utilizar o **regime de Capitalização Composta para a parte inteira** do tempo de aplicação e o **regime de Capitalização Simples para a parte fracionária**.

Primeiramente então, vamos calcular o Montante desta dívida em 2 meses (parte inteira) utilizando a fórmula do Montante em regime de Juros Compostos.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 1.000 \times (1 + 0{,}03)^2$$

$$M = 1.000 \times 1{,}03^2$$

$$M = 1.000 \times 1{,}0609 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 1.060,9}}$$

De posse do Montante calculado acima, iremos utilizar a **fórmula do Montante em Juros Simples para a parte fracionária** (10 dias).

$$M = C \times (1 + i \times t)$$

$$M = 1.060{,}9 \times \left(1 + 0{,}03 \times \frac{1}{3}\right)$$

Observe que <u>convertemos</u> a unidade do tempo de aplicação (10 dias) para a unidade da taxa de juros (mensal) pois **necessariamente** devem coincidir. 10 dias é igual a um terço do mês (1/3).

$$M = 1.060{,}9 \times \left(1 + 0{,}03 \times \frac{1}{3}\right)$$

$$M = 1.060{,}9 \times (1 + 0{,}01)$$

$$M = 1.060{,}9 \times 1{,}01 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 1.071{,}51}}$$

Logo, os Juros total serão de:

$$M = C + J$$

$$1.071{,}51 = 1.000 + J$$

$$J = 1.071{,}51 - 1.000 \quad \rightarrow \quad J = 71{,}51$$

TOME NOTA!

Você poderia também calcular o Montante direto na fórmula do Montante na Convenção Linear. Acredito que é mais fácil entender a sistemática da Convenção do que decorar a fórmula. Mas, aplicando a fórmula teríamos:

$$M = \ C \times (1 + i)^{t_1} \times (1 + i \times t_2)$$

Onde,

$t_1 = parte\ inteira\ do\ período\ de\ aplicação = 2\ meses$

$t_2 = parte\ fracionária\ do\ período\ de\ aplicação = 10\ dias = 1/3\ \ mês$

Perceba que essa fórmula, nada mais é que a aglutinação dos dois passos que fizemos acima.

Primeiro, aplicamos **Juros Compostos para a parte inteira** do período de aplicação e, posteriormente, **Juros Simples para a parte fracionária**.

Calculando o Montante:

$$M = \ C \times (1 + i)^{t_1} \times (1 + i \times t_2)$$

$$M = 1.000 \times (1 + 0{,}03)^2 \times \left(1 + 0{,}03 \times \frac{1}{3}\right)$$

$$M = 1.000 \times 1{,}0609 \times 1{,}01 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 1.071{,}51}}$$

E os Juros, seriam, como calculamos, **R$ 71,51.**

Gabarito: Alternativa **D**

10. (CESGRANRIO / TRANSPETRO - 2018) Um contrato de prestação de serviços prevê, em caso de atraso do pagamento do serviço realizado, a cobrança de juros de 1% ao mês, sobre o saldo devedor, ou seja, no regime de juros compostos. Além disso, há uma multa adicional de 2% sobre o valor do serviço previsto no contrato. Considere que o comprador pagou com atraso de 6 meses um contrato nesses moldes, cujo valor era de 100 milhões de reais, e que nenhum pagamento intermediário fora efetuado nesse período.

Dado: $1{,}01^6 = 1{,}06152$

Assim, o valor mais próximo do total pago nessa operação, incluindo multa e juros, foi de

a) R$ 106.152.000,00
b) R$ 106.200.000,00
c) R$ 108.000.000,00
d) R$ 108.152.000,00
e) R$ 108.275.000,00

Comentários:

Vamos calcular o Montante deste pagamento 6 meses após utilizando a fórmula do regime de Juros Compostos.

$$M = C \times (1+i)^t$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 100.000.000$

$i = taxa\ de\ juros = 1\%\ ao\ mês = 0{,}01$

$t = tempo = 6\ meses$

Substituindo os valores teremos:

$$M = 100.000.000 \times (1+0{,}01)^6$$

$$M = 100.000.000 \times 1{,}01^6$$

O enunciado nos informa que $1{,}01^6 = 1{,}06152$.

$$M = 100.000.000 \times 1{,}06152 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 106.152.000}}$$

Observe que há ainda, o **pagamento de uma multa adicional de 2% sobre o valor do serviço** previsto no contrato.

$$multa = \frac{2}{1\cancel{00}} \times 100.000.0\cancel{00} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{multa = 2.000.0000}}$$

Sendo assim, o Montante total a pagar será igual a:

$$M_{total} = 106.152.000 + 2.000.000 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M_{total} = 108.152.000}$$

Gabarito: Alternativa **D**

11. (CESGRANRIO / Liquigás - 2018) Uma empresa faz uma aplicação no valor de R$ 1.000.000,00, em um fundo que remunera a uma taxa de 1% ao mês, no regime de juros compostos. Após dois anos, a empresa resgatou o dinheiro, pagando exatamente duas taxas, ambas aplicadas sobre os juros da operação, sendo elas: 15% de imposto de renda e 10% de taxa de performance. Considere para os cálculos que $\boldsymbol{1{,}01^{24} = 1{,}27}$.

O valor mais próximo da rentabilidade líquida (já descontadas as taxas) da operação, em reais, é igual a

a) 60.000,00
b) 67.500,00
c) 202.500,00
d) 245.000,00
e) 270.000,00

Comentários:

Vamos primeiramente calcular o Montante desta operação 2 anos após o investimento.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 1.000.000$

$i = taxa\ de\ juros = 1\%\ ao\ mês = 0{,}01$

$t = tempo = 2\ anos = 24\ meses$

A **CESGRANRIO** vai sempre tentar confundir o cadidato nessa "pegadinha". Lembre-se de que a Taxa de Juros e o tempo devem estar, **OBRIGATORIAMENTE**, na mesma unidade de grandeza.

Precisamos transformar a o tempo da unidade "ano" para a unidade "mês". 2 anos são equivalentes a 24 meses.

Substituindo os valores e calculando o Montante.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 1.000.000 \times (1 + 0{,}01)^{24}$$

$$M = 1.000.000 \times 1{,}01^{24}$$

O enunciado nos informa que $1{,}01^{24} = 1{,}27$.

$$M = 1.000.000 \times 1{,}27 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 1.270.000}}$$

Vamos calcular os Juros (rendimentos) da operação:

$$M = C + J$$

$$1.270.000 = 1.000.000 + J$$

$$J = 1.270.000 - 1.000.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J = 270.000}}$$

Observe que este **NÃO** será o rendimento recebido pela empresa.

A empresa pagou duas taxas, ambas **aplicadas sobre os juros da operação**, sendo elas: 15% de imposto de renda e 10% de taxa de performance, ou seja, a empresa pagou um total de 25% de taxa sobre os Juros.

$$taxas = \frac{25}{100} \times 270.000 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{taxas = 67.500}}$$

Ou seja, a empresa receberá um rendimento "líquido" igual ao Juros da operação menos as taxas pagas por ela.

$$rendimento = 270.000 - 67.500 \quad \rightarrow \boldsymbol{rendimento = 202.500}$$

Gabarito: Alternativa **C**

12. (CESGRANRIO / TRANSPETRO - 2018) Uma empresa comprou um ativo por 18 milhões de reais em janeiro de 2008. Buscando captar recursos, devido a uma crise financeira que atravessa, a empresa estuda vender o ativo, o qual foi avaliado, em janeiro de 2018, no valor de aproximadamente 36 milhões de reais.

Dado

x	2^x
0,1	1,072
0,2	1,149
0,3	1,231
0,4	1,319
0,5	1,414

Se o valor de venda for igual ao avaliado, o valor mais próximo da taxa anual de retorno, proporcionada por esse investimento, considerando-se o sistema de capitalização composta, é

a) 5,8%
b) 7,2%
c) 10,0%
d) 12,5%
e) 14,9%

Comentários:

A empresa tem um ativo de valor de Capital igual a 18 milhões e espera obter um Montante de 36 milhões com a venda deste, 10 anos depois.

Vamos utilizar a fórmula do Montante em regime de Capitalização Composta e calcular a taxa anual desta operação.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = 36$

$C = Capital = 18$

$i = taxa\ de\ juros = ?$

$t = tempo = 10\ anos$

Substituindo os valores e calculando a taxa de juros:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$36 = 18 \times (1 + i)^{10}$$

$$(1 + i)^{10} = \frac{36}{18}$$

$$(1 + i)^{10} = 2$$

Neste ponto, devemos nos lembrar das aulas de matemática básica (potenciação/radiciação).

$$\boxed{a^n = x \quad \rightarrow \quad a = x^{1/n}}$$

Então,

$$(1 + i)^{10} = 2$$

$$1 + i = 2^{1/10}$$

$$1 + i = 2^{0,1}$$

O enunciado nos informa pela tabela que 2^x sendo $x = 0{,}1$ é igual a $1{,}072$.

$$1 + i = 1{,}072$$

$$i = 1{,}072 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i = 0,072 \ ou \ 7,2\% \ ao \ ano}$$

Gabarito: Alternativa **B**

13. (CESGRANRIO / Liquigás - 2018) Um cliente fez um empréstimo de 200 mil reais, a taxa de 5% ao mês, no sistema de juros compostos, em jan/2018. Após exatos dois meses da data do primeiro empréstimo, em mar/2018, ele pegou mais 100 mil reais, mantendo a taxa e o sistema de juros. Em abr/2018, exatamente um mês após o último empréstimo, liquidou as duas dívidas, zerando o seu saldo devedor.

O valor pago pelo cliente, em milhares de reais, foi de, aproximadamente,

a) 300,0
b) 325,6
c) 336,5
d) 345,0
e) 347,3

Comentários:

Vamos calcular <u>separadamente</u> o Montante pago por cada dívida e, ao final, somamos os Montantes para saber o total pago pelo cliente.

- **Empréstimo de 200 mil reais**

Iremos utilizar a fórmula do Montante em regime de Juros Compostos e calcular o valor final desta primeira dívida.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M_1 = 200.000 \times (1 + 0{,}05)^3$$

Observe que **o tempo de empréstimo desta dívida é igual a 3 meses.**

Ele contrai a dívida em jan/2018 e quita a dívida em abr/2018. O enunciado fala que o cliente pegou outra dívida 2 meses após só para tentar confundir o candidato. Ele contrai outra dívida 2 meses após, mas essa dívida (essa primeira) continua "correndo" no tempo. O prazo de pagamento dela é de 3 meses.

Calculado o Montante da primeira dívida:

$$M_1 = 200.000 \times 1{,}05^3$$

$$M_1 = 200.000 \times 1{,}1576 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M_1 \cong 231.500}}$$

Empréstimo de 100 mil reais

Ele obtém este empréstimo e quita 1 mês após a obtenção.

$$M = C \times (1+i)^t$$

$$M_2 = 100.000 \times (1+0{,}05)^1$$

$$M_2 = 100.000 \times 1{,}05 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M_2 = 105.000}}$$

Sendo assim, o valor total pago pelo cliente, em milhares de reais, foi de, aproximadamente:

$$M_{total} = M_1 + M_2$$

$$M_{total} = 231.500 + 105.000 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M_{total} = 336.500}$$

Em milhares: 336,5 mil.

Gabarito: Alternativa **C**

14. (CESGRANRIO / TRANSPETRO - 2018) Um ativo, comprado por 100 milhões de dólares, duplicou de valor após 20 anos.

O valor mais próximo da taxa anual de retorno proporcionada por esse investimento, considerando-se o sistema de capitalização composta, é

Dados	
x	**2^x**
0,03	1,0210
0,04	1,0281
0,05	1,0353
0,06	1,0425
0,07	1,0497

a) 2,1%

b) 2,8%
c) 3,0%
d) 3,5%
e) 4,2%

Comentários:

Um ativo, comprado pelo Capital de 100 milhões de dólares, duplicou de valor após 20 anos, ou seja, atigiu o Montante de 200 milhões.

O enunciado nos questiona o valor da taxa anual considerando o **sistema de capitalização composta**. Vamos utilizar a fórmula do Montante para determiar a taxa.

$$M = C \times (1+i)^t$$

Onde,

$M = Montante = 200$

$C = Capital = 100$

$i = taxa\ de\ juros = ?$

$t = tempo = 20\ anos$

Substituindo os valores e calculando a taxa de juros:

$$M = C \times (1+i)^t$$

$$200 = 100 \times (1+i)^{20}$$

$$(1+i)^{20} = \frac{2\cancel{00}}{1\cancel{00}}$$

$$(1+i)^{20} = 2$$

Neste ponto, devemos nos lembrar das aulas de matemática básica (potenciação/radiciação).

$$\boxed{a^n = x \quad \rightarrow \quad a = x^{1/n}}$$

Então,

$$(1+i)^{20} = 2$$

$$1 + i = 2^{1/20}$$

$$1 + i = 2^{0,05}$$

O enunciado nos informa pela tabela que 2^x sendo $x = 0{,}05$ é igual a $1{,}0353$.

$$1 + i = 1{,}0353$$

$$i = 1{,}0353 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i = 0,0353\ ou\ 3,53\%\ ao\ ano}$$

O valor mais próximo da taxa anual de retorno proporcionada por esse investimento é de 3,5% ao ano.

Gabarito: Alternativa **D**

15. (CESGRANRIO / TRANSPETRO - 2018) Uma pequena empresa planeja comprar um caminhão novo, à vista, cujo preço de mercado equivale a R$ 250.000,00, mas ela não dispõe, no momento, de qualquer valor em caixa para realizar a transação.

Caso a empresa consiga obter um retorno nominal de 5% a.a., com base no valor presente, qual o montante que ela deveria aplicar hoje para viabilizar a compra do caminhão, à vista, daqui a 4 anos, supondo que o preço do bem permaneça inalterado nesse período?

a) R$ 238.095,24
b) R$ 205.676,68
c) R$ 200.500,00
d) R$ 39.406,25
e) R$ 44.323,32

Comentários:

Observe que o Montante do valor do caminhão de R$ 250.000,00 não se altera, isto é, é o mesmo 4 anos depois.

O enunciado nos questiona o valor do Capital que deve ser aplicado a taxa de juros nominal de 5%a.a. para que, em 4 anos, se obtenha o Montante de R$ 250.000,00.

Vamos utilizar a fórmula do Montante em **regime de Juros Composto** e calcular o Capital.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = 250.000$

$$C = Capital = ?$$

$$i = taxa\ de\ juros = 5\%\ a.a. = 0{,}05$$

$$t = tempo = 4\ anos$$

Substituindo os valores e calculando o Capital:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$250.000 = C \times (1 + 0{,}05)^4$$

$$250.000 = C \times 1{,}05^4$$

Observe que as alternativas estão distantes numericamente uma das outras. Então, vamos utilizar um pouco da "malandragem" de prova e **arredondar** o valor da potência.

$$250.000 = C \times 1{,}05^4$$

$$250.000 = C \times 1{,}216$$

$$C = \frac{250.000}{1{,}216} \rightarrow \boldsymbol{C \cong 205.500}$$

Gabarito: Alternativa **B**

16. (CESGRANRIO / Liquigás - 2018 - Adaptada) Um investidor comprou um título por R$ 500 e, após 6 meses com o título, vendeu-o por R$ 525 no sistema de capitalização composta.

Qual foi o retorno anual obtido pelo investidor?

a) 10,25%
b) 20,5%
c) 10%
d) 25%
e) 5%

Comentários:

Um investidor comprou um título por R$ 500 e, após 6 meses com o título, vendeu-o por um Montante de R$ 525. Vamos utilizar a fórmula do **Montante em regime de juros compostos** e determinar a taxa anual.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = 525$

$C = Capital = 500$

$i = taxa\ de\ juros = ?$

$t = tempo = 6\, meses = 1/2\ \ ano$

A banca nos questiona a **taxa anual**. Então, devemos converter a unidade do tempo de "mês" para "ano", uma vez que, como vimos, necessariamente as unidades devem ter a mesma grandeza. 6 meses equivalem a meio ano.

Substituindo os valores e calculando a taxa de juros:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$525 = 500 \times (1 + i)^{1/2}$$

$$(1 + i)^{1/2} = \frac{525}{500}$$

$$(1 + i)^{1/2} = 1{,}05$$

Elevando os dois lados ao quadrado:

$$\left[(1 + i)^{1/2}\right]^2 = 1{,}05^2$$

$$(1 + i)^{\frac{1}{2} \times 2} = 1{,}1025$$

$$1 + i = 1{,}1025$$

$$i = 1{,}1025 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i = 0{,}1025\ ou\ 10{,}25\%\ ao\ ano}$$

Gabarito: Alternativa **A**

17. (CESGRANRIO / Liquigás - 2018) Um investidor aplica R$ 400.000,00, em setembro de 2018, a uma taxa de juro de 10% ao ano, no regime de juro composto. Após um ano da primeira aplicação, faz uma nova aplicação, no valor de R$ 200.000,00, a uma taxa de juro de 12% ao ano, no mesmo regime de juros, mantendo a 1ª aplicação. Completados exatos dois anos da primeira aplicação, em setembro/2020, resgata o total aplicado nas duas operações.

O valor mais próximo, em reais, da rentabilidade bruta da operação, isto é, desconsiderando impostos e taxas, é igual a

a) 64.000
b) 84.000
c) 92.000
d) 108.000
e) 148.000

Comentários:

Vamos calcular separadamente o Montante de cada investimento e, ao final, somamos os Montantes para saber o total recebido.

- **Investimento de 400.000**

Iremos utilizar a fórmula do Montante em regime de Juros Compostos e calcular o valor final do Montante deste investimento a uma taxa de 10% ao ano.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M_1 = 400.000 \times (1 + 0{,}1)^2$$

Observe que o tempo desta aplicação é de 2 anos.

Ele aplica o valor em set/2018 e recebe o montante em set/2020. O enunciado fala que o investidor aplicou outro capital 1 ano após só para tentar confundir o candidato. Ele investe outro capital 1 ano após, mas esse primeiro investimento continua "correndo" no tempo. O prazo de aplicação é de 2 anos.

Calculado o Montante do primeiro investimento:

$$M_1 = 400.000 \times 1{,}1^2$$

$$M_1 = 400.000 \times 1{,}21 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M_1 = 484.000}}$$

- Investimento de 200.000

Ele obtém o montante deste investimento 1 após a aplicação.

$$M = C \times (1+i)^t$$

$$M_2 = 200.000 \times (1+0{,}12)^1$$

Perceba que <u>este segundo investimento é remunerado a uma taxa de 12% ao ano.</u>

$$M_2 = 200.000 \times 1{,}12 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M_2 = 224.000}}$$

Sendo assim, o valor total pago recebido foi:

$$M_{total} = M_1 + M_2$$

$$M_{total} = 484.000 + 224.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M_{total} = 708.000}}$$

E os Juros (rendimento) total será igual a diferença do Montante recebido menos o Capital total aplicado $(400.000 + 200.000 = 600.000)$.

$$J = M - C$$

$$J = 708.000 - 600.000 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{J = 108.000}$$

Gabarito: Alternativa **D**

18. (CESGRANRIO / BR - 2018) Em dois meses, um capital inicial de R$100.000,00 foi corrigido duas vezes, por uma mesma taxa mensal de juros (compostos). Ao final dos dois meses, após a segunda correção, o valor corrigido era de R$104.040,00.

Ao final do primeiro mês, após a primeira correção, o valor corrigido era de

a) R$ 102.000,00
b) R$ 102.018,00
c) R$ 102.020,00
d) R$ 104.000,00
e) R$ 104.036,00

Comentários:

Em dois meses, um capital inicial de R$100.000,00 foi corrigido duas vezes, por uma mesma taxa mensal de juros (compostos) resultando em um montante de R$104.040,00.

Vamos aplicar diretamente a fórmula do **Montante** neste regime de Juros e calcular a taxa mensal.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = 104.040$

$C = Capital = 100.000$

$i = taxa\ de\ juros = ?$

$t = tempo = 2\ meses$

Substituindo os valores e calculando a taxa:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$104.040 = 100.000 \times (1 + i)^2$$

$$(1 + i)^2 = \frac{104.040}{100.000}$$

$$(1 + i)^2 = 1{,}0404$$

Qual número que elevado ao quadrado será igual a 1,0404?

$$1{,}02 \times 1{,}02 = 1{,}0404$$

"Professor, como eu iria saber?"

Então, caro aluno, temos que ter um pouco de "malandragem" de prova. Nessa aula, utilizamos bastante o macete do "dobra e eleva ao quadrado" para números iguais a "um vírgula alguma coisa" se recorda?

Nesse caso, teríamos que pensar rapidamente. Perceba que a banca não complica. Ela fornece um número que é bastante utilizado nas resoluções de problemas.

Continuando a resolução:

$$(1 + i)^2 = 1{,}0404$$

$$1 + i = 1{,}02$$

$$i = 1{,}02 - 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{i = 0,02\ ou\ 2\%\ ao\ m\hat{e}s}}$$

A banca nos questiona o valor do Montante após 1 mês. Basta substituirmos novamente na fórmula do Montante. Porém agora, desejamos determinar o valor para o tempo $t = 1$.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 100.000 \times (1 + 0{,}02)^1$$

$$M = 100.000 \times 1{,}02 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M = 102.000}$$

Gabarito: Alternativa **A**

19. (CESGRANRIO / BR - 2012) Pedro pegou R$ 36.000,00 emprestados, a uma taxa de 2% ao mês, em um banco. Essa dívida deveria ser paga no final de 1 ano, mas, ao fim de 5 meses, ele já tinha o dinheiro para saldar o empréstimo. Entretanto, para não ficar descapitalizado, Pedro efetuou o pagamento apenas no fim do mês seguinte.

Qual a quantia, em reais, paga por Pedro ao saldar a dívida?

Dados: $1{,}02^5 \cong 1{,}10$

a) 45.720,00
b) 41.400,00
c) 40.392,00
d) 40.320,00
e) 39.600,00

Comentários:

Ao fim de 5 meses, Pedro já tinha o dinheiro para saldar o empréstimo. Porém, ele efetuou o pagamento no fim do mês seguinte, isto é, no mês 6.

Vamos calcular o Montante desta dívida 6 meses após ele ter tomado o empréstimo de R$ 36.000,00 a uma taxa de 2% ao mês.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 36.000 \times (1 + 0{,}02)^6$$

$$M = 36.000 \times 1{,}02^6$$

Perceba que o enunciado nos fornece o valor de $1{,}02^5$. Vamos fazer uma pequena *manipulação algébrica* usando as propriedades da potenciação para calcular o valor de $1{,}02^6$.

$$x^a \times x^b = x^{a+b}$$

Então, aplicando a "volta" desta propriedade teremos:

$$1{,}02^6 = 1{,}02^5 \times 1{,}02^1$$

$$1{,}02^6 = 1{,}1 \times 1{,}02$$

$$1{,}02^6 = 1{,}122$$

Substituindo o valor da potência e calculando o Montante:

$$M = 36.000 \times 1{,}02^6$$

$$M = 36.000 \times 1{,}122 \quad \rightarrow \boldsymbol{M = 40.392}$$

Gabarito: Alternativa **C**

20. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2011) Um investidor aplicou a quantia de R$ 15.000,00, pelo prazo de 3 meses, num investimento que rende juros compostos de 2% ao mês. O montante que receberá no final da aplicação, em reais, será

a) 15.100,85
b) 15.918,12
c) 16.005,21
d) 16.100,86
e) 16.819,21

Comentários:

Vamos aplicar diretamente a fórmula do **Montante** em regime de Juros Compostos e calcular o valor do Montante que o investidor receberá.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 15.000$

$$i = taxa\ de\ juros = 2\%\ ao\ mês = 0{,}02$$

$$t = tempo = 3\ meses$$

Substituindo os valores e calculando o Montante:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 15.000 \times (1 + 0{,}02)^3$$

$$M = 15.000 \times 1{,}02^3$$

$$M = 15.000 \times 1{,}0612 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M = 15.918}$$

Gabarito: Alternativa **B**

21. (CESGRANRIO / EPE - 2010) O gestor financeiro da Cia. Ordem e Progresso S.A., ao analisar determinado investimento, considerou M_1 como o montante produzido pela aplicação de R$ 10.000,00, por 3 meses, à taxa de 3% no regime de juros compostos e M_2 como o montante produzido pelo mesmo valor, no mesmo prazo, à taxa de 3,0909% ao mês no regime de juros simples.

Concluiu, então, que M_1 e M_2, em reais, correspondem, respectivamente, a

a) 10.927,27 e 10.927,27
b) 10.927,27 e 10.600,66
c) 11.920,27 e 11.927,27
d) 10.600,66 e 10.600,66
e) 10.500,60 e 10.927,27

Comentários:

Vamos calcular separadamente cada Montante.

- **Montante 1:** 10.000,00, por 3 meses, à taxa de 3% no regime de juros **COMPOSTOS**.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M_1 = 10.000 \times (1 + 0{,}03)^3$$

$$M_1 = 10.000 \times 1{,}03^3$$

$$M_1 = 10.000 \times 1{,}092727 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M_1 = 10.927{,}27}}$$

- **Montante 2:** 10.000,00, por 3 meses, à taxa de 3,0909% no regime de juros **SIMPLES**.

$$M = C \times (1 + i \times t)$$

$$M_2 = 10.000 \times (1 + 0{,}030909 \times 3)$$

$$M_2 = 10.000 \times (1 + 0{,}092727)$$

$$M_2 = 10.000 \times 1{,}092727 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M_2 = 10.927{,}27}}$$

Gabarito: Alternativa **A**

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Taxa Nominal e Taxa Efetiva

1. **(CESGRANRIO / BB - 2015) Um investimento rende à taxa de juros compostos de 12% ao ano com capitalização trimestral.**

Para obter um rendimento de R$ 609,00 daqui a 6 meses, deve-se investir, hoje, em reais,

a) 6.460
b) 10.000
c) 3.138
d) 4.852
e) 7.271

Comentários:

Primeiro passo é <u>converter a Taxa Nominal para a Taxa Efetiva</u>.

Taxa Nominal é a taxa de juros cuja unidade de tempo **não coincide** com a unidade de tempo do período de capitalização. Observe que a taxa fornecida no enunciado é uma taxa nominal.

$$i_{Nominal} = 12\%\ ao\ ano\ capitalizada\ trimestralmente$$

Nunca resolva um exercício usando a taxa nominal. Sempre devemos passar para a unidade de tempo do período de capitalização. Então tenha em mente: "**quem manda é o período de capitalização**".

E como passamos da unidade de tempo do período da taxa nominal (ano) para a unidade de tempo do período de capitalização (trimestre)?

Basta fazermos uma simples divisão/multiplicação.

Em 1 ano há 4 trimestres. Então, a Taxa Efetiva trimestral será um quarto da taxa anual.

$$i_{Efetiva\ Trimestral} = \frac{12\%}{4} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{i_{Efetiva\ trimestral} = 3\%\ a.t.}}$$

- ✓ Essa será a taxa que devemos utilizar no exercício.

Eu fiz o passo a passo para que você pudesse entender. Na hora da prova, certamente você estará dominando este assunto e irá fazer esta conta de cabeça, acelerando a resolução.

Voltando à resolução.

O enunciado nos questiona o valor a ser investido hoje para obter um rendimento (Juros) de R$ 609,00 daqui a 6 meses. Vamos utilizar a fórmula do Montante em Juros Compostos.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = C + 609$

$C = Capital = C$

$i = taxa\ de\ juros = 3\%\ ao\ trimestre = 0{,}03$

$t = tempo = 6\ meses = 2\ trimestres$

Observe que não sabemos o valor do Montante. Mas, pela definição, sabemos que o Montante é igual ao Capital mais os Juros (609).

A **CESGRANRIO** vai sempre tentar confundir o cadidato nessa "pegadinha". Lembre-se de que a Taxa de Juros e o tempo devem estar, **OBRIGATORIAMENTE**, na mesma unidade de grandeza.

Precisamos transformar a o tempo da unidade "mês" para a unidade "trimestre", uma vez que a taxa efetiva esta na unidade "trimestre". 6 meses são equivalentes a 2 trimestres.

Substituindo os valores e calculando o Capital teremos:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$C + 609 = C \times (1 + 0{,}03)^2$$

$$C + 609 = C \times 1{,}03^2$$

Lembra da dica do "um vírgula alguma coisa ao quadrado"? Primeiro dobra e depois eleva ao quadrado.

$$C + 609 = C \times 1{,}0609$$

$$609 = 1{,}0609C - C$$

$$609 = 0{,}0609C$$

$$C = \frac{609}{0{,}0609} \rightarrow \boldsymbol{C = 10.000}$$

Para obter um rendimento de R$ 609,00 daqui a 6 meses, deve-se investir, hoje, em reais, 10.000.

Gabarito: Alternativa **B**

2. **(CESGRANRIO / Liquigás - 2014) Uma instituição financiou R$ 10.000,00, utilizando uma taxa de juros de 6% ao semestre com capitalização mensal.**

Se o financiamento foi quitado ao final de três meses, os juros foram, aproximadamente, de

a) R$ 100,00
b) R$ 200,00
c) R$ 204,00
d) R$ 300,00
e) R$ 303,00

Comentários:

Primeiro passo é converter a Taxa Nominal para a Taxa Efetiva.

Taxa Nominal é a taxa de juros cuja unidade de tempo **não coincide** com a unidade de tempo do período de capitalização. Observe que a taxa fornecida no enunciado é uma taxa nominal.

$$i_{Nominal} = 6\% \ ao \ semestre \ capitalizada \ mensalmente$$

Nunca resolva um exercício usando a taxa nominal. Sempre devemos passar para a unidade de tempo do período de capitalização. Então tenha em mente: "**quem manda é o período de capitalização**".

E como passamos da unidade de tempo do período da taxa nominal (semestre) para a unidade de tempo do período de capitalização (mês)?

Basta fazermos uma simples divisão/multiplicação.

Em 1 semestre há 6 meses. Então, a Taxa Efetiva mensal será um sexto da taxa semestral.

$$i_{Efetiva\ Mensal} = \frac{6\%}{6} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{i_{Efetiva\ Mensal} = 1\% \ a.m.}}$$

- ✓ Essa será a taxa que devemos utilizar no exercício.

TOME NOTA!

Eu fiz o passo a passo para que você pudesse entender. Na hora da prova, certamente você estará dominando este assunto e irá fazer esta conta de cabeça, acelerando a resolução.

Voltando à resolução.

O financiamento foi quitado ao final de três meses. Vamos calcular o Montante pago por este financiamento.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 10.000$

$i = taxa \ de \ juros = 1\% \ ao \ mês$

$t = tempo = 3 \ meses$

Substituindo os valores e calculando o Montante:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 10.000 \times (1 + 0{,}01)^3$$

$$M = 10.000 \times 1{,}01^3$$

$$M = 10.000 \times 1{,}0303 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{M = 10.303}}$$

De posse do Montante e do Capital, calculamos os Juros.

$$M = C + J$$

$$10.303 = 10.000 + J$$

$$J = 10.303 - 10.000 \quad \rightarrow \boldsymbol{J = 303}$$

Gabarito: Alternativa **E**

3. (CESGRANRIO / BR - 2013) Um capital foi aplicado por dois anos, pelo regime de juros compostos, à taxa nominal aparente de 12% ao ano capitalizados mensalmente e, nesse período, rendeu juros de R$ 2.697,35.

O capital inicial foi, em reais, de aproximadamente

Dado
$(1{,}01)^2 = 1{,}0201$
$(1{,}01)^{12} = 1{,}1268$
$(1{,}01)^{24} = 1{,}2697$

a) 6.080
b) 6.122
c) 8.080
d) 10.000
e) 10.603

Comentários:

Primeiro passo é converter a Taxa Nominal para a Taxa Efetiva.

$$i_{Nominal} = 12\% \ ao \ ano \ capitalizada \ mensalmente$$

Tenha em mente: "**quem manda é o período de capitalização**".

Em 1 ano há 12 meses. Então, a Taxa Efetiva mensal será um doze avos da taxa anual.

$$i_{Efetiva\ Mensal} = \frac{12\%}{12} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{i_{Efetiva\ Mensal} = 1\%\ a.m.}}$$

✓ Essa será a taxa que devemos utilizar no exercício.

Vamos aplicar a fórmula do Montante em regime de Juros Composto e calcular o valor do Capital aplicado.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = C + J = C + 2.697{,}35$

$C = Capital = C$

$i = taxa\ de\ juros = 1\%\ ao\ mês$

$t = tempo = 2\ anos = 24\ meses$

FIQUE ATENTO!

Duas **observações** antes de prosseguirmos:

i. Observe que **não sabemos qual o valor do Montante**. Mas, pela definição, sabemos que o Montante é igual o Capital mais os Juros (R$ 2.697,35).

ii. Perceba que, como a taxa efetiva está na unidade "mês", convertemos o tempo para esta mesma unidade, uma vez que, **obrigatoriamente**, as unidades devem coincidir. 2 anos equivalem a 24 meses.

Continuando a resolução. Vamos substituir os valores e calcular o Capital.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$C + 2.697{,}35 = C \times (1 + 0{,}01)^{24}$$

$$C + 2.697{,}35 = C \times 1{,}01^{24}$$

O enunciado nos fornece que $1{,}01^{24} = 1{,}2697$.

$$C + 2.697{,}35 = 1{,}2697C$$

$$1{,}2697C - C = 2.697{,}35$$

$$0{,}2697C = 2.697{,}35$$

$$C = \frac{2.697{,}35}{0{,}2697} \rightarrow \boldsymbol{C \cong 10.000}$$

Gabarito: Alternativa **D**

4. **(CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) Aplicaram-se R$ 10.000,00 por nove meses à taxa nominal de 12% ao ano com capitalização trimestral. No momento do resgate, pagou-se Imposto de Renda de alíquota 15%, sobre os rendimentos. O valor líquido do resgate foi, em reais, mais próximo de**

a) 10.927
b) 10.818
c) 10.787
d) 10.566
e) 9.287

Comentários:

Primeiro passo é <u>converter a Taxa Nominal para a Taxa Efetiva</u>.

$$i_{Nominal} = 12\%\ ao\ ano\ capitalizada\ trimestralmente$$

Tenha em mente: "**quem manda é o período de capitalização**".

Em 1 ano há 4 trimestres. Então, a Taxa Efetiva trimestral será um quarto da taxa anual.

$$i_{Efetiva\ Trimestral} = \frac{12\%}{4} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{i_{Efetiva\ Trimestral} = 3\%\ a.t.}}$$

✓ Essa será a taxa que devemos utilizar no exercício.

Vamos aplicar a fórmula do Montante em regime de Juros Composto e calcular o valor do Capital aplicado.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 10.000$

$i = taxa\ de\ juros = 3\%\ ao\ trimestre = 0{,}03$

$t = tempo = 9\ meses = 3\ trimestres$

Perceba que, como a taxa efetiva está na unidade "trimestre", convertemos o tempo para esta mesma unidade, uma vez que, **obrigatoriamente**, as unidades devem coincidir. 9 meses equivalem a 3 trimestres.

Substituindo os valores e calculando o Montante:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 10.000 \times (1 + 0{,}03)^3$$

$$M = 10.000 \times 1{,}03^3$$

$$M = 10.000 \times 1{,}0927 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 10.927}}$$

Perceba que este NÃO foi o valor recebido. No momento do resgate, pagou-se **Imposto de Renda de alíquota 15% sobre os rendimentos**.

O rendimento (Juros) desta operação é igual a:

$$J = M - C$$

$$J = 10.927 - 10.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J = 927}}$$

O IR é de 15% sobre o rendimento.

$$IR = \frac{15}{100} \times 927 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{IR \cong 139}}$$

Sendo assim, o Montante "líquido" a receber será igual ao Montante da operação menos o IR pago.

$$M_{líquido} = M - IR$$

$$M_{líquido} = 10.927 - 139 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M_{líquido} = 10.788}$$

Gabarito: Alternativa **B**

Questões Comentadas – CESGRANRIO

Taxas Equivalentes

1. **(CESGRANRIO / CEF - 2021) Um banco possui, atualmente, um modelo de financiamento em regime de juros compostos, em que as parcelas são pagas, mensalmente, a uma taxa de juros de 2% ao mês. Para um certo perfil de clientes, o banco pretende possibilitar o pagamento da dívida a cada três meses, a uma taxa de juros trimestral equivalente à praticada no modelo atual.**

A melhor aproximação para o valor da taxa de juros trimestral desse novo modelo de financiamento é:

a) 2,48%
b) 6,00%
c) 6,12%
d) 7,28%
e) 8,00%

Comentários:

Iremos calcular a **Taxa Efetiva trimestral equivalente à Taxa Efetiva mensal de 2%.**

Ou seja, uma taxa efetiva mensal capitalizada por 3 meses (1 trimestre) resultará em que taxa efetiva trimestral?

Para acharmos a taxa equivalente tomamos como base a **potenciação**.

$$(1 + i_{mensal})^3 = (1 + i_{trimestral})$$

$$(1 + 0{,}02)^3 = (1 + i_{trimestral})$$

$$1{,}02^3 = (1 + i_{trimestral})$$

$$1{,}0612 = 1 + i_{trimestral}$$

$$i_{trimestral} = 1{,}0612 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{trimestral} = 0,0612 \ ou \ 6,12\% \ a.t.}$$

Gabarito: Alternativa **C**

2. **(CESGRANRIO / BB - 2012) Um investimento rende a taxa nominal de 12% ao ano com capitalização trimestral.**

A taxa efetiva anual do rendimento correspondente é, aproximadamente,

a) 12%
b) 12,49%
c) 12,55%
d) 13%
e) 13,43%

Comentários:

- Primeiro passo é converter a Taxa Nominal para a Taxa Efetiva.

Taxa Nominal é a taxa de juros cuja unidade de tempo **não coincide** com a unidade de tempo do período de capitalização. Observe que a taxa fornecida no enunciado é uma taxa nominal.

$$i_{Nominal} = 12\% \ ao \ ano \ capitalizada \ trimestralmente$$

Nunca resolva um exercício usando a taxa nominal. Sempre devemos passar para a unidade de tempo do período de capitalização. Então tenha em mente: "**quem manda é o período de capitalização**".

E como passamos da unidade de tempo do período da taxa nominal (ano) para a unidade de tempo do período de capitalização (trimestre)?

Basta fazermos uma simples divisão/multiplicação.

Em 1 ano há 4 trimestres. Então, a Taxa Efetiva trimestral será um quarto da taxa anual.

$$i_{Efetiva\ Trimestral} = \frac{12\%}{4} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{i_{Efetiva\ trimestral} = 3\%\ a.t.}}$$

A banca nos questiona o valor da Taxa efetiva anual, isto é, da Taxa equivalente anual.

- Segundo passo é calcular a Taxa Efetiva semestral equivalente à Taxa Efetiva trimestral de 6%.

Ou seja, uma taxa efetiva trimestral capitalizada por 4 trimestres (1 ano) resultará em que taxa efetiva anual?

Para acharmos a taxa equivalente tomamos como base a **potenciação**.

$$(1 + i_{trimestral})^4 = (1 + i_{anual})$$

$$(1 + 0{,}03)^4 = (1 + i_{anual})$$

$$1{,}03^4 = 1 + i_{anual}$$

$$1{,}1255 = 1 + i_{anual}$$

$$i_{anual} = 1{,}1255 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{anual} = 0,1255\ ou\ 12,55\%}$$

Gabarito: Alternativa **C**

3. (CESGRANRIO / Liquigás - 2018) Um investidor aplicou uma determinada quantia em um investimento que proporcionou uma rentabilidade de 100% após exatos dois anos de aplicação, no sistema de juros compostos.

Considerando-se que nenhum resgate foi realizado nesse período, o valor mais próximo da taxa anual equivalente proporcionada por esse investimento, nesse sistema de juro, é igual a

a) 40%
b) 41%
c) 43%
d) 45%
e) 50%

Comentários:

Observe que o investimento rendeu 100% no biênio, isto é, em 2 anos. Queremos encontrar a taxa anual que, capitalizada por 2 ano (biênio), equivale a 100%.

Para calcular a taxa equivalente tomamos como base a **potenciação**.

$$(1 + i_{anual})^2 = (1 + i_{biênio})$$

$$(1 + i_{anual})^2 = (1 + 1)$$

$$(1 + i_{anual})^2 = 2$$

$$1 + i_{anual} = \sqrt{2}$$

$$1 + i_{anual} = 1{,}41$$

$$i_{anual} = 1{,}41 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{anual} = 0,41\ ou\ 41\%}$$

TOME NOTA!

Muitos alunos, de tanto resolverem exercícios de matemática básica, decoram que $\sqrt{2}$ é igual a $1{,}41$. Caso você não soubesse (ou tivesse esquecido), teríamos que testar as alternativas para encontrar o valor.

Qual número que vezes ele mesmo (elevado ao quadrado) resultaria em 2. Você não precisa sair chutando números aleatórios. Utilize a "malandragem" de prova. Pegue as alternativas e vá testando.

Começaríamos pela Letra A. No caso já seria nossa resposta.

$$1{,}41 \times 1{,}41 \approx 2$$

Mas, caso não fosse o gabarito, continuaríamos as tentativas.

$$1{,}43 \times 1{,}43 \approx 2{,}05$$

E assim por diante.

$$\vdots$$

Dito isto,

Gabarito: Alternativa **B**

4. **(CESGRANRIO / BASA - 2018) Um valor inicial C_0 foi capitalizado por meio da incidência de juros compostos mensais constantes iguais a 6,09%. Ao final de 6 meses, isto é, após 6 incidências dos juros, gerou-se o montante M. A partir do valor inicial C_0, seria alcançado o mesmo montante M ao final de 12 meses (12 incidências), se os juros compostos mensais constantes tivessem sido iguais a**

a) 1,045%
b) 1,450%
c) 3,045%
d) 3,450%
e) 3,000%

Comentários:

Um valor inicial C_0 foi capitalizado por meio da incidência de juros compostos mensais constantes iguais a 6,09%. Ao final de 6 meses, isto é, após 6 incidências dos juros, gerou-se o montante M.

Pela fórmula dos Juros Compostos temos:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = C_0 \times (1 + 0{,}0609)^6$$

$$\boxed{\boldsymbol{M = C_0 \times 1{,}0609^6} \quad equação\ (I)}$$

Guardemos esta informação.

A banca nos questiona qual seria a taxa de juro para a partir do valor inicial C_0, ser alcançado o mesmo montante M ao final de 12 meses (12 incidências). Vamos, novamente, utilizar a fórmula do Montante em Juros Compostos.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$\boxed{\boldsymbol{M = C_0 \times (1 + i)^{12}} \quad equação\ (II)}$$

Perceba que a taxa agora não será 6,09%. Nós iremos determinar a taxa que aplicada sobre o Capital C_0 em um prazo de 12 meses, resultado no Montante M.

Observe que, no início da resolução (equação I), determinamos que $M = C_0 \times 1{,}0609^6$. Vamos susbtituir este valor na equação (II).

$$M = C_0 \times (1 + i)^{12}$$

$$\cancel{C_0} \times 1{,}0609^6 = \cancel{C_0} \times (1 + i)^{12}$$

$$1{,}0609^6 = (1 + i)^{12}$$

$$1 + i = 1{,}0609^{6/12}$$

$$1 + i = 1{,}0609^{1/2}$$

$$1 + i = \sqrt{1{,}0609}$$

Qual número que elevado ao quadrado será igual a $1{,}0609$?

$$1{,}03 \times 1{,}03 = 1{,}0609$$

Mais uma vez, você "mataria" esta passagem lembrando do macete "primeiro eleva ao quadro depois dobra".

Seguindo:

$$1 + i = 1{,}03$$

$$i = 1{,}03 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i = 0,03\ ou\ 3\%\ ao\ mês}$$

A bem da verdade, o que a banca deseja é saber a taxa mensal que capitalizada por 12 meses será igual a taxa mensal de 6,09% capitalizada por 6 meses.

$$(1 + i)^{12} = (1 + 0{,}0609)^6$$

$$1 + i = 1{,}0609^{6/12}$$

$$1 + i = \sqrt{1{,}0609}$$

$$1 + i = 1{,}03$$

$$i = 1{,}03 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i = 0,03\ ou\ 3\%\ ao\ mês}$$

Gabarito: Alternativa **E**

5. (CESGRANRIO / BR - 2012) Vanessa faz uma aplicação de R$ 400,00 pelo prazo de um ano, à taxa de juros compostos de 10% a.s..

Qual a taxa de juros ao ano que resultaria, a partir do mesmo capital investido, no mesmo montante, no mesmo período?

a) 20% a.a.
b) 21% a.a.
c) 22% a.a.
d) 23% a.a.
e) 24% a.a.

Comentários:

A banca (resumidamente) quer saber qual a taxa anual equivalente a taxa semestral de 10%. No final de resolução iremos tirar a "prova real".

Vamos calcular a taxa anual equivalente à semestral, isto é, a taxa semestral de 10% capitalizada por 2 semestres (1 ano) será equivalente a que taxa anual?

$$(1 + i_{semestral})^2 = (1 + i_{anual})$$

$$(1 + 0{,}1)^2 = (1 + i_{anual})$$

$$1{,}1^2 = 1 + i_{anual}$$

$$1{,}21 = 1 + i_{anual}$$

$$i_{anual} = 1{,}21 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{anual} = 0{,}21\ ou\ 21\%\ ao\ ano}$$

E assim, a resposta seria a Letra **B**.

Vamos tirar a "prova real". Iremos, primeiramente, calcular o Montante do Capital de R$ 400,00 aplicado pelo prazo de 1 ano (2 semestres) a uma taxa semestral de 10%.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 400 \times (1 + 0{,}1)^2$$

$$M = 400 \times 1{,}1^2$$

$$M = 400 \times 1{,}21 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 484}}$$

Secundariamente, vamos calcular o Montante do Capital de R$ 400,00 aplicado pelo prazo de 1 ano a uma taxa anual de 21%.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 400 \times (1 + 0{,}21)^1$$

$$M = 400 \times 1{,}21^1$$

$$M = 400 \times 1{,}21 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 484}}$$

Ou seja, as taxas equivalentes produzem o mesmo Montante (vimos isto bem <u>detalhadamente</u> na parte teórica).

Gabarito: Alternativa **B**

6. **(CESGRANRIO / BNDES - 2004) Qual é a taxa efetiva trimestral correspondente a juros de 30% ao trimestre com capitalização mensal?**

a) 30%
b) 31%
c) 32,5%
d) 32,8%
e) 33,1%

Comentários:

Primeiro passo é <u>converter a Taxa Nominal para a Taxa Efetiva</u>.

$$i_{Nominal} = 30\%\ ao\ trimestre\ capitalizada\ mensalmente$$

Tenha em mente: "**quem manda é o período de capitalização**".

Em 1 trimestre há 3 meses. Então, a Taxa Efetiva mensal será um terço da taxa trimestral.

$$i_{Efetiva\ Mensal} = \frac{30\%}{3} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{i_{Efetiva\ Mensal} = 10\%\ a.m.}}$$

Vamos agora, calcular a taxa efetiva trimestral. Ou seja, a taxa mensal de 10% capitalizada por 3 meses (1 trimestre) equivalerá a que taxa trimestral?

$$(1 + i_{mensal})^3 = (1 + i_{trimestral})$$

$$(1 + 0{,}1)^3 = (1 + i_{trimestral})$$

$$1{,}1^3 = 1 + i_{trimestral}$$

$$1{,}331 = 1 + i_{trimestral}$$

$$i_{trimestral} = 1{,}331 - 1 \rightarrow \boldsymbol{i_{trimestral} = 0{,}331\ ou\ 33{,}1\%}$$

Gabarito: Alternativa **E**

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Convenção Exponencial x Convenção Linear

1. **(CESGRANRIO / BNDES - 2007) Augusto emprestou R$ 30.000,00 a César, à taxa de juros de 10% ao mês. Eles combinaram que o saldo devedor seria calculado a juros compostos no número inteiro de meses e, a seguir, corrigido a juros simples, com a mesma taxa de juros, na parte fracionária do período, sempre considerando o mês com 30 dias.**

Para quitar a dívida 2 meses e 5 dias após o empréstimo, César deve pagar a Augusto, em reais,

a) 39.930,00
b) 39.600,00
c) 37.026,00
d) 36.905,00
e) 36.300,00

Comentários:

Observe que a questão trata da Convenção Linear, onde iremos utilizar o **regime de Capitalização Composta para a parte inteira** do tempo de aplicação e o **regime de Capitalização Simples para a parte fracionária**.

Primeiramente então, vamos calcular o Montante desta dívida em 2 meses (parte inteira) utilizando a fórmula do Montante em regime de Juros Compostos.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 30.000 \times (1 + 0{,}1)^2$$

$$M = 30.000 \times 1{,}1^2$$

$$M = 30.000 \times 1{,}21 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 36.300}}$$

De posse do Montante calculado acima, iremos utilizar a **fórmula do Montante em Juros Simples para a parte fracionária** (10 dias).

$$M = C \times (1 + i \times t)$$

$$M = 36.300 \times \left(1 + 0{,}1 \times \frac{5}{30}\right)$$

Observe que convertemos a unidade do tempo de aplicação (5 dias) para a unidade da taxa de juros (mensal) pois **necessariamente** devem coincidir. 5 dias é igual a 5/30 do mês.

$$M = 36.300 \times \left(1 + 0{,}1 \times \frac{5}{30}\right)$$

$$M = 36.300 \times \left(1 + 0{,}1 \times \frac{1}{6}\right)$$

$$M = 36.300 \times (1 + 0{,}1 \times 0{,}167)$$

$$M = 36.300 \times (1 + 0{,}0167)$$

$$M = 36.300 \times 1{,}0167 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M \cong 36.906}$$

Você poderia também calcular o Montante direto na fórmula do Montante na Convenção Linear. Acredito que é mais fácil entender a sistemática da Convenção do que decorar a fórmula. Mas, aplicando a fórmula teríamos:

$$M = C \times (1 + i)^{t_1} \times (1 + i \times t_2)$$

Onde,

$t_1 = parte\ inteira\ do\ período\ de\ aplicação = 2\ meses$

$t_2 = parte\ fracionária\ do\ período\ de\ aplicação = 5\ dias = 5/30\ \ mês$

Perceba que essa fórmula, nada mais é que a aglutinação dos dois passos que fizemos acima.

Primeiro, aplicamos **Juros Compostos para a parte inteira** do período de aplicação e, posteriormente, **Juros Simples para a parte fracionária**.

Calculando o Montante:

$$M = C \times (1 + i)^{t_1} \times (1 + i \times t_2)$$

$$M = 30.000 \times (1 + 0{,}1)^2 \times \left(1 + 0{,}1 \times \frac{5}{30}\right)$$

$$M = 30.000 \times 1{,}1^2 \times (1 + 0{,}1 \times 0{,}167)$$

$$M = 30.000 \times 1{,}21 \times 1{,}0167 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M \cong 36.906}$$

Gabarito: Alternativa **D**

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Capitalização Composta - Aspectos Matemáticos

1. (CESGRANRIO / BB - 2021) Um cliente deseja fazer uma aplicação em uma instituição financeira, que paga uma taxa de juros compostos de 10% ao ano, por um período de 3 anos, já que, ao final da aplicação, planeja comprar uma TV no valor de $R\$\ 3.500,00$ à vista.

Qual o valor aproximado a ser investido para esse objetivo ser alcançado?

a) $R\$$ 2.629,60
b) $R\$$ 2.450,00
c) $R\$$ 2.692,31
d) $R\$$ 2.341,50
e) $R\$$ 2.525,00

2. (CESGRANRIO / BB - 2021) Em uma carta aos clientes, um investimento é oferecido com a promessa de recebimento de um montante de $R\$\ 8.200,00$ líquidos, após 2 anos, para quem aderisse investindo inicialmente $R\$\ 5.000,00$. O valor líquido pago é obtido após descontados $R\$\ 250,00$ de taxas e impostos. Para melhorar a comunicação com os clientes, julgaram interessante acrescentar a taxa de juros compostos usada no cálculo do valor bruto, isto é, sem o desconto.

Qual é o valor da taxa anual que deve ser acrescentada na carta?

a) 2%
b) 3%
c) 20%
d) 25%
e) 30%

3. (CESGRANRIO / BB - 2021) Uma pessoa deixou de pagar a fatura do cartão de crédito, de modo que, após dois meses, o valor inicial da fatura se transformou em uma dívida de $R\$\ 26.450,00$. Nunca foram feitas compras parceladas e não foram feitas compras adicionais durante esses dois meses.

Considerando-se que foram cobrados, indevidamente, juros compostos de 15% ao mês e que, por determinação judicial, o valor inicial deva ser reconsiderado para uma nova negociação entre as partes, o valor inicial da dívida era de

a) $R\$ \ 18.515{,}00$
b) $R\$ \ 18.815{,}00$
c) $R\$ \ 20.000{,}00$
d) $R\$ \ 21.000{,}00$
e) $R\$ \ 21.115{,}00$

4. **CESGRANRIO / CEF - 2021) Para ampliar o capital de giro de um novo negócio, um microempreendedor tomou um empréstimo no valor de $R\$ \ 20.000,00$, em janeiro de 2021, a uma taxa de juros de 5% ao mês, no regime de juros compostos. Exatamente dois meses depois, em março de 2021, pagou 60% do valor do empréstimo, ou seja, dos $R\$ \ 20.000,00$, e liquidou tudo o que devia desse empréstimo em abril de 2021. A quantia paga, em abril de 2021, que liquidou a referida dívida, em reais, foi de**

a) 11.352,50
b) 11.152,50
c) 10.552,50
d) 10.452,50
e) 10.152,50

5. **(CESGRANRIO / CEF - 2021) Uma pessoa tem uma dívida no valor de $R\$ \ 2.000,00$, vencendo no dia de hoje. Com dificuldade de quitá-la, pediu o adiamento do pagamento para daqui a 3 meses.**

Considerando-se uma taxa de juros compostos de $2\% \ a.m.$, qual é o valor equivalente, aproximadamente, que o gerente do banco propôs que ela pagasse, em reais?

a) $2.020{,}40$
b) $2.040{,}00$
c) $2.080{,}82$
d) $2.120{,}20$
e) $2.122{,}42$

6. **(CESGRANRIO / BB - 2013) Um cliente contraiu um empréstimo, junto a um banco, no valor de R$ 20.000,00, a uma taxa de juros compostos de 4% ao mês, com prazo de 2 trimestres, contados a partir da liberação dos recursos. O cliente quitou a dívida exatamente no final do prazo determinado, não pagando nenhum valor antes disso.**

Dados
$1{,}04^2 \cong 1{,}082$
$1{,}04^3 \cong 1{,}125$
$1{,}04^4 \cong 1{,}170$
$1{,}04^5 \cong 1{,}217$
$1{,}04^6 \cong 1{,}265$
$1{,}04^7 \cong 1{,}316$

Qual o valor dos juros pagos pelo cliente na data da quitação dessa dívida?

a) R$ 5.300,00
b) R$ 2.650,00
c) R$ 1.250,00
d) R$ 1.640,00
e) R$ 2.500,00

7. (CESGRANRIO / BB - 2012) João tomou um empréstimo de R$ 900,00 a juros compostos de 10% ao mês. Dois meses depois, João pagou R$ 600,00 e, um mês após esse pagamento, liquidou o empréstimo.

O valor desse último pagamento foi, em reais, aproximadamente,

a) 240,00
b) 330,00
c) 429,00
d) 489,00
e) 538,00

8. (CESGRANRIO / BB - 2015) Um cliente foi a um banco tomar um empréstimo de 100 mil reais, no regime de juros compostos, a serem pagos após 3 meses por meio de um único pagamento.

Para conseguir o dinheiro, foram apresentadas as seguintes condições:

I - taxa de juros de 5% ao mês, incidindo sobre o saldo devedor acumulado do mês anterior;

II - impostos mais taxas que poderão ser financiados juntamente com os 100 mil reais.

Ao fazer a simulação, o gerente informou que o valor total de quitação após os 3 meses seria de 117.500 reais.

O valor mais próximo do custo real efetivo mensal, ou seja, a taxa mensal equivalente desse empréstimo, comparando o que pegou com o que pagou, é de

a) $\left[\left(1{,}175^{1/3}-1\right)\times 100\right]\%$
b) $\left[\left(1{,}193^{1/3}-1\right)\times 100\right]\%$
c) $\left[\left(1{,}050^{1/3}-1\right)\times 100\right]\%$
d) $\left[\left(1{,}158^{1/3}-1\right)\times 100\right]\%$
e) $\left[\left(1{,}189^{1/3}-1\right)\times 100\right]\%$

9. (CESGRANRIO / BB - 2015) Uma conta de R$ 1.000,00 foi paga com atraso de 2 meses e 10 dias. Considere o mês comercial, isto é, com 30 dias; considere, também, que foi adotado o regime de capitalização composta para cobrar juros relativos aos 2 meses, e que, em seguida, aplicou-se o regime de capitalização simples para cobrar juros relativos aos 10 dias.

Se a taxa de juros é de 3% ao mês, o juro cobrado foi de

a) R$ 64,08
b) R$ 79,17
c) R$ 40,30
d) R$ 71,51
e) R$ 61,96

10. (CESGRANRIO / TRANSPETRO - 2018) Um contrato de prestação de serviços prevê, em caso de atraso do pagamento do serviço realizado, a cobrança de juros de 1% ao mês, sobre o saldo devedor, ou seja, no regime de juros compostos. Além disso, há uma multa adicional de 2% sobre o valor do serviço previsto no contrato. Considere que o comprador pagou com atraso de 6 meses um contrato nesses moldes, cujo valor era de 100 milhões de reais, e que nenhum pagamento intermediário fora efetuado nesse período.

Dado: $1{,}01^6 = 1{,}06152$

Assim, o valor mais próximo do total pago nessa operação, incluindo multa e juros, foi de

a) R$ 106.152.000,00
b) R$ 106.200.000,00
c) R$ 108.000.000,00
d) R$ 108.152.000,00
e) R$ 108.275.000,00

11. (CESGRANRIO / Liquigás - 2018) Uma empresa faz uma aplicação no valor de R$ 1.000.000,00, em um fundo que remunera a uma taxa de 1% ao mês, no regime de juros compostos. Após dois anos, a empresa resgatou o dinheiro, pagando exatamente duas taxas, ambas aplicadas sobre os juros da operação, sendo elas: 15% de imposto de renda e 10% de taxa de performance. Considere para os cálculos que $1,01^{24} = 1,27$.

O valor mais próximo da rentabilidade líquida (já descontadas as taxas) da operação, em reais, é igual a

a) 60.000,00
b) 67.500,00
c) 202.500,00
d) 245.000,00
e) 270.000,00

12. (CESGRANRIO / TRANSPETRO - 2018) Uma empresa comprou um ativo por 18 milhões de reais em janeiro de 2008. Buscando captar recursos, devido a uma crise financeira que atravessa, a empresa estuda vender o ativo, o qual foi avaliado, em janeiro de 2018, no valor de aproximadamente 36 milhões de reais.

Dado

x	2^x
0,1	1,072
0,2	1,149
0,3	1,231
0,4	1,319
0,5	1,414

Se o valor de venda for igual ao avaliado, o valor mais próximo da taxa anual de retorno, proporcionada por esse investimento, considerando-se o sistema de capitalização composta, é

a) 5,8%
b) 7,2%
c) 10,0%
d) 12,5%
e) 14,9%

13. (CESGRANRIO / Liquigás - 2018) Um cliente fez um empréstimo de 200 mil reais, a taxa de 5% ao mês, no sistema de juros compostos, em jan/2018. Após exatos dois meses da data do primeiro empréstimo, em mar/2018, ele pegou mais 100 mil reais, mantendo a taxa e o sistema de juros. Em abr/2018, exatamente um mês após o último empréstimo, liquidou as duas dívidas, zerando o seu saldo devedor.

O valor pago pelo cliente, em milhares de reais, foi de, aproximadamente,

a) 300,0
b) 325,6
c) 336,5
d) 345,0
e) 347,3

14. (CESGRANRIO / TRANSPETRO - 2018) Um ativo, comprado por 100 milhões de dólares, duplicou de valor após 20 anos.

O valor mais próximo da taxa anual de retorno proporcionada por esse investimento, considerando-se o sistema de capitalização composta, é

Dados	
x	2^x
0,03	1,0210
0,04	1,0281
0,05	1,0353
0,06	1,0425
0,07	1,0497

a) 2,1%
b) 2,8%
c) 3,0%
d) 3,5%
e) 4,2%

15. (CESGRANRIO / TRANSPETRO - 2018) Uma pequena empresa planeja comprar um caminhão novo, à vista, cujo preço de mercado equivale a R$ 250.000,00, mas ela não dispõe, no momento, de qualquer valor em caixa para realizar a transação.

Caso a empresa consiga obter um retorno nominal de 5% a.a., com base no valor presente, qual o montante que ela deveria aplicar hoje para viabilizar a compra do caminhão, à vista, daqui a 4 anos, supondo que o preço do bem permaneça inalterado nesse período?

a) R$ 238.095,24
b) R$ 205.676,68
c) R$ 200.500,00
d) R$ 39.406,25
e) R$ 44.323,32

16. (CESGRANRIO / Liquigás - 2018 - Adaptada) Um investidor comprou um título por R$ 500 e, após 6 meses com o título, vendeu-o por R$ 525 no sistema de capitalização composta.

Qual foi o retorno anual obtido pelo investidor?

a) 10,25%
b) 20,5%
c) 10%
d) 25%
e) 5%

17. (CESGRANRIO / Liquigás - 2018) Um investidor aplica R$ 400.000,00, em setembro de 2018, a uma taxa de juro de 10% ao ano, no regime de juro composto. Após um ano da primeira aplicação, faz uma nova aplicação, no valor de R$ 200.000,00, a uma taxa de juro de 12% ao ano, no mesmo regime de juros, mantendo a 1ª aplicação. Completados exatos dois anos da primeira aplicação, em setembro/2020, resgata o total aplicado nas duas operações.

O valor mais próximo, em reais, da rentabilidade bruta da operação, isto é, desconsiderando impostos e taxas, é igual a

a) 64.000
b) 84.000
c) 92.000
d) 108.000
e) 148.000

18. (CESGRANRIO / BR - 2018) Em dois meses, um capital inicial de R$100.000,00 foi corrigido duas vezes, por uma mesma taxa mensal de juros (compostos). Ao final dos dois meses, após a segunda correção, o valor corrigido era de R$104.040,00.

Ao final do primeiro mês, após a primeira correção, o valor corrigido era de

a) R$ 102.000,00
b) R$ 102.018,00
c) R$ 102.020,00
d) R$ 104.000,00
e) R$ 104.036,00

19. (CESGRANRIO / BR - 2012) Pedro pegou R$ 36.000,00 emprestados, a uma taxa de 2% ao mês, em um banco. Essa dívida deveria ser paga no final de 1 ano, mas, ao fim de 5 meses, ele já tinha o dinheiro para saldar o empréstimo. Entretanto, para não ficar descapitalizado, Pedro efetuou o pagamento apenas no fim do mês seguinte.

Qual a quantia, em reais, paga por Pedro ao saldar a dívida?

Dados: $1{,}02^5 \cong 1{,}10$

a) 45.720,00
b) 41.400,00
c) 40.392,00
d) 40.320,00
e) 39.600,00

20. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2011) Um investidor aplicou a quantia de R$ 15.000,00, pelo prazo de 3 meses, num investimento que rende juros compostos de 2% ao mês. O montante que receberá no final da aplicação, em reais, será

a) 15.100,85
b) 15.918,12
c) 16.005,21
d) 16.100,86
e) 16.819,21

21. (CESGRANRIO / EPE - 2010) O gestor financeiro da Cia. Ordem e Progresso S.A., ao analisar determinado investimento, considerou M_1 como o montante produzido pela aplicação de R$ 10.000,00, por 3 meses, à taxa de 3% no regime de juros compostos e M_2 como o montante produzido pelo mesmo valor, no mesmo prazo, à taxa de 3,0909% ao mês no regime de juros simples.

Concluiu, então, que M_1 e M_2, em reais, correspondem, respectivamente, a

a) 10.927,27 e 10.927,27
b) 10.927,27 e 10.600,66
c) 11.920,27 e 11.927,27
d) 10.600,66 e 10.600,66
e) 10.500,60 e 10.927,27

Gabarito

1. A
2. E
3. C
4. C
5. E
6. A
7. E
8. A
9. D
10. D
11. C
12. B
13. C
14. D
15. B
16. A
17. D
18. A
19. C
20. B
21. A

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Taxa Nominal e Taxa Efetiva

1. **(CESGRANRIO / BB - 2015) Um investimento rende à taxa de juros compostos de 12% ao ano com capitalização trimestral.**

Para obter um rendimento de R$ 609,00 daqui a 6 meses, deve-se investir, hoje, em reais,

a) 6.460
b) 10.000
c) 3.138
d) 4.852
e) 7.271

2. **(CESGRANRIO / Liquigás - 2014) Uma instituição financiou R$ 10.000,00, utilizando uma taxa de juros de 6% ao semestre com capitalização mensal.**

Se o financiamento foi quitado ao final de três meses, os juros foram, aproximadamente, de

a) R$ 100,00
b) R$ 200,00
c) R$ 204,00
d) R$ 300,00
e) R$ 303,00

3. **(CESGRANRIO / BR - 2013) Um capital foi aplicado por dois anos, pelo regime de juros compostos, à taxa nominal aparente de 12% ao ano capitalizados mensalmente e, nesse período, rendeu juros de R$ 2.697,35.**

O capital inicial foi, em reais, de aproximadamente

Dado
$(1{,}01)^2 = 1{,}0201$
$(1{,}01)^{12} = 1{,}1268$
$(1{,}01)^{24} = 1{,}2697$

a) 6.080
b) 6.122
c) 8.080
d) 10.000
e) 10.603

4. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) Aplicaram-se R$ 10.000,00 por nove meses à taxa nominal de 12% ao ano com capitalização trimestral. No momento do resgate, pagou-se Imposto de Renda de alíquota 15%, sobre os rendimentos. O valor líquido do resgate foi, em reais, mais próximo de

a) 10.927
b) 10.818
c) 10.787
d) 10.566
e) 9.287

Gabarito

1. B
2. E
3. D
4. B

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Taxas Equivalentes

1. **(CESGRANRIO / CEF - 2021) Um banco possui, atualmente, um modelo de financiamento em regime de juros compostos, em que as parcelas são pagas, mensalmente, a uma taxa de juros de 2% ao mês. Para um certo perfil de clientes, o banco pretende possibilitar o pagamento da dívida a cada três meses, a uma taxa de juros trimestral equivalente à praticada no modelo atual.**

A melhor aproximação para o valor da taxa de juros trimestral desse novo modelo de financiamento é:

a) 2,48%
b) 6,00%
c) 6,12%
d) 7,28%
e) 8,00%

2. **(CESGRANRIO / BB - 2012) Um investimento rende a taxa nominal de 12% ao ano com capitalização trimestral.**

A taxa efetiva anual do rendimento correspondente é, aproximadamente,

a) 12%
b) 12,49%
c) 12,55%
d) 13%
e) 13,43%

3. **(CESGRANRIO / Liquigás - 2018) Um investidor aplicou uma determinada quantia em um investimento que proporcionou uma rentabilidade de 100% após exatos dois anos de aplicação, no sistema de juros compostos.**

Considerando-se que nenhum resgate foi realizado nesse período, o valor mais próximo da taxa anual equivalente proporcionada por esse investimento, nesse sistema de juro, é igual a

a) 40%

b) 41%
c) 43%
d) 45%
e) 50%

4. (CESGRANRIO / BASA - 2018) Um valor inicial C_0 foi capitalizado por meio da incidência de juros compostos mensais constantes iguais a 6,09%. Ao final de 6 meses, isto é, após 6 incidências dos juros, gerou-se o montante M. A partir do valor inicial C_0, seria alcançado o mesmo montante M ao final de 12 meses (12 incidências), se os juros compostos mensais constantes tivessem sido iguais a

a) 1,045%
b) 1,450%
c) 3,045%
d) 3,450%
e) 3,000%

5. (CESGRANRIO / BR - 2012) Vanessa faz uma aplicação de R$ 400,00 pelo prazo de um ano, à taxa de juros compostos de 10% a.s..

Qual a taxa de juros ao ano que resultaria, a partir do mesmo capital investido, no mesmo montante, no mesmo período?

a) 20% a.a.
b) 21% a.a.
c) 22% a.a.
d) 23% a.a.
e) 24% a.a.

6. (CESGRANRIO / BNDES - 2004) Qual é a taxa efetiva trimestral correspondente a juros de 30% ao trimestre com capitalização mensal?

a) 30%
b) 31%
c) 32,5%
d) 32,8%
e) 33,1%

GABARITO

1. C
2. C
3. B
4. E
5. B
6. E

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Convenção Exponencial x Convenção Linear

1. **(CESGRANRIO / BNDES - 2007) Augusto emprestou R$ 30.000,00 a César, à taxa de juros de 10% ao mês. Eles combinaram que o saldo devedor seria calculado a juros compostos no número inteiro de meses e, a seguir, corrigido a juros simples, com a mesma taxa de juros, na parte fracionária do período, sempre considerando o mês com 30 dias.**

Para quitar a dívida 2 meses e 5 dias após o empréstimo, César deve pagar a Augusto, em reais,

a) 39.930,00
b) 39.600,00
c) 37.026,00
d) 36.905,00
e) 36.300,00

Gabarito

1. D

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.