By @kakashi_copiador

Estratégia
Concursos

Aula 01 - Equipe Exatas

CNU (Bloco 1 - Infraestrutura, Exatas e Engenharia) Conhecimentos Específicos - Eixo Temático 5 - Geoprocessamento e Análise de Dados - 2024 (Pós-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos, Monik Begname de Castro, Alexandre Vastella

16 de Janeiro de 2024

Índice

Olá, amigo(a)! Espero que estejam ficando mais à vontade com Estatística!

Nesta aula, vamos estudar **Variáveis Aleatórias Discretas**. Veremos algumas **definições** e suas **propriedades** que são moderadamente cobradas nas provas de concursos e te ajudam a entender melhor a aula de **Distribuições Discretas** de probabilidade.

Vamos lá?

Luana Brandão

Quer me conhecer um pouquinho? Sou Doutora em Engenharia de Produção, pela Universidade Federal Fluminense, e Auditora Fiscal da SEFAZ-RJ. Tornei-me professora de Estatística do Estratégia, para ajudá-lo(a) na sua trajetória rumo à aprovação!

Se tiver alguma dúvida, entre em **contato** comigo!

professoraluanabrandao@gmail.com

@professoraluanabrandao

"O sucesso é a soma de pequenos esforços repetidos dia após dia."

Robert Collier

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

Conceitos Iniciais

Introdução à Estatística Inferencial

Com esta aula, estamos iniciando os estudos em **Estatística Inferencial** **ou** **Inferência Estatística**, que é o ramo da Estatística que nos ajuda a tirar conclusões a respeito de um **todo** (que chamamos de **população**) a partir das observações feitas em uma **parte** dessa população (que chamamos de **amostra**). A inferência é uma técnica importante, pois normalmente **não** é possível conhecer a informação **exata** (por exemplo, altura, idade, salário, etc.) para **toda a população**.

Por exemplo, para conhecer a **altura média dos brasileiros**, os órgãos responsáveis por essa estatística NÃO verificam a altura de TODOS os brasileiros para conhecer exatamente a sua média. Em vez disso, é selecionada uma **amostra** de brasileiros, a partir da qual são feitas as **medições** necessárias. Por fim, com base nessas **medições da amostra**, são feitos os cálculos necessários para tirar **conclusões** a respeito da altura média da **população** de brasileiros.

Vamos destacar os seguintes conceitos do processo que acabamos de descrever:

- A **característica numérica da população** que se deseja conhecer (no nosso exemplo, a altura média da população de brasileiros) é chamada de **parâmetro populacional**;
- A medida correspondente feita na **amostra** (no caso, a altura média dos brasileiros da amostra selecionada) é chamada de **parâmetro de estimativa** ou **estatística da amostra**;
- As **conclusões** a respeito da população feitas a partir da amostra são chamadas de **inferência**.

As etapas desse processo de inferência estão representadas abaixo:

Hoje, vamos começar a estudar a **base** que permeia o processo.

A **inferência** do parâmetro populacional **não** é uma informação **exata**, a qual seria obtida somente se **toda** a população fosse verificada. Como os cálculos são feitos a partir de uma amostra, somente, os resultados vão **depender** da amostra selecionada. Ou melhor, vão **variar** de acordo com a amostra. Por isso, dizemos que as medidas obtidas a partir da amostra são **variáveis aleatórias**!

Variáveis Aleatórias

A definição de **variável aleatória**, ou simplesmente **v.a.**, é uma função que associa um **número real** a cada **ponto amostral**, isto é, a cada elemento do Espaço Amostral.

Com isso, passamos a ter uma **caracterização numérica** do resultado de um experimento ou fenômeno aleatório.

Quando utilizamos o **número 0** (zero) para representar a face CARA e o **número 1** para representar a face COROA, criamos justamente uma **variável aleatória**! Outro exemplo de variável aleatória é atribuir o **número** indicado na face superior do dado {1,2,3,4,5,6} ao resultado do seu lançamento (o que é bastante comum).

Assim como os resultados dos experimentos e fenômenos que representam, os valores das variáveis aleatórias também são **incertos** (variáveis que apresentam valores **certos** **não** são variáveis aleatórias). Apesar dessa incerteza, os resultados das variáveis aleatórias apresentam certo **padrão**, o que torna possível lhes atribuir **probabilidades**.

Por exemplo, se denotarmos a variável que representa o lançamento de uma moeda equilibrada por **X**, então a probabilidade de termos **X = 0** (o que equivale à probabilidade de obtermos a face CARA) é:

$$P(X=0)=\frac{resultados\ favoráveis\ (CARA)}{resultados\ possíveis\ (CARA, COROA)}=\frac{1}{2}$$

Note que mudamos um pouco a forma que escrevemos a probabilidade, pois agora estamos associando-a a uma **variável aleatória** e não mais a um **evento**. Por isso, em vez de escrevê-la como **P(A)**, para representar o evento A, estamos utilizando a forma **P(X = 0)**. Alternativamente, podemos utilizar a forma **P(0)**.

Similarmente, a probabilidade de termos **X = 1** (face COROA) é:

$$P(X=1)=\frac{resultados\ favoráveis\ (COROA)}{resultados\ possíveis\ (CARA, COROA)}=\frac{1}{2}$$

Se denotarmos a variável que representa o resultado do lançamento de um dado equilibrado por Y, então a probabilidade de termos Y = 1 é:

$$P(Y=1)=\frac{resultados\ favoráveis}{resultados\ possíveis}=\frac{1}{6}$$

A probabilidade de qualquer outro resultado do dado é a mesma:

$$P(Y=2)=\frac{1}{6}\qquad P(Y=3)=\frac{1}{6}\qquad P(Y=4)=\frac{1}{6}\qquad P(Y=5)=\frac{1}{6}\qquad P(Y=6)=\frac{1}{6}$$

Nesses dois exemplos, as variáveis aleatórias são **discretas**, pois a **quantidade de valores** que elas podem assumir é **enumerável** (isto é, contável). No caso da moeda, há **2** possíveis resultados; para o dado, há **6** possíveis resultados. Normalmente, os valores possíveis de uma variável discreta são números **racionais**.

> O conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) engloba os números inteiros e decimais (finitos ou infinitos com dízima periódica), ou seja, todos os números que podem ser descritos em forma de **fração**.
>
> **Não** estão englobados os números **irracionais** ($\mathbb{I}$), isto é, os números **infinitos sem dízima periódica**, como as constantes π = 3,1415... e o número neperiano e = 2,718...
>
> Juntos, os racionais e irracionais formam o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$).

Por outro lado, há variáveis aleatórias **contínuas**, cujos resultados **não são enumeráveis**. Essas podem assumir **quaisquer valores** dentro de um **intervalo** (ou conjunto de intervalos), finito ou infinito. Por exemplo, suponha que a variável Z represente a **quantidade de água** que um brasileiro ingere em um dia. Assim, Z pode assumir qualquer valor maior ou igual a 0L.

Para variáveis **contínuas**, **não** atribuímos **probabilidades** aos seus **resultados**. Ou seja, não calculamos a probabilidade de um brasileiro beber **exatamente** 2L de água em um dia, isto é, **exatamente** 2,000000... litros, nem um milésimo de litro a mais nem a menos. Essa probabilidade é sempre **nula**.

No entanto, podemos atribuir **probabilidades** a um **intervalo**, por exemplo, entre 1,95L e 2,05L e **mensurar** os resultados obtidos.

> Para variáveis **contínuas**, há **infinitos** valores possíveis. Porém, **não** é essa a característica que distingue os dois tipos de variável aleatória. Isso porque as variáveis **discretas** também **podem** assumir um número **infinito** de valores, desde que tais valores sejam **enumeráveis**.
>
> Por exemplo, suponha que uma variável aleatória represente o número de carros que chegam em um pedágio. Essa variável poderá assumir os valores 1, 2, 3, ... Não há um limite para a variável, pois sempre será possível chegar mais um carro. Portanto, há **infinitos** valores possíveis. Entretanto, esses valores são **enumeráveis** (contáveis), pois nunca aparecerá meio carro, ou qualquer outra parcela de carro.

Em resumo, as Variáveis Aleatórias Discretas e Contínuas possuem as seguintes características:

Variáveis Aleatórias Discretas	• Quantidade de valores possíveis é **enumerável** (finito ou não) • Atribuímos **probabilidades a resultados específicos**
Variáveis Aleatórias Contínuas	• Assumem qualquer valor dentro de um **intervalo** • Os resultados possíveis são **infinitos e não enumeráveis** • Não atribuímos probabilidade a resultados específicos, apenas a intervalos

(CESPE/2005 – Secretaria de Educação/MG) A identificação do tipo de variável é um requisito importante para a escolha do teste estatístico mais adequado. Acerca das variáveis, julgue o seguinte item.

Os valores das variáveis quantitativas discretas não podem ser contados, mas apenas mensurados.

Comentários:

Os valores das variáveis **discretas** podem ser **contados**, enquanto os valores das variáveis **contínuas** **não** podem ser contados, apenas mensurados.

Gabarito: Errado.

(2017 – SEDUC/MT) Sobre as variáveis serem discretas ou contínuas, analise as afirmativas abaixo, dê valores Verdadeiro (V) ou Falso (F).

( ) A contagem do número de alunos dentro de uma sala de aula só pode ser uma variável discreta, pois é um número inteiro racional e positivo.

( ) A contagem da quilometragem de um corredor em uma pista circular é uma variável contínua, pois este valor pode assumir qualquer valor dentro do intervalo real, no caso múltiplos de π (pi).

( ) O caso do termômetro analógico (de mercúrio), a variável representada nele é uma variável discreta, pois aceita todos os valores intermediários entre duas temperaturas a e b.

Assinale a alternativa que traga, de cima para baixo, a sequência correta.

a) V, V, F

b) V, V, V

c) V, F, V

d) F, F, V

e) F, V, F

Comentários:

Em relação ao primeiro item, o **número de alunos** dentro de uma sala é, de fato, uma variável **discreta**, pois os alunos podem ser enumerados. O número de alunos é um número racional e positivo. Portanto, a afirmativa é verdadeira.

Em relação ao segundo item, a **distância** percorrida por um corredor é uma variável **contínua**, pois pode assumir **quaisquer valores reais**, dentro de determinado intervalo, inclusive valores múltiplos de π, por se tratar de uma circunferência. Portanto, a afirmativa é verdadeira.

Em relação ao terceiro item, por aceitar **todos os valores** intermediários entre quaisquer duas temperaturas, os resultados de um termômetro analógico correspondem uma variável **contínua**. Portanto, a afirmativa é falsa.

Assim, a sequência correta é V, V, F.

Gabarito: A

VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA

Aqui, trataremos apenas de variáveis aleatórias discretas. Como já sabemos, para essas variáveis, podemos atribuir **probabilidades** a resultados **específicos**. É possível calcular a probabilidade de a face superior do dado lançado ser **especificamente** igual a 1, por exemplo.

Ou seja, sendo x um resultado possível para a variável X (no nosso exemplo, temos $x = 1$), então podemos calcular a probabilidade de a variável X assumir tal resultado, isto é, $X = x$:

$$P(X = x)$$

No lançamento de um dado, a probabilidade de obter a face $X = 1$ (ou qualquer outra face) é:

$$P(X = 1) = \frac{1}{6}$$

Agora, vamos supor que tenhamos testado um medicamento em uma amostra de 100 pessoas, das quais 80 pessoas apresentaram melhora em seu quadro. Então, podemos representar os resultados obtidos pela variável Y e dizer que Y = 1 representa o resultado de melhora e Y = 0 representa o resultado em que não houve melhora. Assim, a probabilidade de ter Y = 1 é:

$$P(Y = 1) = \frac{80}{100} = 0{,}8$$

Em outras palavras, podemos definir a probabilidade dessa variável como:

$$P(Y = y) = \frac{n(Y = y)}{n(U)}$$

Em que $n(Y = y)$ representa a **frequência** do resultado $Y = y$ (nesse exemplo, calculamos a probabilidade de Y = 1); e $n(U)$ representa a quantidade de **todos os resultados possíveis**.

Se estivéssemos observando os resultados em uma **amostra**, $n(Y = y)$ representaria o número de vezes em que foi observado o resultado y; e $n(U)$ representaria o número total de observações da amostra, chamado de **tamanho amostral**.

Chamamos essa função que atribui uma probabilidade a um resultado de uma variável aleatória discreta de **função de probabilidade**.

Por se tratar de uma probabilidade, essa função satisfaz aos **axiomas de probabilidade**: $\boldsymbol{P \geq 0}$ e $\boldsymbol{P(U) = 1}$.

TOME NOTA!

i)	$P(X = x) \geq 0$, pois **não** há **probabilidade negativa**;
ii)	Somatório das probabilidades de **todos** os possíveis resultados é igual a 1, pois a probabilidade de todo o **Espaço Amostral** é P(U) = 1.

Vimos que para o lançamento de um dado, a probabilidade de todos os resultados é:

$$P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = P(X = 4) = P(X = 5) = P(X = 6) = \frac{1}{6}$$

O que atende à primeira condição, por se tratar de um valor **positivo**. Para verificar a segunda condição, **somamos** as probabilidades de todos os resultados:

$$P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) =$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

No exemplo dos medicamentos, observamos que a frequência de pessoas que apresentaram melhora foi $P(Y = 1) = 0{,}8$. Então, para que o somatório de todos os possíveis resultados seja P(U) = 1, a frequência de pessoas que **não** apresentaram melhora é:

$$P(Y = 0) = 1 - P(Y = 1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

Assim, observamos que esse exemplo também atende às 2 condições da função de probabilidade, isto é, todos os valores y apresentam valores de probabilidade **não negativos**, $P(Y = y) \geq 0$, e a soma das probabilidades de todos os possíveis valores é **P(U) = 1**.

Em vez de apresentar resultados fixos, como os que acabamos de ver, a função de probabilidade $P(X = x)$ também pode ser definida como uma **função** do valor de x, como no exemplo a seguir.

EXEMPLIFICANDO

A função de probabilidade pode ser definida como:

$$P(x = i) = \frac{2}{3^x} \text{ para } x = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Ou seja, para **x = 1**, temos: $P(\boldsymbol{x} = \mathbf{1}) = \frac{2}{3^{\mathbf{1}}} = \frac{2}{3}$

Para **x = 2**, temos: $P(\boldsymbol{x} = \mathbf{2}) = \frac{2}{3^{\mathbf{2}}} = \frac{2}{9}$

Para **x = 3**, temos: $P(\boldsymbol{x} = \mathbf{3}) = \frac{2}{3^{\mathbf{3}}} = \frac{2}{27}$

Para esse exemplo, podemos observar que os valores de probabilidade são positivos.

Para verificar a segunda propriedade, devemos observar que se trata de uma Progressão Geométrica infinita, com razão $q = \frac{1}{3}$ e termo inicial $A_1 = \frac{2}{3}$, cuja soma é dada por:

$$S_n = \frac{A_1}{1 - q} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = 1$$

Algumas questões fornecem a função de probabilidade com uma **incógnita**, que você deve calcular utilizando essas propriedades.

EXEMPLIFICANDO

Vamos supor a seguinte função de probabilidade, para um valor de k que ainda não conhecemos:

$$P(X = x) = \frac{x}{k} \text{ para } x = 1, 2, 3 \text{ e } 4$$

Ou seja, as probabilidades de X = 1, X = 2, X = 3 e X = 4 são:

$$P(X = \mathbf{1}) = \frac{\mathbf{1}}{k}, \qquad P(X = \mathbf{2}) = \frac{\mathbf{2}}{k}, \qquad P(X = \mathbf{3}) = \frac{\mathbf{3}}{k}, \qquad P(X = \mathbf{4}) = \frac{\mathbf{4}}{k}$$

Para descobrir o valor de k, devemos considerar que o somatório de todas as probabilidades é igual a 1:

$$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$$

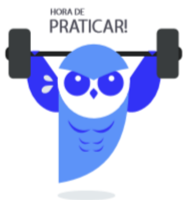
$$\frac{1}{k}+\frac{2}{k}+\frac{3}{k}+\frac{4}{k}=1$$

$$\frac{1+2+3+4}{k}=\frac{10}{k}=1$$

$$k=10$$

Agora, podemos conhecer todas as probabilidades:

$$P(X=1)=\frac{1}{10}, \qquad P(X=2)=\frac{2}{10}, \qquad P(X=3)=\frac{3}{10}, \qquad P(X=4)=\frac{4}{10}$$



(2014 – Fundação João Pinheiro/MG) A fórmula P(x) = 3k/x representa a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória, para x = 1,7,9. Portanto P(1 ≤ x ≤ 7) é igual a

a) 27/237

b) 23/63

c) 1/3

d) 216/237

e) 210/23

Comentários:

Sabendo que a x pode assumir 1, 7 ou 9, a soma dessas probabilidades deve ser igual a 1:

$$P(x=1)+P(x=7)+P(x=9)=1$$

$$\frac{3k}{1}+\frac{3k}{7}+\frac{3k}{9}=1$$

Sabendo que o MMC é $1\times 7\times 9=63$, temos:

$$\frac{3k\times 63+3k\times 9+3k\times 7}{63}=\frac{3k\times(63+9+7)}{63}=\frac{3k\times(79)}{63}=1$$

$$3k\times 79=63$$

$$3k=\frac{63}{79}$$

Portanto, a probabilidade de x é:

$$P(X = x) = \frac{3k}{x} = \frac{63}{79.x}$$

Agora, podemos calcular o valor de $P(1 \leq X \leq 7)$:

$$P(1 \leq X \leq 7) = P(X = 1) + P(X = 7)$$

$$P(X = 1) = \frac{63}{79 \times 1} = \frac{63}{79}$$

$$P(X = 7) = \frac{63}{79 \times 7} = \frac{9}{79}$$

A soma será, portanto:

$$P(1 \leq X \leq 7) = \frac{63}{79} + \frac{9}{79} = \frac{72}{79}$$

Multiplicando o numerador e o denominador desse resultado por 3, obtemos a resposta:

$$P(1 \leq x \leq 7) = \frac{72}{79} = \frac{216}{237}$$

Gabarito: D

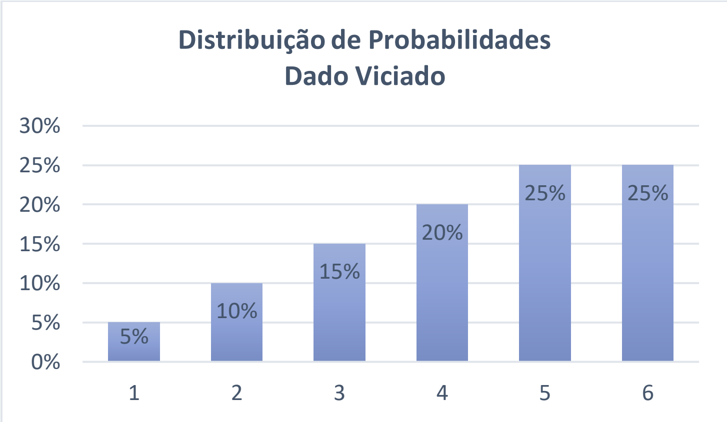
O **conjunto dos pares** $(x, P(X = x))$**,** isto é, o valor da variável e sua respectiva probabilidade, é chamado de **distribuição de probabilidade** da variável.

Uma forma de representá-la é por meio de uma **tabela,** relacionando o valor da variável com a sua probabilidade. A seguir, apresentamos a distribuição de probabilidade para o lançamento de um **dado equilibrado**, em forma de tabela.

$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{P(X = x_i)}$
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$
$\boldsymbol{\sum_i P(X = x_i)}$	**1**

Também é possível utilizar um **gráfico de barras**, com os valores da variável no eixo das abcissas (eixo horizontal) e os respectivos valores de probabilidade no eixo das ordenadas (eixo vertical).

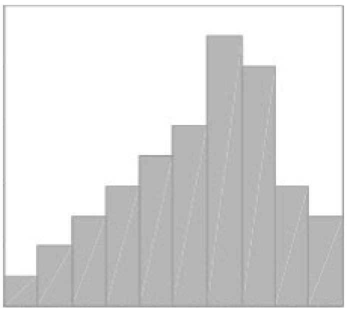
Por exemplo, vamos supor um dado viciado (não equilibrado), com a distribuição de probabilidades apresentada no gráfico a seguir:



Podemos observar que a distribuição de probabilidades de cada face do dado viciado, representada no gráfico acima, corresponde à distribuição representada na tabela abaixo:

x_i	$P(X = x_i)$
1	$5\% = 0{,}05$
2	$10\% = 0{,}10$
3	$15\% = 0{,}15$
4	$20\% = 0{,}20$
5	$25\% = 0{,}25$
6	$25\% = 0{,}25$
$\sum_i P(X = x_i)$	**1**

Pontue-se que o **gráfico de barras** é **diferente** do **histograma**, ilustrado abaixo.



O **histograma** apresenta uma distribuição de frequências para **variáveis contínuas**, como faixas de altura de uma população, por exemplo; enquanto o **gráfico de barras** representa **variáveis discretas**.

Por isso, **não** há **espaço** entre as barras de um **histograma**, enquanto **há espaço** em um **gráfico de barras**.

FIQUE ATENTO!

Dizemos que duas ou mais variáveis aleatórias são **independentes e identicamente distribuídas** (**i.i.d.** ou **IID**) se todas as variáveis forem mutuamente independentes entre si e tiverem a **mesma distribuição** de probabilidade, isto é, mesmos $(x_i, P(x_i))$.

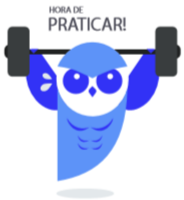
Vamos supor, por exemplo, uma variável Y com a seguinte distribuição de probabilidades:

y_i	$P(Y = y_i)$
1	0,05
2	0,10
3	0,15
4	0,20
5	0,25
6	0,25
$\sum_i P(Y = y_i)$	**1**

Podemos observar que a variável X referente ao dado viciado e esta variável Y apresentam os mesmos resultados possíveis {1, 2, 3, 4, 5, 6} e as mesmas probabilidades associadas a cada resultado possível: P(1) = 0,05; P(2) = 0,10; P(3) = 0,15; P(4) = 0,20; P(5) = 0,25 e P(6) = 0,25.

Portanto, podemos dizer que X e Y apresentam a **mesma distribuição de probabilidade**.

Assim, se X e Y forem **independentes**, concluímos que essas variáveis são **independentes e identicamente distribuídas** (i.i.d.).



(CESPE/2015 – Telecomunicações Brasileiras S.A.) Considerando que Y_1, Y_2, ..., Y_n, ... sejam variáveis aleatórias independentes que satisfazem $P(Y_j = j) = P(Y_j = -j) = 1/2$ para j = 1, 2, ..., julgue o item que se segue.

As variáveis aleatórias Y_1, Y_2, ..., Y_n, ... são identicamente distribuídas.

Comentários:

Para Y_1, temos:

$$P(Y_1 = 1) = P(Y_1 = -1) = ½$$

Para Y_2, temos:

$$P(Y_2 = 2) = P(Y_1 = -2) = ½$$

O que segue indefinidamente. Para um Y_n qualquer, temos:

$$P(Y_n = n) = P(Y_n = -n) = ½$$

Ou seja, os valores de probabilidade são os mesmos, mas os valores que a variável assume (que normalmente chamamos de x, mas o enunciado chamou de j), **não** são os mesmos. Portanto, as variáveis **não** são identicamente distribuídas.

Gabarito: Errado.

MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Neste tópico, veremos três **medidas de tendência central** relevantes para distribuições de probabilidade, quais sejam a esperança, a moda e a mediana. O objetivo dessas medidas é **resumir** a posição central das variáveis aleatórias, no intuito de **facilitar a análise** dos seus resultados.

Esperança Matemática

A esperança matemática de uma variável corresponde ao seu **valor médio**, podendo ser chamada também de **expectância, valor esperado** ou **média**.

Para ilustrar esse conceito, vamos supor que Maria enfrente **trânsito** de sua **casa até o trabalho**. Depois de algum tempo fazendo esse trajeto, Maria terá alguma noção de quanto tempo ela **costuma** levar para chegar no trabalho, isto é, uma **média** do tempo que ela leva.

Essa noção de quanto tempo se "costuma" ou se "espera" levar é justamente a **esperança** da variável. Neste último exemplo, a esperança corresponde ao tempo médio que a pessoa leva de casa ao trabalho; e no exemplo da altura dos brasileiros, a esperança corresponde à média de altura dos brasileiros.

Sendo X uma variável aleatória, a sua esperança é indicada por $\boldsymbol{E(X)}$ ou $\boldsymbol{\mu_X}$.

Para os exemplos dos lançamentos de moedas ou dados, em que os resultados são **equiprováveis**, a esperança corresponde à **média aritmética** dos resultados. Assim, para o lançamento de uma moeda, com faces 0 e 1, temos:

$$E(X) = \frac{0+1}{2} = 0{,}5$$

Para o lançamento de um dado, com faces de 1 a 6, temos:

$$E(Y) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

Contudo, no caso geral, para **qualquer variável aleatória discreta,** a esperança é calculada multiplicando-se cada valor da variável pela sua respectiva probabilidade, e, em seguida, somando-se todos os resultados.

TOME NOTA!

$$\boldsymbol{E(X) = \sum x.P(X = x)}$$

Aplicando essa fórmula geral[1] para a variável que representa o lançamento de uma moeda, em que $P(X=0)=\frac{1}{2}$ e $P(X=1)=\frac{1}{2}$, temos:

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Para o lançamento de um dado, em que todas as probabilidades são de $\frac{1}{6}$, temos:

$$E(Y) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6}$$

$$E(Y) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

Podemos efetuar esse mesmo cálculo, a partir da **tabela de distribuição de probabilidade**, criando **uma coluna** com o produto de x_i e $P(x_i)$. Assim, a esperança corresponderá à **soma** de **todas as linhas dessa nova coluna**.

x_i	$P(x_i)$	$x_i.P(x_i)$
1	$^1/_6$	$1 \times {^1/_6} = {^1/_6}$
2	$^1/_6$	$2 \times {^1/_6} = {^2/_6}$
3	$^1/_6$	$3 \times {^1/_6} = {^3/_6}$
4	$^1/_6$	$4 \times {^1/_6} = {^4/_6}$
5	$^1/_6$	$5 \times {^1/_6} = {^5/_6}$
6	$^1/_6$	$6 \times {^1/_6} = {^6/_6}$
Soma das Colunas	**1**	$\boldsymbol{E(X) = 3,5}$

[1] A rigor, representamos o somatório junto a um índice i:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . P(X = x_i)$$

Esse índice deixa claro que estamos somando para os diferentes valores de i, desde $i = 1$ até $i = n$, ou seja, para $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Porém, nesta aula, daremos preferência à notação sem o índice, no intuito de simplificar a fórmula visualmente.

Algumas questões fornecem uma tabela com vários **cenários** e **estratégias** possíveis, com os resultados e as probabilidades correspondentes; e pedem para você indicar a que resulta no **maior valor esperado**.

No exemplo a seguir, temos 3 possíveis estratégias de negócio e os lucros associados a cada uma delas, considerando 3 possíveis cenários. A probabilidade de cada cenário também consta na tabela.

	Cenário 1 (30%)	Cenário 2 (50%)	Cenário 3 (20%)
Estratégia 1	R$ 1000,00	R$ 600,00	R$ -100,00
Estratégia 2	R$ 800,00	R$ 500,00	R$ 200,00
Estratégia 3	R$ 500,00	R$ 500,00	R$ 500,00

Para escolher a estratégia associada ao maior lucro esperado, vamos calcular a esperança de cada estratégia, multiplicando o lucro de cada cenário pela respectiva probabilidade:

$$E(1) = 1000 \times 30\% + 600 \times 50\% - 100 \times 20\% = 300 + 300 - 20 = 580$$

$$E(2) = 800 \times 30\% + 500 \times 50\% + 200 \times 20\% = 240 + 250 + 40 = 530$$

$$E(3) = 500 \times 30\% + 500 \times 50\% + 500 \times 20\% = 150 + 250 + 100 = 500$$

Assim, podemos concluir que a Estratégia 1 resulta no maior lucro esperado.

(2017 – Secretaria de Saúde/RO) Uma variável aleatória discreta X tem valores possíveis 0, 1, 2 e 3 com probabilidades respectivamente iguais a 0,2, 0,4, 0,3 e 0,1. A média de X é igual a

a) 1,0.

b) 1,3.

c) 1,5.

d) 1,8.

e) 1,9.

Comentários:

Vamos inserir as informações do enunciado na tabela de distribuição de probabilidade a seguir:

x	$P(x)$	$x.P(x)$
0	0,2	$0 \times 0{,}2 = 0$
1	0,4	$1 \times 0{,}4 = 0{,}4$
2	0,3	$2 \times 0{,}3 = 0{,}6$
3	0,1	$3 \times 0{,}1 = 0{,}3$

Assim, a esperança é a soma da última coluna:

$$E(X) = 0 + 0{,}4 + 0{,}6 + 0{,}3 = 1{,}3$$

Gabarito: B.

(VUNESP/2019 – Prefeitura de Campinas/SP) Sabe-se que as probabilidades de um carro transportar 1, 2, 3, 4 ou 5 pessoas são de 0,05, 0,20, 0,40, 0,25 e 0,10, respectivamente. Se em uma cidade chegaram 400 carros, a estimativa de pessoas que chegaram é de

a) 1400.

b) 1600.

c) 1260.

d) 2000.

e) 1320

Comentários:

A estimativa do número de pessoas transportadas **por carro** corresponde à **esperança** dessa distribuição. Inserindo as informações do enunciado na tabela de distribuição, temos:

x	$P(x)$	$x.P(x)$
1	0,05	$1 \times 0{,}05 = 0{,}05$
2	0,20	$2 \times 0{,}2 = 0{,}4$
3	0,40	$3 \times 0{,}4 = 1{,}2$
4	0,25	$4 \times 0{,}25 = 1$
5	0,10	$5 \times 0{,}1 = 0{,}5$

Assim, a esperança é a soma da última coluna:

$$E(X) = 0{,}05 + 0{,}40 + 1{,}20 + 1{,}00 + 0{,}50 = 3{,}15$$

Logo, são transportadas, em média, 3,15 pessoas por carro. Sabendo que chegam 400 carros, então a estimativa de pessoas é de:

400 x 3,15 = 1260

Gabarito: C

(FGV/2022 – PC/AM) Suponha que X, uma variável aleatória discreta, assuma a seguinte distribuição de probabilidade:

X	Proba(X)
0	0
1	1/4
2	1/4
3	K

O valor de K e o valor esperado de X são, respectivamente:

a) 0 e 3/4

b) 1/4 e 3/2

c) 1/2 e 3/4

d) 1/2 e 3/2

e) 1/2 e 9/4

Comentários:

Para resolver essa questão, o primeiro passo é calcular o valor de K, considerando que a soma das probabilidades dos possíveis resultados é igual a 1 (probabilidade de todo o Espaço Amostral):

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$$

$$0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + K = 1$$

$$\frac{1}{2} + K = 1$$

$$K = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

E para calcular a esperança, somamos os produtos dos valores de x com as respectivas probabilidades

$$E(X) = \sum x \times P(X = x)$$

$$E(X) = 0 \times 0 + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1 + 2 + 6}{4} = \frac{9}{4}$$

Gabarito: E

(CESPE/2010 – Agência Brasileira de Inteligência) Sabendo que X é variável aleatória discreta que pode assumir valores inteiros não negativos, julgue o próximo item.

A média de X é não negativa.

Comentários:

A média da variável é a soma dos produtos dos resultados pelas respectivas probabilidades:

$$E(X) = \sum x.P(X = x)$$

Sabemos que a **probabilidade** é sempre **maior ou igual a zero** (condição necessária). Então, se os valores da variável são **não negativos**, o produto de ambos **será sempre maior ou igual a zero** (não negativo). Consequentemente, a média, que corresponde à **soma** desses valores será **maior ou igual a zero**.

Gabarito: Certo.

(CESPE/2015 – Telecomunicações Brasileiras S.A.) Considerando que Y_1, Y_2, ..., Y_n, ... sejam variáveis aleatórias independentes que satisfazem $P(Y_j = j) = P(Y_j = -j) = 1/2$ para j = 1, 2, ..., julgue o item que se segue.

O valor esperado para a variável aleatória Y_j é nulo para todo número natural positivo j

Comentários:

Para ilustrar o cálculo da esperança para Y_j, vamos primeiro calcular a esperança para j = 1 e j = 2.

Sabemos que para Y_1, temos $P(Y_1 = 1) = P(Y_1 = -1) = ½$. Logo, a esperança de Y_1 é:

$$E(Y_1) = -1 \times ½ + 1 \times ½ = -½ + ½ = 0$$

Para Y_2, temos $P(Y_2 = 2) = P(Y_1 = -2) = ½$, então a esperança dessa variável é:

$$E(Y_2) = -2 \times ½ + 2 \times ½ = -1 + 1 = 0$$

Ou seja, para um Y_j qualquer, temos $P(Y_j = j) = P(Y_j = -j) = ½$ e sua esperança é dada por:

$$E(Y_j) = -j \times ½ + j \times ½ = 0$$

Logo, a esperança é nula para qualquer j = 1, 2, ...

Gabarito: Certo.

Propriedades da Esperança

Nesta seção, veremos **propriedades da esperança**. Vale adiantar que essas propriedades valem também para a esperança de variáveis aleatórias contínuas.

Nos enunciados abaixo, consideramos X e Y variáveis aleatórias e k uma **constante real** qualquer.

i) $\boldsymbol{E(k.X) = k.E(X)}$

De acordo com essa propriedade, a esperança de uma variável aleatória X, cujos valores foram multiplicados por uma constante k, é igual a k vezes a esperança da variável aleatória X.

Podemos considerar, como exemplo, um grupo de funcionários com salários distintos, de modo que a média seja R$ 5.000. Segundo essa propriedade, se os salários de todos os funcionários forem **dobrados**, então a **média** também será **dobrada** (passará para R$ 10.000).

Mas vamos confirmar isso!

Digamos que os funcionários tenham os seguintes valores de salário, em mil reais:

X = {1, 2, 2, 2, 3, 5, 7, 7, 10, 11}

Sorteando um desses 10 funcionários ao acaso, o valor esperado do salário do funcionário sorteado pode ser calculado pela média aritmética de todos os 10 salários:

$$E(X) = \frac{1+2+2+2+3+5+7+7+10+11}{10} = \frac{50}{10} = 5$$

Duplicando os salários de todos os funcionários, temos:

Y = 2.X = {2, 4, 4, 4, 6, 10, 14, 14, 20, 22}

Nesse caso, o valor esperado será:

$$E(Y) = \frac{2+4+4+4+6+10+14+14+20+22}{10} = \frac{100}{10} = 10$$

Também podemos multiplicar uma variável por uma constante e representar a distribuição resultante utilizando a **tabela de distribuição de probabilidade**.

Para ilustrar, vamos considerar o mesmo exemplo dos salários. Considerando que há 10 elementos no total, a tabela de distribuição para X é:

x	P(X = x)
1	1/10
2	3/10
3	1/10
5	1/10
7	2/10
10	1/10
11	1/10

E a média (ou esperança) pode ser calculada como:

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{1}{10} + 7 \times \frac{2}{10} + 10 \times \frac{1}{10} + 11 \times \frac{1}{10}$$

$$E(X) = \frac{1}{10} + \frac{6}{10} + \frac{3}{10} + \frac{5}{10} + \frac{14}{10} + \frac{10}{10} + \frac{11}{10} = \frac{50}{10} = 5$$

Para obter a tabela de distribuição de Y = 2X, **duplicamos os valores** da primeira coluna (referentes aos elementos da distribuição) e **mantemos as mesmas probabilidades**:

y	P(Y = y)
2	1/10
4	3/10
6	1/10
10	1/10
14	2/10
20	1/10
22	1/10

Calculando a esperança de Y, observamos que ela é o dobro da esperança de X:

$$E(Y) = 2 \times \frac{1}{10} + 4 \times \frac{3}{10} + 6 \times \frac{1}{10} + 10 \times \frac{1}{10} + 14 \times \frac{2}{10} + 20 \times \frac{1}{10} + 22 \times \frac{1}{10}$$

$$E(X) = \frac{2}{10} + \frac{12}{10} + \frac{6}{10} + \frac{10}{10} + \frac{28}{10} + \frac{20}{10} + \frac{22}{10} = \frac{100}{10} = 10$$

A mesma propriedade vale quando **dividimos** a variável pela constante, isto é:

$$\boldsymbol{E\left(\frac{X}{k}\right) = \frac{E(X)}{k}}$$

Ou seja, se cada salário fosse **dividido** por **2**, então a **média** também seria **divida** por **2**: passaria de R$ 5.000 para R$ 2.500.

Na verdade, essa é a **mesma propriedade** da multiplicação, pois ao invés de pensarmos que estamos dividindo por 2, podemos pensar que estamos multiplicando por $k = \frac{1}{2}$.

ii) $\boldsymbol{E(X + k) = E(X) + k}$

A esperança de uma variável aleatória X, sendo esta somada a uma constante k, é igual a k mais a esperança de X.

Ou seja, se todos os funcionários do nosso exemplo, cuja média salarial era de R$ 5.000, tiverem um aumento de R$ 2.000, então a média desse grupo passará para R$ 7.000, segundo essa propriedade.

Vamos verificar essa propriedade novamente. Sabendo que os salários originais eram X = {1, 2, 2, 2, 3, 5, 7, 7, 10, 11}, então, com um aumento de 2 mil reais, eles passarão a ser:

$$Y = X + 2 = \{3, 4, 4, 4, 5, 7, 9, 9, 12, 13\}$$

Assim, a esperança será:

$$E(Y) = \frac{3+4+4+4+5+7+9+9+12+13}{10} = \frac{70}{10} = 7$$

A mesma propriedade vale quando **subtraímos** a variável pela constante, isto é:

$$\boldsymbol{E(X-k) = E(X) - k}$$

Ou seja, se cada funcionário recebesse uma **redução** de R$ 2.000 do seu salário, então a **média** também seria **reduzida** em R$ 2.000: passaria de R$ 5.000 para R$ 3.000.

Na verdade, essa é a **mesma propriedade** da adição, pois ao invés de pensarmos que estamos subtraindo 2, podemos pensar que estamos somando k = -2.

iii) $\boldsymbol{E(X+Y) = E(X) + E(Y)}$

Por essa propriedade, temos que a esperança da soma de duas variáveis, X e Y, é igual à soma da esperança de X com a esperança de Y.

Digamos que um grupo de homens receba um salário médio E(X) = 5.000; e que um grupo de mulheres receba, em média, E(Y) = 4.000. Ao selecionar uma mulher e um homem, o valor do **salário somado** será, em média:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 5.000 + 4.000 = 9.000$$

Para verificar essa propriedade, vamos utilizar um exemplo menor, pois envolve encontrar **todas as possíveis combinações** dos elementos dos dois grupos e **somá-los**. Suponha, então, o experimento de lançamento de duas moedas (X_1 e X_2), com faces representadas por 0 e 1.

Ao lançarmos ambas as moedas, temos os seguintes valores possíveis:

$$(X_1, X_2) = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

Ao **somarmos** esses valores, temos:

$$X_1 + X_2 = \{(0+0), (0+1), (1+0), (1+1)\} = \{0,1,1,2\}$$

A média é então:

$$E(X_1 + X_2) = \frac{0+1+1+2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Sabendo que o valor esperado dos dois lançamentos é $E(X_1) = E(X_2) = \frac{1}{2}$, então confirmamos que, de fato:

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

A mesma propriedade vale para a **subtração** de variáveis:

$$\boldsymbol{E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2)}$$

iv) $\boldsymbol{E(k) = k}$

Ou seja, o valor esperado de uma constante é igual à própria constante.

Digamos que em um grupo de funcionários, o salário individual de todos seja igual a k = 5 mil reais. Selecionando um funcionário ao acaso, qual será o salário esperado? Certamente, 5 mil reais.

Também podemos obter esse resultado, a partir da fórmula da esperança. Sendo k = 5, então para um grupo de n funcionários, a esperança é:

$$E(k) = \frac{n \times 5}{n} = 5$$

v) Se X e Y são independentes, então $\boldsymbol{E(X.Y) = E(X).E(Y)}$

Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, então a esperança do produto de X e Y é igual ao produto da esperança de X com a esperança de Y.

Supondo novamente o lançamento das duas moedas, em que $(X_1,X_2) = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$. Assim, o produto $X_1 \times X_2$ corresponde ao conjunto:

$$X_1 \times X_2 = \{0,0,0,1\}$$

A média de $X_1 \times X_2$ é, portanto:

$$E(X_1 \times X_2) = \frac{0+0+0+1}{4} = \frac{1}{4}$$

Sabendo que o valor esperado dos dois lançamentos é $E(X_1) = E(X_2) = \frac{1}{2}$, então, confirmamos que, de fato:

$$E(X_1 \times X_2) = E(X_1) \times E(X_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

No entanto, para isso é essencial que as variáveis X e Y sejam **independentes** (como é o caso de lançamentos distintos).

Por outro lado, é possível verificar a identidade E(X.Y) = E(X).E(Y) e as variáveis **não** serem independentes. Ou seja, se as variáveis são **independentes**, **então** podemos concluir que E(X.Y) = E(X).E(Y); mas se E(X.Y) = E(X).E(Y), não sabemos se as variáveis são ou não independentes.

RESUMINDO

i)	$\boldsymbol{E(kX) = k.E(X)}$
ii)	$\boldsymbol{E(X \pm k) = E(X) \pm k}$
iii)	$\boldsymbol{E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)}$
iv)	$\boldsymbol{E(k) = k}$
v)	Se X e Y forem **independentes**, então $\boldsymbol{E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)}$

Essas propriedades podem ser utilizadas **conjuntamente** e para qualquer número de variáveis aleatórias. Por exemplo, sendo X, Y e Z variáveis aleatórias, então:

$$E\left(3.X + \frac{Y}{4} - 2.Z + 1\right) = E(3.X) + E\left(\frac{Y}{4}\right) - E(2.Z) + E(1)$$

$$E\left(3.X + \frac{Y}{4} - 2.Z + 1\right) = 3.E(X) + \frac{E(Y)}{4}.-2.E(Z) + 1$$

HORA DE PRATICAR!

(2016 – Instituto Federal de Educação/BA – *Adaptada*) Sendo X uma variável aleatória, com média μ, então a esperança matemática da função Y = a + bX, com a e b ∈ R, é

a) E(Y) = a + b

b) E(Y) = a

c) E(Y) = bμ

d) E(Y) = a + bμ

e) E(Y) = a^2

Comentários:

Pelas propriedades da esperança, temos E(Y) = E(a + bx) = a +b.E(X). Como μ = E(X), temos:

E(Y) = a + b.μ

Gabarito: D.

(FGV/2017 – IBGE – *Adaptada*) Para o caso de variáveis aleatórias quaisquer, existem diversas propriedades que se aplicam diretamente à esperança matemática. Dentre essas propriedades está:

a) E(X.Y) = E(X).E(Y)

b) E(X+a) = a

c) E(X$\pm$Y) = E(X) $\pm$ E(Y)

d) E(a.X) = E(X), sendo a uma constante qualquer

Comentários:

Em relação à alternativa A, podemos afirmar que E(X.Y) = E(X).E(Y) **somente se** X e Y forem **independentes**. Como o enunciado não menciona que X e Y são independentes, então a alternativa A está incorreta.

Em relação à alternativa B, temos a seguinte propriedade da esperança:

$$E(X + a) = E(X) + a$$

Portanto, a alternativa B está incorreta.

Em relação à alternativa C, temos de fato a seguinte propriedade, para **quaisquer** variáveis aleatórias X e Y:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y)$$

Portanto, a alternativa C está correta. Em relação à alternativa D, sabemos que: E(a.X) = a.E(X). Portanto, a alternativa D está incorreta.

Resposta: C.

Moda

A moda de uma variável aleatória é o seu valor **mais provável**, isto é, o **valor com maior probabilidade.**

No exemplo de lançamento de duas moedas, X_1 e X_2, a soma das variáveis resulta no seguinte conjunto de resultados possíveis:

$$X = X_1 + X_2 = \{0,1,1,2\}.$$

Assim, a probabilidade de cada resultado é:

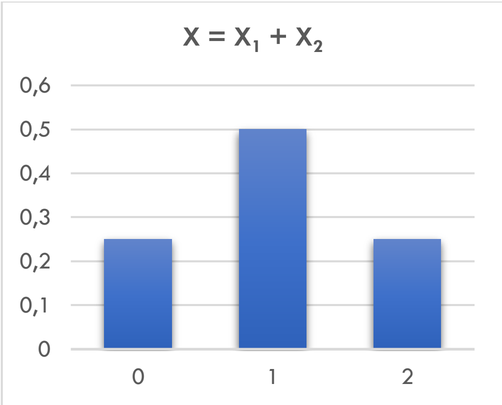
$$P(X = 0) = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$P(X = 1) = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

$$P(X = 2) = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Como a probabilidade de X = 1 é maior que as demais, então concluímos que a **moda** dessa variável é **X = 1**.

No gráfico de barras que representa a distribuição de probabilidades de uma variável, a moda pode ser identificada visualmente, pois estará associada à coluna mais alta, como representado abaixo.

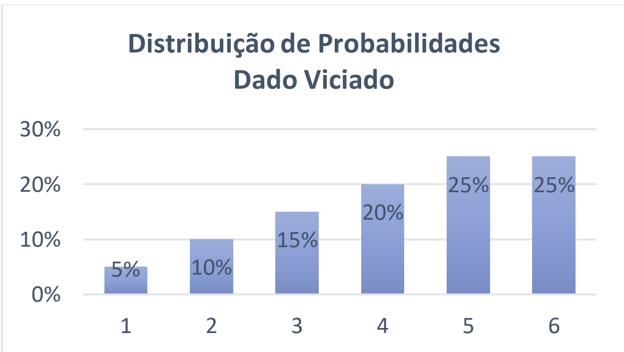


A moda é um valor da **variável aleatória** e **não** a sua **probabilidade**. Assim, no gráfico de barras, a moda estará no **eixo horizontal**.

Se estivermos lidando com uma amostra, a moda, chamada de **moda amostral**, corresponde ao valor da variável obtido com **maior frequência**.

É possível haver **mais de uma moda**, quando a **maior probabilidade** estiver associada a **mais de um resultado**.

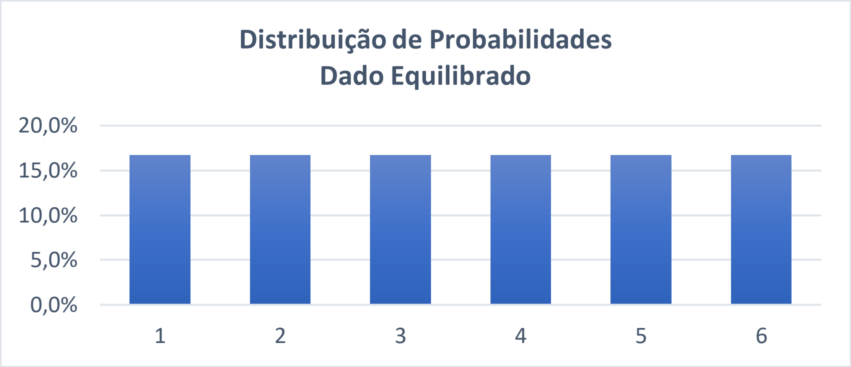
No exemplo anterior do dado viciado, tanto a face 5 quanto a face 6 apresentavam a maior probabilidade, de 25%.



Com 2 modas, a distribuição é chamada **bimodal**.

Uma distribuição **trimodal** apresenta 3 modas e uma distribuição **multimodal** apresenta múltiplas modas.

Por outro lado, também é possível que uma distribuição **não tenha moda**, o que ocorre todos os resultados da variável são **equiprováveis**, como é o caso do lançamento de uma moeda equilibrada e de um dado equilibrado, como ilustrado abaixo.



Nessa situação, a distribuição é dita **amodal**.

Propriedades da Moda

Nesta seção, veremos **propriedades da moda**, sendo X uma variável aleatória e k uma **constante real**.

i) $\boldsymbol{Mo(k.X) = k.Mo(X)}$

Quando uma variável X é multiplicada por uma constante k, a sua moda é igual k vezes a moda de X. Considerando o exemplo dos salários dos funcionários, se os salários dobram, a nova moda também será o dobro da moda anterior.

Para ilustrar, vamos considerar novamente os seguintes valores de salário, em mil reais:

X = {1, 2, 2, 2, 3, 5, 7, 7, 10, 11}

Podemos observar que a moda é igual a 2 mil reais. **Duplicando** os salários de todos os funcionários, temos:

2.X = {2, 4, 4, 4, 6, 10, 14, 14, 20, 22}

E a nova moda é igual a 4 mil reais, que é o dobro da moda anterior.

A mesma propriedade vale quando **dividimos** a variável pela constante, isto é:

$$\boldsymbol{Mo\left(\frac{X}{k}\right) = \frac{Mo(X)}{k}}$$

Ou seja, se cada salário fosse **dividido** por **2**, então a **moda** também seria **dividida** por **2**: passaria de 2 mil reais para mil reais.

ii) $\boldsymbol{Mo(X+k) = Mo(X) + k}$

Quando somamos uma constante k a uma variável X, a sua moda é acrescida da mesma constante k.

Em relação ao exemplo dos salários dos funcionários, se há um aumento de 3 mil reais no salário, a moda também terá esse mesmo aumento: passará de 2 mil reais para 5 mil reais.

Para ilustrar, sabendo que os salários originais eram X = {1, 2, 2, 2, 3, 5, 7, 7, 10, 11}, com um aumento de 3 mil reais, eles passarão a ser:

X + 2 = {4, 5, 5, 5, 6, 8, 10, 10, 13, 14}

Podemos observar que a nova moda é, de fato, de 5 mil reais.

A mesma propriedade vale quando **subtraímos** a variável pela constante, isto é:

$$\boldsymbol{Mo(X-k) = Mo(X) - k}$$

Ou seja, se cada funcionário recebesse uma **redução** de mil reais do seu salário, então a **moda** também seria **reduzida** em mil reais: passaria de 2 mil reais para mil reais.

i) $\boldsymbol{Mo(k.X) = k.Mo(X)}$
ii) $\boldsymbol{Mo(X \pm k) = Mo(X) \pm k}$

(FCC/2018 – Prefeitura de Macapá/AP – *Adaptada*) A medida de tendência central que representa o valor com maior frequência na distribuição de uma amostra é a

a) média amostral.

b) variância.

c) amplitude total.

d) mediana.

e) moda amostral.

Comentários:

A moda de uma amostra é o valor obtido com maior frequência.

Gabarito: E.

(CESPE/2015 – Agente do Departamento Penitenciário Nacional)

quantidade diária de incidentes (*N*)	frequência relativa
0	0,1
1	0,2
2	0,5
3	0,0
4	0,2
total	1

Considerando os dados da tabela mostrada, que apresenta a distribuição populacional da quantidade diária de incidentes (N) em determinada penitenciária, julgue o item que se segue.

A moda da distribuição de N é igual a 4, pois esse valor representa a maior quantidade diária de incidentes que pode ser registrada nessa penitenciária.

Comentários:

A moda é o valor com maior frequência relativa, que é igual a 0,5.

Essa frequência está associada a N = 2, então a moda é N = 2.

Gabarito: Errado.

(CESPE/2018 – Departamento de Polícia Federal)

	dia				
	1	2	3	4	5
X (quantidade diária de drogas apreendidas, em kg)	10	22	18	22	28

Tendo em vista que, diariamente, a Polícia Federal apreende uma quantidade X, em kg, de drogas em determinado aeroporto do Brasil, e considerando os dados hipotéticos da tabela precedente, que apresenta os valores observados da variável X em uma amostra aleatória de 5 dias de apreensões no citado aeroporto, julgue o próximo item.

A moda da distribuição dos valores X registrados na amostra foi igual a 22 kg.

Comentários:

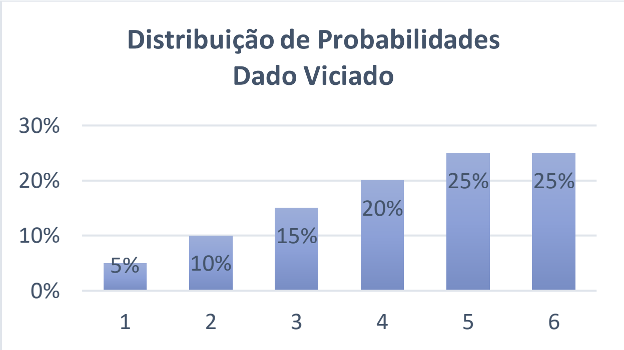
A moda de uma amostra é o valor obtido com maior frequência. No caso, foram apreendidos 22kg em 2 dias, enquanto as demais quantidades foram apreendidas em um único dia somente.

Gabarito: Certo

Mediana

A mediana de uma variável é o valor que divide a distribuição em **duas partes com mesma probabilidade**, de modo que a probabilidade dos valores menores ou iguais à mediana é igual a **50%** e a probabilidade dos valores maiores ou iguais à mediana é igual a **50%**.

Para ilustrar, o gráfico replicado a seguir representa a distribuição de probabilidades do dado viciado que vimos anteriormente.

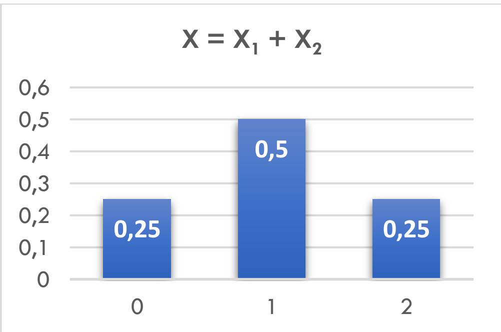


Podemos observar que a mediana está entre X = 4 e X = 5, pois a probabilidade associada aos valores menores ou iguais a 4 é de 50% e a probabilidade associada aos valores maiores ou iguais a 5 é igual a 50%.

Por convenção, quando a mediana está entre 2 valores, consideramos a média aritmética desses valores:

$$Md = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$$

Agora, vamos considerar o exemplo em que somamos os resultados do lançamento de duas moedas, conforme o gráfico replicado a seguir:



Neste caso, temos 25% menor que 1 e 75% menor ou igual a 1; por outro lado, também temos 25% maior que a e 75% maior ou igual a 1. Ainda assim, a mediana será igual a 1. *Afinal, não faz sentido ela ser igual a 0 e nem igual a 2*.

Então, vamos ajustar a definição: a probabilidade dos valores menores ou iguais à mediana é de **pelo menos** 50%; e a probabilidade dos valores são maiores ou iguais à mediana também é de **pelo menos** 50%.

Propriedades da Mediana

As **propriedades da mediana** que veremos nesta seção são as mesmas das propriedades da moda que vimos anteriormente.

i) $\boldsymbol{Md(k.X) = k.Md(X)}$

Quando uma variável X é multiplicada por uma constante k, a sua mediana é igual k vezes a mediana de X.

Considerando o exemplo dos salários dos funcionários, se os salários dobram, a nova mediana também será o dobro da mediana anterior.

Para ilustrar, vamos considerar o mesmo exemplo dos salários, mas agora vamos analisar a tabela de distribuição de probabilidade da variável X = {1, 2, 2, 2, 3, 5, 7, 7, 10, 11}:

X	P(X = x)
1	10%
2	30%
3	10%
5	10%
7	20%
10	10%
11	10%

Podemos observar que a mediana está entre 3 e 5, pois 50% dos valores são menores ou iguais a 3 e 50% dos valores são maiores ou iguais a 5, de modo que a mediana é, por convenção:

$$Md(X) = \frac{3+5}{2} = 4$$

Duplicando os salários de todos os funcionários, temos s seguinte tabela de distribuição de probabilidade:

2.X	P(X = x)
2	10%
4	30%
6	10%
10	10%
14	20%
20	10%
22	10%

Agora, a mediana está entre 6 e 10, pois 50% dos valores são menores ou iguais a 6 e 50% dos valores são maiores ou iguais a 10, de modo que a nova mediana é:

$$Md(2.X) = \frac{6+10}{2} = 8$$

Que é o dobro da mediana anterior.

A mesma propriedade vale quando **dividimos** a variável pela constante, isto é:

$$\boldsymbol{Md\left(\frac{X}{k}\right)=\frac{Md(X)}{k}}$$

Ou seja, se cada salário fosse **dividido** por **2**, então a **mediana** também seria **dividida** por **2**: passaria de 4 mil reais para 2 mil reais.

ii) $\boldsymbol{Md(X+k)=Md(X)+k}$

Quando somamos uma constante k a uma variável X, a sua mediana é acrescida da mesma constante k.

Em relação ao exemplo dos salários dos funcionários, se há um aumento de 3 mil reais no salário, a mediana também terá esse mesmo aumento: passará de 4 mil reais para 7 mil reais. Vejamos:

X + 3	P(X = x)
4	10%
5	30%
6	10%
8	10%
10	20%
13	10%
14	10%

E a nova mediana está entre 6 e 8:

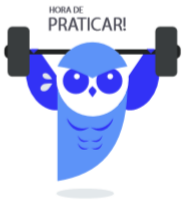
$$Md(X+3)=\frac{6+8}{2}=7$$

A mesma propriedade vale quando **subtraímos** a variável pela constante, isto é:

$$\boldsymbol{Mo(X-k)=Mo(X)-k}$$

Ou seja, se cada funcionário recebesse uma **redução** de mil reais do seu salário, então a **mediana** também seria **reduzida** em mil reais: passaria de 4 mil reais para 3 mil reais.

i) $\boldsymbol{Md(k.X)=k.Md(X)}$
ii) $\boldsymbol{Md(X\pm k)=Md(X)\pm k}$



(CESPE/2020 – ME) Considerando que R representa uma variável quantitativa cuja média, mediana e variância são, respectivamente, iguais a 70, 80 e 100, e que $U = \frac{R}{10} - 7$, julgue o próximo item, acerca das variáveis U e R.

A mediana de U é negativa.

Comentários:

De acordo com as propriedades da mediana que vimos, a mediana de $U = \frac{R}{10} - 7$ é dada por:

$$Md(U) = \frac{R}{10} - 7 = \frac{Md(R)}{10} - 7$$

O enunciado informa que a mediana de R é Md(R) = 80, logo a mediana de U é:

$$Md(U) = \frac{80}{10} - 7 = 8 - 7 = 1$$

Ou seja, a mediana é **positiva**.

Gabarito: Errado.

FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA

A **função de distribuição acumulada** de uma variável aleatória (ou simplesmente **f.d.a** ou **função de distribuição**) apresenta a **probabilidade acumulada** de todos os valores **menores ou iguais** a determinado valor x.

TOME NOTA!

$$\boxed{\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x)}}$$

Ou seja, equivale à **soma** de **todas as probabilidades menores ou iguais** ao valor x.

Por exemplo, no experimento de lançar um dado, a probabilidade de cada uma das faces, numeradas de 1 a 6, é $\frac{1}{6}$. Assim, o valor da função de distribuição acumulada para X = 1 equivale à probabilidade de X = 1, uma vez que não há valor menor:

$$F(1) = P(X \leq 1) = P(X = 1) = \frac{1}{6}$$

Para X = 2, a f.d.a. corresponde à soma das probabilidades de X = 1 e de X = 2:

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$F(2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

Para X = 3, temos a soma das probabilidades de X = 1, X = 2 e X = 3:

$$F(3) = P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$F(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

E assim sucessivamente.

Alternativamente, podemos somar a **probabilidade** no ponto $\boldsymbol{x}$ à **função de distribuição acumulada** no **ponto anterior**. Dessa forma, a função de distribuição acumulada para X = 3 é calculada como:

$$F(3) = P(X \leq 3) = \boldsymbol{P(X = 3)} + \boldsymbol{F(2)} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$$

Para X = 4, temos:

$$F(4) = P(X \leq 4) = P(X = 4) + F(3) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6}$$

E assim por diante.

Também podemos calcular os valores da f.d.a., incluindo uma nova coluna na **tabela da distribuição de probabilidade**. Para preenchê-la, basta somarmos o valor da função acumulada **acima** (valor de **X anterior**), com o valor da **probabilidade** da linha em questão (valor de **X atual**), como ilustrado pelas setas para **F(3)**.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{P(X = x)}$	$\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x)}$
1	$^1/_6$	$^1/_6$
2	$^1/_6$	$^2/_6$
3	$^1/_6$	$^3/_6$
4	$^1/_6$	$^4/_6$
5	$^1/_6$	$^5/_6$
6	$^1/_6$	$^6/_6$

Algumas questões de prova apresentariam essa f.d.a. da seguinte forma:

$$F(x) = \begin{cases} 0, se\ x < 1 \\ ^1/_6, se\ 1 \leq x < 2 \\ ^1/_3, se\ 2 \leq x < 3 \\ ^1/_2, se\ 3 \leq x < 4 \\ ^2/_3, se\ 4 \leq x < 5 \\ ^5/_6, se\ 5 \leq x < 6 \\ 1, se\ x \geq 6 \end{cases}$$

Também podemos calcular a função de distribuição acumulada para uma **amostra**, chamada de **distribuição amostral ou empírica acumulada**. Nessa situação, substituímos as probabilidades pelas **frequências relativas** observadas na amostra.

De maneira geral, a função acumulada de uma variável aleatória X (discreta ou contínua) apresenta as seguintes **características**:

i) F é **não decrescente**, porque as probabilidades são sempre **somadas**.

ii) Por ser uma **probabilidade**, a f.d.a. também assume valores somente entre 0 e 1:

$$\boldsymbol{0 \leq F(x) \leq 1}$$

FIQUE ATENTO!

> A função de distribuição acumulada $\boldsymbol{F(x)}$ é **definida** em **toda a reta real**, ou seja, ela pode ser calculada para **qualquer valor de** $\boldsymbol{x}$.

Isso significa que a função de distribuição **não** assume valores apenas nos pontos dos possíveis resultados da variável. Utilizando o mesmo exemplo do dado, podemos calcular o valor da função de distribuição em outros pontos **diferentes** de X = 1, X = 2, X = 3, ..., X = 6.

Por exemplo, para X = 0,5, a f.d.a. corresponde à soma das probabilidades de todos os valores menores ou iguais a 0,5. Como o **menor valor possível é X = 1**, então a probabilidade acumulada até X = 0,5 é **nula**:

$$F(0{,}5) = P(X \leq 0{,}5) = 0$$

> De forma geral, podemos dizer que, para os valores de x **menores** que o **menor valor possível da variável** (no exemplo do dado, para x < 1), o valor da f.d.a. é $\boldsymbol{F(x) = 0}$.

Para X = 8,1, a f.d.a. corresponde à soma das probabilidades de todos os valores menores ou iguais a 8,1. Como o **maior valor possível é X = 6**, então a probabilidade acumulada até X = 8,1 é igual à probabilidade acumulada até X = 6, isto é, à probabilidade de todo o Espaço Amostral:

$$F(8{,}1) = P(X \leq 8{,}1) = P(X \leq 6) = 1$$

> De forma geral, podemos dizer que, para os valores de x **maiores ou iguais** ao **maior valor possível da variável** (no caso do dado, para $x \geq 6$), o valor da f.d.a. é $\boldsymbol{F(x) = 1}$.

Para X = 4,7, a f.d.a. corresponde à soma das probabilidades de todos os valores menores ou iguais a 4,7. Como as faces do dado são valores **inteiros**, a probabilidade acumulada até X = 4,7 é igual à probabilidade acumulada até X = 4:

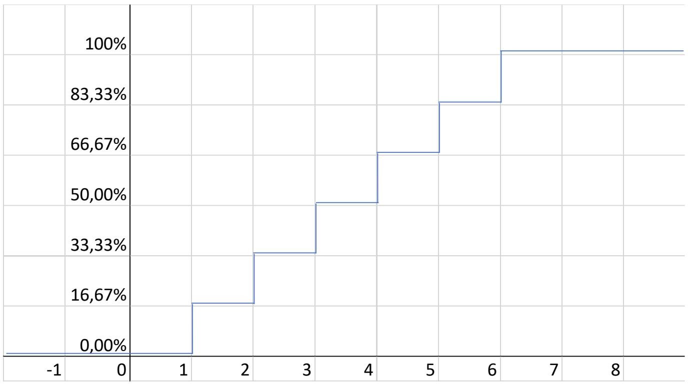
$$F(4{,}5) = P(X \leq 4{,}5) = P(X \leq 4) = \frac{4}{6}$$

Similarmente, para X = 5,3, a f.d.a. corresponde à probabilidade acumulada até X = 5:

$$F(5{,}3) = P(X \leq 5{,}3) = P(X \leq 5) = \frac{5}{6}$$

> A f.d.a. pode ser calculada para **qualquer** valor de x, mas os seus valores serão **alterados** somente nos pontos dos **possíveis resultados** da variável.

Para o nosso exemplo do dado, os valores da f.d.a. serão alterados somente para X = 1, X = 2, X = 3, ..., X = 6. Veja, no gráfico abaixo, como a f.d.a. dá saltos para esses valores de x.

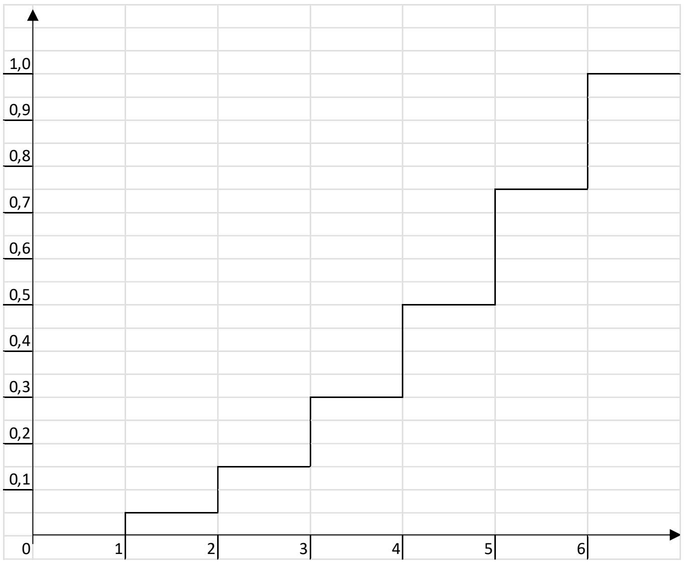


O tamanho de cada "**salto**" no gráfico da f.d.a. corresponde à **probabilidade** em cada ponto x. Nesse exemplo, os "saltos" são todos **iguais**, pois os valores de X são todos **equiprováveis**.

Para o exemplo do dado viciado, temos a seguinte f.d.a.:

$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{P(Y = y)}$	$\boldsymbol{F(y) = P(Y \leq y)}$
1	0,05	0,05
2	0,10	0,15
3	0,15	0,30
4	0,20	0,50
5	0,25	0,75
6	0,25	1,00

Assim, o gráfico da f.d.a. para o dado viciado é:



Observe que os "saltos" apresentam tamanhos diferentes, uma vez que as probabilidades não são todas iguais.

Sabendo que esses "saltos" representam as **diferenças** da função acumulada em cada ponto, é possível percorrer o caminho **inverso**, ou seja, calcular a **probabilidade** $P(X = x)$ de cada ponto, pela **diferença** entre o valor da f.d.a. **no ponto** e o valor da f.d.a. **no ponto anterior**.

Por exemplo, para um dado equilibrado, a probabilidade da face $X = 4$ pode ser calculada pela diferença entre os valores da f.d.a. nos pontos X = 4 e X = 3:

$$P(X = 4) = F(4) - F(3) = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

Para o nosso exemplo do dado **viciado**, temos:

$$P(Y = 4) = F(4) - F(3) = 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2$$

É possível calcular, ainda, a probabilidade de um **intervalo** de valores, a partir da f.d.a. Para o nosso exemplo do dado equilibrado, a probabilidade do intervalo $P(2 < X \leq 5)$ pode ser calculada pela diferença entre a f.d.a. para x = 5 e a f.d.a. para x = 2:

$$P(2 < X \leq 5) = F(5) - F(2) = \frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$$

Mas, para isso, é importante verificar se a **igualdade** está ou não **contemplada** em cada extremo do intervalo. A diferença entre a f.d.a. no ponto X = 5 e a f.d.a. no ponto X = 2 fornece a probabilidade de a face do dado ser **maior que** 2 e **menor ou igual** a 5.

$$F(5) - F(2) = P(X \leq 5) - P(X \leq 2) = P(2 < X \leq 5)$$

Isso porque, no ponto X = 5, a f.d.a. contempla a probabilidade para todo valor **menor ou igual** a 5 e no ponto X = 2, ela contempla a probabilidade para todo valor **menor ou igual** a 2. Logo, quando subtraímos esta da primeira, teremos a probabilidade de todo valor **menor ou igual** a 5 e **maior que** 2.

TOME NOTA!

De maneira geral, para $a < b$, temos:

$$\boldsymbol{F(b) - F(a) = P(a < X \leq b)}$$

Se precisarmos de um intervalo de uma forma diferente, precisaremos **adaptá-lo** para que fique dessa forma.

FIQUE ATENTO!

Se o **extremo inferior** estiver **contemplado** no intervalo, ou seja, se o intervalo for:

$$P(a \leq X \leq b)$$

fazemos a adaptação buscando um valor **menor** que a como **novo extremo inferior**, o qual **não** estará contemplado no novo intervalo.

No exemplo do dado, se a face 2 estiver **contemplada** no intervalo, ou seja, se o intervalo for $2 \leq X \leq 5$, então fazemos a adaptação, **subtraindo** 1 unidade do extremo inferior, o qual será 2 – 1 = 1:

$$P(2 \leq X \leq 5) = P(1 < X \leq 5) = F(5) - F(1)$$

$$P(2 \leq X \leq 5) = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

Por outro lado, se **extremo superior não** estiver **contemplado** no intervalo, ou seja, se o intervalo for $a < X < b$, então fazemos a adaptação buscando um valor **menor** que b como **novo extremo superior**, o qual estará **contemplado** no novo intervalo.

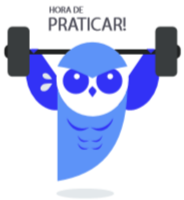
Por exemplo, se a face 5 **não** estiver contemplada, ou seja, se o intervalo for $2 < X < 5$, fazemos a adaptação, **subtraindo** 1 unidade do extremo superior, o qual será 5 – 1 = 4:

$$P(2 < x < 5) = P(2 < x \leq 4) = F(4) - F(2)$$

$$P(2 < x < 5) = \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{2}{6}$$

Se o intervalo for da forma $a \leq x < b$, faremos **as duas adaptações**, ou seja, buscamos um valor **menor** que a **e** um valor **menor** que b:

$$P(2 \leq x < 5) = P(1 < X \leq 4) = F(4) - F(1) = \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$



(FGV/2018 – ALERO) Uma variável aleatória discreta X tem função de probabilidade dada por:

x	-2	-1	0	1
p(x)	0,1	0,2	0,3	0,4

Se F(x) representa a função de distribuição de X, ∀ x real, então F(-0,8) é igual a

a) 0,3.

b) 0,4.

c) 0,5.

d) 0,6.

e) 1,0.

Comentários:

A função acumulada F(-0,8) corresponde à probabilidade P(X ≤ -0,8), que nesse caso é igual à soma das probabilidades P(X = –2) + P(X = –1):

$$F(-0{,}8) = P(X \leq -0{,}8) = P(X = -2) + P(X = -1) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$$

Gabarito: A

(FGV/2015 – TJ/RO) A função distribuição de probabilidade acumulada da variável "número de anos de experiência de magistrados" de um dado tribunal é dada por:

Anos (X)	0	5	10	15	25	35
F(x)	0	0,30	0,48	0,69	0,85	1

Então, a probabilidade de que um magistrado escolhido ao acaso tenha experiência maior do que cinco anos e menor ou igual a 15 anos é igual a:

a) 0,39.

b) 0,45.

c) 0,48.

d) 0,57.

e) 0,61.

Comentários:

A probabilidade de P(5 < X ≤ 15) é igual à diferença entre os valores da função acumulada F(15) – F(5), uma vez que o intervalo não precisa ser adaptado, pois o extremo superior está contemplado e o inferior, não:

$$P(5 < X \leq 15) = P(X \leq 15) - P(X \leq 5) = F(15) - F(5) = 0{,}69 - 0{,}30 = 0{,}39$$

Gabarito: A

(FGV/2017 – MPE/BA) Considere a variável aleatória do tipo discreta(X), relativa às fases de andamento de um processo podendo assumir apenas três valores numéricos 1, 2 ou 3, conforme o mesmo esteja em conhecimento, liquidação ou execução, respectivamente. Se F(.) é a função distribuição acumulada correspondente, com F(1,17) = 0,15 e F(2,76) = 0,45. Então é verdadeiro que

a) $P(X > 1,9) = 0,75$ e $P(X < 2,5) = 0,60$.

b) $P(X < 2,70) < 0,45$ e $P(X > 1,5) = 0,85$.

c) $P(X = 1) = 0,15$ e $P(X = 2) = 0,30$.

d) $P(X = 3) = 0,55$ e $E(X) = 2,70$.

e) $P(1,44 < X < 3) = 0,85$ e $Mo(X) = 3$.

Comentários:

O enunciado informa que há apenas três valores possíveis: X = 1, X = 2 ou X = 3.

Para conhecermos as probabilidades de cada valor, o enunciado informa os valores que a função de distribuição acumulada assume:

- $F(1,17) = P(X \leq 1,17) = 0,15$.

  O único valor menor ou igual a 1,17 é o valor X = 1. Ou seja:

$$P(X \leq 1,17) = P(X = 1) = 0,15$$

  Assim, concluímos que:

$$P(X = 1) = 0,15$$

- $F(2,76) = P(X \leq 2,76) = 0,45$.

  Os valores menores ou iguais a 2,76 são X = 1 e X = 2, ou seja:

$$P(X \leq 2,76) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,45$$

  Sabemos que P(X = 1) = 0,15, logo:

$$P(X \leq 2,76) = 0,15 + P(X = 2) = 0,45$$

$$P(X = 2) = 0,30$$

Isso nos permite concluir que a alternativa C está correta, mas vejamos as demais alternativas.

Em relação à alternativa A, o valor de P(X > 1,79) pode ser calculado como:

$$P(X > 1,79) = 1 - P(X \leq 1,79) = 1 - P(X = 1) = 1 - 0,15 = 0,85$$

E o valor de P(X < 2,5) é:

$$P(X < 2,5) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,15 + 0,30 = 0,45$$

Logo, a alternativa A está incorreta.

Em relação à alternativa B, o valor de P(X < 2,70) é:

$$P(X < 2,70) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,15 + 0,30 = 0,45$$

Ou seja, $P(X < 2,70) = 0,45$ (não $<$ 0,45).

E o valor de P(X > 1,5) pode ser calculado como:

$$P(X > 1{,}5) = 1 - P(X \leq 1{,}5) = 1 - P(X = 1) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$$

A segunda parte está correta, mas a alternativa B está incorreta, porque a primeira parte é falsa.

Em relação à alternativa D, o valor de P(X = 3) é:

$$P(X = 3) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - 0{,}15 - 0{,}30 = 0{,}55$$

E o valor da esperança é:

$$E(X) = 1x0{,}15 + 2x0{,}30 + 3x0{,}55 = 0{,}15 + 0{,}60 + 1{,}65 = 2{,}40$$

A primeira parte está correta, mas a alternativa D está incorreta, porque a segunda parte é falsa.

Em relação à alternativa E, o valor de P(1,44 < X < 3) é:

$$P(1{,}44 < X < 3) = P(X = 2) = 0{,}30$$

E a moda de X (valor com maior probabilidade) é, de fato, Mo(X) = 3.

A segunda parte está correta, mas a alternativa E está incorreta, porque a primeira parte é falsa.

Gabarito: C

Quartis e Mediana

A partir da função de distribuição acumulada, podemos calcular a **mediana** da distribuição. A mediana é, assim como a esperança e a moda, uma medida de tendência central, mas também uma medida separatriz, ou seja, que separa a distribuição em partes iguais.

Ela divide a distribuição em **2 partes iguais**, de forma que 50% das observações fiquem abaixo dessa medida e 50% das observações fiquem acima**.** Portanto, a **mediana** é o valor de X para o qual a **f.d.a. é igual a 50%.**

$$\boldsymbol{F(x_{Mediana}) = 50\% = 0,5}$$

Outras medidas separatrizes são os **quartis** da distribuição (Q1, Q2 e Q3), os quais dividem a distribuição em **4 partes iguais**.

O primeiro quartil (Q1) deixa 25% das observações abaixo e 75%, acima; o segundo quartil (Q2) deixa 50% das observações abaixo e 50%, acima; e o terceiro quartil (Q3) deixa 75% das observações abaixo e 25%, acima. Note que a **mediana** equivale ao **segundo quartil**!

Assim, os valores da f.d.a. no primeiro, no segundo e no terceiro quartis são:

$$F(x_{Q1}) = 25\% = 0{,}25$$

$$F(x_{Q2}) = F(x_{Med}) = 50\% = 0{,}5$$

$$F(x_{Q3}) = 75\% = 0{,}75$$

Para as variáveis discretas, pode não ser possível encontrar valores para x que separem a distribuição **exatamente** nesses percentuais. Nesses casos, devemos encontrar os valores de X para os quais a **f.d.a.** apresenta valores **maiores** (ou iguais) a esses percentuais:

$$F(x_{Q1}) \geq 25\%$$

$$F(x_{Q2}) = F(x_{Med}) \geq 50\%$$

$$F(x_{Q3}) \geq 75\%$$

Para ilustrar, replicamos a tabela com os valores da f.d.a. (em percentual) para o lançamento do dado:

x	$F(x) = P(X \leq x)$
1	16,7%
2	33,3%
3	50%
4	66,7%
5	83,3%
6	100%

Podemos observar que não há um valor de X para o qual a f.d.a. é exatamente igual a 25%. Por isso, escolhemos a probabilidade imediatamente **superior**, qual seja, de 33,3%, associada a X = 2. Com isso, concluímos que o **primeiro quartil** é:

$$x_{Q1} = 2$$

Também observamos que não há um valor de X para o qual a f.d.a. seja exatamente igual a 75%. A probabilidade imediatamente **superior** é de 83,3%, associada a X = 5. Logo, o terceiro quartil é

$$x_{Q3} = 5$$

Em relação à mediana, podemos observar que a f.d.a. para X = 3 é exatamente $F(3) = 50\%$. Isso significa que $x_{Med} = 3$ é um **possível** valor para a mediana. Entretanto, esse **não é o único** valor.

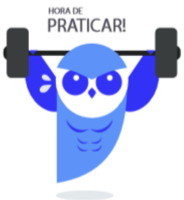
Lembra que a função acumulada é definida para qualquer valor de x? Pois é! Para **todos** os valores de x que pertencem ao intervalo [3,4)[1], temos $\boldsymbol{F(x) = 50\%}$.

Sendo assim, podemos dizer que **quaisquer desses valores são a mediana**, inclusive o próprio 4. Entretanto, por convenção, normalmente consideramos o **valor médio** desse intervalo como a mediana:

$$x_M = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$$

Além dos quartis, há outros **quantis**, que dividem a distribuição em partes **iguais**, como os decis, que dividem em 10 partes iguais, e os percentis, que dividem em 100 partes iguais.

Calculamos esses quantis da mesma forma, a partir da função de distribuição acumulada.



(CESPE/2015 – Agente do Departamento Penitenciário Nacional)

Quantidade diária de incidentes (N)	Frequência relativa
0	0,1
1	0,2
2	0,5
3	0,0
4	0,2
Total	1

Considerando os dados da tabela mostrada, que apresenta a distribuição populacional da quantidade diária de incidentes (N) em determinada penitenciária, julgue o item que se segue.

O segundo quartil da distribuição das quantidades diárias de incidentes registradas nessa penitenciária é igual a 2.

Comentários:

A mediana é calculada a partir da função de distribuição acumulada, cuja tabela consta a seguir:

[1] Utilizamos o **parêntesis**, ou o **colchete voltado para fora**, para indicar que o intervalo é **aberto** naquele extremo, o que significa que o extremo **não** está incluído no intervalo.

Utilizamos o **colchete voltado para dentro** para indicar que o intervalo é **fechado** naquele extremo, o que significa que o extremo está **incluído**.

Assim, a expressão [3,4) equivale a [3,4[e representa o intervalo $3 \leq X < 4$.

x	P(x)	F(x)
0	0,1	0,1
1	0,2	0,3
2	0,5	0,8
3	0,0	0,8
4	0,2	1

Nesse exemplo, não temos nem um valor de X para o qual o valor de F(x) seja exatamente igual a 0,5. O valor imediatamente superior a 0,5 é de 0,8, o qual está associado ao valor X = 2. Logo, o segundo quartil (ou mediana) é $x_{Med} = 2$.

Gabarito: Certo.

(FCC/2014 – TRT 19ª Região) Seja F(x) a função de distribuição da variável X que representa o número de trabalhadores por domicílio em uma determinada população. Se:

$$F(X) = \begin{Bmatrix} 0{,}00 & se\ x < 0 \\ 0{,}10 & se\ 0 \leq x < 1 \\ 0{,}25 & se\ 1 \leq x < 2 \\ 0{,}50 & se\ 2 \leq x < 3 \\ 0{,}80 & se\ 3 \leq x < 4 \\ 1{,}00 & se\ x \geq 4 \end{Bmatrix}$$

então, o número médio de trabalhadores por domicílio subtraído do número mediano de trabalhadores por domicílio é igual a

a) 0,15

b) 0,10

c) 0,25

d) -0,15

e) -0,50

Comentários:

A média (ou valor esperado) de trabalhadores por domicílio é dada pela fórmula:

$$E(X) = \sum_i x_i . P(x_i)$$

Para aplicá-la, precisamos dos valores de probabilidade, a serem calculados a partir dos valores da função de distribuição acumulada:

$$P(X = 0) = F(0) = 0{,}10$$

$$P(X = 1) = F(1) - F(0) = 0{,}25 - 0{,}10 = 0{,}15$$

$$P(X = 2) = F(2) - F(1) = 0{,}50 - 0{,}25 = 0{,}25$$

$$P(X = 3) = F(3) - F(2) = 0{,}80 - 0{,}50 = 0{,}30$$

$$P(X = 4) = F(4) - F(3) = 1 - 0{,}8 = 0{,}20$$

Assim, a média é dada por:

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3) + 4 \times P(X = 4)$$

$$E(X) = 1 \times 0{,}15 + 2 \times 0{,}25 + 3 \times 0{,}30 + 4 \times 0{,}20$$

$$E(X) = 0{,}15 + 0{,}50 + 0{,}90 + 0{,}80 = 2{,}35$$

A mediana é calculada a partir da função de distribuição acumulada. Pelo enunciado, podemos observar que $F(x) = 50\%$ para $x \in [2{,}3)$. Por convenção, temos:

$$x_M = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$$

A diferença entre a média e a mediana é:

$$E(x) - x_M = 2{,}35 - 2{,}5 = -0{,}15$$

Gabarito: D

VARIÂNCIA E DESVIO PADRÃO

Nesta seção, veremos medidas de **dispersão** (ou **variabilidade**), que representam o quanto os elementos **desviam** em relação à **média**.

Variância

O **desvio** de um elemento x em relação à média μ é a diferença entre os seus valores:

$$Desvio = x - \mu$$

Entretanto, ao somar os desvios de todos os elementos do conjunto, os desvios **positivos** ($x > \mu$) **anulam** os desvios **negativos** ($x < \mu$), de modo que o resultado seria **zero**, tendo vista a própria definição de média.

Para ilustrar, vamos supor o seguinte conjunto de números {1, 1, 1, 1, 3, 7, 7}. A média desse conjunto é:

$$\mu = \frac{1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 7 + 7}{7} = \frac{21}{7} = 3$$

A soma dos desvios em relação à média é:

$$Soma\ Desvios = (1 - 3) + (1 - 3) + (1 - 3) + (1 - 3) + (3 - 3) + (7 - 3) + (7 - 3)$$

$$Soma\ Desvios = -2 - 2 - 2 - 2 + 0 + 4 + 4 = \mathbf{0}$$

Assim, para que possamos **somar** os desvios, precisamos elevá-los ao **quadrado** antes.

$$Desvio\ quadrado = (x - \mu)^2$$

A **variância** é, portanto, definida como a **média do quadrado dos desvios**. Assim, em um conjunto de elementos, somamos o quadrado de todos os desvios e dividimos pela quantidade N de elementos, para obtermos a variância, que pode ser indicada como σ^2:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x - \mu)^2}{N}$$

Para o nosso exemplo, temos:

$$\sigma^2 = \frac{(1 - 3)^2 + (1 - 3)^2 + (1 - 3)^2 + (1 - 3)^2 + (3 - 3)^2 + (7 - 3)^2 + (7 - 3)^2}{7}$$

$$\sigma^2 = \frac{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 + (0)^2 + (4)^2 + (4)^2}{7} = \frac{4 + 4 + 4 + 4 + 0 + 16 + 16}{7} = \frac{48}{7}$$

Em relação aos elementos repetidos, podemos **multiplicá-los** pela sua **frequência**.

Em outras palavras, podemos calcular a variância, somando os produtos dos desvios quadrados **multiplicados** pela sua **frequência relativa**:

$$\sigma^2 = (1-3)^2 \times \frac{4}{7} + (3-3)^2 \times \frac{1}{7} + (7-3)^2 \times \frac{2}{7} = (-2)^2 \times \frac{4}{7} + (0)^2 \times \frac{1}{7} + (4)^2 \times \frac{2}{7}$$

$$\sigma^2 = 4 \times \frac{4}{7} + 0 + 16 \times \frac{2}{7} = \frac{16+32}{7} = \frac{48}{7}$$

Genericamente, essa segunda forma de obter a variância pode ser representada pela seguinte fórmula, em que f_r é a frequência relativa:

$$\sigma^2 = \sum (x-\mu)^2 \times f_r$$

Para uma **variável aleatória**, a variância é calculada de maneira similar, porém, em vez da frequência relativa, utilizamos a **probabilidade** para cada valor x.

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma^2 = \sum (x-\mu)^2 \times P(x)}}$$

A variância da variável aleatória X pode ser denotada também por $\boldsymbol{V(X)}$ ou $\boldsymbol{Var(X)}$.

Vamos, então, calcular a variância para o nosso exemplo do dado equilibrado, em que os valores da variável são $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ com probabilidade $P(X = x) = \frac{1}{6}$ para todos os elementos e média $\mu = 3{,}5$.

$$\sigma^2 = (1-3{,}5)^2.\frac{1}{6} + (2-3{,}5)^2.\frac{1}{6} + (3-3{,}5)^2.\frac{1}{6} + (4-3{,}5)^2.\frac{1}{6} + (5-3{,}5)^2.\frac{1}{6} + (6-3{,}5)^2.\frac{1}{6}$$

$$\sigma^2 = (-2{,}5)^2.\frac{1}{6} + (-1{,}5)^2.\frac{1}{6} + (-0{,}5)^2.\frac{1}{6} + (0{,}5)^2.\frac{1}{6} + (1{,}5)^2.\frac{1}{6} + (2{,}5)^2.\frac{1}{6}$$

$$\sigma^2 = 6{,}25 \times \frac{1}{6} + 2{,}25 \times \frac{1}{6} + 0{,}25 \times \frac{1}{6} + 0{,}25 \times \frac{1}{6} + 2{,}25 \times \frac{1}{6} + 6{,}25 \times \frac{1}{6} = 17{,}5 \times \frac{1}{6} = \frac{35}{12}$$

INDO MAIS FUNDO!

A esperança de uma variável X é a soma dos produtos de cada valor de X pela sua probabilidade:

$$E(X) = \sum x \times P(X = x)$$

Se substituirmos x por $(x - \mu)^2$, obtemos justamente a fórmula da variância:

$$E(X - \mu)^2 = \sum (x - \mu)^2 \times P(X = x)$$

Por isso, dizemos que a variância de uma variável aleatória é a **esperança** dos **quadrados dos desvios**:

$$\boldsymbol{\sigma^2 = E(X - \mu)^2}$$

A variância também pode ser calculada da seguinte forma:

TOME NOTA!

$$\boldsymbol{\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2}$$

Considerando que $\mu = E(X)$, podemos escrever essa fórmula como:

$$\boldsymbol{\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2}$$

O termo $E(X^2)$ representa a esperança dos valores da variável aleatória X, **elevados ao quadrado**, isto é, o produto de x^2 pela sua probabilidade:

$$\boldsymbol{E(X^2) = \sum x^2 \times P(X = x)}$$

Vamos calcular a variância para o exemplo do lançamento do dado, utilizando a segunda fórmula:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

O primeiro termo dessa fórmula é:

$$E(X^2) = \sum x^2 \times P(X = x)$$

$$E(X^2) = (1)^2.\frac{1}{6} + (2)^2.\frac{1}{6} + (3)^2.\frac{1}{6} + (4)^2.\frac{1}{6} + (5)^2.\frac{1}{6} + (6)^2.\frac{1}{6}$$

$$E(X^2) = 1.\frac{1}{6} + 4.\frac{1}{6} + 9.\frac{1}{6} + 16.\frac{1}{6} + 25.\frac{1}{6} + 36.\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

O segundo termo dessa fórmula (em fração) é:

$$\mu^2 = (3{,}5)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$

A variância é dada pela **diferença**:

$$\sigma^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182}{12} - \frac{147}{12} = \frac{35}{12}$$

Para essa **segunda** forma de cálculo, podemos utilizar, como apoio, a tabela de distribuição de probabilidade, com os valores de x e $P(X = x)$, acrescentando duas colunas, uma com o valor da variável ao quadrado, x^2, e outra com o produto $x^2.P(X = x)$.

A **soma** da última coluna será o resultado de $\boldsymbol{E(X^2)}$.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{P(X = x)}$	$\boldsymbol{x^2}$	$\boldsymbol{x^2.P(X = x)}$
1	$^1/_6$	1	$^1/_6$
2	$^1/_6$	4	$^4/_6$
3	$^1/_6$	9	$^9/_6$
4	$^1/_6$	16	$^{16}/_6$
5	$^1/_6$	25	$^{25}/_6$
6	$^1/_6$	36	$^{36}/_6$
$\boldsymbol{E(X^2) =}$			$\boldsymbol{^{91}/_6}$

RESUMINDO

Para calcular a variância, seguimos os seguintes passos:

i) Calcular a **média**: $\mu = E(X) = \sum_i x_i . P(x_i)$;

ii) Elevar a **média ao quadrado**: μ^2;

iii) Elevar os valores de **X ao quadrado** e multiplicá-los pela **probabilidade**: $x^2 . P(X = x)$;

iv) **Somar** os resultados do passo iii para calcular $E(X^2) = \sum_i (x_i)^2 . P(x_i)$;

v) Calcular a variância pela **diferença** (iv) – (ii): $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$.

Cuidado para não esquecer o último passo. Ou seja, não pense que o resultado do passo iv, $E(X^2)$, é a variância.

INDO MAIS FUNDO!

Chamamos $E(X^2)$ de **segundo momento** (ou **momento de segunda ordem**) da variável aleatória. Também podemos chamar a **variância** de **segundo momento central** (ou **momento central de segunda ordem**) da variável aleatória.

HORA DE PRATICAR!

(2017 – DPE/PR)

Tabela - Distribuição da variável aleatória X

X	P(X)
1	0,42
2	0,25
3	0,18
4	0,08
5	0,07

Seja X uma variável aleatória discreta, sua esperança e variância são respectivamente:

a) Esperança = 2,00 e Variância = 2,13.

b) Esperança = 2,13 e Variância = 1,53

d) Esperança = 1,00 e Variância = 1,53

e) Esperança = 2,13 e Variância = 2,53

Comentários:

Vamos utilizar novamente a tabela de distribuição de probabilidade fornecida para calcular os valores de $\mu = E(X) = \sum_i x_i.P(x_i)$ e de $E(X^2) = \sum_i (x_i)^2.P(x_i)$:

x	P(x)	x.P(x)	x^2	x^2.P(x)
1	0,42	0,42	1	0,42
2	0,25	0,50	4	1,00
3	0,18	0,54	9	1,62
4	0,08	0,32	16	1,28
5	0,07	0,35	25	1,75
Total	**1,00**	**2,13**	**-**	**6,07**

Portanto, temos $\mu = E(X) = 2{,}13$, então, $\mu^2 \cong 4{,}54$; e $E(X^2) = 6{,}07$.

Assim, a variância é:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 \cong 6{,}07 - 4{,}54 = 1{,}53$$

Gabarito: B

(VUNESP/2014 – TJ/PA) Em uma locadora de automóveis a demanda diária é uma variável aleatória com a seguinte distribuição de probabilidades:

Automóveis X_i	0	1	2	3	4	5
Probabilidade	0,10	0,10	0,30	0,30	0,10	0,10

A variância da demanda diária é:

a) 1,85.

b) 1,5.

c) 1,25.

d) 1,0.

e) 0,85

Comentários:

A variância pode ser calculada como:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Vamos utilizar a tabela para calcular o valor de E(X):

X_i	0	1	2	3	4	5
$P(X_i)$	0,1	0,1	0,3	0,3	0,1	0,1
$X_i.P(X_i)$	0x0,1=0	1x0,1=0,1	2x0,3=0,6	3x0,3=0,9	4x0,1=0,4	5x0,1=0,5

Sabendo que E(X) é a soma de $X_i.P(X_i)$, temos:

$$E(X) = 0 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}1 + 2 \times 0{,}3 + 3 \times 0{,}3 + 4 \times 0{,}1 + 5 \times 0{,}1$$

$$E(X) = 0 + 0{,}1 + 0{,}6 + 0{,}9 + 0{,}4 + 0{,}5 = 2{,}5$$

Logo, o quadrado de E(X) é:

$$[E(X)]^2 = (2{,}5)^2 = 6{,}25$$

Agora, vamos calcular $E(X^2)$:

X_i	0	1	2	3	4	5
$(X_i)^2$	$0^2=0$	$1^2=1$	$2^2=4$	$3^2=9$	$4^2=16$	$5^2=25$
$P(X_i)$	0,1	0,1	0,3	0,3	0,1	0,1
$(X_i)^2.P(X_i)$	0x0,1=0	1x0,1=0,1	4x0,3=1,2	9x0,3=2,7	16x0,1=1,6	25x0,1=2,5

Sabendo que $E(X^2)$ é a soma de $X_i^2.P(X_i)$, temos:

$$E(X^2) = 0^2 \times 0{,}1 + 1^2 \times 0{,}1 + 2^2 \times 0{,}3 + 3^2 \times 0{,}3 + 4^2 \times 0{,}1 + 5^2 \times 0{,}1$$

$$E(X^2) = 0 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}1 + 4 \times 0{,}3 + 9 \times 0{,}3 + 16 \times 0{,}1 + 25 \times 0{,}1$$

$$E(X^2) = 0 + 0{,}1 + 1{,}2 + 2{,}7 + 1{,}6 + 2{,}5 = 8{,}1$$

Assim, a variância é:

$$V(X) = 8{,}1 - 6{,}25 = 1{,}85$$

Gabarito: A

(2019 – IF-PA) Uma variável aleatória discreta Z tem função de probabilidade dada por:

Z	-2	-1	0	1	2
P(Z)	0,3	0,1	0,2	0,3	0,5

Pode-se afirmar que a variância da variável aleatória Z é igual a:

a) 2,64

b) 3,00

c) 3,24

d) 4,64

e) 2,84

Comentários:

Vamos utilizar a tabela de distribuição de probabilidade fornecida para calcular os valores de $\mu = E(Z) = \sum_i z_i.P(z_i)$ e de $E(Z^2) = \sum_i (z_i)^2.P(z_i)$. Atente-se que a tabela abaixo está em um formato diferente daquele que vimos antes (está transposta), para acompanhar a tabela do enunciado.

Z	-2	-1	0	1	2	Total
P(Z)	0,3	0,1	0,2	0,3	0,5	**1**
Z.P(Z)	-0,6	-0,1	0	0,3	1	**0,6**
Z^2	4	1	0	1	4	-
Z^2.P(Z)	1,2	0,1	0	0,3	2	**3,6**

Portanto, temos $\mu = E(Z) = 0{,}6$, então, $\mu^2 = 0{,}36$; e $E(Z^2) = 3{,}6$.

Assim, a variância é:

$$\sigma^2 = E(Z^2) - \mu^2 = 3{,}6 - 0{,}36 = 3{,}24$$

Gabarito: C

(FGV/2022 – SEFAZ/AM) Uma variável aleatória X tem a seguinte função de probabilidade, sendo k uma constante:

x	-2,0	-1,0	0,0	1,0	2
p(x)	0,2	0,1	0,4	0,1	k

A variância de X é igual a:

a) 1,8

b) 2,0

c) 2,2

d) 2,4

e) 2,6

Comentários:

Para calcular a variância, precisamos do valor de k e da esperança.

Sabendo que a soma das probabilidades é igual a 1, o valor de k é dado por:

$$0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}1 + k = 1$$

$$k = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

Assim, a esperança é:

$$E(X) = (-2) \times 0{,}2 + (-1) \times 0{,}1 + 0 \times 0{,}4 + 1 \times 0{,}1 + 2 \times 0{,}2$$

$$E(X) = -0{,}4 - 0{,}1 + 0 + 0{,}1 + 0{,}4 = 0$$

Agora, precisamos calcular os desvios de cada valor de x em relação à média (que será igual ao próprio valor da variável) e elevar cada desvio ao quadrado.

Em seguida, multiplicamos cada quadrado pela respectiva probabilidade e somamos todos os resultados:

$$V(X) = \sum [X - E(X)]^2 \times P(X = x)$$

Esses cálculos constam na tabela a seguir:

x	-2,0	-1,0	0,0	1,0	2
p(x)	0,2	0,1	0,4	0,1	0,2
x - E(X)	-2	-1	0	1	2
$[x - E(X)]^2$	4	1	0	1	4
$[x - E(X)]^2.p(x)$	0,8	0,1	0	0,1	0,8

A variância é a soma dos resultados da última linha:

$$V(X) = 0{,}8 + 0{,}1 + 0 + 0{,}1 + 0{,}8 = 1{,}8$$

Gabarito: A

(2012 – Empresa de Pesquisa Energética) Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes. Sabendo-se que: $E(X) = 2$; $E(X^2Y) = 8$; $E(XY^2) = 6$ e $E((XY)^2) = 24$, conclui-se que o valor da variância de Y, Var (Y), é

a) 48

b) 24

c) 10

d) 3

e) 2

Comentários:

Sendo X e Y variáveis independentes, então vale a propriedade multiplicativa da esperança:

$$E(XY) = E(X).E(Y)$$

Sabendo que $E(X) = 2$ e que $E(XY^2) = 6$, então:

$$E(X.Y^2) = E(X).E(Y^2) = 2.E(Y^2) = 6$$

$$E(Y^2) = 3$$

Considerando esse resultado e sabendo que $E((XY)^2) = 24$, então:

$$E((XY)^2) = E(X^2.Y^2) = E(X^2).E(Y^2) = E(X^2).3 = 24$$

$$E(X^2) = 8$$

Considerando esse resultado e sabendo que $E(X^2Y) = 8$, então:

$$E(X^2Y) = E(X^2).E(Y) = 8.E(Y) = 8$$

$$E(Y) = 1$$

Sabendo que $E(Y^2) = 3$ e $E(Y) = 1$, podemos calcular a variância, por:

$$VAR\ (Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 3 - 1 = 2$$

Gabarito: E

Desvio Padrão

Ao utilizarmos os quadrados dos desvios, perdemos um pouco a noção da grandeza dos resultados. Se estivermos interessados na altura dos brasileiros, por exemplo, a média adulta masculina seria algo em torno de 173cm e a variância, 400cm^2, por exemplo. Analisando somente esses números, não entendemos muito bem o que 400cm^2 querem dizer.

Por isso, existe o conceito do **desvio padrão**, que representamos por $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{D(X)}$ ou $\boldsymbol{DP(X)}$, definido como a **raiz quadrada da variância**:

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\sigma^2}}$$

Nesse exemplo hipotético, o desvio padrão seria de:

$$\sigma = \sqrt{400} = 20cm$$

Ora, esse resultado é bem mais palatável – ele indica que uma boa parcela da população adulta masculina tem altura entre 153cm e 193cm. Agora, o quanto uma "boa parcela" representa depende de alguns fatores. Então, aguarde cenas dos próximos capítulos!

Para o nosso exemplo da moeda equilibrada, em que calculamos a variância $\sigma^2 = \frac{35}{12}$, o desvio padrão é a raiz quadrada desse valor:

$$\sigma = \sqrt{\frac{35}{12}} \cong 1{,}7$$

Variância e Desvio Padrão Amostrais

Podemos calcular a variância e o desvio padrão a partir de **amostras**, isto é, utilizar os dados obtidos em amostras para **estimar** a variância ou o desvio padrão da **população** de interesse.

Para isso, considerando uma amostra de tamanho n (isto é, com n observações), primeiro calculamos a **média** da amostra, que denotamos por $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

Para calcular a estimativa da variância, que denotamos por s^2, dividimos a soma do quadrado dos desvios $\sum(x - \bar{x})^2$ por $n - 1$:

$$\boldsymbol{s^2 = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1}}$$

Observe que essa fórmula é bastante similar à variância populacional, com a seguinte diferença: no cálculo da variância populacional, dividimos pelo total da população N e, no cálculo da variância amostral (isto é, para estimar a variância, a partir dos dados da amostra), dividimos por $n - 1$.

Vamos supor que o conjunto que vimos anteriormente, {1, 1, 1, 1, 3, 7, 7}, represente os números observados em uma **amostra**, obtidos a partir de determinada população. Assim, para **estimar a variância** da população, a **partir dessa amostra**, utilizamos a fórmula:

$$s^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Já calculamos a média desse conjunto: $\bar{x} = 3$. Então a estimativa da variância é:

$$s^2 = \frac{(1-3)^2 + (1-3)^2 + (1-3)^2 + (1-3)^2 + (3-3)^2 + (7-3)^2 + (7-3)^2}{7-1}$$

$$s^2 = \frac{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 + (0)^2 + (4)^2 + (4)^2}{6}$$

$$s^2 = \frac{4+4+4+4+0+16+16}{6} = \frac{48}{6} = 8$$

(FCC/2015 – SEFAZ/PI – *Adaptada*) Julgue a seguinte afirmativa:

As amostras I e II dadas abaixo possuem a mesma variância amostral igual a 10.

Amostra I: 1 3 5 7 9 Amostra II: 11 13 15 17 19

Comentários:

Para calcular a variância amostral da Amostra I, primeiro calculamos a média da amostra:

$$\overline{x_1} = \frac{\sum x}{n} = \frac{1+3+5+7+9}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

Logo, a variância amostral da Amostra I é dada por:

$$s^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n - 1}$$

$$s_1{}^2 = \frac{(1-5)^2 + (3-5)^2 + (5-5)^2 + (7-5)^2 + (9-5)^2}{4} = \frac{16+4+0+4+16}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

Para calcular a variância amostral da Amostra II, começamos pelo cálculo da média:

$$\overline{x_2} = \frac{\sum x}{n} = \frac{11+13+15+17+19}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

A variância amostral da Amostral II é, portanto, dada por:

$$s_2{}^2 = \frac{(11-15)^2 + (13-15)^2 + (15-15)^2 + (17-15)^2 + (19-15)^2}{4} =$$

$$s_2{}^2 = \frac{16+4+0+4+16}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

Portanto, as amostras I e II possuem a mesma variância amostral, igual a 10.

Resposta: Certo.

Propriedades

Agora, veremos as propriedades da variância e do desvio padrão, que são aplicáveis tanto a variáveis aleatórias discretas, quanto a variáveis contínuas.

Nos enunciados a seguir, consideramos X e Y variáveis aleatórias e k uma constante real qualquer.

i) $\boldsymbol{V(X+k) = V(X)}$

Quando somamos uma constante k a uma variável X, a variância de X **não** se **altera**.

Por exemplo, para k = 2 e $V(X) = \frac{35}{12}$, a variância de X + 2 será:

$$V(X+2) = V(X) = \frac{35}{12}$$

Vamos entender o porquê disso, com base no exemplo do dado. Sabendo que a média é $\mu = 3{,}5$, vamos replicar o início do cálculo da variância, pela primeira fórmula:

$$V(X) = \sum (x-\mu)^2 \times P(X=x)$$

$$V(X) = (1-3{,}5)^2.\tfrac{1}{6} + (2-3{,}5)^2.\tfrac{1}{6} + (3-3{,}5)^2.\tfrac{1}{6} + (4-3{,}5)^2.\tfrac{1}{6} + (5-3{,}5)^2.\tfrac{1}{6} + (6-3{,}5)^2.\tfrac{1}{6}$$

$$V(X) = (-2{,}5)^2.\tfrac{1}{6} + (-1{,}5)^2.\tfrac{1}{6} + (-0{,}5)^2.\tfrac{1}{6} + (0{,}5)^2.\tfrac{1}{6} + (1{,}5)^2.\tfrac{1}{6} + (2{,}5)^2.\tfrac{1}{6}$$

Agora, vamos supor que Y represente um dado igualmente equilibrado, cujas faces variam de Y = 3 até Y = 8. Ou seja, somamos k = 2 às faces do dado X:

Y = X + 2 = {3, 4, 5, 6, 7, 8}

A média (ou esperança) de Y será:

$$E(Y) = 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} + 7 \times \frac{1}{6} + 8 \times \frac{1}{6} = \frac{33}{6} = 5{,}5$$

E a variância será calculada como:

$$V(Y) = (3 - 5{,}5)^2 . \frac{1}{6} + (4 - 5{,}5)^2 . \frac{1}{6} + (5 - 5{,}5)^2 . \frac{1}{6} + (6 - 5{,}5)^2 . \frac{1}{6} + (7 - 5{,}5)^2 . \frac{1}{6} + (8 - 5{,}5)^2 . \frac{1}{6}$$

$$V(Y) = (-2{,}5)^2 . \frac{1}{6} + (-1{,}5)^2 . \frac{1}{6} + (-0{,}5)^2 . \frac{1}{6} + (0{,}5)^2 . \frac{1}{6} + (1{,}5)^2 . \frac{1}{6} + (2{,}5)^2 . \frac{1}{6}$$

Observe que os desvios $y - E(Y)$ são exatamente os mesmos de $x - E(X)$, e as probabilidades $P(Y = y)$ são as mesmas de $P(X = x)$. Como o cálculo é o mesmo, o resultado, isto é, a variância, será igual.

Isso acontece porque, ao somarmos a constante $k = 2$ aos valores de X, a média também sofre esse mesmo acréscimo (essa é uma propriedade da esperança):

$$E(Y) = E(X + 2) = E(X) + 2$$

Consequentemente, os desvios $y - E(Y)$ são iguais aos $x - E(X)$:

$$y - E(Y) = (x + 2) - [E(X) - 2] = x + 2 - E(X) - 2 = x - E(X)$$

Por isso, as variâncias são iguais!

Essa propriedade vale também quando **subtraímos** uma constante k (trata-se da mesma propriedade, pois podemos considerar que estamos **somando** $-\boldsymbol{k}$):

$$\boldsymbol{V(X - k) = V(X)}$$

Então, para esse mesmo exemplo de $V(X) = \frac{35}{12}$, a variância de X – 4 será:

$$V(X - 4) = V(X) = \frac{35}{12}$$

Por ser a raiz quadrada da variância, que não se altera, o desvio padrão também permanece o mesmo:

$$\boldsymbol{D(X + k) = D(X)}$$

$$\boldsymbol{D(X - k) = D(X)}$$

ii) $\boldsymbol{V(k.X) = k^2.V(X)}$

Quando multiplicamos uma variável por uma constante, a variância é multiplicada pelo **quadrado** dessa constante.

Por exemplo, para k = 2 e $V(X) = \frac{35}{12}$, a variância de 2.X será:

$$V(2.X) = 2^2.V(X) = 4.\frac{35}{12} = \frac{35}{3}$$

Vamos, novamente, entender o porquê disso, mas agora vamos supor que Y represente os valores de X multiplicados por 3:

Y = 3.X

Pelas propriedades da esperança, a média de Y será multiplicada por 3:

$$E(Y) = E(3.X) = 3 \times E(X)$$

E os desvios serão multiplicados por 3:

$$y - E(Y) = (3.x) - [3.E(X)] = 3.[x - E(X)]$$

Ao elevarmos esses desvios ao **quadrado**, os resultados serão multiplicados por $(3)^2$:

$$\left(y - E(Y)\right)^2 = (3.[x - E(X)])^2 = (3)^2.([x - E(X)])^2$$

Por isso, a variância é multiplicada pelo quadrado da constante!

Essa propriedade também vale para a divisão por uma constante k (podemos considerar que estamos multiplicando por $\frac{1}{k}$):

$$V\left(\frac{X}{k}\right) = \frac{V(X)}{k^2}$$

Não importa se k é positivo ou negativo, pois o seu quadrado será sempre **positivo**.

Por exemplo, para $Y = -\frac{X}{2}$, a variância de X é dividida por $(-2)^2 = 4$. Sendo $V(X) = \frac{35}{12}$, teremos:

$$V(Y) = V\left(\frac{X}{-2}\right) = \frac{V(X)}{(-2)^2} = \frac{1}{4}.\frac{35}{12} = \frac{35}{3}$$

Como o desvio padrão é a raiz quadrada da variância, o desvio padrão do produto $k.X$, é:

$$D(k.X) = \sqrt{V(k.X)} = \sqrt{k^2.V(X)} = |k|.D(X)$$

ESCLARECENDO!

Como a **raiz** de um número é sempre um número **positivo**, então a raiz de k^2 é o módulo de k, denotado por $|k|$:

$$\sqrt{k^2} = |k|$$

O módulo de k, $|k|$, é uma "**versão positiva**" do número k, ou seja:

$$|k| = \begin{Bmatrix} k, se\ k \geq 0 \\ -k, se\ k < 0 \end{Bmatrix}$$

Por exemplo, se $k = 3$, então $|k| = 3$ e se $k = -3$, então $|k| = 3$.

Portanto:

$$\boldsymbol{D(k.X) = k.D(X)}, \textbf{ para } \boldsymbol{k \geq 0}$$

$$\boldsymbol{D(k.X) = -k.D(X)}, \textbf{ para } \boldsymbol{k < 0}$$

$$\boldsymbol{D\left(\frac{X}{k}\right) = \frac{D(X)}{k}}, \textbf{ para } \boldsymbol{k \geq 0}$$

$$\boldsymbol{D\left(\frac{X}{k}\right) = -\frac{D(X)}{k}}, \textbf{ para } \boldsymbol{k < 0}$$

Por exemplo, para Y = 3.X, o desvio padrão será:

D(Y) = D(3.X) = 3.D(X)

E para $Y = -\frac{X}{2}$, o desvio padrão será:

$$D(Y) = D\left(\frac{X}{-2}\right) = \frac{D(X)}{2}$$

iii) $\boldsymbol{V(k) = 0}$

A variância de uma **constante** qualquer é **zero**. Por exemplo, a variância da constante $k = 3$ é:

$$\boldsymbol{V(3) = 0}$$

INDO MAIS FUNDO!

Pelas propriedades da esperança, a média de uma constante k:

$$\mu = E(k) = \boldsymbol{k}$$

Assim, o desvio $k - \mu$ será:

$$desvio = k - \mu = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k} = \mathbf{0}$$

Por isso, a variância será **0**.

Consequentemente, a variância e o desvio padrão de uma constante são iguais a zero: $\boldsymbol{D(k) = 0}$

iv) Se X e Y são independentes, então $\boldsymbol{V(X+Y) = V(X) + V(Y)}$

Somente se X e Y forem variáveis aleatórias **independentes**, poderemos concluir que a variância da soma das variáveis é igual à **soma das variâncias** (propriedade aditiva).

EXEMPLIFICANDO

Vamos supor que **X** represente os resultados do lançamento de um **dado normal** (equilibrado, com faces de 1 a 6) e que **Y** represente os resultados do lançamento do dado equilibrado com **faces de 3 a 8**. Assim, se lançarmos **os dois dados** ao mesmo tempo, qual será a variância da distribuição da **soma** dos resultados?

Já calculamos as variâncias de X e Y em exercícios anteriores:

$$V(X) = \frac{35}{12}$$

$$V(Y) = V(X) = \frac{35}{12}$$

Sendo X e Y variáveis independentes, pois um lançamento não influencia no outro, a variância da distribuição de X + Y, é:

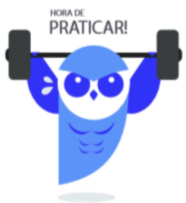
$$V(X) + V(Y) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = 2.\frac{35}{12} = \frac{35}{6}$$

Além disso, se X e Y forem **independentes**, a variância da **diferença** X – Y também é a **soma** das variâncias:

$$\boldsymbol{V(X - Y) = V(X) + V(Y)}$$

Para variáveis independentes, temos $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$, porém o contrário não é necessariamente verdadeiro. Ou seja, é **possível** verificar que $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$ e as variáveis **não** serem independentes.

i)	$\boldsymbol{V(X \pm k) = V(X)}$
ii)	$\boldsymbol{V(k.X) = k^2.V(X)}$
iii)	$\boldsymbol{V(k) = 0}$
iv)	Se X e Y forem **independentes**, então $\boldsymbol{V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)}$



(2016 – Instituto Federal de Educação/BA – *Adaptada*) Sendo X uma variável aleatória, com variância σ^2, então a variância da função Y = a + bX, com a e b ∈ R, é

a) $V(Y) = b^2$

b) $V(Y) = a + b$

c) $V(Y) = \sigma^2$

d) $V(Y) = b^2\sigma^2$

e) $V(Y) = a^2 + b^2$

Comentários:

Pelas propriedades da variância, temos:

$$V(Y) = V(a + bx) = b^2.V(X)$$

Como a variância de X é $V(X) = \sigma^2$, então a variância de Y é:

$$V(Y) = b^2\sigma^2$$

Gabarito: D.

(FGV/2017 – IBGE – *Adaptada*) Para o caso de variáveis aleatórias quaisquer, existem diversas propriedades que se aplicam diretamente à esperança matemática e ao momento central de segunda ordem. Dentre essas propriedades está:

a) $Var(X) > E(X^2)$

b) $Var(X \pm Y) = Var(X) \pm Var(Y)$

c) $DP(a) = 0$, sendo a uma constante qualquer

d) $Var(a.X) = a.Var(X)$, sendo a uma constante positiva

e) $DP(a.X) = a.DP(X)$, sendo a uma constante qualquer

Comentários:

Em relação à alternativa A, podemos calcular a variância como:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Como $[E(X)]^2 > 0$ para qualquer variável X, então, temos:

$$Var(X) < E(X^2)$$

Portanto, a alternativa A está incorreta. Em relação à alternativa B, se X e Y forem **independentes**, então podemos afirmar que:

$$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Logo, a alternativa B está incorreta por 2 motivos:

i) Não pode considerar a propriedade aditiva da variância, $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$, pois o enunciado **não** afirmou que X e Y são independentes.

ii) Ainda que X e Y fossem independentes, a variância da diferença de X e Y seria igual à soma das variâncias: $Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y)$

Em relação à alternativa C, sabemos que a variância e o desvio padrão de uma constante "a" **qualquer** são iguais a zero.

$$DP(a) = 0$$

Portanto, a alternativa C está correta. Em relação à alternativa D, sabemos que para uma constante "a" **qualquer**:

$$Var(a.X) = a^2.Var(X)$$

Portanto, a alternativa D está incorreta. Em relação à alternativa E, sabemos que para uma constante "a" **qualquer**, temos:

$$DP(a.X) = |a|.DP(X)$$

Assim, sendo a uma constante **positiva** então:

$$DP(a.X) = a.DP(X)$$

Sendo a uma constante **negativa** então:

$$DP(a.X) = -a.DP(X)$$

Portanto, temos equações **distintas** para constantes positivas e negativas, logo a alternativa E está incorreta.

Resposta: C.

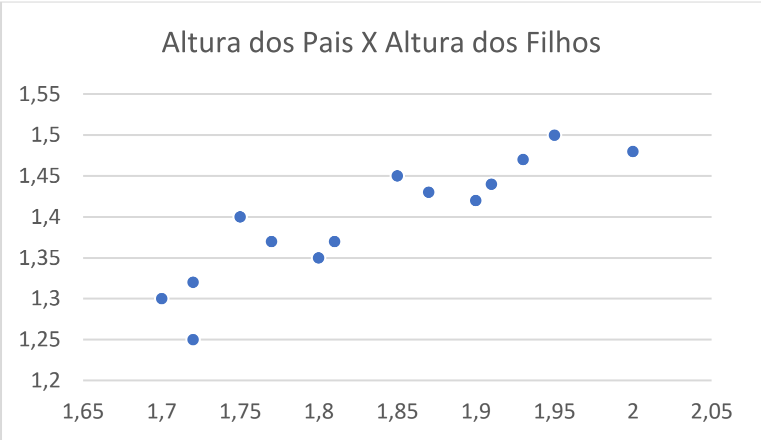
COVARIÂNCIA E CORRELAÇÃO

As medidas que estudaremos nesta seção representam a **relação** entre **duas variáveis aleatórias**. Variáveis **relacionadas** são aquelas em que o resultado de uma **influencia** o resultado de outra, ou seja, essas variáveis **não** são independentes.

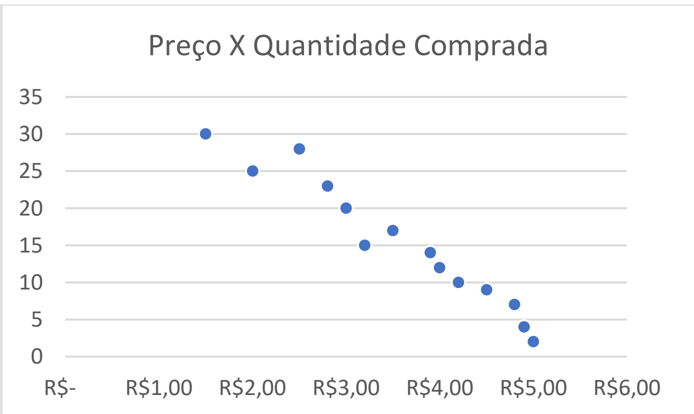
Por exemplo, a **altura de uma criança** é dependente da **altura de seus pais**; o **volume de água** em uma caixa d'água se tem relação com o seu **peso**; a **demanda** de certo produto varia de acordo com o seu **preço**.

Há variáveis **fortemente** relacionadas, como o volume e o peso de água, e outras **nem tanto**, como a altura dos pais e a altura dos filhos. Também existem variáveis que se relacionam em um **mesmo sentido** (quanto mais altos são os pais, mais altos os filhos tendem a ser) e variáveis que se relacionam em **sentidos opostos** (quanto maior o preço, menor a demanda).

No gráfico abaixo, ilustramos um exemplo hipotético de duas variáveis que se relacionam no **mesmo sentido**, como a altura dos pais e a altura dos filhos.



No gráfico a seguir, ilustramos um exemplo hipotético de duas variáveis que se relacionam em **sentidos opostos**, como o preço de um produto e a quantidade adquirida.



A covariância e a correlação caracterizam tanto a **força** da relação entre duas variáveis, quanto a sua **orientação** (se variam no **mesmo sentido** ou em **sentidos opostos**).

A covariância entre duas variáveis aleatórias X e Y, representada por $Cov(X,Y)$, é, por **definição**:

$$Cov(X,Y) = E[(X - \mu_X).(Y - \mu_Y)] = \frac{1}{n}.\sum (x_i - \mu_X).(y_i - \mu_Y)$$

Nessa expressão, μ_X corresponde à média (esperança) da variável X, e μ_Y corresponde à média de Y.

A covariância também pode ser calculada como:

TOME NOTA!

$$\boxed{\boldsymbol{Cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)}}$$

Nessa fórmula, $E(X.Y)$ corresponde ao seguinte:

$$E(X.Y) = \sum x.y.p(x,y)$$

Ou seja, multiplicamos os possíveis valores das variáveis pelas **probabilidades** correspondentes.

Se os valores forem **igualmente prováveis**, podemos calcular $E(X.Y)$ como:

$$E(X.Y) = \frac{\sum x.y}{N}$$

Por exemplo, vamos considerar uma parte dos dados hipotéticos do gráfico Preço X Quantidade Comprada, conforme indicado na tabela abaixo.

Para calcular a covariância, podemos criar uma **nova coluna** com o **produto** das duas variáveis, o que permitirá calcular E(X.Y).

	X: Preço	Y: Qtdade	X.Y
i	1,50	30	45
ii	2,00	25	50
iii	3,00	20	60
iv	5,00	2	10
Total	**11,50**	**77**	**165**

Como esses valores são igualmente prováveis, o valor de E(X.Y) pode ser calculado como:

$$E(X.Y) = \frac{\sum x.y}{N} = \frac{165}{4} = 41{,}25$$

Agora, calculamos E(X) e E(Y), isto é, a média de X e de Y:

$$E(X) = \frac{\sum x}{N} = \frac{11{,}50}{4} = 2{,}875$$

$$E(Y) = \frac{\sum y}{N} = \frac{77}{4} = 19{,}25$$

A covariância será, portanto:

$$Cov(X,Y) = 41{,}25 - 2{,}875 \times 19{,}25 \cong -14$$

Da mesma forma que podemos calcular a variância amostral, para estimar a variância da população a partir de uma amostra, também podemos calcular a covariância amostral, dividindo a soma dos produtos dos desvios por $n - 1$:

$$s_{X,Y} = \frac{1}{n-1} . \sum (x_i - \mu_X).(y_i - \mu_Y)$$

Em relação ao nosso exemplo, já calculamos a covariância com base na outra fórmula. Nesse caso, para obter a covariância amostral, podemos multiplicar o resultado por $\frac{n}{n-1}$:

$$s_{X,Y} \cong -14 \times \frac{4}{3} \cong -18{,}7$$

Para o nosso exemplo, obtivemos uma **covariância negativa**. Isso ocorreu porque as variáveis se relacionam em **sentidos opostos** (**relação negativa**), isto é, quando uma aumenta, a outra diminui, em média.

Quando a **covariância** das variáveis é **positiva**, elas variam **no mesmo sentido** (**relação positiva**), isto é, quando uma aumenta, a outra também aumenta, em média.

RESUMINDO

Para calcular a **covariância**, podemos seguir os seguintes passos:

i) **Multiplicar** os valores de X e Y;
ii) **Somar** os produtos X.Y e **dividir por N** para obter $E(X.Y) = \frac{\sum x.y}{N}$;
iii) Calcular as **médias** $E(X) = \frac{\sum x}{N}$ e $E(Y) = \frac{\sum y}{N}$ e multiplicá-las;
iv) **Subtrair** o resultado de ii pelo resultado de iii para obter a covariância.

Entretanto, a **força** da relação entre duas variáveis é **difícil** de interpretar a partir da covariância. Em relação ao nosso exemplo, uma covariância de -14 indica uma forte relação negativa ou uma fraca relação?

Para isso, há o conceito de **correlação** (ou **coeficiente de correlação**), indicado por $\boldsymbol{\rho}$, em que **dividimos** a **covariância** pelo **desvio padrão** de ambas as variáveis.

$$\boldsymbol{\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X . \sigma_Y}}$$

Para calcular o desvio padrão (populacional) para as variáveis do nosso exemplo, vamos utilizar a seguinte fórmula da variância:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Para isso, vamos criar uma coluna com os valores de X^2 e Y^2:

	X: Preço	**Y: Qtdade**	**X²**	**Y²**
i	1,50	30	2,25	900
ii	2,00	25	4	625
iii	3,00	20	9	400
iv	5,00	2	25	4
Total	**11,50**	**77**	**40,25**	**1929**

Os valores de $E(X^2)$ e $E(Y^2)$ são, portanto:

$$E(X^2) = \frac{\sum x^2}{N} = \frac{40,25}{4} \cong 10,06$$

$$E(Y^2) = \frac{\sum y^2}{N} = \frac{1929}{4} = 482,25$$

Sabendo que $E(X^2) = 10{,}06$ e que $E(X) = 2{,}875$, então a variância de X é:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \cong 10{,}06 - [2{,}875]^2 \cong 10{,}06 - 8{,}26 \cong 1{,}80$$

$$\sigma_X \cong \sqrt{1{,}80} \cong 1{,}34$$

Em relação a Y, sabendo que $E(Y^2) = 482{,}25$ e que $E(Y) = 19{,}25$, então a variância e desvio padrão são:

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 482{,}25 - [19{,}25]^2 \cong 482{,}25 - 370{,}56 = 111{,}69$$

$$\sigma_Y \cong \sqrt{111{,}69} \cong 10{,}57$$

Portanto, o coeficiente de correlação para o nosso exemplo é:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X . \sigma_Y} \cong \frac{-14}{1{,}34 \times 10{,}57} \cong -0{,}99$$

Com base nesse valor, podemos concluir que a relação negativa entre as variáveis é **muito forte**, pois o valor do coeficiente de correlação é próximo de -1.

A fórmula do coeficiente de correlação também pode ser representada como:

$$\rho(X,Y) = \frac{\sum x.y - n.\bar{x}.\bar{y}}{\sqrt{\sum x^2 - n.\bar{x}^2} \times \sqrt{\sum y^2 - n.\bar{y}^2}}$$

Em que o numerador é igual à covariância multiplicada por n e o denominador é igual ao produto dos desvios padrão, também multiplicado por n.

Vamos verificar isso! A covariância pode ser representada como:

$$Cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y) = \frac{\sum x.y}{n} - \bar{x}.\bar{y} = \frac{1}{n}\left(\sum x.y - n.\bar{x}.\bar{y}\right)$$

E os desvios padrão são a raiz quadrada da variância:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E(X^2) - [E(X)]^2} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum x^2 - n.\bar{x}\right)}$$

$$\sigma_Y = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{E(Y^2) - [E(Y)]^2} = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - \bar{y}} = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum y^2 - n.\bar{y}\right)}$$

Dividindo a covariância pelo produto dos desvios padrão, obtemos a fórmula acima!

O coeficiente de correlação mede a **força** e a **orientação** com que duas variáveis se relacionam **linearmente**, podendo assumir valores no intervalo **[-1,1]**.

Assim, como para a covariância, **valores positivos** do coeficiente de correlação indicam uma relação entre as variáveis **no mesmo sentido** (relação positiva) e **valores negativos** indicam relação **em sentidos opostos** (relação negativa).

Além disso, quando $\boldsymbol{\rho = 1}$, há uma **correlação linear perfeita positiva**, ou seja, as variáveis apresentam uma relação linear entre si da forma $Y = aX + b$, sendo a e b reais e $a > 0$. É o caso do volume de água e do peso da caixa d'água.

Quando $\boldsymbol{\rho = -1}$, há uma **correlação linear perfeita negativa**, ou seja, as variáveis apresentam uma relação linear entre si da forma $Y = aX + b$, sendo a e b reais e $a < 0$. Um exemplo dessa relação seria o peso da caixa d'água e o seu espaço disponível.

Vejamos agora qual valor a covariância assume quando as variáveis são **independentes**. Sendo X e Y variáveis independentes, sabemos que:

$$E(X.Y) = E(X).E(Y)$$

Portanto, a **covariância** de duas variáveis **independentes** é:

$$Cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y) = E(X).E(Y) - E(X).E(Y) = 0$$

Consequentemente, o valor do coeficiente de correlação para variáveis **independentes** também é $\boldsymbol{\rho = 0}$.

Porém, é possível ter $Cov = 0, \rho = 0$ e as variáveis **não** serem independentes.

Existe uma **exceção** para essa regra!

Para **variáveis binárias**, isto é, que assumem apenas 2 valores, a covariância nula **implica** na **independência** dessas variáveis! Em outras palavras, se a covariância entre 2 variáveis binárias for nula, podemos garantir que essas variáveis são **independentes**.

ESQUEMATIZANDO

$$Cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X.\sigma_Y}, \rho \in [-1,1]$$

Variáveis X e Y Independentes $\rightarrow Cov(X,Y) = 0, \rho(X,Y) = 0$

$Cov(X,Y) > 0, \rho(X,Y) > 0 \leftrightarrow$ Relação positiva (X e Y variam no mesmo sentido)

$Cov(X,Y) < 0, \rho(X,Y) < 0 \leftrightarrow$ Relação negativa (X e Y variam em sentidos opostos)

$\rho(X,Y) = 1 \leftrightarrow$ relação linear perfeita positiva $\leftrightarrow Y = aX + b, a > 0$

$\rho(X,Y) = -1 \leftrightarrow$ relação linear perfeita negativa $\leftrightarrow Y = aX + b, a < 0$

HORA DE PRATICAR!

(2018 – UFRGS) A análise de _____________ permite estudar a relação entre dois conjuntos de valores e quantificar o quanto um está relacionado com o outro, no sentido de determinar a intensidade e a direção dessa relação. Isto é, essa análise indica se, e com que intensidade, os valores de uma variável aumentam ou diminuem enquanto os valores da outra variável aumentam ou diminuem.

Assinale a alternativa que completa corretamente a lacuna do texto acima.

a) correlação

b) dispersão

c) classificação

d) agrupamento

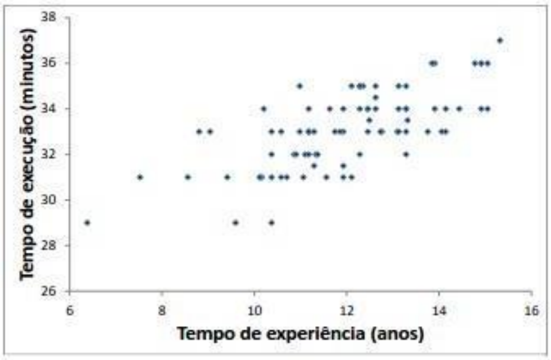
e) regressão

Comentários:

O conceito que estuda a relação entre duas variáveis, representando tanto a força dessa relação quanto o seu sentido, é a correlação.

Gabarito: A

(2015 – PC/GO) Com o intuito de avaliar possíveis correlações entre variáveis, um gráfico de dispersão pode ser um aliado na tomada de decisão. Esse gráfico, elaborado no eixo cartesiano, plota resultados das variáveis estudadas a fim de representá-las conjuntamente. Sejam x e y variáveis referentes a "tempo de experiência" e "tempo de execução de tarefa", respectivamente, e analisando o gráfico de dispersão apresentado, assinale a alternativa correta.



a) É observada uma correlação positiva perfeita entre as variáveis.

b) É observada uma correlação positiva entre as variáveis.

c) É observada uma correlação nula entre as variáveis.

d) É observada uma correlação negativa entre as variáveis.

e) É observada uma correlação negativa perfeita entre as variáveis..

Comentários:

Pelo gráfico, observamos que as variáveis se relacionam em um mesmo sentido, portanto a correlação é **positiva**. Porém, essa relação não é perfeitamente linear, por isso a correlação não é perfeita.

Gabarito: B

(FCC/2015 – SEFAZ/PI – *Adaptada*) Julgue as seguintes afirmações:

I – Se r é o coeficiente de correlação linear entre duas variáveis, então $-1 \leq r \leq 1$.

II – Se duas variáveis X e Y apresentam correlação linear inversa, o coeficiente de correlação linear entre elas será um número negativo menor do que -1.

Comentários:

Em relação à afirmação I, o coeficiente de correlação varia entre [-1,1]. Portanto, a afirmação I está correta.

Em relação à afirmação II, se X e Y se relacionam de forma **inversa**, então o coeficiente de correlação é **negativo**. Porém, como o menor valor para o coeficiente é -1, o coeficiente será um valor negativo maior ou igual a -1, não menor do que -1.

Portanto, a afirmação II está incorreta.

Resposta: I – Certo; II – Errado.

(CESPE/2016 – TCE/PR) Se satisfação no trabalho e saúde no trabalho forem indicadores com variâncias populacionais iguais a 8 e 2, respectivamente, e se a covariância populacional entre esses indicadores for igual a 3, então a correlação populacional entre satisfação no trabalho e saúde no trabalho será igual a

a) 0,8125.

b) 1.

c) 0,1875.

d) 0,30.

e) 0,75.

Comentários:

Sabendo que V(X) = 8, V(Y) = 2 e Cov(X,Y) = 3, então a correlação é dada por:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X . \sigma_Y} = \frac{3}{\sqrt{8}.\sqrt{2}} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Gabarito: E

(2018 – FUNPAPA) Um pesquisador suspeita que existe uma correlação entre o número de promessas que um candidato político faz e o número de promessas que são cumpridas uma vez que o candidato é eleito. Ele acompanha vários políticos proeminentes e registra as promessas feitas (X) e as promessas mantidas (Y).

Utilizando os seguintes dados sumarizados, calcule o coeficiente de correlação entre as promessas feitas e as promessas mantidas e assinale a alternativa correta.

$$\sum_{i=1}^{7} x_i = 280, \quad \sum_{i=1}^{7} y_i = 28, \quad \sum_{i=1}^{7} x_i y_i = 940, \quad \sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 12400 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{7} y_i^2 = 140.$$

a) O coeficiente de correlação entre as promessas feitas e as promessas mantidas indicam uma correlação forte e positiva.

b) O coeficiente de correlação entre as promessas feitas e as promessas mantidas indicam uma correlação fraca e negativa.

c) O coeficiente de correlação entre as promessas feitas e as promessas mantidas indicam uma correlação forte e negativa.

d) O coeficiente de correlação entre as promessas feitas e as promessas mantidas indicam uma correlação fraca e positiva.

e) O coeficiente de correlação entre as promessas feitas e as promessas mantidas indicam uma correlação $r \approx 0{,}5$.

Comentários:

O coeficiente de correlação é calculado por:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X . \sigma_Y}$$

A covariância pode ser calculada por:

$$Cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$$

O enunciado informa que $\sum x.y = 940$ e $n = 7$, logo:

$$E(X.Y) = \frac{\sum x.y}{n} = \frac{940}{7}$$

O valor de E(X) pode ser calculado a partir da informação de que $\sum x = 280$, logo:

$$E(X) = \frac{\sum x}{n} = \frac{280}{7}$$

O valor de E(Y) pode ser calculado a partir da informação de que $\sum y = 28$, logo:

$$E(Y) = \frac{\sum y}{n} = \frac{28}{7} = 4$$

Assim, o valor da covariância é:

$$Cov(X,Y) = \frac{940}{7} - \frac{280}{7} \times 4 = \frac{940}{7} - \frac{1120}{7} = -\frac{180}{7} \cong 25{,}7$$

Para calcular o coeficiente de correlação, vamos primeiro calcular a variância de X utilizando a seguinte fórmula:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

O enunciado informa que $\sum x^2 = 12400$, logo:

$$E(X^2) = \frac{\sum x^2}{n} = \frac{12400}{7}$$

Sabendo que $E(X) = \frac{280}{7} = 40$, então a variância de X é:

$$V(X) = \frac{12400}{7} - 40^2 = \frac{12400}{7} - \frac{11200}{7} = \frac{1200}{7}$$

E o desvio padrão de X é:

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{1200}{7}} = 10\sqrt{\frac{12}{7}} \cong 13{,}1$$

O enunciado informa que $\sum y^2 = 140$, logo:

$$E(Y^2) = \frac{\sum y^2}{n} = \frac{140}{7} = 20$$

Sabendo que $E(Y) = 4$, então a variância de Y é:

$$V(Y) = 20 - 4^2 = 20 - 16 = 4$$

E o desvio padrão de Y é:

$$\sigma_X = \sqrt{4} = 2$$

Assim, o coeficiente de correlação é:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X . \sigma_Y} \cong \frac{-25{,}7}{13{,}1 \times 2} \cong -0{,}98$$

Como -0,98 é muito próximo de -1, há uma correlação forte e negativa.

Gabarito: C

Propriedades

Veremos agora propriedades da covariância e da correlação, que valem tanto para **variáveis discretas**, quanto para **variáveis contínuas**. Nesta seção, deduziremos algumas propriedades para que você possa escolher se prefere deduzi-las ou memorizá-las.

A seguir, consideramos X, Y e Z variáveis aleatórias e k uma constante real qualquer.

i) $\boldsymbol{Cov(X, Y) = Cov(Y, X)}$

A covariância é considerada uma medida **simétrica**, pois não importa qual é a variável que aparece primeiro.

De fato, a fórmula da covariância é composta por **produtos** e, por isso, a ordem das variáveis é **indiferente:**

$$Cov(X, Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y) = E(Y.X) - E(Y).E(X) = Cov(Y, X)$$

Pelo mesmo motivo, o coeficiente de correlação também é **simétrico**:

$$\boldsymbol{\rho(X, Y) = \rho(Y, X)}$$

Afinal, ele é a razão entre a covariância e o **produto** dos desvios padrão:

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X . \sigma_Y} = \frac{Cov(Y, X)}{\sigma_Y . \sigma_X} = \rho(Y, X)$$

ii) $\boldsymbol{Cov(X, X) = V(X)}$

A covariância de **uma mesma variável** é igual à sua **variância**.

Por exemplo, sendo X uma variável aleatória com variância V(X) = 4, então a covariância dessa variável com ela mesma é igual à própria variância: Cov(X,X) = 4.

Podemos obter esse resultado, pela fórmula da covariância:

$$Cov(X, Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$$

Assim, o valor de $Cov(X, X)$ é:

$$Cov(X, X) = E(X.X) - E(X).E(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Essa é **exatamente** a fórmula da variância!

Dessa forma, o coeficiente de correlação de uma mesma variável é:

$$\rho(X,X) = \frac{Cov(X,X)}{\sigma_X.\sigma_X} = \frac{Var(X)}{{\sigma_X}^2} = 1$$

$$\boldsymbol{\rho(X,X) = 1}$$

Ou seja, não importa qual é a variável, o seu coeficiente de correlação com ela mesma é igual a **1**.

iii) $\boldsymbol{Cov(k,X) = 0}$

A covariância de uma **constante** e uma variável é igual a **zero**.

Ou seja, a covariância de uma variável X com uma constante k = 5, por exemplo, é Cov(X,5) = 0. Essa propriedade vale para qualquer variável X e qualquer constante k.

ESCLARECENDO!

Vejamos o porquê desse resultado. Pela fórmula da covariância, temos:

$$Cov(k,X) = E(k.X) - E(k).E(X)$$

Sabemos que $E(k.X) = k.E(X)$ e $E(k) = k$. Substituindo esses resultados, temos:

$$Cov(k,X) = k.E(X) - k.E(X) = 0$$

Como a covariância $Cov(k,X) = 0$, então a correlação também é igual a 0: $\boldsymbol{\rho(k,X) = 0}$

iv) $\boldsymbol{Cov(X \pm a, Y \pm b) = Cov(X,Y)}$

A covariância não se altera quando somamos ou subtraímos constantes às variáveis.

Por exemplo, sendo Cov(X,Y) = 6, então a covariância entre a variável X + 5 e a variável Y – 4 será a igual:

Cov(X + 5, Y – 4) = Cov(X,Y) = 6

INDO MAIS FUNDO!

Podemos **verificar** essa propriedade, pela fórmula de covariância:

$$Cov(X+a, Y+b) = E[(X+a).(Y+b)] - E(X+a).E(Y+b)$$

Aplicando a distributiva na primeira expressão, temos:

$$Cov(X+a, Y+b) = E(X.Y + b.X + a.Y + a.b) - E(X+a).E(Y+b)$$

Pelas propriedades da esperança, temos:

$$Cov(X+a, Y+b) = E(X.Y) + b.E(X) + a.E(Y) + a.b - [E(X)+a].[E(Y)+b]$$

Aplicando a distributiva no segundo termo:

$$= E(X.Y) + b.E(X) + a.E(Y) + a.b. - [E(X).E(Y) + b.E(X) + a.E(Y) + a.b]$$

$$= E(X.Y) + b.E(X) + a.E(Y) + a.b. - E(X).E(Y) - b.E(X) - a.E(Y) - a.b$$

$$Cov(X+a, Y+b) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$$

Essa é justamente a fórmula da covariância $Cov(X, Y)$!

Dessa forma, o coeficiente de correlação também não se altera quando somamos ou subtraímos constantes às variáveis:

$$\boldsymbol{\rho(X \pm a, Y \pm b) = \rho(X, Y)}$$

v) $\boldsymbol{Cov(X+Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)}$

A covariância da soma de variáveis aleatórias X + Y e uma outra variável Z é igual à **soma** da covariância entre X e Z com a covariância entre Y e Z.

Por exemplo, vamos supor que a covariância entre as variáveis X e Z seja Cov(X, Z) = 1 e que a covariância entre as variáveis Y e Z seja Cov(Y, Z) = 2. Supondo que a variável S represente a **soma** S = X + Y, então podemos calcular a covariância entre S e Z:

Cov(S,Z) = Cov(X + Y, Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z) = 1 + 2 = 3

INDO MAIS FUNDO!

Novamente, podemos verificar essa propriedade, pela fórmula de covariância:

$$Cov(X+Y,Z) = E[(X+Y).Z] - E(X+Y).E(Z)$$

Aplicando a distributiva na primeira expressão, temos:

$$Cov(X+Y,Z) = E(X.Z + Y.Z) - E(X+Y).E(Z)$$

Pela propriedade aditiva da esperança, temos:

$$Cov(X+Y,Z) = E(X.Z) + E(Y.Z) - [E(X) + E(Y)].E(Z)$$

Aplicando a distributiva no segundo termo:

$$Cov(X+Y,Z) = E(X.Z) + E(Y.Z) - [E(X).E(Z) + E(Y).E(Z)]$$

$$Cov(X+Y,Z) = E(X.Z) + E(Y.Z) - E(X).E(Z) - E(Y).E(Z)$$

Reorganizando esses termos:

$$Cov(X+Y,Z) = E(X.Z) - E(X).E(Z) + E(Y.Z) - E(Y).E(Z)$$

$$Cov(X+Y,Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$$

A mesma propriedade pode ser aplicada para a **subtração** de variáveis:

$$\boldsymbol{Cov(X-Y,Z) = Cov(X,Z) - Cov(Y,Z)}$$

Ou seja, para o nosso exemplo em que Cov(X,Z) = 1 e seja Cov(Y,Z) = 2, supondo D = X – Y, então a covariância entre D e Z é:

Cov(D,Z) = Cov(X – Y, Z) = Cov(X,Z) – Cov(Y,Z) = 1 – 2 = -1

vi) $\boldsymbol{Cov(kX,Y) = Cov(X,kY) = k.Cov(X,Y)}$

A covariância de duas variáveis aleatórias, sendo **qualquer** uma delas multiplicada por uma **constante**, é igual ao **produto da constante pela covariância** das variáveis.

Considerando que a covariância entre X e Y é Cov(X, Y) = 6 e supondo W = 5.Y, a covariância entre X e W será:

Cov(X, W) = Cov(X, 5.Y) = 5.Cov(X, Y) = 5 x 6 = 30

E se definíssemos a variável H = 5.X, então a covariância entre H e Y seria:

Cov(H, Y) = Cov(5.X, Y) = 5.Cov(X, Y) = 30

Teríamos o mesmo resultado! Ou seja, não importa qual é a variável que está sendo multiplicada pela constante, pois o resultado será o mesmo: a covariância será multiplicada pela constante.

O mesmo vale para quando estamos dividindo por uma constante k (pois é o mesmo que multiplicar pela constante $\frac{1}{k}$). Por exemplo, para $G = \frac{Y}{3}$, a covariância entre X e G será:

$$Cov(X,G) = Cov\left(X, \frac{Y}{3}\right) = \frac{1}{3}.Cov(X,Y) = \frac{1}{3}.6 = 2$$

ESCLARECENDO!

Essa propriedade também pode ser verificada, a partir da fórmula da covariância e das propriedades da esperança.

$$Cov(k.X,Y) = E(k.X.Y) - E(k.X).E(Y)$$

$$Cov(k.X,Y) = k.E(X.Y) - k.E(X).E(Y) = k.[E(X.Y) - E(X).E(Y)]$$

$$Cov(k.X,Y) = k.Cov(X,Y)$$

Podemos deduzir que, se **ambas** as variáveis estiverem multiplicadas pela constante, então a covariância será multiplicada pelo **quadrado** da constante:

$$\boldsymbol{Cov(k.X,k.Y) = k.k.Cov(X,Y) = k^2.Cov(X,Y)}$$

Por exemplo, sendo W = 5.Y e H = 5.X, a covariância entre H e W é:

Cov(H, W) = Cov(5.X, 5.Y) = 5 x 5.Cov(X,Y) = 25 x 6 = 150

E se as constantes forem **diferentes**, teremos:

$$\boldsymbol{Cov(k.X,l.Y) = k.l.Cov(X,Y)}$$

Por exemplo, para $G = \frac{Y}{3}$ e H = 5.X, a covariância entre H e G é:

$$Cov(H,G) = Cov\left(5.X, \frac{Y}{3}\right) = 5.\frac{1}{3}.Cov(X,Y) = 5.\frac{1}{3}.6 = 10$$

E como fica o coeficiente de correlação?

Se as variáveis estiverem multiplicadas por duas constantes quaisquer, k e l, o coeficiente de correlação se manterá o mesmo se as constantes tiverem o mesmo sinal ($kl > 0$) e terá sinal contrário se as constantes tiverem sinais diferentes ($kl < 0$):

$$\boldsymbol{\rho(k.X, l.Y) = \rho(X,Y)}, \textbf{ se } \boldsymbol{kl > 0}$$

$$\boldsymbol{\rho(k.X, l.Y) = -\rho(X,Y)}, \textbf{ se } \boldsymbol{kl < 0}$$

Assim, **o coeficiente de correlação não varia**, **em módulo**, ao multiplicarmos as variáveis aleatórias por **constantes** reais.

Para obter o coeficiente de correlação, dividimos a covariância pelos desvios padrão:

$$\rho(k.X, l.Y) = \frac{Cov(k.X, l.Y)}{\sigma_{k.X}.\sigma_{l.X}} = \frac{k.l.Cov(X,Y)}{\sigma_{k.X}.\sigma_{l.X}}$$

Pelas propriedades do desvio padrão, sabemos que $\sigma_{k.X} = |k|.\sigma_X$ e $\sigma_{l.Y} = |l|.\sigma_Y$:

$$\rho(k.X, l.Y) = \frac{k.l.Cov(X,Y)}{|k|.\sigma_X.|l|.\sigma_Y} = \frac{kl}{|kl|} \times \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X.\sigma_X}$$

Sabemos que $\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X.\sigma_X} = \rho(X,Y)$, logo:

$$\rho(k.X, l.Y) = \frac{\boldsymbol{kl}}{\boldsymbol{|kl|}} \times \rho(X,Y)$$

Assim, se o produto das constantes for positivo, $kl > 0$, o que ocorre quando as constantes possuem o mesmo sinal, então teremos $kl = |kl|$ e o mesmo valor para o coeficiente de correlação:

$$\rho(k.X, l.Y) = \frac{\boldsymbol{kl}}{\boldsymbol{|kl|}} \times \rho(X,Y) = 1.\rho(X,Y)$$

Se o produto das constantes for negativo, $kl < 0$, o que ocorre quando as constantes possuem sinal contrário, então teremos $kl = -|kl|$ e o coeficiente de correlação terá sinal contrário:

$$\rho(k.X, l.Y) = \frac{\boldsymbol{kl}}{\boldsymbol{|kl|}} \times \rho(X,Y) = -1.\rho(X,Y)$$

Por exemplo, sendo A = 5.X e B = $\frac{1}{3}$.Y, o produto entre os coeficientes k = 5 e l = $\frac{1}{3}$ é **positivo**:

$$5.\frac{1}{3} = \frac{5}{3} > 0$$

Portanto, o coeficiente de correlação entre X e Y se mantém o **mesmo**:

$$\rho(A,B) = \rho\left(5.X, \frac{1}{3}.Y\right) = \rho(X,Y)$$

Similarmente, se tivermos C = -5.X e D = $-\frac{1}{3}$.Y, o produto também será **positivo**:

$$-5 \times -\frac{1}{3} = \frac{5}{3} > 0$$

Logo, o coeficiente de correlação também se mantém o **mesmo**:

$$\rho(C,D) = \rho\left(-5.X, -\frac{1}{3}.Y\right) = \rho(X,Y)$$

Porém, se tivermos A = 5.X e D = $-\frac{1}{3}$.Y, o produto entre os coeficientes é **negativo**:

$$5 \times -\frac{1}{3} = -\frac{5}{3} < 0$$

Por isso, o coeficiente de correlação terá **sinal oposto**:

$$\rho(A,D) = \rho\left(5.X, -\frac{1}{3}.Y\right) = -\rho(X,Y)$$

Se houver apenas **uma constante** k multiplicando uma das variáveis, temos um caso **específico** dessa propriedade, para $l = 1$.

Nesse caso, o coeficiente de correlação será o mesmo se $k > 0$ e terá sinal contrário se $k < 0$:

$$\rho(k.X,Y) = \rho(X,Y), \text{ se } k > 0$$

$$\rho(k.X,Y) = -\rho(X,Y), \text{ se } k < 0$$

Propriedades da Covariância

i) **Simetria**: $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
ii) **Mesma variável**: $Cov(X,X) = Var(X)$
iii) Com uma **constante**: $Cov(k,X) = 0$
iv) **Soma/Subtração de uma constante**: $Cov(X \pm a, Y \pm b) = Cov(X,Y)$
v) **Soma/Subtração de variáveis**: $Cov(X \pm Y, Z) = Cov(X,Z) \pm Cov(Y,Z)$
vi) **Produto de constantes**: $Cov(k.X, l.Y) = k.l.Cov(X,Y)$

(FGV/2015 – Prefeitura de Recife/PE) Uma variável aleatória X tem média igual a 2 e desvio padrão igual a 2. Se Y = 6 – 2X, então a média de Y, a variância de Y e o coeficiente de correlação entre X e Y valem, respectivamente,

a) -2, 4 e 1.

b) -2, 16 e 1.

c) 2, 16 e -1.

d) 10, 2 e -1.

e) 2, 4 e -1.

Comentários:

Pelas propriedades da esperança, temos:

$$E(Y) = E(6 - 2X) = 6 - 2.E(X)$$

O enunciado informa que a média de X é E(X) = 2, logo:

$$E(Y) = 6 - 2.2 = 2$$

Pela propriedade da variância, temos:

$$V(Y) = V(6 - 2X) = (-2)^2.V(X) = 4.V(X)$$

O enunciado informa que o desvio padrão de X é DP(X) = 2. Assim, a variância é $V(X) = 2^2 = 4$:

$$V(Y) = 4.4 = 16$$

Como Y = 6 – 2X, o coeficiente de correlação de X e Y é:

$$\rho(X, Y) = \rho(X, 6 - 2X)$$

Sabemos que a soma de constantes não altera o coeficiente de correlação, logo:

$$\rho(X, Y) = \rho(X, -2X)$$

Aqui, temos uma constante negativa multiplicando uma das variáveis: k = -2 < 0. Logo, o coeficiente de correlação terá sinal contrário:

$$\rho(X, Y) = -\rho(X, X)$$

Sabemos que $\rho(X, X) = 1$, logo:

$$\rho(X, Y) = -1$$

Gabarito: C

VARIÂNCIA DA SOMA E DA DIFERENÇA

No **caso geral**, a **variância da soma** é dada pela seguinte fórmula:

$$\boxed{V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2.Cov(X,Y)}$$

Por exemplo, vamos supor que a variância de X é V(X) = 3, que a variância de Y é V(Y) = 4 e a covariância entre X e Y é Cov(X,Y) = 1. Então, a variância da soma das variáveis S = X + Y será:

V(S) = V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2.Cov(X,Y) = 3 + 4 + 2x1 = 9

Para a **subtração das variáveis**, temos:

$$\boxed{V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2.Cov(X,Y)}$$

Para o mesmo exemplo, sendo D = X – Y, a variância de D será:

V(D) = V(X – Y) = V(X) + V(Y) – 2.Cov(X,Y) = 3 + 4 – 2x1 = 5

ACORDE!

> Tanto na fórmula da variância da soma V(X + Y), quanto na fórmula da variância da subtração V(X - Y), iremos **somar** as **variâncias** de X e Y.
>
> A diferença entre as duas fórmulas está no **sinal da covariância**, que é multiplicada por 2. Para a variância da **soma**, **somamos** o dobro da covariância e para a variância da **subtração**, **subtraímos** o dobro da covariância entre as variáveis.

Para ajudar a lembrar, observe a similaridade das fórmulas acima com os **produtos notáveis**:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2.x.y$$

$$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2.x.y$$

Para variáveis **independentes** X, Y, temos $Cov(X,Y) = 0$ e, portanto, a variância da soma será igual à variância da diferença (propriedade aditiva da variância):

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2.Cov(X,Y) = V(X) + V(Y)$$

$$V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2.Cov(X,Y) = V(X) + V(Y)$$

Por exemplo, se X e Y forem independentes, com V(X) = 3 e V(Y) = 4, então a variância da soma e da diferença serão iguais a:

$$V(X + Y) = V(X - Y) = V(X) + V(Y) = 7$$

Se as variáveis forem **multiplicadas por constantes** reais quaisquer k, l:

$$V(k.X + l.Y) = V(k.X) + V(l.Y) + 2.Cov(k.X, l.Y)$$

Sabemos que:

$$V(k.X) = k^2.V(X)$$

$$V(l.Y) = l^2.V(Y)$$

$$Cov(k.X, l.Y) = k.l.Cov(X,Y)$$

Então:

$$\boldsymbol{V(k.X + l.Y) = k^2.V(X) + l^2.V(Y) + 2.k.l.Cov(X,Y)}$$

Analogamente, temos:

$$\boldsymbol{V(k.X - l.Y) = k^2.V(X) + l^2.V(Y) - 2.k.l.Cov(X,Y)}$$

Perceba que a similaridade com os **produtos notáveis** se mantém:

$$(k.x + l.y)^2 = k^2.x^2 + l^2.y^2 + 2.(k.l).x.y$$

$$(k.x - l.y)^2 = k^2.x^2 + l^2.y^2 - 2.(k.l).x.y$$

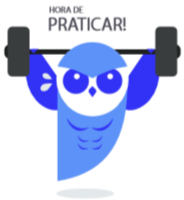
E se houver mais de 2 variáveis? A variância da soma de 3 variáveis, por exemplo, é:

$$V(X + Y + Z) = V(X) + V(Y) + V(Z) + 2[Cov(X,Y) + Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)]$$

Ou seja, precisamos somar as variâncias com o **dobro** das covariâncias entre **todas** as variáveis. É importante notar que consideramos a covariância entre duas variáveis **uma única vez**, em razão da sua simetria, isto é, $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$.

Para n variáveis $X_1, X_2, \dots, X_n$, podemos representar a variância da soma $\sum_{i=1}^{n} X_i$ como:

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2.\sum_{j>i}^{n}\sum_{i=1}^{n} Cov(X_i, X_j)$$



(2016 – IBGE) Se duas variáveis aleatórias, X e Y, têm correlação linear negativa, então:

a) Quanto menor for o valor de X, menor será o valor de Y.

b) A soma dos valores esperados de X e Y é menor do que o valor esperado de X + Y.

c) O produto dos valores esperados de X e Y é menor do que o valor esperado do produto X.Y.

d) A soma das variâncias de X e Y é igual ou menor do que as variâncias de X + Y.

e) A soma das variâncias de X e Y é estritamente maior do que a variância de X + Y.

Comentários:

A questão informa que a correlação linear entre X e Y é negativa.

Em relação à alternativa A, como a covariância é negativa, então X e Y se relacionam em sentidos opostos. Assim, quanto menor for o valor de X, maior será o valor de Y (em média).

Portanto: alternativa A incorreta.

Em relação à alternativa B, a soma dos valores esperados E(X) + E(Y) é **igual** ao valor esperado E(X+Y), para **quaisquer** variáveis X e Y.

Portanto: alternativa B incorreta.

Em relação à alternativa C, o valor de E(X.Y) pode ser calculado a partir da covariância:

$$Cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$$

$$E(X.Y) = Cov(X,Y) + E(X).E(Y)$$

Como a correlação entre X e Y é negativa, então $Cov(X,Y) < 0$. Dessa forma:

$$E(X.Y) < E(X).E(Y)$$

Ou seja, o produto dos valores esperados E(X).E(Y) é **maior** que o valor esperado do produto E(X.Y).

Portanto: alternativa C incorreta.

Em relação às alternativas D e E, a variância de X + Y é:

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2.Cov(X,Y)$$

Como $Cov(X,Y) < 0$, então:

$$V(X + Y) < V(X) + V(Y)$$

Ou seja, A soma das variâncias de V(X) + V(Y) é **maior** que a V(X + Y).

Portanto: alternativa D incorreta e alternativa E correta.

Gabarito: E.

(FGV/2015 – TJ/RO) Seja X = número de anos de condenação e Y = nível de renda do condenado (mil reais). São fornecidas ainda as seguintes informações:

Var(X) = 25; Var (Y) = 16 e Var (X+Y) = 21

Assim sendo, a correlação entre X e Y é igual a:

a) 0,20

b) 0,25

c) 0,50

d) -0,50

e) -0,10

Comentários:

A correlação é dada por:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X . \sigma_Y}$$

O valor de Cov(X,Y) pode ser obtido pela fórmula da **variância da soma**:

V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2.Cov(X,Y)

O enunciado informa que V(X + Y) = 21, V(X) = 25 e V(Y) = 16, logo:

21 = 25 + 16 + 2.Cov(X,Y)

2.Cov(X,Y) = 21 – 25 – 16 = -20

Cov(X,Y) = -10

Os valores dos desvios padrão são a raiz quadrada das variâncias. Sendo V(X) = 25, então:

$$\sigma_X = \sqrt{25} = 5$$

Sendo V(Y) = 16, então:

$$\sigma_Y = \sqrt{16} = 4$$

Portanto, o coeficiente de correlação é:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X . \sigma_Y} = \frac{-10}{5 \times 4} = -0{,}5$$

Gabarito: D

COEFICIENTE DE VARIAÇÃO E VARIÂNCIA RELATIVA

A definição de **coeficiente de variação** (também chamado de **desvio padrão relativo** ou, ainda, de **coeficiente de variabilidade**), C_V, é:

$$\boldsymbol{C_V = \frac{\sigma}{\mu}}$$

Podemos dizer que esse parâmetro representa uma **normalização** do **desvio padrão** pela **média**, para permitir a comparação da dispersão de variáveis com **médias distintas**.

Por exemplo, vamos supor que a variável aleatória X apresente média $\mu_X = 100$ e desvio padrão $\sigma_X = 20$; e que a variável aleatória Y apresente média $\mu_Y = 10$ e desvio padrão $\sigma_Y = 5$.

Nesse caso, não poderíamos afirmar que a dispersão de X é maior que a de Y, só porque $\sigma_X > \sigma_Y$. Para efetuarmos essa comparação, precisamos do **Coeficiente de Variação**. Para esse exemplo, temos:

$$C_{V_X} = \frac{\sigma_X}{\mu_X} = \frac{20}{100} = 0{,}2$$

$$C_{V_Y} = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

Portanto, concluímos que a dispersão de Y é maior do que a de X, porque $C_{V_Y} > C_{V_X}$.

Como a média e o desvio padrão consideram a **mesma unidade** de medida (a mesma dos elementos da variável aleatória), o coeficiente de variação é **adimensional**, isto é, **não** possui unidade de medida, sendo apenas um **número**.

A **variância relativa**, V_R, também apresenta o mesmo objetivo, qual seja, de permitir comparações entre variáveis com **médias distintas**.

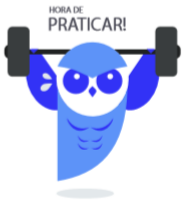
A **variância relativa** é definida como o **quadrado do coeficiente de variação**:

$$\boldsymbol{V_R = (C_V)^2 = \frac{\sigma^2}{\mu^2} = \frac{V(X)}{\mu^2}}$$

Ou seja, a variância relativa é o **quociente entre a variância e o quadrado da média**.

Para o nosso exemplo, em que $C_{V_X} = 0{,}2$, a variância relativa de X é:

$$V_R = (C_V)^2 = (0{,}2)^2 = 0{,}04$$



(2015 – Analista de Planejamento e Orçamento) O coeficiente de correlação de duas variáveis aleatórias x e y é igual 0,7, ou seja: δ (x , y) = 0,7. O coeficiente de variabilidade de x é 0,3 – por γ_x =0,3. O coeficiente de variabilidade de y é 0,5 – γ_y =0,5. Com essas informações sobre as variáveis x e y, pode-se, corretamente, afirmar que:

a) à medida que x cresce, em média y decresce.

b) a variabilidade absoluta de x é maior que a variabilidade absoluta de y.

c) o desvio-padrão de x é 30% menor do que sua média.

d) o desvio-padrão de y é 50% de sua média.

e) o desvio-padrão de y é 50% maior do que sua média.

Comentários:

A questão informa que o coeficiente de correlação entre X e Y é 0,7: ρ(X,Y) = 0,7; que o coeficiente de variabilidade (ou de variação) de X é 0,3:

$$C_{V_X} = \frac{\sigma_X}{\mu_X} = 0{,}3$$

E que o coeficiente de variabilidade (ou de variação) de Y é 0,5:

$$C_{V_Y} = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y} = 0{,}5$$

Em relação à alternativa A, como o coeficiente de correlação é positivo, à medida que x cresce, em média, y também cresce.

Portanto, a alternativa A está incorreta.

Em relação à alternativa B, não é possível calcular as médias μ_X e μ_Y com as informações fornecidas, assim, não é possível afirmar algo sobre as variabilidades absolutas (isto é, os desvios padrão ou as variâncias) das variáveis.

Portanto, a alternativa B está incorreta.

Em relação à alternativa C, podemos afirmar que o desvio padrão de X é 30% da sua média:

$$\sigma_X = 0{,}3 \times \mu_X$$

Portanto, a alternativa C está incorreta.

Em relação às alternativas D e E, podemos afirmar que o desvio padrão de Y é 50% da sua média:

$$\sigma_Y = 0{,}5 \times \mu_Y$$

Portanto, a alternativa D está correta e a alternativa E está incorreta.

Gabarito: D.

Resumo

Função de Distribuição Acumulada: $F(x) = P(X \leq x)$

Esperança Matemática (média): $E(X) = \sum x.P(X = x)$

- $E(kX) = k.E(X)$
- $E(X + k) = E(X) + k$
- $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$
- $E(k) = k$
- Se X e Y forem **independentes**, então $E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)$

Moda: valor de **X** com maior probabilidade

Mediana: divide a distribuição em duas partes iguais, $F(x_{Med}) = 0{,}5$

Variância: $V(X) = \sum(x - \mu)^2 \times P(X = x)$

- $V(X + k) = V(X)$
- $V(k.X) = k^2.V(X)$
- $V(k) = 0$
- Se X e Y forem **independentes**, então $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$

Desvio Padrão: $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Covariância: $Cov(X, Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$

Correlação: $\rho(X, Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X.\sigma_Y}$

- Se X e Y forem **independentes**, então $Cov(X, Y) = 0, \rho(X, Y) = 0$

Variância da Soma e da Diferença

$$\boldsymbol{V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2.Cov(X, Y)}$$

$$\boldsymbol{V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2.Cov(X, Y)}$$

Coeficiente de Variação: $\boldsymbol{C_V = \frac{\sigma}{\mu}}$

Variância Relativa: $\boldsymbol{V_R = (C_V)^2 = \frac{V(X)}{\mu^2}}$

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Noções de variáveis discretas

1. (CESGRANRIO/2021 – BB) Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com as seguintes informações sobre as variâncias:

(i) Var (X) = 4

(ii) Var(Y) = 9

(iii) Var(X + Y) = 9

Qual é o valor da covariância entre X e Y:

a) -4

b) -2

c) 0

d) 6

e) 36

Comentários:

Vamos calcular a covariância a partir da fórmula da variância da soma:

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2.Cov(X,Y)$$

Substituindo os dados da questão, temos:

$$9 = 4 + 9 + 2.Cov(X,Y)$$

$$2.Cov(X,Y) + 4 = 0$$

$$Cov(X,Y) = -2$$

Gabarito: B

2. (CESGRANRIO/2018 – Petrobras) A realização de um teste requer a aquisição de um seguro de vida para cada pessoa envolvida, no valor de R$ 10.000,00 por pessoa. O valor do prêmio estabelecido pela companhia seguradora é R$ 1.000,00 por apólice. Experiências passadas indicam uma probabilidade de 0,001 de uma pessoa vir a óbito ao longo do teste. O ganho esperado da companhia para cada apólice vendida, em reais, nessas condições, é igual a

a) 99,90

b) 900,00

c) 981,00

d) 990,00

e) 999,00

Comentários:

O enunciado informa que a companhia paga R$ 10.000 por pessoa, caso ela venha a óbito, o que ocorre com probabilidade de 0,001. Sabendo que a companhia não desembolsa nada, caso a pessoa não venha a óbito, com probabilidade 1 – 0,001 = 0,999, o pagamento esperado (médio) por pessoa é:

$$E(gasto) = 10.000 \times 0{,}001 + 0 \times 0{,}999 = 10$$

Sabendo que a companhia recebe R$ 1.000 fixos para cada apólice vendida, o seu lucro esperado é de:

$$E(lucro) = Receita - E(gasto) = 1.000 - 10 = 990$$

Gabarito: D

3. (CESGRANRIO/2018 – Transpetro) Uma pessoa prefere ganhar R$ 100,00 com probabilidade de 100%, um evento certo, em vez de participar de um sorteio com probabilidade x de ganhar R$ 200,00 e (1-x) de nada ganhar. Deduz-se que a pessoa é avessa ao risco se x for igual a:

a) 55%

b) 45%

c) 35%

d) 25%

e) 15%

Comentários:

A pessoa será considerada avessa ao risco se ela preferir ganhar o valor fixo, sem sorteio, mesmo que este seja **inferior ao valor esperado do sorteio**.

Então, o primeiro passo é calcular a probabilidade x para a qual o valor esperado do sorteio seja equivalente ao valor certo de R$ 100. Sabendo que os valores possíveis são R$ 200, com probabilidade x, e 0 com probabilidade 1 – x, o valor esperado do sorteio é:

$$E(S) = 200.x + 0.(1 - x) = 200.x$$

O valor esperado será igual ao valor certo de R$ 100 quando:

$$200.x = 100$$

$$x = \frac{100}{200} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Logo, a pessoa será considerada avessa ao risco se a probabilidade x de ganhar R$ 200 no sorteio for maior que 50%. Dentre as alternativas, a única que é maior que 50% é a alternativa A, 55%.

Gabarito: A

4. (CESGRANRIO/2016 – IBGE) A venda diária X de um certo produto numa loja obedece à seguinte distribuição de probabilidade:

k	0	1	2	3	4
P(X=k)	0,15	0,20	0,40	0,20	0,05

Qual a probabilidade de que o total das vendas do produto de dois dias consecutivos seja 3?

a) 4%

b) 11%

c) 15%

d) 20%

e) 22%

Comentários:

Para que a venda de 2 dias seguidos seja 3, temos as seguintes possibilidades:

- **1º dia: 0** e **2º dia: 3**

  A probabilidade desse resultado (interseção) é o produto:

$$P_1 = P(X = 0) \times P(X = 3) = 0{,}15 \times 0{,}20 = 0{,}03$$

OU

- **1º dia: 1** e **2º dia: 2**

  A probabilidade desse resultado (interseção) é o produto:

$$P_2 = P(X = 1) \times P(X = 2) = 0{,}20 \times 0{,}40 = 0{,}08$$

OU

- **1º dia: 2** e **2º dia: 1**

  A probabilidade desse resultado (interseção) é o produto:

$$P_3 = P(X = 2) \times P(X = 1) = 0{,}40 \times 0{,}20 = 0{,}08$$

OU

- **1º dia: 3** e **2º dia: 1**

  A probabilidade desse resultado (interseção) é o produto:

$$P_4 = P(X = 3) \times P(X = 0) = 0{,}20 \times 0{,}15 = 0{,}03$$

Por se tratar da união desses eventos excludentes, a probabilidade total será a soma:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0{,}03 + 0{,}08 + 0{,}08 + 0{,}03 = 0{,}22 = 22\%$$

Gabarito: E

5. (CESGRANRIO/2016 – IBGE) Se duas variáveis aleatórias, X e Y, têm correlação linear negativa, então:

a) Quanto menor for o valor de X, menor será o valor de Y.

b) A soma dos valores esperados de X e Y é menor do que o valor esperado de X + Y.

c) O produto dos valores esperados de X e Y é menor do que o valor esperado do produto X . Y.

d) A soma das variâncias de X e Y é igual ou menor do que a variância de X + Y.

e) A soma das variâncias de X e Y é estritamente maior do que a variância de X + Y.

Comentários:

O enunciado informa que X e Y têm correlação negativa, isto é, elas se relacionam em sentidos opostos. Então, quanto **menor** for uma variável **maior** será a outra. Logo, a alternativa A está incorreta.

Em relação à alternativa B, o valor esperado de X + Y é (propriedade da esperança):

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Ou seja, a soma dos valores esperados é **igual** ao valor esperado de X + Y, em **qualquer caso**. Logo, a alternativa B está incorreta.

Para analisar a alternativa C, precisamos da fórmula da covariância:

$$Cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$$

Sendo negativa a correlação entre X e Y, a covariância também será negativa. Então, teremos:

$$E(X.Y) - E(X).E(Y) < 0$$

$$E(X.Y) < E(X).E(Y)$$

Ou seja, o produto dos valores esperados, $E(X).E(Y)$, é **maior** que o valor esperado do produto, E(X.Y). Por isso, a alternativa C está incorreta.

Em relação às alternativas D e E, a soma das variâncias é dada por:

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2.Cov(X,Y)$$

Como a covariância é negativa, então temos:

$$Var(X+Y) < Var(X) + Var(Y)$$

Portanto, a soma das variâncias, $Var(X) + Var(Y)$, é maior do que a variância Var(X + Y). Assim, a alternativa D está incorreta e a alternativa E está correta.

Gabarito: E

6. (CESGRANRIO/2014 – EPE) Considere o experimento de lançar um dado honesto, e seja X a variável aleatória discreta que representa a face superior do dado. A média da variável aleatória Z = max{|X - 3|, 1} é dada por

a) 5/3

b) 7/2

c) 1/2

d) 0

e) 3

Comentários:

A variável X representa o resultado do lançamento do dado, ou seja, pode assumir os valores X = 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, todos igualmente prováveis, com probabilidade p = 1/6. Então |X – 3| pode assumir os seguintes valores (pontue-se que |x| é o módulo de x e equivale ao valor de x com sinal **positivo**), cada um com probabilidade p = 1/6:

- Se X = 1: |X – 3| = |1 – 3| = |-2| = 2
- Se X = 2: |X – 3| = |2 – 3| = |-1| = 1
- Se X = 3: |X – 3| = |3 – 3| = |0| = 0
- Se X = 4: |X – 3| = |4 – 3| = |1| = 1
- Se X = 5: |X – 3| = |5 – 3| = |2| = 2
- Se X = 6: |X – 3| = |6 – 3| = |3| = 3

Sendo Z = max{|X - 3|, 1}, quando |X – 3| for menor que 1, o valor de Z será Z = 1; caso contrário, Z será igual a |X – 3|. Logo, Z assume os seguintes valores:

- Se X = 1: |X – 3| = 2; então Z = 2
- Se X = 2: |X – 3| = 1; então Z = 1
- Se X = 3: |X – 3| = 0; então Z = 1
- Se X = 4: |X – 3| = 1; então Z = 1
- Se X = 5: |X – 3| = 2; então Z = 2
- Se X = 6: |X – 3| = 3; então Z = 3

Considerando que a probabilidade para cada situação é p = 1/6, então a esperança (ou média) da variável é:

$$E(Z) = \sum z.p(Z = z) = 2 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Gabarito: A

7. (CESGRANRIO/2011 – Petrobras) Estatísticas do Departamento de Trânsito sobre o envolvimento de motoristas em acidentes com até 2 anos de habilitação indicam que o seguinte modelo pode ser adotado, ou seja, a variável aleatória X representa o número de acidentes e assume valores 0, 1, 2, 3 e 4:

Número de Acidentes (X)	0	1	2	3	4
P(X = x)	0,3	0,2	0,1	0,1	0,3

O valor esperado e o desvio padrão da variável aleatória X são respectivamente:

a) 1,9 e 1,64

b) 1,9 e 2,69

c) 2,0 e 1,64

d) 2,0 e 2,69

e) 2,69 e 1,9

Comentários:

O valor esperado da variável é dado por:

$$E(X) = \sum x.P(X = x)$$

$$E(X) = 0 \times 0{,}3 + 1 \times 0{,}2 + 2 \times 0{,}1 + 3 \times 0{,}1 + 4 \times 0{,}3$$

$$E(X) = 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}3 + 1{,}2 = 1{,}9$$

Para calcular o desvio padrão, primeiro calculamos a variância:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

O valor de $E(X^2)$ é:

$$E(X^2) = \sum x^2.P(X = x)$$

$$E(X^2) = 0^2 \times 0{,}3 + 1^2 \times 0{,}2 + 2^2 \times 0{,}1 + 3^2 \times 0{,}1 + 4^2 \times 0{,}3$$

$$E(X^2) = 1 \times 0{,}2 + 4 \times 0{,}1 + 9 \times 0{,}1 + 16 \times 0{,}3$$

$$E(X^2) = 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}9 + 4{,}8 = 6{,}3$$

A variância é a diferença entre esse resultado e $[E(X)]^2$:

$$V(X) = 6{,}3 - [1{,}9]^2 = 6{,}3 - 3{,}61 = 2{,}69$$

Por fim, o desvio padrão é a raiz quadrada da variância:

$$D(X) = \sqrt{2{,}69} \cong 1{,}64$$

Gabarito: A

8. (CESGRANRIO/2009 – BNDES) Um casal decide ter filhos até que, eventualmente, tenham filhos dos dois sexos, ou seja, uma menina e um menino, não importando a ordem de nascimento. Alcançado este objetivo, não terão mais filhos. Supõe-se que, em cada nascimento, a probabilidade de ser menino seja 50% e de ser menina também 50%, independente do resultado de outros nascimentos, desconsiderando as demais possibilidades, como: não engravidar, gravidez acidental, nascimento de gêmeos, etc.

Qual seria o número de filhos mais provável do casal, isto é, a moda da distribuição de probabilidades sobre o número de filhos?

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

Comentários:

O casal deseja ter filhos dos 2 sexos, sendo a probabilidade de ter uma menina $p_A = \frac{1}{2}$ e a probabilidade de ter um menino $p_O = \frac{1}{2}$.

A probabilidade de o casal ter apenas 2 filhos (número mínimo possível), corresponde à probabilidade de vir uma menina e um menino, em qualquer ordem:

$$P(X = 2) = p_A \times p_O + p_O \times p_A = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

A probabilidade de o casal ter 3 filhos, corresponde à probabilidade de virem 2 meninas e 1 menino, nessa ordem, ou 2 meninos e 1 menina, nessa ordem:

$$P(X = 3) = p_A \times p_A \times p_O + p_O \times p_O \times p_A = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

A probabilidade de o casal ter 4 filhos, corresponde à probabilidade de virem 3 meninas e 1 menino, nessa ordem, ou 3 meninos e 1 menina, nessa ordem:

$$P(X = 4) = p_A \times p_A \times p_A \times p_O + p_O \times p_O \times p_O \times p_A = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

Note que a cada novo filho, multiplicamos a probabilidade anterior por $\frac{1}{2}$, portanto, as probabilidades vão reduzindo. Logo, o número de filhos associado à maior probabilidade (moda dessa distribuição) é o mínimo possível, isto é, X = 2.

Gabarito: B

9. (CESGRANRIO/2006 – EPE) Seja X uma variável discreta que representa o valor numérico de uma única jogada de um dado honesto de seis faces. Qual a probabilidade de X=4 ou X=5?

a) 5/6

b) 2/3

c) 1/2

d) 1/3

e) 1/6

Comentários:

A probabilidade de qualquer uma das faces do dado, que corresponde à probabilidade de a variável aleatória assumir qualquer valor X = x para x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, é:

$$P(X = x) = \frac{1}{6}$$

O enunciado pede a probabilidade de X = 4 ou X = 5 (união de eventos excludentes), que é igual à soma das probabilidades:

$$P(X = 4 \cup X = 5) = P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Gabarito: D

10. (CESGRANRIO/2006 – EPE) Seja X uma variável aleatória discreta com valores x = 0,1,2 e probabilidade P(X=0) = 0,25, P(X=1) = 0,50 e P(X=2) 0,25. O valor de E(X^2) é:

a) 1

b) 1,25

c) 1,5

d) 2

e) 5

Comentários:

O valor de $E(X^2)$ é dado por:

$$E(X^2) = \sum x^2 . P(X = x)$$

$$E(X^2) = 0^2 \times 0{,}25 + 1^2 \times 0{,}5 + 2^2 \times 0{,}25 = 1 \times 0{,}5 + 4 \times 0{,}25 = 0{,}5 + 1 = 1{,}5$$

Gabarito: C

AVISO IMPORTANTE!

Olá, alunos (as)!

Informamos que não temos mais questões da banca, referente ao assunto tratado na aula de hoje, em virtude de baixa cobrança deste tópico ao longo dos anos. No entanto, para complementar o estudo e deixar sua preparação em alto nível, preparamos um caderno de questões inéditas que servirá como treino e aprimoramento do conteúdo.

Em caso de dúvidas, não deixe de nos chamar no Fórum de dúvidas!

Bons estudos!

Estratégia Concursos

QUESTÕES COMENTADAS – INÉDITAS

Noções de variáveis discretas

1. Abel planeja investir o seu capital, mas está em dúvida entre dois investimentos, cujos retornos variam de acordo com o cenário econômico. Com o primeiro investimento, Abel irá obter o dobro do capital investido no cenário favorável; 20% a mais do capital investido no cenário intermediário; e 90% do capital investido no cenário desfavorável. Em relação ao segundo investimento, Abel irá obter o triplo do capital investido no cenário favorável; o mesmo capital investido no cenário intermediário; e 50% do capital investido no cenário desfavorável.

Considera-se que a probabilidade do cenário favorável é de 20%, do cenário intermediário é de 50% e do cenário desfavorável é de 30%. Pelo critério do maior valor esperado, Abel deve optar pelo ________ (primeiro/segundo) investimento, em que se espera obter ____ vezes o capital investido.

A alternativa que completa corretamente as lacunas é:

a) segundo; 1,50

b) primeiro; 1,27

c) segundo; 0,75

d) primeiro; 1,10

e) segundo; 1,25

Comentários:

Para visualizar melhor essa questão, podemos montar uma tabela com os possíveis cenários e os valores que Abel irá obter de cada investimento, em cada cenário, supondo que investiu x:

Cenário	Probabilidade	Investimento I	Investimento II
Favorável	20%	2x	3x
Intermediário	50%	1,2x	1x
Desfavorável	30%	0,9x	0,5x

Para calcular o valor esperado de cada investimento, multiplicamos os retornos pelas respectivas probabilidades e somamos os produtos. Para o primeiro investimento, a esperança é:

$$E(I) = 2x \times 0{,}2 + 1{,}2x \times 0{,}5 + 0{,}9x \times 0{,}3 = 0{,}4x + 0{,}6x + 0{,}27x = 1{,}27x$$

Para o segundo investimento, a esperança é:

$$E(II) = 3x \times 0{,}2 + 1x \times 0{,}5 + 0{,}5x \times 0{,}3 = 0{,}6x + 0{,}5x + 0{,}15x = 1{,}25x$$

Portanto, o primeiro investimento tem maior valor esperado, em que se espera obter 1,27 vezes o capital investido.

Gabarito: B

2. Um representante de vendas possui 2 produtos para vender: o produto A, com valor de R$1.000,00; e o produto B, com valor de R$500,00. Em um certo dia, o vendedor deve escolher entre encontrar com o cliente X ou com o cliente Y, com o objetivo de efetuar uma venda. Para ambos os clientes, a probabilidade de vender o produto B é o triplo da probabilidade de vender o produto A, não sendo possível a venda de ambos os produtos.

Considerando essa situação hipotética, é correto afirmar que:

a) A probabilidade de o representante vender o produto A ao cliente X é no máximo igual a $\frac{1}{3}$.

b) Se a probabilidade de o representante vender o produto B ao cliente Y for igual a 15%, então o valor esperado de venda a esse cliente será igual a R$ 525,00.

c) Se a probabilidade de o representante vender o produto A ao cliente Y for metade da probabilidade de ele vender o produto B ao cliente X, então o valor esperado de venda ao cliente Y será uma vez e meia o valor esperado de venda ao cliente X.

d) Se a probabilidade de o representante vender o produto A ao cliente X for igual a 25%, então a probabilidade de ele efetuar alguma venda a esse cliente é igual a 75%.

e) Se a probabilidade de o representante vender o produto B ao cliente Y for o dobro da probabilidade de ele vender o produto A ao cliente X, então o valor esperado de venda ao cliente Y será maior que o valor esperado de venda ao cliente X.

Comentários:

O enunciado informa que há 2 produtos, mutuamente exclusivos, a venda: A com valor de R$ 1.000 e B com valor de R$ 500, sendo que a probabilidade de vender o produto B é o triplo da probabilidade de vender o produto A:

$$p_B = 3.p_A$$

Sabe-se, ainda, que há 2 clientes, mutuamente exclusivos: X e Y.

A alternativa A pede a probabilidade máxima de o representante vender o produto A ao cliente X. Para isso, devemos considerar que a probabilidade de venda (do produto A ou do produto B) é no máximo igual a 1:

$$p_A + p_B \leq 1$$

$$p_A + 3.p_A \leq 1$$

$$4.p_A \leq 1$$

$$p_A \leq \frac{1}{4}$$

Logo, a probabilidade de vender o produto A é no máximo igual a $\frac{1}{4}$ e não a $\frac{1}{3}$. Logo, a alternativa A está incorreta.

Em relação à alternativa D, sendo $p_A = 25\%$, a probabilidade de venda de um dos produtos, A ou B, é igual a 100%, como vimos. Logo, a alternativa D também está incorreta.

A alternativa B afirma que a probabilidade de venda do produto B ao cliente Y é igual a 15%. Nessa situação, a probabilidade de venda do produto A a esse cliente é:

$$p_B = 3.p_A$$

$$0{,}15 = 3.p_A$$

$$p_A = \frac{0{,}15}{3} = 0{,}05$$

Assim, o valor esperado de venda para esse cliente é:

$$E(Y) = 1000 \times p_A + 500 \times p_B = 1000 \times 0{,}05 + 500 \times 0{,}15 = 50 + 75 = 125$$

Que é diferente de R$ 525, logo a alternativa B está incorreta.

A alternativa C supõe que a probabilidade de venda do produto A ao cliente Y é metade da probabilidade de venda do produto B ao cliente X:

$$p_A(Y) = \frac{1}{2}.p_B(X)$$

Sabendo que $p_B = 3.p_A$ para ambos os clientes, então:

$$p_A(Y) = \frac{1}{2}.[3.p_A(X)] = 1{,}5.p_A(X)$$

O valor esperado da venda para X pode ser expresso como:

$$E(X) = 1000 \times p_A(X) + 500 \times p_B(X) = 1000 \times p_A(X) + 500 \times 3.p_A(X)$$

$$E(X) = 2500.p_A(X)$$

E o valor esperado de venda para Y pode ser expresso como:

$$E(Y) = 1000 \times p_A(Y) + 500 \times p_B(Y) = 1000 \times p_A(Y) + 500 \times 3.p_A(Y)$$

$$E(Y) = 2500.p_A(Y)$$

Sabendo que $p_A(Y) = 1{,}5.\, p_A(X)$, o valor esperado de venda para Y é dado por:

$$E(Y) = 2500.\, [1{,}5.\, p_A(X)] = 1{,}5 \times 2500.\, p_A(X) = 1{,}5.\, E(X)$$

Portanto, o valor esperado de Y, de fato, será igual a uma vez e meia o valor esperado de X; e a alternativa C está correta.

A alternativa E supõe que a probabilidade de venda do produto B ao cliente Y é o dobro da probabilidade de venda do produto A ao cliente X:

$$p_B(Y) = 2.\, p_A(X)$$

Sabendo que $p_B = 3.\, p_A$ para ambos os clientes, então:

$$3.\, p_A(Y) = 2.\, p_A(X)$$

$$p_A(Y) = \frac{2}{3}.\, p_A(X)$$

Sabendo que $E(X) = 2500.\, p_A(X)$ e que $E(Y) = 2500.\, p_A(Y)$, podemos indicar o valor esperado de Y como:

$$E(Y) = 2500.\left[\frac{2}{3}.\, p_A(X)\right] = \frac{2}{3} \times 2500.\, p_A(X) = \frac{2}{3}.\, E(X)$$

Logo, o valor esperado de Y será **menor** (e não maior) do que o valor esperado de X; e a alternativa E está errada.

Gabarito: C

3. Suponha a função de probabilidade para a variável aleatória discreta X $p(x) = \frac{x}{k}$, para x = 1, 2 e 3, sendo k uma constante. Se F(.) é a função distribuição acumulada correspondente, então F(2,5) é igual a:

a) 2/3

b) 0

c) 1/2

d) 1

e) 1/6

Comentários:

O primeiro passo é definir o valor de k, sabendo que a soma das probabilidades para x = 1, x = 2 e x = 3 é igual a 1:

$$P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$$

$$\frac{1}{k} + \frac{2}{k} + \frac{3}{k} = 1$$

$$\frac{6}{k} = 1$$

$$k = 6$$

O valor F(2,5) é a soma das probabilidades para os valores de X menores ou iguais a 2,5, no caso, X = 1 e X =2:

$$F(2{,}5) = P(X \leq 2{,}5) = P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$F(2{,}5) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Gabarito: C

ATENÇÃO: O ENUNCIADO A SEGUIR REFERE-SE ÀS QUESTÕES 4 A 6.

Suponha uma variável aleatória discreta X com função de distribuição acumulada dada por:

x	-2	-1	0	1	2
F(x)	3k	5k	7k	15k	20k

Em que k representa uma constante.

4. A probabilidade de X assumir valores positivos é igual a:

a) 0,70

b) 0,86

c) 0,75

d) 0,84

e) 0,65

Comentários:

A questão fornece a função de distribuição acumulada (f.d.a.) da variável, $F(x) = P(X \leq x)$. Sabendo que a probabilidade associada a todos os valores possíveis da variável é igual a 1, então a f.d.a. para o maior valor da variável é igual a 1:

$$F(2) = P(X \leq 2) = 20k = 1$$

$$k = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

A probabilidade de X assumir valores positivos (X > 0) pode ser calculada pelo complemento da probabilidade $P(X \leq 0)$:

$$P(X > 0) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - F(0)$$

$$P(X > 0) = 1 - 7k = 1 - 7 \times 0{,}05 = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$$

Gabarito: E

5. A média e moda da variável valem, respectivamente:

a) 0,88 e 2

b) 0 e 1

c) 0,5 e 0,40

d) 0 e 2

e) 0,5 e 1

Comentários:

O primeiro passo é conhecer o valor de k, que calculamos na questão anterior, sabendo que a f.d.a. para o maior valor da distribuição é igual a 1:

$$F(2) = 20k = 1$$

$$k = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

Agora, vamos calcular a sua distribuição de probabilidades a partir da f.d.a. A probabilidade de um valor é igual à diferença entre a f.d.a. para aquele valor e a f.d.a. para o valor anterior:

x	-2	-1	0	1	2
F(x)	3*0,05 = 0,15	5*0,05 = 0,25	7*0,05 = 0,35	15*0,05 = 0,75	20*0,05 = 1
P(X = x)	0,15	0,25 - 0,15 = 0,10	0,35 - 0,25 = 0,10	0,75 - 0,35 = 0,40	1 - 0,75 = 0,25

Podemos observar que a moda, isto é, o valor da distribuição associado à maior probabilidade de ocorrência é Moda(X) = 1.

Para calcular a média (ou esperança), multiplicamos os valores da variável pelas respectivas probabilidades e somamos os produtos:

$$E(X) = -2 \times 0{,}15 - 1 \times 0{,}10 + 0 \times 0{,}10 + 1 \times 0{,}40 + 2 \times 0{,}25 = -0{,}3 - 0{,}1 + 0 + 0{,}4 + 0{,}5 = 0{,}5$$

Gabarito: E

6. A variância da variável é:

a) 1,85

b) 1,61

c) 10,00

d) 1,47

e) 2,00

Comentários:

Para calcular a variância, precisamos da média, que calculamos na questão anterior, E(X) = 0,5. Agora, vamos construir uma tabela com os desvios em relação à média; esses desvios elevados ao quadrado; e esses quadrados multiplicados pelas respectivas probabilidades (que calculamos na questão anterior):

x	-2	-1	0	1	2
P(x)	0,15	0,10	0,10	0,40	0,25
x - E(X)	-2 - 0,5 = -2,5	-1 - 0,5 = -1,5	0 - 0,5 = -0,5	1 - 0,5 = 0,5	2 - 0,5 = 1,5
$[x - E(X)]^2$	$(-2,5)^2 = 6,25$	$(-1,5)^2 = 2,25$	$(-0,5)^2 = 0,25$	$(0,5)^2 = 0,25$	$(1,5)^2 = 2,25$
$[x - E(X)]^2 . P(x)$	0,9375	0,225	0,025	1	0,5625

E a variância corresponde à soma da última linha:

$$V(X) = 0{,}9375 + 0{,}225 + 0{,}025 + 1 + 0{,}5625 = 1{,}85$$

Gabarito: A

7. Suponha que a variável X assuma apenas os valores 1, 2, 3, 4 e 5. Sendo F(.) a função distribuição acumulada correspondente, sabe-se que F(1,23) = 10%, que F(2,35) = 30% e que F(4,52) = 70%. Sabendo que P(X = 5) é o dobro de P(X = 4), então é verdadeiro que:

a) P(X = 3) = 40%

b) P(2 < X < 4) = 60%

c) A moda de X é igual a 4

d) P(X $\geq$ 4) = 30%

e) P(X $\leq$ 3) = 55%

Comentários:

O enunciado informa que a variável assume apenas os valores 1, 2, 3, 4 e 5. Assim, a função distribuição acumulada F(1,23) é a probabilidade P(X = 1):

$$F(1{,}23) = P(X \leq 1{,}23) = P(X = 1) = 10\%$$

A função distribuição acumulada F(2,35) corresponde à soma das probabilidades P(X = 1) e P(X = 2):

$$F(2{,}35) = P(X \leq 2{,}35) = P(X = 1) + P(X = 2)$$

Sabendo que F(2,35) = 30% e que P(X = 1) = 10%, podemos calcular a probabilidade P(X = 2):

$$F(2{,}35) = 10\% + P(X = 2) = 30\%$$

$$P(X = 2) = 30\% - 10\% = 20\%$$

O enunciado informa que F(4,52) = 70%. A função distribuição acumulada nesse ponto contempla todos os valores, exceto X = 5. Logo, a probabilidade P(X = 5) é complementar:

$$P(X = 5) = 100\% - F(4{,}52) = 100\% - 70\% = 30\%$$

Sabendo que essa probabilidade é o dobro de P(X = 4), então:

$$P(X = 5) = 2 \times P(X = 4)$$

$$P(X = 4) = \frac{30\%}{2} = 15\%$$

Conhecendo P(X = 1) = 10%, P(X = 2) = 20% e P(X = 4) = 15%, podemos utilizar o valor da função distribuição acumulada F(4,52) = 70% para calcular a probabilidade P(X = 3):

$$F(4{,}52) = P(X \leq 4{,}52) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$F(4{,}52) = 10\% + 20\% + P(X = 3) + 15\% = 70\%$$

$$P(X = 3) = 70\% - 45\% = 25\%$$

Assim, concluímos que a alternativa A está incorreta, assim como a alternativa B, pois P(2 < X < 4) = P(X = 3).

Em relação à alternativa C, a moda é X = 5, pois é o valor associado à maior probabilidade. Logo, a alternativa C também está incorreta.

Em relação à alternativa D, temos:

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = 15\% + 30\% = 45\%$$

Logo, a alternativa D está incorreta.

Em relação à alternativa E, temos:

$$P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 10\% + 20\% + 25\% = 55\%$$

Logo, a alternativa E está correta.

Gabarito: E

8. Maria estava analisando um relatório de dados e resolveu verificar as proporções com que cada algarismo aparecia, no intuito de verificar a sua aleatoriedade. As proporções de cada algarismo estão indicadas na tabela a seguir:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20%	18%	15%	12%	11%	6%	5%	6%	4%	3%

Considerando a distribuição de probabilidade encontrada, Maria desconfiou dos dados do relatório porque o terceiro quartil é igual a:

a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

e) 7

Comentários:

O terceiro quartil da distribuição corresponde ao menor valor que concentra uma função de distribuição acumulada (f.d.a.) de pelo menos 75%. Assim, vamos incluir a f.d.a. na tabela fornecida:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20%	18%	15%	12%	11%	6%	5%	6%	4%	3%
20%	38%	53%	65$	76%	82%	87%	93%	97%	100%

Podemos observar que o primeiro valor para o qual F(Q3) ≥ 75% é Q3 = 4.

Gabarito: B

ATENÇÃO: O ENUNCIADO A SEGUIR REFERE-SE ÀS QUESTÕES 9 E 10.

Considere a seguinte função de probabilidade da variável aleatória discreta X:

$$p(x) = \begin{cases} 0,2, & x = -1 \\ 0,3, & x = 0 \\ 0,4, & x = 1 \\ 0,1, & x = 2 \end{cases}$$

9. O valor do segundo momento de X é igual a:

a) 0,40

b) 0,84

c) 0,60

d) 1,00

e) 0,80

Comentários:

Para calcular o segundo momento central $E(X^2)$, primeiro elevamos os valores da variável ao quadrado; em seguida, multiplicamos os quadrados pelas respectivas probabilidades; e, por fim, somamos os produtos:

$$E(X^2) = \sum x^2 . p(x)$$

$$E(X^2) = (-1)^2 \times 0{,}2 + 0^2 \times 0{,}3 + 1^2 \times 0{,}4 + 2^2 \times 0{,}1 = 0{,}2 + 0 + 0{,}4 + 0{,}4 = 1$$

Gabarito: D

10. Considere também a variável aleatória discreta Y = 3.X + 2. A respeito de X e Y, é correto afirmar:

a) P(X < 0) = P(Y < 0)

b) o segundo momento central de Y é 9 vezes o segundo momento central de X.

c) E(Y) = 1,2

d) o primeiro quartil de X é igual ao primeiro quartil de Y

e) V(Y) = 4,52

Comentários:

A variável X apresenta a seguinte distribuição de probabilidade:

x	P
-1	0,2
0	0,3
1	0,4
2	0,1

Para calcular a distribuição de probabilidade da variável Y = 3X + 2, fazemos

y	P
3.(-1) + 2 = -1	0,2
3.0 + 2 = 2	0,3
3.1 + 2 = 5	0,4
3.2 + 2 = 8	0,1

Em relação à alternativa A, temos para X:

$$P(X < 0) = P(X = -1) = 0{,}2$$

Em relação a Y, temos:

$$P(Y < 0) = P(Y = -1) = 0{,}2$$

Logo, P(X < 0) = P(Y < 0) e a alternativa A está correta. Em relação à alternativa B, calculamos na questão anterior que o segundo momento de X é $E(X^2) = 1$. Já o segundo momento central de Y é:

$$E(Y^2) = (-1)^2 \times 0{,}2 + 2^2 \times 0{,}3 + 5^2 \times 0{,}4 + 8^2 \times 0{,}1 = 0{,}2 + 1{,}2 + 10 + 6{,}4 = 17{,}8$$

Logo, o segundo o momento central de Y não é 9 vezes o segundo momento central de X e alternativa B está incorreta. Em relação à alternativa C, a média de Y é:

$$E(Y) = (-1) \times 0{,}2 + 2 \times 0{,}3 + 5 \times 0{,}4 + 8 \times 0{,}1 = -0{,}2 + 0{,}6 + 2 + 0{,}8 = 3{,}2$$

Logo, a alternativa C está incorreta. Em relação à alternativa D, o primeiro quartil é o menor elemento para o qual a função distribuição acumulada é $F(Q_1) \geq 0{,}25$. Considerando que a probabilidade do primeiro elemento de ambas as distribuições é igual a 0,2, o primeiro quartil será igual ao segundo elemento. Para X, temos $Q_1(X) = 0$ e, para Y, temos $Q_1(Y) = 2$. Logo, o primeiro quartil de X é diferente do primeiro quartil de Y.

Em relação à alternativa E, podemos calcular a variância de Y a partir do segundo momento central de Y $E(Y^2) = 17{,}8$ e da média $E(Y) = 3{,}2$, que calculamos anteriormente:

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 17{,}8 - (3{,}2)^2 = 17{,}8 - 10{,}24 = 7{,}56$$

Gabarito: A

11. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com variâncias iguais a 1 e 4, respectivamente, e covariância igual a -2. A variável Z = 3X - Y/2 tem variância igual a:

a) 5

b) 14

c) 8

d) 16

e) 9

Comentários:

O enunciado pede a variância de Z = 3X - Y/2, tendo fornecido a variância de X e Y, bem como a covariância:

$$Var(Z) = Var\left(3X - \frac{Y}{2}\right)$$

A variância da diferença corresponde à soma das variâncias, subtraindo-se o dobro da covariância:

$$Var(Z) = Var(3X) + Var\left(\frac{Y}{2}\right) - 2.Cov\left(3X, \frac{Y}{2}\right)$$

Em relação à variância, quando multiplicamos (ou dividimos) a variável por uma constante, a variância é multiplicada (ou dividida) pelo quadrado dessa constante. Em relação à covariância, quando multiplicamos uma variável por uma constante, a covariância é multiplicada por essa constante. Logo:

$$Var(Z) = 3^2.Var(X) + \left(\frac{1}{2}\right)^2.Var(Y) - 2 \times 3 \times \frac{1}{2} \times Cov(X,Y)$$

$$Var(Z) = 9.Var(X) + \frac{1}{4}.Var(Y) - 3.Cov(X,Y)$$

Sabendo que Var(X) = 1, Var(Y) = 4 e Cov(X,Y) = -2, podemos calcular a variância pedida:

$$Var(Z) = 9 \times 1 + \frac{1}{4} \times 4 - 3 \times (-2) = 9 + 1 + 6 = 16$$

Gabarito: D

12. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias, ambas com média igual 3. Sabe-se ainda que o momento de segunda ordem de X é igual a 10 e o de Y é igual 13. Considerando E(XY) = 11, é correto afirmar que:

a) o desvio padrão de Y é $DP(Y) = 4$.

b) o coeficiente de correlação é $\rho(X, Y) = 1$.

c) a covariância de X e Y é $Cov(X, Y) = 20$.

d) a variância da soma é $Var(X + Y) = 5$.

e) a variância de X é $Var(X) = 7$.

Comentários:

Em relação a X, o enunciado informa que a média é E(X) = 3 e que o momento de 2ª ordem é $E(X^2) = 10$. Com base nessas informações, podemos calcular a variância de X:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 10 - [3]^2 = 10 - 9 = 1$$

Logo, a alternativa E está incorreta. Em relação a Y, sabendo que a média é E(Y) = 3 e que o momento de 2ª ordem é $E(Y^2) = 13$, a variância de Y é dada por:

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 13 - [3]^2 = 13 - 9 = 4$$

Consequentemente, o desvio padrão, raiz quadrada da variância, é $DP(Y) = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{4} = 2$, logo a alternativa A está incorreta.

Conhecendo E(XY) = 11 e as médias das variáveis, podemos calcular a covariância:

$$Cov(X, Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y) = 11 - 3 \times 3 = 11 - 9 = 2$$

Portanto, a alternativa C está incorreta.

Após o cálculo da covariância, podemos obter a variância da soma das variáveis:

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2.Cov(X, Y) = 1 + 4 + 2 \times 2 = 9$$

Logo, a alternativa D está incorreta.

Já, o coeficiente de correlação é a razão entre a covariância e os desvios padrão das variáveis:

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}.\sqrt{Var(Y)}} = \frac{2}{\sqrt{1}.\sqrt{4}} = \frac{2}{1 \times 2} = 1$$

Portanto, a alternativa B está correta.

Gabarito: B

13. Para duas variáveis aleatórias, estão disponíveis as seguintes estatísticas elementares: Var(X) = 4, Var(X - Y) = 9 e ρ(X, Y) = 1/3.

Então a variância de Y é igual a:

a) 5

b) 17/3

c) 9

d) 4/3

e) 3

Comentários:

A variância da diferença é dada por:

$$Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2. Cov(X, Y)$$

Para obtermos a covariância a partir do coeficiente de correlação, fazemos:

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}.\sqrt{Var(Y)}}$$

$$Cov(X, Y) = \rho(X, Y) \times \sqrt{Var(X)}.\sqrt{Var(Y)}$$

Sabendo que $\rho(X, Y) = \frac{1}{3}$ e $Var(X) = 4$, temos:

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{3} \times \sqrt{4}.\sqrt{Var(Y)} = \frac{2}{3}.\sqrt{Var(Y)}$$

Substituindo esse resultado na fórmula da variância da diferença e sabendo que Var(X) = 4 e Var(X - Y) = 9, temos:

$$Var(X - Y) = 4 + Var(Y) - 2.\frac{2}{3}.\sqrt{Var(Y)} = 9$$

$$Var(Y) - \frac{4}{3}.\sqrt{Var(Y)} - 5 = 0$$

Para encontrar a variância de Y, vamos substituir $\sqrt{Var(Y)} \rightarrow x$ e $Var(Y) \rightarrow x^2$ e aplicar Bháskara:

$$x^2 - \frac{4}{3}x - 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = \frac{16}{9} + 20 = \frac{16 + 180}{9} = \frac{196}{9}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{4}{3} \pm \frac{14}{3}}{2}$$

Como a raiz da variância é necessariamente um número positivo, há somente uma possibilidade para x:

$$x = \frac{\frac{4}{3} + \frac{14}{3}}{2} = \frac{\frac{18}{3}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Esse é o valor para raiz da variância de Y: $\sqrt{Var(Y)} = 3$. A variância de Y é, portanto, o quadrado desse resultado:

$$Var(Y) = 3^2 = 9$$

Gabarito: C

14. Sejam X, Y e Z três variáveis aleatórias, tais que Var(Y) = 2,25, Cov(Y,Z) = 1, Var(2Y - Z) = 9, Cov(X,Z) = 0,5 e ρ(X,Z) = 0,25.

Então a variância de X é

a) 0,75

b) 1,00

c) 0,50

d) 4,00

e) 5,50

Comentários:

A variância da diferença é dada por:

$$Var(2Y - Z) = Var(2Y) + Var(Z) - 2.Cov(2Y, Z)$$

Pelas propriedades da variância, quando multiplicamos uma variável por uma constante, a variância é multiplicada pelo quadrado dessa constante. Em relação à covariância, quando multiplicamos uma variável por uma constante, a covariância é multiplicada por essa mesma constante. Assim:

$$Var(2Y - Z) = 2^2.Var(Y) + Var(Z) - 2 \times 2.Cov(Y, Z)$$

$$Var(2Y - Z) = 4.Var(Y) + Var(Z) - 4.Cov(Y,Z)$$

Sabendo que Var(Y) = 2,25, que Cov(Y,Z) = 1, temos:

$$Var(2Y - Z) = 4 \times 2{,}25 + Var(Z) - 4 \times 1$$

$$Var(2Y - Z) = 9 + Var(Z) - 4 = Var(Z) + 5$$

Considerando que Var(2Y - Z) = 9, então:

$$Var(2Y - Z) = Var(Z) + 5 = 9$$

$$Var(Z) = 9 - 5 = 4$$

Pela fórmula do coeficiente de correlação entre X e Z, temos:

$$\rho(X,Z) = \frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{Var(X)}.\sqrt{Var(Z)}}$$

O enunciado informa que $\rho(X,Z) = 0{,}25$ e que $Cov(X,Z) = 0{,}5$. Sabendo que $Var(Z) = 4$, podemos calcular a variância de X:

$$0{,}25 = \frac{0{,}5}{\sqrt{Var(X)}.\sqrt{4}}$$

$$0{,}25 = \frac{0{,}5}{\sqrt{Var(X)}.2}$$

$$\sqrt{Var(X)} \times 2 \times 0{,}25 = 0{,}5$$

$$\sqrt{Var(X)} \times 0{,}5 = 0{,}5$$

$$\sqrt{Var(X)} = 1$$

$$Var(X) = 1^2 = 1$$

Gabarito: B

15. O diretor da empresa HM estava achando injusta a distribuição de salários entre homens e mulheres e decidiu analisar a questão mais afundo. Em seu levantamento inicial, verificou que o salário dos homens tem média igual a 9 mil reais e variância de 9 (mil reais)^2, enquanto o salário das mulheres tem média igual a 4 mil reais e variância de 4 (mil reais)^2.

A respeito dessa situação hipotética, pode-se afirmar corretamente que:

a) a dispersão relativa dos salários é igual para homens e mulheres.

b) a variância relativa dos salários das mulheres é igual a 4.

c) o coeficiente de variação dos salários dos homens é igual a 3.

d) a medida adimensional da dispersão dos salários é maior para as mulheres do que para os homens.

e) o coeficiente de variação dos salários dos homens é mais que o dobro do coeficiente de variação dos salários das mulheres.

Comentários:

O enunciado informa que o salário dos homens tem média $\overline{H} = 9$ e variância $Var(H) = 9$; enquanto o salário das mulheres tem média $\overline{M} = 4$ e variância $Var(M) = 4$.

Em relação à alternativa A, a dispersão relativa é representada pelo coeficiente de variação, dado pela razão entre o desvio padrão (raiz quadrada da variância) e a média. Em relação aos salários dos homens, o desvio padrão é:

$$\sigma_H = \sqrt{Var(H)} = \sqrt{9} = 3$$

Logo, o coeficiente de variação dos salários dos homens é:

$$CV(H) = \frac{\sigma_H}{\overline{H}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Com esse resultado, podemos afirmar que a alternativa C está incorreta. Em relação aos salários das mulheres, o desvio padrão é:

$$\sigma_M = \sqrt{Var(M)} = \sqrt{4} = 2$$

Logo, o coeficiente de variação é:

$$CV(M) = \frac{\sigma_M}{\overline{M}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Portanto, a dispersão relativa não é igual para homens e mulheres e a alternativa A está incorreta.

Também podemos concluir que a medida adimensional de dispersão (coeficiente de variação) é maior para mulheres do que para homens. Com isso, concluímos que a alternativa D está correta e que a alternativa E está incorreta.

Em relação à alternativa B, a variância relativa é o quadrado do coeficiente de variação. Logo, a variância relativa dos salários das mulheres é:

$$VR(M) = [CV(M)]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Logo, a alternativa B está incorreta.

Gabarito: D

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Noções de variáveis discretas

1. (CESGRANRIO/2021 – BB) Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com as seguintes informações sobre as variâncias:

(i) Var (X) = 4

(ii) Var(Y) = 9

(iii) Var(X + Y) = 9

Qual é o valor da covariância entre X e Y:

a) -4

b) -2

c) 0

d) 6

e) 36

2. (CESGRANRIO/2018 – Petrobras) A realização de um teste requer a aquisição de um seguro de vida para cada pessoa envolvida, no valor de R$ 10.000,00 por pessoa. O valor do prêmio estabelecido pela companhia seguradora é R$ 1.000,00 por apólice. Experiências passadas indicam uma probabilidade de 0,001 de uma pessoa vir a óbito ao longo do teste. O ganho esperado da companhia para cada apólice vendida, em reais, nessas condições, é igual a

a) 99,90

b) 900,00

c) 981,00

d) 990,00

e) 999,00

3. (CESGRANRIO/2018 – Transpetro) Uma pessoa prefere ganhar R$ 100,00 com probabilidade de 100%, um evento certo, em vez de participar de um sorteio com probabilidade x de ganhar R$ 200,00 e (1-x) de nada ganhar. Deduz-se que a pessoa é avessa ao risco se x for igual a:

a) 55%

b) 45%

c) 35%

d) 25%

e) 15%

4. (CESGRANRIO/2016 – IBGE) A venda diária X de um certo produto numa loja obedece à seguinte distribuição de probabilidade:

k	0	1	2	3	4
P(X=k)	0,15	0,20	0,40	0,20	0,05

Qual a probabilidade de que o total das vendas do produto de dois dias consecutivos seja 3?

a) 4%

b) 11%

c) 15%

d) 20%

e) 22%

5. (CESGRANRIO/2016 – IBGE) Se duas variáveis aleatórias, X e Y, têm correlação linear negativa, então:

a) Quanto menor for o valor de X, menor será o valor de Y.

b) A soma dos valores esperados de X e Y é menor do que o valor esperado de X + Y.

c) O produto dos valores esperados de X e Y é menor do que o valor esperado do produto X . Y.

d) A soma das variâncias de X e Y é igual ou menor do que a variância de X + Y.

e) A soma das variâncias de X e Y é estritamente maior do que a variância de X + Y.

6. (CESGRANRIO/2014 – EPE) Considere o experimento de lançar um dado honesto, e seja X a variável aleatória discreta que representa a face superior do dado. A média da variável aleatória Z = max{|X - 3|, 1} é dada por

a) 5/3

b) 7/2

c) 1/2

d) 0

e) 3

7. (CESGRANRIO/2011 – Petrobras) Estatísticas do Departamento de Trânsito sobre o envolvimento de motoristas em acidentes com até 2 anos de habilitação indicam que o seguinte modelo pode ser adotado, ou seja, a variável aleatória X representa o número de acidentes e assume valores 0, 1, 2, 3 e 4:

Número de Acidentes (X)	0	1	2	3	4
P(X = x)	0,3	0,2	0,1	0,1	0,3

O valor esperado e o desvio padrão da variável aleatória X são respectivamente:

a) 1,9 e 1,64

b) 1,9 e 2,69

c) 2,0 e 1,64

d) 2,0 e 2,69

e) 2,69 e 1,9

8. (CESGRANRIO/2009 – BNDES) Um casal decide ter filhos até que, eventualmente, tenham filhos dos dois sexos, ou seja, uma menina e um menino, não importando a ordem de nascimento. Alcançado este objetivo, não terão mais filhos. Supõe-se que, em cada nascimento, a probabilidade de ser menino seja 50% e de ser menina também 50%, independente do resultado de outros nascimentos, desconsiderando as demais possibilidades, como: não engravidar, gravidez acidental, nascimento de gêmeos, etc.

Qual seria o número de filhos mais provável do casal, isto é, a moda da distribuição de probabilidades sobre o número de filhos?

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

9. (CESGRANRIO/2006 – EPE) Seja X uma variável discreta que representa o valor numérico de uma única jogada de um dado honesto de seis faces. Qual a probabilidade de X=4 ou X=5?

a) 5/6

b) 2/3

c) 1/2

d) 1/3

e) 1/6

10. (CESGRANRIO/2006 – EPE) Seja X uma variável aleatória discreta com valores x = 0,1,2 e probabilidade P(X=0) = 0,25, P(X=1) = 0,50 e P(X=2) 0,25. O valor de $E(X^2)$ é:

a) 1

b) 1,25

c) 1,5

d) 2

e) 5

GABARITO

1. LETRA B
2. LETRA D
3. LETRA A
4. LETRA E
5. LETRA E
6. LETRA A
7. LETRA A
8. LETRA B
9. LETRA D
10. LETRA C

LISTA DE QUESTÕES – INÉDITAS

Noções de variáveis discretas

1. Abel planeja investir o seu capital, mas está em dúvida entre dois investimentos, cujos retornos variam de acordo com o cenário econômico. Com o primeiro investimento, Abel irá obter o dobro do capital investido no cenário favorável; 20% a mais do capital investido no cenário intermediário; e 90% do capital investido no cenário desfavorável. Em relação ao segundo investimento, Abel irá obter o triplo do capital investido no cenário favorável; o mesmo capital investido no cenário intermediário; e 50% do capital investido no cenário desfavorável.

Considera-se que a probabilidade do cenário favorável é de 20%, do cenário intermediário é de 50% e do cenário desfavorável é de 30%. Pelo critério do maior valor esperado, Abel deve optar pelo ________ (primeiro/segundo) investimento, em que se espera obter _____ vezes o capital investido.

A alternativa que completa corretamente as lacunas é:

a) segundo; 1,50

b) primeiro; 1,27

c) segundo; 0,75

d) primeiro; 1,10

e) segundo; 1,25

2. Um representante de vendas possui 2 produtos para vender: o produto A, com valor de R$1.000,00; e o produto B, com valor de R$500,00. Em um certo dia, o vendedor deve escolher entre encontrar com o cliente X ou com o cliente Y, com o objetivo de efetuar uma venda. Para ambos os clientes, a probabilidade de vender o produto B é o triplo da probabilidade de vender o produto A, não sendo possível a venda de ambos os produtos.

Considerando essa situação hipotética, é correto afirmar que:

a) A probabilidade de o representante vender o produto A ao cliente X é no máximo igual a $\frac{1}{3}$.

b) Se a probabilidade de o representante vender o produto B ao cliente Y for igual a 15%, então o valor esperado de venda a esse cliente será igual a R$ 525,00.

c) Se a probabilidade de o representante vender o produto A ao cliente Y for metade da probabilidade de ele vender o produto B ao cliente X, então o valor esperado de venda ao cliente Y será uma vez e meia o valor esperado de venda ao cliente X.

d) Se a probabilidade de o representante vender o produto A ao cliente X for igual a 25%, então a probabilidade de ele efetuar alguma venda a esse cliente é igual a 75%.

e) Se a probabilidade de o representante vender o produto B ao cliente Y for o dobro da probabilidade de ele vender o produto A ao cliente X, então o valor esperado de venda ao cliente Y será maior que o valor esperado de venda ao cliente X.

3. Suponha a função de probabilidade para a variável aleatória discreta X $p(x) = \frac{x}{k}$, para x = 1, 2 e 3, sendo k uma constante. Se F(.) é a função distribuição acumulada correspondente, então F(2,5) é igual a:

a) 2/3

b) 0

c) 1/2

d) 1

e) 1/6

ATENÇÃO: O ENUNCIADO A SEGUIR REFERE-SE ÀS QUESTÕES 4 A 6.

Suponha uma variável aleatória discreta X com função de distribuição acumulada dada por:

x	-2	-1	0	1	2
F(x)	3k	5k	7k	15k	20k

Em que k representa uma constante.

4. A probabilidade de X assumir valores positivos é igual a:

a) 0,70

b) 0,86

c) 0,75

d) 0,84

e) 0,65

5. A média e moda da variável valem, respectivamente:

a) 0,88 e 2

b) 0 e 1

c) 0,5 e 0,40

d) 0 e 2

e) 0,5 e 1

6. A variância da variável é:

a) 1,85

b) 1,61

c) 10,00

d) 1,47

e) 2,00

7. Suponha que a variável X assuma apenas os valores 1, 2, 3, 4 e 5. Sendo F(.) a função distribuição acumulada correspondente, sabe-se que F(1,23) = 10%, que F(2,35) = 30% e que F(4,52) = 70%. Sabendo que P(X = 5) é o dobro de P(X = 4), então é verdadeiro que:

a) $P(X = 3) = 40\%$

b) $P(2 < X < 4) = 60\%$

c) A moda de X é igual a 4

d) $P(X \geq 4) = 30\%$

e) $P(X \leq 3) = 55\%$

8. Maria estava analisando um relatório de dados e resolveu verificar as proporções com que cada algarismo aparecia, no intuito de verificar a sua aleatoriedade. As proporções de cada algarismo estão indicadas na tabela a seguir:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20%	18%	15%	12%	11%	6%	5%	6%	4%	3%

Considerando a distribuição de probabilidade encontrada, Maria desconfiou dos dados do relatório porque o terceiro quartil é igual a:

a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

e) 7

ATENÇÃO: O ENUNCIADO A SEGUIR REFERE-SE ÀS QUESTÕES 9 E 10.

Considere a seguinte função de probabilidade da variável aleatória discreta X:

$$p(x) = \begin{cases} 0,2, & x = -1 \\ 0,3, & x = 0 \\ 0,4, & x = 1 \\ 0,1, & x = 2 \end{cases}$$

9. O valor do segundo momento de X é igual a:

a) 0,40

b) 0,84

c) 0,60

d) 1,00

e) 0,80

10. Considere também a variável aleatória discreta Y = 3.X + 2. A respeito de X e Y, é correto afirmar:

a) P(X < 0) = P(Y < 0)

b) o segundo momento central de Y é 9 vezes o segundo momento central de X.

c) E(Y) = 1,2

d) o primeiro quartil de X é igual ao primeiro quartil de Y

e) V(Y) = 4,52

11. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com variâncias iguais a 1 e 4, respectivamente, e covariância igual a -2. A variável Z = 3X - Y/2 tem variância igual a:

a) 5

b) 14

c) 8

d) 16

e) 9

12. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias, ambas com média igual 3. Sabe-se ainda que o momento de segunda ordem de X é igual a 10 e o de Y é igual 13. Considerando E(XY) = 11, é correto afirmar que:

a) o desvio padrão de Y é $DP(Y) = 4$.

b) o coeficiente de correlação é $\rho(X, Y) = 1$.

c) a covariância de X e Y é $Cov(X, Y) = 20$.

d) a variância da soma é $Var(X + Y) = 5$.

e) a variância de X é $Var(X) = 7$.

13. Para duas variáveis aleatórias, estão disponíveis as seguintes estatísticas elementares: Var(X) = 4, Var(X - Y) = 9 e ρ(X, Y) = 1/3. Então a variância de Y é igual a:

a) 5

b) 17/3

c) 9

d) 4/3

e) 3

14. Sejam X, Y e Z três variáveis aleatórias, tais que Var(Y) = 2,25, Cov(Y,Z) = 1, Var(2Y - Z) = 9, Cov(X,Z) = 0,5 e ρ(X,Z) = 0,25.

Então a variância de X é

a) 0,75

b) 1,00

c) 0,50

d) 4,00

e) 5,50

15. O diretor da empresa HM estava achando injusta a distribuição de salários entre homens e mulheres e decidiu analisar a questão mais afundo. Em seu levantamento inicial, verificou que o salário dos homens tem média igual a 9 mil reais e variância de 9 (mil reais)^2, enquanto o salário das mulheres tem média igual a 4 mil reais e variância de 4 (mil reais)^2.

A respeito dessa situação hipotética, pode-se afirmar corretamente que:

a) a dispersão relativa dos salários é igual para homens e mulheres.

b) a variância relativa dos salários das mulheres é igual a 4.

c) o coeficiente de variação dos salários dos homens é igual a 3.

d) a medida adimensional da dispersão dos salários é maior para as mulheres do que para os homens.

e) o coeficiente de variação dos salários dos homens é mais que o dobro do coeficiente de variação dos salários das mulheres.

Gabarito

1. LETRA B	**6.** LETRA A	**11.** LETRA D
2. LETRA C	**7.** LETRA E	**12.** LETRA B
3. LETRA C	**8.** LETRA B	**13.** LETRA C
4. LETRA E	**9.** LETRA D	**14.** LETRA B
5. LETRA E	**10.** LETRA A	**15.** LETRA D

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.