Aula 18

PRF (Policial) Raciocínio Lógico Matemático - 2023 (Pré-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

09 de Maio de 2023

Índice

MÓDULO DE UM NÚMERO REAL

Módulo de um número real
Definição
O **módulo** ou o **valor absoluto** de x é representado por $\|x\|$ e corresponde a: • $\boldsymbol{x}$, quando x é **maior ou igual a zero**; e • $\boldsymbol{-x}$, quando x é **menor do que zero**. $\|x\| = \begin{cases} \boldsymbol{x}; & \boldsymbol{x \geq 0} \\ \boldsymbol{-x}; & \boldsymbol{x < 0} \end{cases}$ **• Se o que está dentro das duas barras é positivo ou zero, mantenha o que está dentro das barras; ou** **• Se o que está dentro das duas barras é negativo, insira um sinal de menos.**
Propriedades do módulo
• $\boldsymbol{\|x\| \geq 0}$**, para todo** $\boldsymbol{x}$ **real** • $\boldsymbol{\|x\| = \|-x\|}$ • $\boldsymbol{\|x\| \times \|y\| = \|xy\|}$ • $\boldsymbol{\frac{\|x\|}{\|y\|} = \left\|\frac{x}{y}\right\|; y \neq 0}$ • $\boldsymbol{\|x\|^2 = x^2}$ • $\boldsymbol{\sqrt{x^2} = \|x\|}$ • $\boldsymbol{\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|}$ • $\boldsymbol{\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|}$

Definição

Considere um número qualquer x pertencente ao conjunto dos números reais, isto é, $x \in \mathbb{R}$.

O **módulo** ou o **valor absoluto** de x é representado por $|x|$ e corresponde a:

- $\boldsymbol{x}$, quando x é **maior ou igual a zero**; e
- $\boldsymbol{-x}$, quando x é **menor do que zero**.

De modo ainda mais formal, podemos escrever:

$$|x| = \begin{cases} \boldsymbol{x}; & \boldsymbol{x \geq 0} \\ \boldsymbol{-x}; & \boldsymbol{x < 0} \end{cases}$$

Professor, não me venha com formalismos! Não entendi nada!

Calma, caro aluno! A definição do módulo é muito importante. Isso porque, sempre que surgir alguma dúvida no conteúdo dessa aula, devemos recorrer a ela. Essa definição basicamente nos diz o seguinte:

TOME NOTA!

- **Se o que está dentro das duas barras é positivo ou zero, mantenha o que está dentro das barras; ou**
- **Se o que está dentro das duas barras é negativo, insira um sinal de menos.**

Vamos realizar alguns exemplos com números.

EXEMPLIFICANDO

Quanto que vale $|+3|$? Ora, **+ 3 é maior do que zero,** correto? Logo, pela definição de módulo:

$$|+3| = +3$$

Agora, qual é o valor de $|-2|$? Ora, **−2 é menor do que zero**, ou seja, é **negativo**. Logo, pela definição de módulo, devemos inserir um sinal de menos:

$$|-2| = -(-2) = 2$$

Vejamos outros exemplos:

- $\left|-\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$;
- $|0| = 0$;
- $|-5| = 5$;
- $\left|-\frac{\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{\sqrt{3}}{4}$;
- $|\pi| = \pi$;
- $\left|\frac{5}{3}\right| = \frac{5}{3}$.

Consequências da definição

Agora que entendemos o conceito, como podemos descrever $|x-1|$? Isso vai depender do valor daquilo que está dentro das duas barras:

- Se $x-1$ é **positivo** ou **zero**, **mantenha o que está dentro das barras**; ou
- Se $x-1$ é **negativo**, **insira um sinal de menos**.

De um modo mais formal, podemos dizer:

$$|x-1| = \begin{cases} \boldsymbol{x-1}; & \boldsymbol{x-1 \geq 0} \\ \boldsymbol{-(x-1)}; & \boldsymbol{x-1 < 0} \end{cases}$$

Desenvolvendo um pouco mais, temos:

$$|x-1| = \begin{cases} \boldsymbol{x-1}; & \boldsymbol{x \geq 1} \\ \boldsymbol{1-x}; & \boldsymbol{x < 1} \end{cases}$$

Em outras palavras, $|x-1|$ é igual a:

- $\boldsymbol{x-1}$, quando **$\boldsymbol{x}$ é maior ou igual a 1**; ou
- $\boldsymbol{1-x}$, quando **$\boldsymbol{x}$ é menor do que 1**.

Agora vamos complicar um pouco mais. Como podemos descrever $|x^2-5x+6|$? Devemos nos ater à definição:

- Se x^2-5x+6 é **positivo** ou **zero**, **mantenha o que está dentro das barras**; ou
- Se x^2-5x+6 é **negativo**, **insira um sinal de menos**.

Veja que agora temos um problema: devemos determinar quando x^2-5x+6 é **positivo** ou **zero** e quando x^2-5x+6 é **negativo**. Para tanto, é necessário **encontrar as raízes da função quadrática**.

Para encontrar as raízes, vamos usar a **fórmula de Bhaskara**. Temos:

$$a = 1$$

$$b = -5$$

$$c = 6$$

O **discriminante** é dado por:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6$$

$$= 25 - 24$$

$$= 1$$

As **raízes** são:

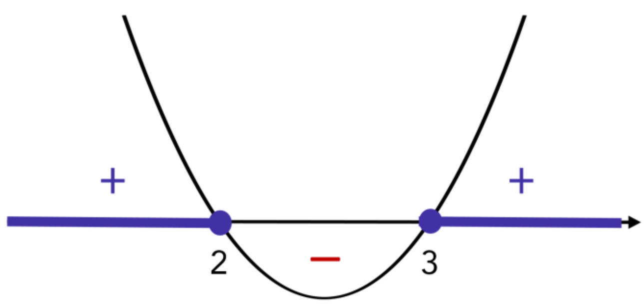
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = 2 \quad ; \quad x_2 = 3$$

Agora que temos as raízes, podemos descrever a parábola. Como o coeficiente **a é positivo**, a **concavidade** da parábola é **para cima**.



Pronto! Agora sabemos que:

- $x^2 - 5x + 6$ é **positivo** ou **zero** e quando $x \geq 3$ ou $x \leq 2$;
- $x^2 - 5x + 6$ é **negativo** quando $2 < x < 3$.

Para descrever $|x^2 - 5x + 6|$, vamos voltar à definição:

- Se $x^2 - 5x + 6$ é **positivo** ou **zero**, **mantenha o que está dentro das barras**; ou
- Se $x^2 - 5x + 6$ é **negativo**, **insira um sinal de menos**.

De um modo mais formal, podemos dizer:

$$|x^2 - 5x + 6| = \begin{cases} \boldsymbol{x^2 - 5x + 6}; & \boldsymbol{x \leq 2} \\ \boldsymbol{-(x^2 - 5x + 6)}; & \boldsymbol{2 < x < 3} \\ \boldsymbol{x^2 - 5x + 6}; & \boldsymbol{x \geq 3} \end{cases}$$

Desenvolvendo um pouco mais, temos:

$$|x^2 - 5x + 6| = \begin{cases} \boldsymbol{x^2 - 5x + 6}; & \boldsymbol{x \leq 2} \\ \boldsymbol{-x^2 + 5x - 6}; & \boldsymbol{2 < x < 3} \\ \boldsymbol{x^2 - 5x + 6}; & \boldsymbol{x \geq 3} \end{cases}$$

Valor de uma função modular para uma abcissa determinada

Pessoal, ainda vamos tratar sobre funções modulares no decorrer deste assunto.

Nesse momento, é importante que você saiba calcular o valor de uma função modular para um **valor determinado de $\boldsymbol{x}$**, isto é, para uma **abcissa determinada**.

Em resumo, **uma vez que temos o valor da abcissa $\boldsymbol{x}$, basta substituir esse valor na função dada**.

Suponha, por exemplo, que temos a função $f(x) = |x - 1|$. Qual é o valor de $f(-3)$? Basta substituir −3 na função:

$$f(x) = |x - 1|$$
$$f(-3) = |-3 - 1|$$
$$= |-4|$$
$$= 4$$

E se tivermos a função $g(x) = |x^2 - 5x + 6|$, qual é o valor de $g(-1)$? Basta substituir −1 na função:

$$g(x) = |x^2 - 5x + 6|$$
$$g(-1) = |(-1)^2 - 5.(-1) + 6|$$
$$= |1 + 5 + 6|$$
$$= |12|$$
$$= 12$$

Propriedades do módulo

Vejamos agora algumas propriedades do módulo.

- **$|x| \geq 0$, para todo x real**

Esta propriedade nos diz que o módulo de um número real **sempre será maior ou igual a zero**. Portanto, o módulo de um número real **nunca será negativo**.

- **$|x| = |-x|$**

Esta propriedade afirma que o **módulo de um número** é igual ao **módulo do seu oposto**. Por exemplo, para $x = -5$, temos que:

$$|-5| = 5$$

$$|-(-5)| = |5| = 5$$

Note, portanto, que $|-\mathbf{5}|$ é igual a $|-(-\mathbf{5})|$.

- **$|x| \times |y| = |xy|$**

Esta propriedade nos diz que o **produto dos módulos de dois números** (produto de $|x|$ por $|y|$) é igual ao **módulo do produto** dos números (módulo de xy). Por exemplo:

$$|\mathbf{-3}| \times |\mathbf{5}| = 3 \times 5 = 15$$

$$|\mathbf{-3} \times \mathbf{5}| = |-15| = 15$$

Note, portanto, que $|-\mathbf{3}| \times |\mathbf{5}|$ é igual a $|-\mathbf{3} \times \mathbf{5}|$.

- **$\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|, y \neq 0$**

Esta propriedade afirma que o **quociente dos módulos** de dois números (quociente de $|x|$ por $|y|$) é igual ao **módulo do quociente** dos números (módulo de $\frac{x}{y}$). Note que o denominador y deve ser diferente de zero, pois caso contrário não poderíamos realizar a divisão. Por exemplo:

$$\frac{|-\mathbf{3}|}{|\mathbf{5}|} = \frac{3}{5}$$

$$\left|\frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{5}}\right| = \left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$$

Note, portanto, que $\frac{|\mathbf{-3}|}{|\mathbf{5}|}$ é igual a $\left|\frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{5}}\right|$.

- $|x|^2 = x^2$

Esta propriedade afirma que o **quadrado do módulo de um número** é igual ao **próprio quadrado do número**. Exemplo:

$$(-\mathbf{2})^{\mathbf{2}} = (-2) \times (-2) = 4$$

$$|-\mathbf{2}|^{\mathbf{2}} = 2^2 = 4$$

Note, portanto, que $(-\mathbf{2})^{\mathbf{2}}$ é igual a $|-\mathbf{2}|^{\mathbf{2}}$.

- $\sqrt{x^2} = |x|$

Essa propriedade nos diz que **a raiz do quadrado** de um número **é igual ao módulo** do número. Observe o seguinte exemplo:

$$\sqrt{\mathbf{2}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{(-\mathbf{2})^2} = \sqrt{4} = 2$$

Note, portanto, que $\sqrt{x^2}$ é:

- $\boldsymbol{x}$, quando x é **maior ou igual a zero**; e
- $-\boldsymbol{x}$, quando x é **menor do que zero**.

Logo, podemos dizer que $\sqrt{x^2} = |x|$.

- $|x + y| \leq |x| + |y|$

Esta propriedade nos diz que o **módulo da soma** é **menor ou igual** à **soma dos módulos**.

Trata-se de uma propriedade interessante porque **muitos podem pensar que o módulo da soma seria sempre igual à soma dos módulos**, o que **não é sempre verdade**. Vejamos alguns exemplos:

$$|3 + 5| \leq |3| + |5|$$

$$|8| \leq 3 + 5$$

$$8 \leq 8$$

Nesse caso, o **módulo da soma foi igual** à **soma dos módulos**, de modo que permanece válida a propriedade $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$.

Vamos a um outro exemplo:

$$|-3 + 5| \leq |-3| + |5|$$

$$|2| \leq 3 + 5$$

$$2 \leq 8$$

Nesse caso, o **módulo da soma** **foi menor** do que **soma dos módulos**, de modo que permanece válida a propriedade $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$.

- $|x-y| \geq |x| - |y|$

Esta propriedade nos diz que o **módulo da diferença** é **maior ou igual** à **diferença dos módulos**. Note que, com relação à propriedade anterior, o sentido da desigualdade é invertido. Vejamos alguns exemplos:

$$|3-5| \geq |3| - |5|$$
$$|-2| \geq 3-5$$
$$2 \geq -2$$

$$|5-3| \geq |5| - |3|$$
$$|2| \geq 5-3$$
$$2 \geq 2$$

$$|(-3)-5| \geq |-3| - |5|$$
$$|-8| \geq 3-5$$
$$8 \geq -2$$

Equações modulares

Equações modulares

Propriedades para equações modulares

Módulo de $f(x)$ igual a uma constante

$$|f(x)| = k \leftrightarrow \begin{cases} f(x) = k \\ \text{ou} \\ f(x) = -k \end{cases}$$

Módulo de $f(x)$ igual zero

$$|f(x)| = 0 \leftrightarrow f(x) = 0$$

Módulo de $f(x)$ igual a módulo de $g(x)$

$$|f(x)| = |g(x)| \leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

Módulo de $f(x)$ igual a $g(x)$

$$|f(x)| = g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) = -g(x) \\ \text{e} \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Resolução de equações modulares pela definição de módulo

Uma **equação modular** **pode não se encaixar nas propriedades** que acabamos de ver. Nesse caso, devemos utilizar a **definição de módulo** para resolver o problema.

Raízes de uma função modular

Para obter as raízes de uma função modular, basta **igualar a função a zero**.

Propriedades para equações modulares

Equações modulares são equações que apresentam uma operação de módulo. Exemplo:

$$|3x-1|=4$$

Vamos conhecer algumas propriedades que nos ajudam a resolver as equações modulares.

Módulo de $f(x)$ igual a uma constante

Considere que **x é a variável** que se quer determinar, **k é uma constante real** maior do que zero e **$f(x)$ é uma função** com a variável x.

Nesse caso, se $|f(x)|$ é igual a uma constante k, **$f(x)$ pode ser tanto igual k quanto igual a $-k$**. Em outras palavras:

$$\boxed{|f(x)|=k \leftrightarrow \begin{cases} f(x)=k \\ \text{ou} \\ f(x)=-k \end{cases}}$$

Essa é a principal propriedade utilizada para resolver equações modulares.

Professor, não entendi absolutamente nada!

Calma, caro aluno! Só se aprende com exemplos mesmo! Vejamos um exemplo:

$$|x|=2$$

Observe que duas soluções, $x=2$ e $x=-2$, satisfazem a equação acima. Isso porque tanto $|2|$ quanto $|-2|$ são iguais a 2.

Vejamos um outro exemplo:

$$|2x-1|=3$$

Nesse caso, temos duas possibilidades:

$$|2x-1|=3 \rightarrow \begin{cases} 2x-1=3 \\ \text{ou} \\ 2x-1=-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x=4 \\ \text{ou} \\ 2x=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ \text{ou} \\ x=-1 \end{cases}$$

Nesse caso, o conjunto solução da equação é:

$$S=\{-1;2\}$$

Observe que a constante k deve ser maior do que zero. Isso porque **o módulo de um número deve ser maior ou igual a zero**. Considere, por exemplo, a seguinte equação:

$$|2x - 1| = -3$$

Essa equação não apresenta solução real, pois **não existe** um número x real que faça com que $|2x - 1|$ seja um número negativo. Portanto, o conjunto-solução dessa equação é o conjunto vazio, isto é:

$$S = \emptyset$$

Módulo de $f(x)$ igual a zero

Uma outra situação que pode ocorrer é $|f(x)| = 0$. Nesse caso, temos que $f(x) = 0$. Em outras palavras:

$$\boxed{|f(x)| = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = 0}$$

Por exemplo, se tivermos a equação $|2x + 1| = 0$, temos que:

$$2x + 1 = 0$$
$$2x = -1$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

Nesse caso, o conjunto solução da equação é:

$$S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

Módulo de $f(x)$ igual a módulo de $g(x)$

Considere que **x é a variável** que se quer determinar e que **$f(x)$ e $g(x)$ são funções** com a variável x.

Nesse caso, se $|f(x)|$ é igual a $|g(x)|$, temos que $f(x)$ é igual a $g(x)$ ou então $f(x)$ é igual a $-g(x)$. Em outras palavras:

$$\boxed{|f(x)| = |g(x)| \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) = -g(x) \end{cases}}$$

Por exemplo, na equação modular $|2x + 1| = |x - 1|$, temos duas possibilidades:

$$|2x + 1| = |x - 1| \rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = x - 1 \\ \text{ou} \\ 2x + 1 = -(x - 1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - x = -1 - 1 \\ \text{ou} \\ 2x + 1 = -x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{x} = -2 \\ \text{ou} \\ x = 0 \end{cases}$$

Nesse caso, o conjunto solução é:

$$S = \{-2; 0\}$$

Módulo de $\boldsymbol{f(x)}$ igual a $\boldsymbol{g(x)}$

Lembre-se de que o módulo de um número sempre será maior do que zero, isto é:

$$|x| \geq 0$$

Nesse caso, quando surgirem **equações da forma $|\boldsymbol{f(x)}| = \boldsymbol{g(x)}$**, em que $f(x)$ e $g(x)$ são funções de x, **é necessário garantir que $\boldsymbol{g(x) \geq 0}$**.

Em outras palavras:

$$\boxed{|f(x)| = g(x) \;\leftrightarrow\; \begin{cases} f(x) = g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) = -g(x) \\ \textbf{e} \\ \boldsymbol{g(x) \geq 0} \end{cases}}$$

Por exemplo, considere a seguinte equação modular:

$$|x - 1| = 2x + 2$$

Note que ela é da forma $|f(x)| = g(x)$, em que $f(x)$ e $g(x)$ são funções de x.

Temos que:

$$|x-1| = 2x+2 \rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2x + 2 \\ \text{ou} \\ x - 1 = -(2x+2) \\ \textbf{e} \\ \boldsymbol{2x + 2 \geq 0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2x = 2 + 1 \\ \text{ou} \\ x - 1 = -2x - 2 \\ \textbf{e} \\ \boldsymbol{2x \geq -2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x = 3 \\ \text{ou} \\ 3x = 1 - 2 \\ \textbf{e} \\ \boldsymbol{x \geq -\frac{2}{2}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{1}{3} \\ \textbf{e} \\ \boldsymbol{x \geq -1} \end{cases}$$

Apesar de obtermos duas soluções para o problema, **uma delas não é válida**. Isso porque **$\boldsymbol{x = -3}$ não satisfaz a condição $\boldsymbol{x \geq -1}$**.

Portanto, a solução para o problema é:

$$S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

Resolução de equações modulares pela definição de módulo

Pessoal, algumas vezes as equações modulares **não** se encaixam nas propriedades que acabamos de ver. Nesse caso, devemos **utilizar a definição de módulo** para resolver o problema. Vamos a um exemplo:

$$|4x + 3| + |2x - 1| = 3$$

Note que as propriedades que aprendemos não nos ajudam, pois nesse caso temos a soma de dois módulos. Devemos, portanto, **utilizar a definição de módulo para resolver o problema**:

> • **Se o que está dentro das duas barras é positivo ou zero, mantenha o que está dentro das barras; ou**
>
> • **Se o que está dentro das duas barras é negativo, insira um sinal de menos.**

Vamos verificar o sinal de $\mathbf{4x + 3}$:

$$\mathbf{4x + 3 \geq 0} \;\rightarrow\; 4x \geq -3 \;\rightarrow\; \mathbf{x \geq -\frac{3}{4}}$$

$$\mathbf{4x + 3 < 0} \;\rightarrow\; 4x < -3 \;\rightarrow\; \mathbf{x < -\frac{3}{4}}$$

Agora vamos verificar o sinal de $\mathbf{2x - 1}$:

$$\mathbf{2x - 1 \geq 0} \;\rightarrow 2x \geq 1 \;\rightarrow \mathbf{x \geq \frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{2x - 1 < 0} \;\rightarrow 2x < 1 \;\rightarrow \mathbf{x < \frac{1}{2}}$$

Logo, devemos analisar a equação $|\mathbf{4x + 3}| + |\mathbf{2x - 1}| = \mathbf{3}$ para três casos:

- $\mathbf{x < -\frac{3}{4}}$;
- $-\frac{3}{4} \leq \mathbf{x} < \frac{1}{2}$; e
- $\mathbf{x \geq \frac{1}{2}}$.

Podemos inserir esses casos em uma tabela:

	−3/4	1/2	
4x + 3	Negativo	Positivo	Positivo
2x −1	Negativo	Negativo	Positivo

Caso 1: $x < -\frac{3}{4}$

$$|\underbrace{\mathbf{4x+3}}_{\text{Negativo}}| + |\underbrace{\mathbf{2x-1}}_{\text{Negativo}}| = \mathbf{3}$$

$$-(4x+3) - (2x-1) = 3$$

$$-4x - 3 - 2x + 1 = 3$$

$$-6x = 3 + 3 - 1$$

$$-6x = 5$$

$$x = -\frac{5}{6}$$

Note que essa solução para x é válida, pois ela **é menor do que** $-\frac{3}{4}$**.**

Caso 2: $-\frac{3}{4} \leq x < \frac{1}{2}$

$$|\underbrace{\mathbf{4x+3}}_{\text{Positivo}}| + |\underbrace{\mathbf{2x-1}}_{\text{Negativo}}| = \mathbf{3}$$

$$(4x+3) - (2x-1) = 3$$

$$4x + 3 - 2x + 1 = 3$$

$$2x = 3 - 3 - 1$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Note que essa solução para x é válida, pois ela **está compreendida no intervalo** $-\frac{3}{4} \leq x < \frac{1}{2}$**.**

Caso 3: $x \geq \frac{1}{2}$

$$|\underbrace{\mathbf{4x+3}}_{\text{Positivo}}| + |\underbrace{\mathbf{2x-1}}_{\text{Positivo}}| = \mathbf{3}$$

$$(4x+3) + (2x-1) = 3$$

$$6x = 3 - 3 + 1$$

$$6x = 1$$

$$x = \frac{1}{6}$$

Note que essa solução para x **não é válida**, pois ela **não é maior ou igual a** $\frac{1}{2}$.

Portanto, o conjunto solução da equação $|\mathbf{4x+3}|+|\mathbf{2x-1}|=\mathbf{3}$ é:

$$S=\left\{-\frac{5}{6};\ -\frac{1}{2}\right\}$$

Exemplos de equações modulares

Vamos resolver algumas equações modulares.

- $|\mathbf{3x+1}|=\mathbf{4}$

Temos uma equação modular em que **o módulo de $f(x)$ é igual a uma constante**. Nesse caso, devemos proceder do seguinte modo:

$$|f(x)|=k \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x)=k \\ \text{ou} \\ f(x)=-k \end{cases}$$

Logo:

$$|3x+1|=4 \rightarrow \begin{cases} 3x+1=4 \\ \text{ou} \\ 3x+1=-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x=3 \\ \text{ou} \\ 3x=-5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{ou} \\ x=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Portanto, o conjunto solução é:

$$S=\left\{-\frac{5}{3};1\right\}$$

- $|\mathbf{2x-1}|=\mathbf{0}$

Temos uma equação modular em que **o módulo de $f(x)$ é igual a zero**. Nesse caso, devemos proceder do seguinte modo:

$$|f(x)|=0 \quad \leftrightarrow \quad x=0$$

Logo:

$$2x-1=0$$

$$2x=1$$

$$x=\frac{1}{2}$$

Portanto, o conjunto solução é:

$$S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

- $|2x - 1| = |x + 1|$

Temos uma equação modular em que **o módulo de $f(x)$ é igual ao módulo de $g(x)$**. Nesse caso, devemos proceder do seguinte modo:

$$|f(x)| = |g(x)| \leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

Logo:

$$|2x - 1| = |x + 1| \rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = x + 1 \\ \text{ou} \\ 2x - 1 = -(x + 1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - x = 1 + 1 \\ \text{ou} \\ 2x + x = 1 - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = 0 \end{cases}$$

Portanto, o conjunto solução é:

$$S = \{0;\ 2\}$$

- $|x^2 - 5x + 6| = |x^2 - 4|$

Novamente, temos uma equação modular em que **o módulo de $f(x)$ é igual ao módulo de $g(x)$**. Nesse caso, devemos proceder do seguinte modo:

$$|f(x)| = |g(x)| \leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

Logo:

$$|x^2 - 5x + 6| = |x^2 - 4| \rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = x^2 - 4 \\ \text{ou} \\ x^2 - 5x + 6 = -(x^2 - 4) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5x = -6 - 4 \\ \text{ou} \\ x^2 - 5x + 6 = -x^2 + 4 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ 2x^2 - 5x + 2 = 0 \end{cases}$$

Para encontrar as raízes, vamos utilizar a **fórmula de Bhaskara**. Temos:

$$a = 2$$

$$b = -5$$

$$c = 2$$

O **discriminante** é dado por:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-5)^2 - 4.2.2$$

$$= 25 - 16$$

$$= 9$$

As **raízes** são:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2.2}$$

$$x = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$x_1 = 2 \ ; \ x_2 = \frac{1}{2}$$

Voltando ao problema original, temos:

$$\begin{cases} x = 2 \\ \quad\quad \text{ou} \\ 2x^2 - 5x + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \quad\quad \text{ou} \\ x = 2 \ \text{ ou } \ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Note que obtivemos duas vezes a solução $x = 2$. Portanto, o conjunto solução é:

$$S = \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$$

- $\mathbf{|2x + 1| = x - 1}$

Temos uma equação modular em que **o módulo de $f(x)$ é igual a $g(x)$**. Nesse caso, devemos proceder do seguinte modo:

$$|f(x)| = g(x) \ \leftrightarrow \ \begin{cases} f(x) = g(x) \\ \quad \text{ou} \\ f(x) = -g(x) \\ \quad \mathbf{e} \\ \boldsymbol{g(x) \geq 0} \end{cases}$$

Logo:

$$|2x+1| = x-1 \quad \rightarrow \begin{cases} 2x+1 = x-1 \\ \text{ou} \\ 2x+1 = -(x-1) \\ \mathbf{e} \\ \boldsymbol{x-1 \geq 0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - x = -1-1 \\ \text{ou} \\ 2x+1 = -x+1 \\ \mathbf{e} \\ \boldsymbol{x \geq 1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \text{ou} \\ 3x = 0 \\ \mathbf{e} \\ \boldsymbol{x \geq 1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \text{ou} \\ x = 0 \\ \mathbf{e} \\ \boldsymbol{x \geq 1} \end{cases}$$

Apesar de obtermos duas soluções para o problema, **nenhuma delas é válida**. Isso porque **$x = -2$ e $x = 0$ não satisfazem a condição $x \geq 1$**. Portanto, o conjunto solução é vazio:

$$S = \emptyset$$

- $\boldsymbol{x^2 + |x| - 2 = 0}$

Para resolver essa equação, devemos nos lembrar da seguinte propriedade:

$$|x|^2 = x^2$$

Portanto, a equação em questão é dada por:

$$\boldsymbol{|x|^2 + |x| - 2 = 0}$$

Podemos realizar a substituição $y = |x|$. Ficamos com:

$$y^2 + y - 2 = 0$$

- Para encontrar as raízes, vamos utilizar a **fórmula de Bhaskara**. Temos:

$$a = 2$$

$$b = -5$$

$$c = 2$$

O **discriminante** é dado por:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (1)^2 - 4.1.(-2)$$

$$= 1 - (-8)$$

$$= 9$$

As **raízes** são:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2.1}$$

$$y = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$\boldsymbol{y_1 = 1} \; ; \; \boldsymbol{y_2 = -2}$$

Voltando ao problema, temos que $y = |x|$. Logo:

- $|x| = \mathbf{1} \rightarrow \boldsymbol{x = 1}$ ou $\boldsymbol{x = -1}$.
- $|x| = \mathbf{-2} \rightarrow$ **Não há $\boldsymbol{x}$ que satisfaça essa igualdade**, **pois $\boldsymbol{|x| \geq 0}$**.

Portanto, o conjunto solução da equação $\boldsymbol{x^2 + |x| - 2 = 0}$ é:

$$S = \{-1; 1\}$$

- $\mathbf{|6x + 3| + |2x - 1| = 2}$

Devemos utilizar a **definição de módulo** para resolver esse problema.

Vamos verificar o sinal de $\boldsymbol{6x + 3}$:

$$\boldsymbol{6x + 3 \geq 0} \quad \rightarrow \quad 6x \geq -3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x \geq -\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{6x + 3 < 0} \quad \rightarrow \quad 6x < -3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x < -\frac{1}{2}}$$

Agora vamos verificar o sinal de $\boldsymbol{2x - 1}$:

$$\boldsymbol{2x - 1 \geq 0} \quad \rightarrow 2x \geq 1 \quad \rightarrow \boldsymbol{x \geq \frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{2x - 1 < 0} \quad \rightarrow 2x < 1 \quad \rightarrow \boldsymbol{x < \frac{1}{2}}$$

Logo, devemos analisar a equação $\boldsymbol{|6x + 3| + |2x - 1| = 2}$ para três casos:

- $\boldsymbol{x < -\frac{1}{2}}$;

- $\boldsymbol{-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}}$; e

- $\boldsymbol{x \geq \frac{1}{2}}$.

Podemos inserir esses casos em uma tabela:

	$x < -1/2$	$-1/2 < x < 1/2$	$x > 1/2$
6x + 3	Negativo	Positivo	Positivo
2x −1	Negativo	Negativo	Positivo

Caso 1: $x < -\frac{1}{2}$

$$|\underbrace{6x+3}_{\text{Negativo}}| + |\underbrace{2x-1}_{\text{Negativo}}| = 2$$

$$-(6x+3) - (2x-1) = 2$$

$$-8x - 3 + 1 = 2$$

$$-8x = 2 + 3 - 1$$

$$-8x = 4$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Note que essa solução para x **não é válida**, pois ela **não está compreendida no intervalo** $x < -\frac{1}{2}$. Apesar disso, veremos que essa solução será incluída no próximo caso, em que $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$.

Caso 2: $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$

$$|\underbrace{6x+3}_{\text{Positivo}}| + |\underbrace{2x-1}_{\text{Negativo}}| = 2$$

$$(6x+3) - (2x-1) = 2$$

$$4x + 3 + 1 = 2$$

$$4x = 2 - 3 - 1$$

$$4x = -2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Note que essa solução para x é válida, pois ela **está compreendida no intervalo** $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$.

Caso 3: $x \geq \frac{1}{2}$

$$|\underbrace{6x+3}_{\text{Positivo}}| + |\underbrace{2x-1}_{\text{Positivo}}| = 2$$

$$(6x+3) + (2x-1) = 2$$

$$8x = 2 - 3 + 1$$

$$8x = 0$$

$$x = 0$$

Note que essa solução para x **não é válida**, pois ela **não é maior do que $\frac{1}{2}$**.

Portanto, o conjunto solução da equação $|\mathbf{6x+3}|+|\mathbf{2x-1}|=\mathbf{2}$ é:

$$S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

Raízes de uma função modular

Pessoal, ainda vamos tratar sobre funções modulares no decorrer dessa aula.

Nesse momento, é importante que você saiba obter as raízes de uma função modular. Para tanto, **basta igualar a função a zero**. Por exemplo:

Calcule as raízes de $f(x)=|x-1|-3$

Para calcular as raízes, basta fazer $f(x)=0$.

$$|x-1|-3=0$$

$$\rightarrow |x-1|=3 \rightarrow \begin{cases} x-1=3 \\ \text{ou} \\ x-1=-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=4 \\ \text{ou} \\ x=-2 \end{cases}$$

Portanto, as **raízes** da função $f(x)$ são **4** e **−2**.

INEQUAÇÕES MODULARES

Inequações modulares

Propriedades para inequações modulares

Módulo de $f(x)$ menor do que uma constante

$$|f(x)| < k \quad \leftrightarrow \quad -k < f(x) < k$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -k \\ \quad \mathbf{e} \\ f(x) < k \end{cases}$$

Essa propriedade também vale para o caso em que $|f(x)|$ é **menor** **ou igual** a uma constante.

Módulo de $f(x)$ maior do que uma constante

$$|f(x)| > k \leftrightarrow \begin{cases} f(x) < -k \\ \quad \mathbf{ou} \\ f(x) > k \end{cases}$$

Essa propriedade também vale para o caso em que $|f(x)|$ é **maior** **ou igual** a uma constante.

Resolução de inequações modulares pela definição de módulo

Uma **inequação modular** **pode não se encaixar nas propriedades** que acabamos de ver. Nesse caso, devemos utilizar a **definição de módulo** para resolver o problema.

Propriedades para inequações modulares

Inequações modulares são inequações que apresentam uma operação de módulo. Exemplos:

- $|\mathbf{3x-1}| > \mathbf{4}$;
- $|\mathbf{3x}| \leq \mathbf{2}$;
- $\left||\mathbf{3x+1}| - \mathbf{2}\right| \leq \mathbf{1}$; **e**
- $|\mathbf{2x-1}| < \boldsymbol{x}$.

Vamos conhecer duas propriedades que nos ajudam a resolver inequações modulares.

Módulo de $\boldsymbol{f(x)}$ menor do que uma constante

Considere que **$\boldsymbol{x}$ é a variável** que se quer determinar, **$\boldsymbol{k}$ é uma constante real** maior do que zero e **$\boldsymbol{f(x)}$ é uma função** com a variável x.

Nesse caso, se $|\boldsymbol{f(x)}|$ é menor do que uma constante $\boldsymbol{k}$, **$\boldsymbol{f(x)}$ deve estar entre $-\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{k}$**. Em outras palavras:

$$|\boldsymbol{f(x)}| < \boldsymbol{k} \leftrightarrow -\boldsymbol{k} < \boldsymbol{f(x)} < \boldsymbol{k}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{f(x)} > -\boldsymbol{k} \\ \quad \textbf{e} \\ \boldsymbol{f(x)} < \boldsymbol{k} \end{cases}$$

Vejamos um exemplo para compreender melhor a propriedade:

Obtenha o conjunto solução da inequação $|x| < 2$

Note que qualquer número x **maior ou igual** a **2 não pode** ser solução. Por exemplo, se fizermos $x = 3$, é **errado** dizer que $|x| < 2$, pois teremos $|3| < 2$, isto é, $3 < 2$.

Além disso, qualquer número x **menor ou igual** a **-2** também **não pode** ser solução. Por exemplo, se fizermos $x = -3$, é **errado** dizer que $|x| < 2$, pois teremos $|-3| < 2$, isto é, $3 < 2$.

Logo, **para que tenhamos $|x| < 2$, x deve estar entre -2 e 2**:

$$|x| < 2 \leftrightarrow -2 < x < 2$$

Portanto, o conjunto solução da inequação é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -2 < x < 2\}$$

Ressalta-se que essa propriedade também vale para o caso em que $|\boldsymbol{f(x)}|$ é **menor ou igual** a uma constante $\boldsymbol{k}$. Vejamos um outro exemplo:

Obtenha o conjunto solução da inequação $|2x-1| \leq 3$

Aplicando a propriedade aprendida, temos:

$$|2x-1| \leq 3 \;\rightarrow -3 \leq 2x-1 \leq 3 \rightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq -3 \\ \mathbf{e} \\ 2x-1 \leq 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x \geq -3+1 \\ \mathbf{e} \\ 2x \leq 3+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x \geq -2 \\ \mathbf{e} \\ 2x \leq 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \mathbf{e} \\ x \leq 2 \end{cases}$$

Portanto, o conjunto solução da inequação é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x \geq -1 \;\mathbf{e}\; x \leq 2\} = \{x \in \mathbb{R} \;/\; -1 \leq x \leq 2\}$$

Módulo de $f(x)$ maior do que uma constante

Uma outra situação que pode ocorrer é $|\boldsymbol{f(x)}| > \boldsymbol{k}$. Nesse caso, $\boldsymbol{f(x)}$ deve ser **menor** do que $-\boldsymbol{k}$ **ou** então $\boldsymbol{f(x)}$ deve ser **maior** do que $\boldsymbol{k}$. Em outras palavras:

$$\boxed{|\boldsymbol{f(x)}| > \boldsymbol{k} \leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{f(x)} < -\boldsymbol{k} \\ \mathbf{ou} \\ \boldsymbol{f(x)} > \boldsymbol{k} \end{cases}}$$

Vejamos um exemplo para compreender melhor a propriedade:

Obtenha o conjunto solução da inequação $|x| > 2$

Note que qualquer número x **entre −2 e 2 não pode** ser solução.

Por exemplo, se fizermos $x = -1$, é **errado** dizer que $|x| > 2$, pois teremos $|-1| < 2$, isto é, $1 < 2$.

Um outro exemplo seria $x = 1$, que da mesma forma faz com que seja errado dizer que $|x| > 2$, pois teremos $|1| < 2$, isto é, $1 < 2$.

Logo, **para que tenhamos $|x| > 2$, $\boldsymbol{x}$ deve ser menor do que −2 ou maior do que 2**:

$$|\boldsymbol{x}| > \mathbf{2} \;\;\rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x} < -\mathbf{2} \\ \mathbf{ou} \\ \boldsymbol{x} > \mathbf{2} \end{cases}$$

Portanto, o conjunto solução da inequação é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x < -2 \;\mathbf{ou}\; x > 2\}$$

Ressalta-se que essa propriedade também vale para o caso em que $|\boldsymbol{f(x)}|$ é **maior ou igual** a uma constante $\boldsymbol{k}$. Vejamos um outro exemplo:

Obtenha o conjunto solução da inequação $|2x-1| \geq 3$

Aplicando a propriedade aprendida, temos:

$$|2x-1| \geq 3 \rightarrow \begin{cases} 2x-1 \leq -3 \\ \textbf{ou} \\ 2x-1 \geq 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x \leq -3+1 \\ \textbf{ou} \\ 2x \geq 3+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x \leq -2 \\ \textbf{ou} \\ 2x \geq 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ \textbf{ou} \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Portanto, o conjunto solução da inequação é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq -1 \textbf{ ou } x \geq 2\}$$

Resolução de inequações modulares pela definição de módulo

Pessoal, algumas vezes as inequações modulares **não** se encaixam nas propriedades que acabamos de ver. Nesse caso, devemos **utilizar a definição de módulo** para resolver o problema. Vamos a um exemplo:

$$|\mathbf{2x-1}| \leq \boldsymbol{x}$$

Note que as propriedades que aprendemos não nos ajudam, pois **não se trata do caso** em que **módulo de $f(x)$ é menor do que uma constante.**

Devemos, portanto, **utilizar a definição de módulo para resolver o problema**:

> • **Se o que está dentro das duas barras é positivo ou zero, mantenha o que está dentro das barras; ou**
>
> • **Se o que está dentro das duas barras é negativo, insira um sinal de menos.**

Vamos verificar o sinal de $\mathbf{2x-1}$:

$$\mathbf{2x-1 \geq 0} \rightarrow 2x \geq 1 \rightarrow \boldsymbol{x \geq \frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{2x-1 < 0} \rightarrow 2x < 1 \rightarrow \boldsymbol{x < \frac{1}{2}}$$

Logo, devemos resolver a inequação $|\mathbf{2x-1}| \leq \boldsymbol{x}$ para dois casos:

- $\boldsymbol{x < \frac{1}{2}}$; e
- $\boldsymbol{x \geq \frac{1}{2}}$.

Caso 1: $\boldsymbol{x < \frac{1}{2}}$

$$|\underbrace{\mathbf{2x-1}}_{\text{Negativo}}| \leq \boldsymbol{x}$$

$$-(2x-1) \leq x$$

$$-2x+1 \leq x$$

$$1 \leq 3x$$

$$3x \geq 1$$

$$x \geq \frac{1}{3}$$

Como nesse caso devemos ter $\boldsymbol{x < \frac{1}{2}}$, a solução do **caso 1** é:

$$S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x \geq \frac{1}{3} \;\mathbf{e}\; x < \frac{1}{2}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; \boldsymbol{\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2}}\right\}$$

Caso 2: $\boldsymbol{x \geq \frac{1}{2}}$

$$|\underbrace{\mathbf{2x-1}}_{\text{Positivo}}| \leq \boldsymbol{x}$$

$$2x-1 \leq x$$

$$2x-x \leq 1$$

$$x \leq 1$$

Como nesse caso devemos ter $\boldsymbol{x \geq \frac{1}{2}}$, a solução do **caso 2** é:

$$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x \geq \frac{1}{2} \;\mathbf{e}\; x \leq 1\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; \boldsymbol{\frac{1}{2} \leq x \leq 1}\right\}$$

Solução da inequação modular

O conjunto solução da inequação $|\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{1}| \leq \boldsymbol{x}$ é a união dos dois casos:

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; \boldsymbol{\frac{1}{3} \leq x \leq 1}\right\}$$

Exemplos de inequações modulares

Vamos resolver algumas inequações modulares.

- $\mathbf{|3x+1|<2}$

Temos uma inequação modular em que **o módulo de $f(x)$ é menor do que uma constante**. Nesse caso, devemos proceder do seguinte modo:

$$|f(x)|<k \leftrightarrow -k<f(x)<k$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} f(x)>-k \\ \mathbf{e} \\ f(x)<k \end{cases}$$

Logo:

$$|3x+1|<2 \rightarrow -2<3x+1<2 \rightarrow \begin{cases} 3x+1>-2 \\ \mathbf{e} \\ 3x+1<2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x>-3 \\ \mathbf{e} \\ 3x<1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ \mathbf{e} \\ x<\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Portanto, o conjunto solução é:

$$S=\left\{x\in\mathbb{R} \,/\, x>-1 \ \mathbf{e}\ x<\frac{1}{3}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R} \,/ -1<x<\frac{1}{3}\right\}$$

- $\mathbf{|-2x+3|\geq 1}$

Temos uma inequação modular em que **o módulo de $f(x)$ é maior <u>ou igual</u> a uma constante**. Nesse caso, devemos proceder do seguinte modo:

$$|f(x)|\geq k \leftrightarrow \begin{cases} f(x)\leq -k \\ \mathbf{ou} \\ f(x)\geq k \end{cases}$$

Logo:

$$|-2x+3|\geq 1 \rightarrow \begin{cases} -2x+3\leq -1 \\ \mathbf{ou} \\ -2x+3\geq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x\leq -4 \\ \mathbf{ou} \\ -2x\geq -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x\geq 4 \\ \mathbf{ou} \\ 2x\leq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ \mathbf{ou} \\ x\leq 1 \end{cases}$$

Portanto, o conjunto solução é:

$$S=\{x\in\mathbb{R} \,/\, x\leq 1 \ \mathbf{ou}\ x\geq 2\}$$

- $|5x+2| > 0$

Sabemos que **o módulo de um número real é sempre maior <u>ou igual</u> a zero**. Essa propriedade costuma ser descrita por meio da seguinte desigualdade:

$$|x| \geq 0$$

Logo, a única possibilidade de $|5x+2|$ não ser maior que zero é quando $|5x+2|$ é igual a zero.

$$|5x+2| = 0$$

$$5x+2 = 0$$

$$5x = -2$$

$$x = -\frac{2}{5}$$

Logo, $|5x+2| > 0$ quando x **é qualquer número real exceto** $-\frac{2}{5}$. Portanto, o conjunto solução da inequação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq -\frac{2}{5}\right\}$$

- $\left|x+\sqrt{2}\right| > -3$

Sabemos que **o módulo de um número real é sempre maior <u>ou igual</u> a zero**.

Logo, $\left|x+\sqrt{2}\right|$ **sempre** será maior do que -3, pois será **sempre** maior ou igual a zero. Portanto, o conjunto solução da inequação é:

$$S = \mathbb{R}$$

- $|x-2| \leq -1$

Sabemos que **o módulo de um número real é sempre maior <u>ou igual</u> a zero**.

Logo, $|x-2|$ nunca será menor ou igual a -1. Portanto, o conjunto solução da inequação é:

$$S = \emptyset$$

- $\left|x^2 - 5x\right| < 6$

Temos uma inequação modular em que **o módulo de $f(x)$ é menor do que constante**. Nesse caso, devemos proceder do seguinte modo:

$$|f(x)| < k \leftrightarrow -k < f(x) < k$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -k \\ \quad \textbf{e} \\ f(x) < k \end{cases}$$

Logo:

$$|x^2 - 5x| < 6 \to -6 < x^2 - 5x < 6 \to \begin{cases} x^2 - 5x > -6 \\ \quad \textbf{e} \\ x^2 - 5x < 6 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ \quad \textbf{e} \\ x^2 - 5x - 6 < 0 \end{cases}$$

Pessoal, a parte da resolução que está relacionada a módulo acaba por aqui. Agora, devemos encontrar o **conjunto solução que respeite simultaneamente as duas inequações do segundo grau encontradas**.

Primeira inequação: $x^2 - 5x + 6 > 0$

Para resolver essa primeira inequação, devemos encontrar as raízes de $\boldsymbol{x^2 - 5x + 6}$.

Para encontrar as raízes, vamos usar a **fórmula de Bhaskara**. Temos:

$$a = 1$$

$$b = -5$$

$$c = 6$$

O **discriminante** é dado por:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6$$

$$= 25 - 24$$

$$= 1$$

As **raízes** são:

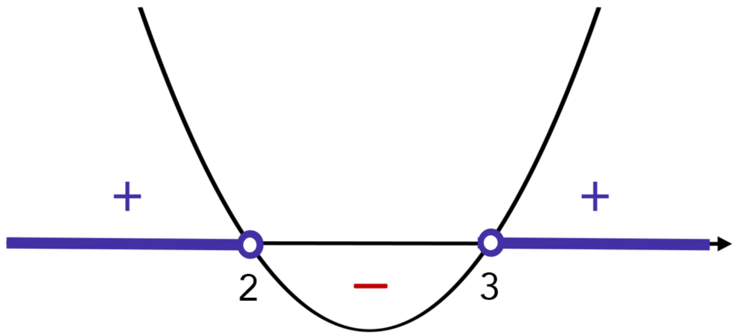
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = 2 \quad ; \quad x_2 = 3$$

Agora que temos as raízes, podemos descrever a parábola. Como o coeficiente ***a* é positivo**, a **concavidade** da parábola é **para cima**.



Portanto, $x^2 - 5x + 6 > 0$ **quando $x < 2$ ou $x > 3$**.

Logo, **conjunto solução** dessa **primeira inequação** é:

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 2 \textbf{ ou } x > 3\}$$

Segunda inequação: $x^2 - 5x - 6 < 0$

Para resolver essa segunda inequação, devemos encontrar as raízes de $\boldsymbol{x^2 - 5x - 6}$.

Para encontrar as raízes, vamos usar a **fórmula de Bhaskara**. Temos:

$$a = 1$$

$$b = -5$$

$$c = -6$$

O **discriminante** é dado por:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-6)$$

$$= 25 - (-24)$$

$$= 49$$

As **raízes** são:

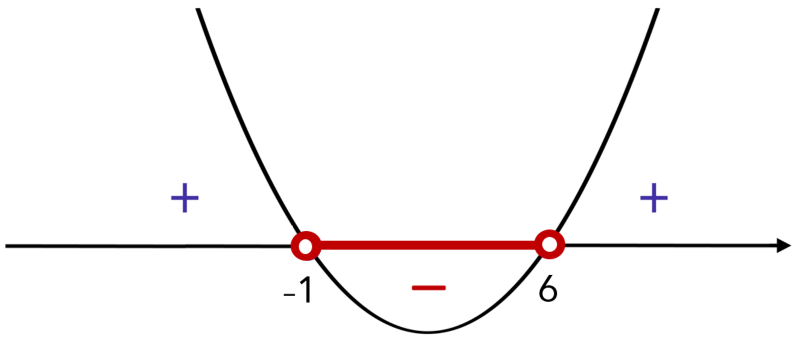
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = 6 \;\; ; \;\; x_2 = -1$$

Agora que temos as raízes, podemos descrever a parábola. Como o coeficiente ***a* é positivo**, a **concavidade** da parábola é **para cima**.



Portanto, $x^2 - 5x - 6 < 0$ **quando** $\mathbf{-1 < x < 6}$.

Logo, **conjunto solução** dessa **segunda inequação** é:

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \,/ -1 < x < 6\}$$

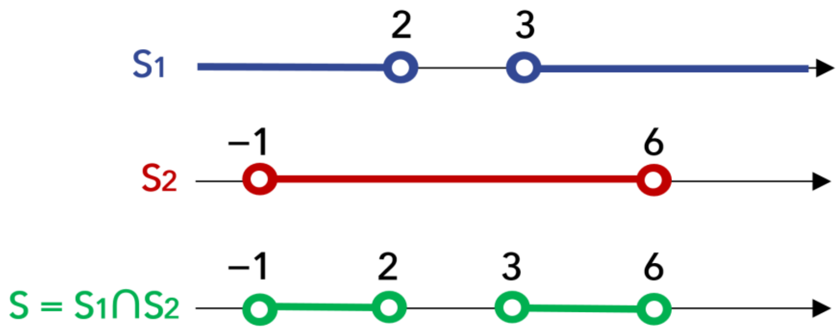
Solução da inequação modular

Vimos que a inequação $\left|\boldsymbol{x^2 - 5x}\right| < \mathbf{6}$ corresponde a:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ \quad\quad\quad \textbf{e} \\ x^2 - 5x - 6 < 0 \end{cases}$$

Logo, conjunto solução da inequação $\left|\boldsymbol{x^2 - 5x}\right| < \mathbf{6}$ é a **interseção** das soluções das duas inequações do segundo grau:

$$S = S_1 \cap S_2$$



Portanto, o conjunto solução da inequação $\left|\boldsymbol{x^2-5x}\right| < \boldsymbol{6}$ é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \;/ -1 < x < 2 \textbf{ ou } 3 < x < 6\} =]-1; 2[\, \cup \,]3; 6[$$

- $\boldsymbol{\left||3x+1|-2\right| \leq 1}$

Temos uma inequação modular em que **o módulo de $f(x)$ é menor ou igual a uma constante**. Nesse caso, devemos proceder do seguinte modo:

$$|f(x)| \leq k \leftrightarrow -k \leq f(x) \leq k$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq -k \\ \textbf{e} \\ f(x) \leq k \end{cases}$$

Logo:

$$\left||3x+1|-2\right| \leq 1 \rightarrow \begin{cases} |3x+1|-2 \geq -1 \\ \textbf{e} \\ |3x+1|-2 \leq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |3x+1| \geq 1 \\ \textbf{e} \\ |3x+1| \leq 3 \end{cases}$$

Primeira inequação: $\boldsymbol{|3x+1| \geq 1}$

$$|3x+1| \geq 1 \rightarrow \begin{cases} 3x+1 \geq 1 \\ \textbf{ou} \\ 3x+1 \leq -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x \geq 0 \\ \textbf{ou} \\ 3x \leq -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \textbf{ou} \\ x \leq -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Logo, **conjunto solução** dessa **primeira inequação** é:

$$S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} / x \leq -\frac{2}{3} \textbf{ ou } x \geq 0\right\}$$

Segunda inequação: $|3x+1| \leq 3$

$$|3x+1| \leq 3 \;\rightarrow\; -3 \leq 3x+1 \leq 3 \rightarrow \begin{cases} 3x+1 \leq 3 \\ \quad\textbf{e} \\ 3x+1 \geq -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x \leq 2 \\ \quad\textbf{e} \\ 3x \geq -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{2}{3} \\ \quad\textbf{e} \\ x \geq -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Logo, **conjunto solução** dessa **segunda inequação** é:

$$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x \geq -\frac{4}{3} \;\textbf{e}\; x \leq \frac{2}{3}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \;/ -\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\right\}$$

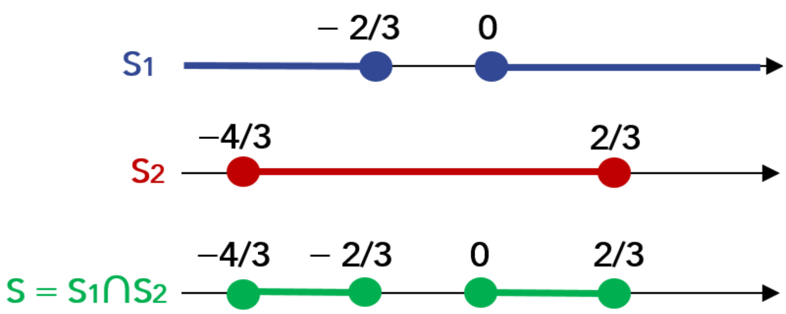
Solução da inequação modular

Vimos que a inequação $\boldsymbol{\big||3x+1|-2\big| \leq 1}$ corresponde a:

$$\begin{cases} |3x+1| \geq 1 \\ \quad\textbf{e} \\ |3x+1| \leq 3 \end{cases}$$

Note que o conjunto solução da inequação $\boldsymbol{\big||3x+1|-2\big| \leq 1}$ será a **interseção** da solução das duas inequações.

$$S = S_1 \cap S_2$$



Portanto, o conjunto solução da inequação $\boldsymbol{\big||3x+1|-2\big| \leq 1}$ é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \;/ -\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \;\textbf{ou}\; 0 \leq x \leq \frac{2}{3}\right\}$$

FUNÇÃO MODULAR

Função modular

Função modular por meio da definição de módulo

A função modular $f(x)$ pode ser definida do seguinte modo, sendo **$q(x)$ uma função qualquer**:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = |q(x)| = \begin{cases} \boldsymbol{q(x); q(x) \geq 0} \\ \boldsymbol{-q(x); q(x) < 0} \end{cases}$$

O gráfico da função $f(x)$ será descrito da seguinte forma:

- Quando $\boldsymbol{q(x)}$ é **positivo** ou **zero**, **mantenha o gráfico** de $q(x)$;
- Quando $\boldsymbol{q(x)}$ é **negativo**, devemos **inserir um sinal de menos**. Nesse caso, o **gráfico da função original** $q(x)$ deve ser "**espelhado**" **com relação ao eixo $\boldsymbol{x}$**.

Módulo na variável x

Ao se aplicar um **módulo na variável $\boldsymbol{x}$**, o novo gráfico é obtido do seguinte modo:

- Para $\boldsymbol{x \geq 0}$, o novo gráfico é **igual ao gráfico original**; e
- Para $\boldsymbol{x}$ **negativo**, o novo gráfico é um "**espelho**", **com relação ao eixo $\boldsymbol{y}$**, do caso $x \geq 0$.

Translação vertical

Ao **somar** ou **subtrair** uma constante **de uma função** qualquer, estamos transladando **verticalmente** **para cima** ou **para baixo** o gráfico dessa função.

Translação horizontal

Ao **somar** ou **subtrair** uma constante **da variável $\boldsymbol{x}$** de uma função qualquer, estamos transladando horizontalmente **para a esquerda** ou **para a direita** o gráfico dessa função.

Função modular por meio da definição de módulo

Pessoal, vimos que o **módulo** ou o **valor absoluto** de x é representado por $|x|$ e corresponde a:

- $\boldsymbol{x}$, quando x é **maior ou igual a zero**; e
- $\boldsymbol{-x}$, quando x é **menor do que zero**.

Vimos ainda que, de modo mais formal, podemos escrever:

$$|x| = \begin{cases} \boldsymbol{x}; & \boldsymbol{x \geq 0} \\ \boldsymbol{-x}; & \boldsymbol{x < 0} \end{cases}$$

Considere agora **uma função $\boldsymbol{q(x)}$ qualquer**, podendo ser, por exemplo, a seguinte função quadrática:

$$q(x) = x^2 - 5x + 6$$

A função modular $f(x)$ pode ser definida do seguinte modo:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = |q(x)| = \begin{cases} \boldsymbol{q(x); q(x) \geq 0} \\ \boldsymbol{-q(x); q(x) < 0} \end{cases}$$

O gráfico da função $f(x)$ será descrito da seguinte forma:

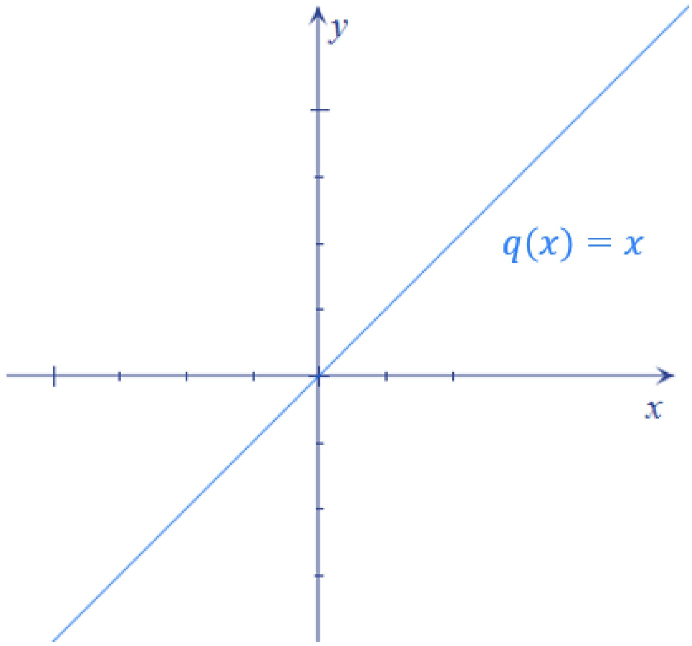
- Quando $q(x)$ é **positivo** ou **zero**, **mantenha o gráfico** de $q(x)$;
- Quando $q(x)$ é **negativo**, devemos **inserir um sinal de menos**. Nesse caso, o **gráfico da função original** $q(x)$ deve ser "**espelhado**" **com relação ao eixo $\boldsymbol{x}$**.

Vejamos alguns exemplos.

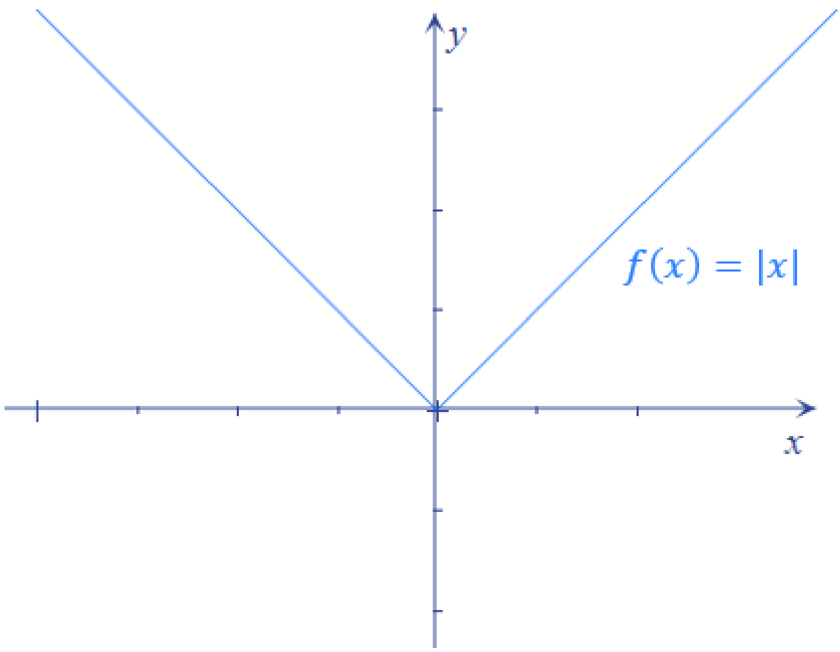
EXEMPLIFICANDO

Construa o gráfico de $f(x) = |x|$.

Sabemos que a função $q(x) = x$ pode ser desenhada da seguinte forma:

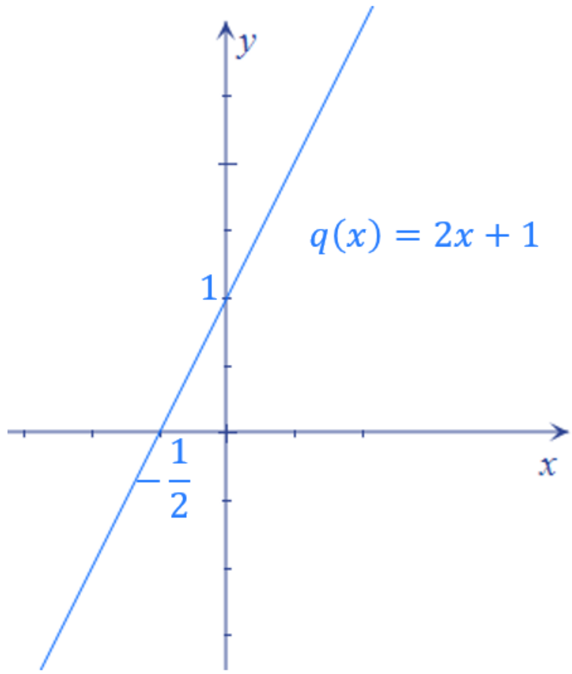


Ao aplicar o **módulo** na função $q(x) = x$, temos a **função modular** $f(x) = |x|$. Note que, para os casos em que a função original era negativa, o gráfico foi "espelhado" com relação ao eixo x.

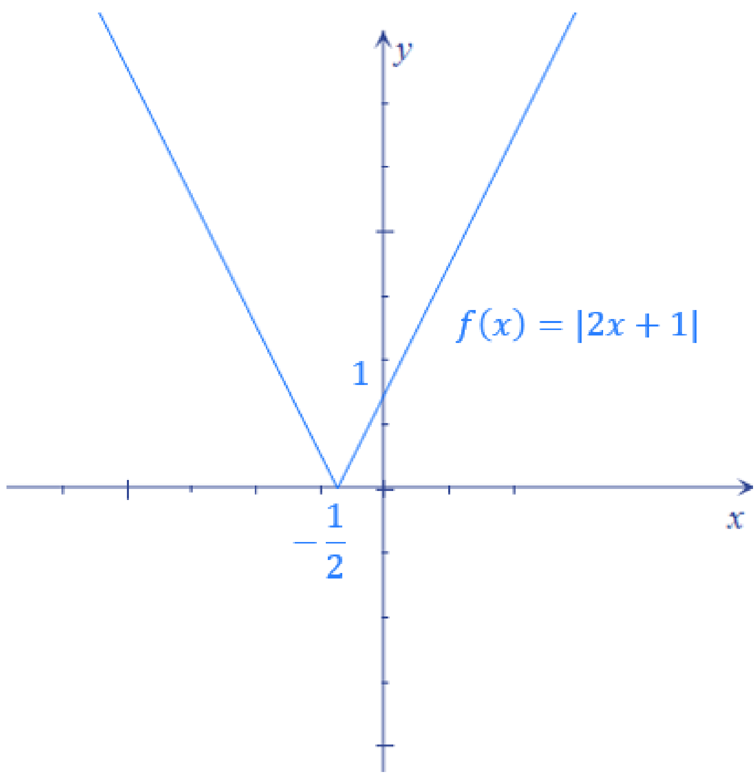


Construa o gráfico de $f(x) = |2x + 1|$.

Sabemos que a função $q(x) = 2x + 1$ pode ser desenhada da seguinte forma:

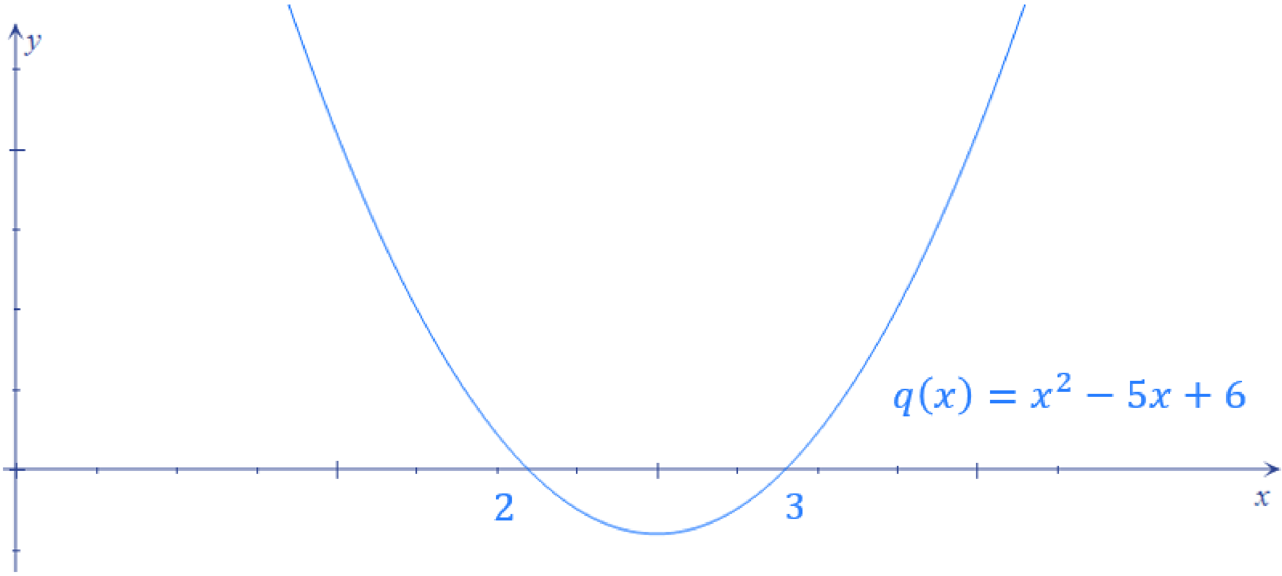


Ao aplicar o **módulo** na função $q(x) = 2x + 1$, temos a **função modular** $f(x) = |2x + 1|$. Note que, para os casos em que a função original era negativa, o gráfico foi "espelhado" com relação ao eixo x.

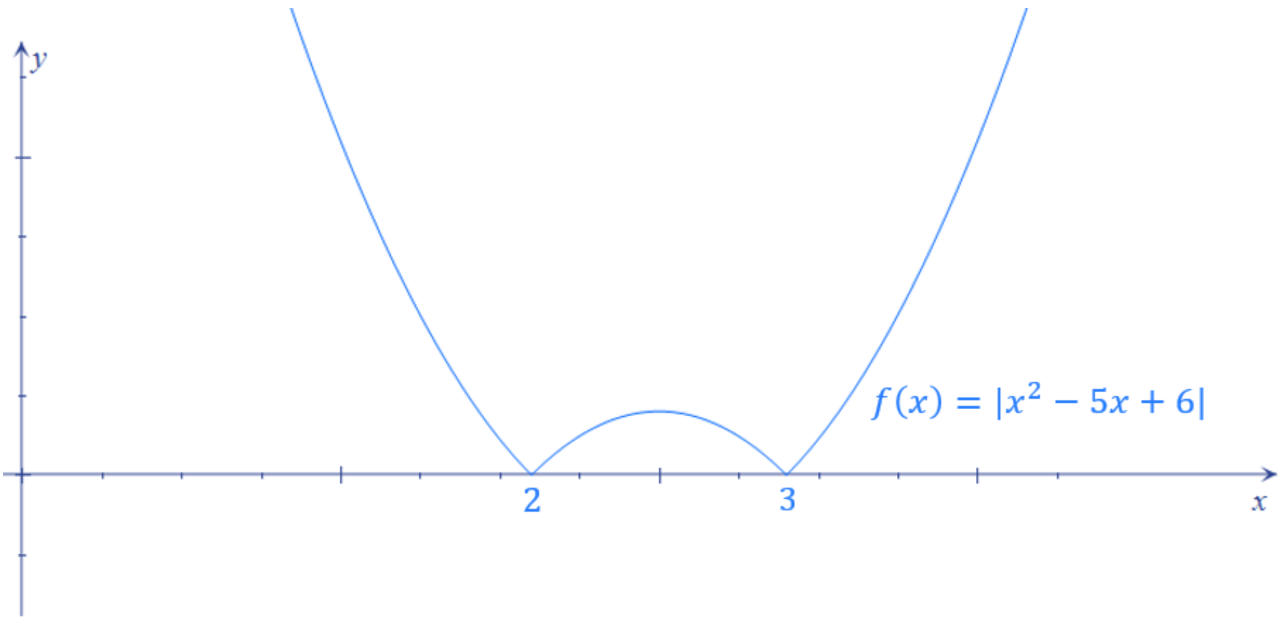


Construa o gráfico de $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$.

As raízes da função quadrática $q(x) = x^2 - 5x + 6$ são **2** e **3.** Como o coeficiente a é maior do que zero, a concavidade da parábola é para cima, e função pode ser desenhada da seguinte forma:

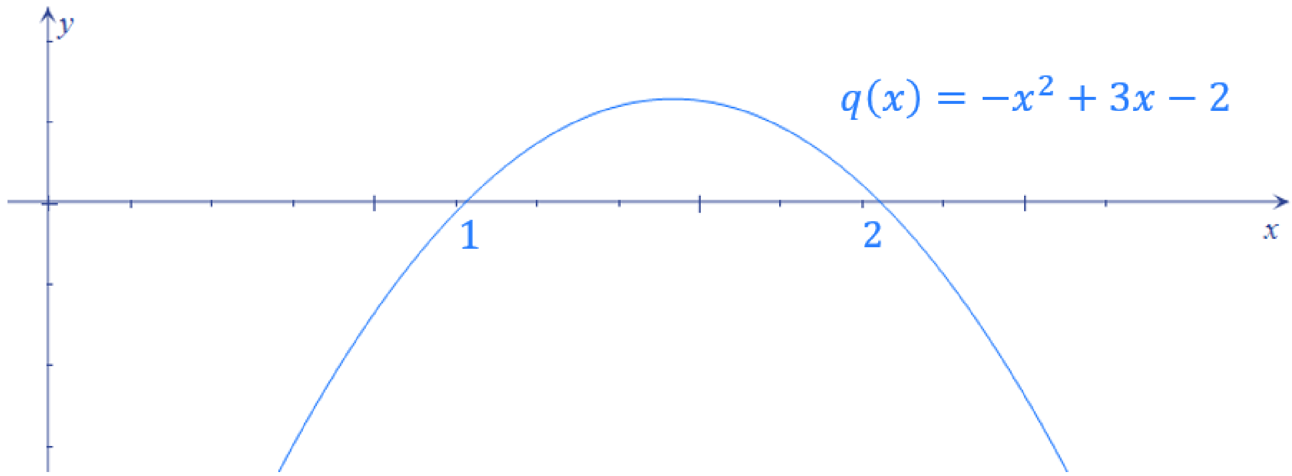


Ao aplicar o **módulo** na função $q(x) = x^2 - 5x + 6$, temos a **função modular** $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$. Note que, para os casos em que a função original era negativa, o gráfico foi "espelhado" com relação ao eixo x.

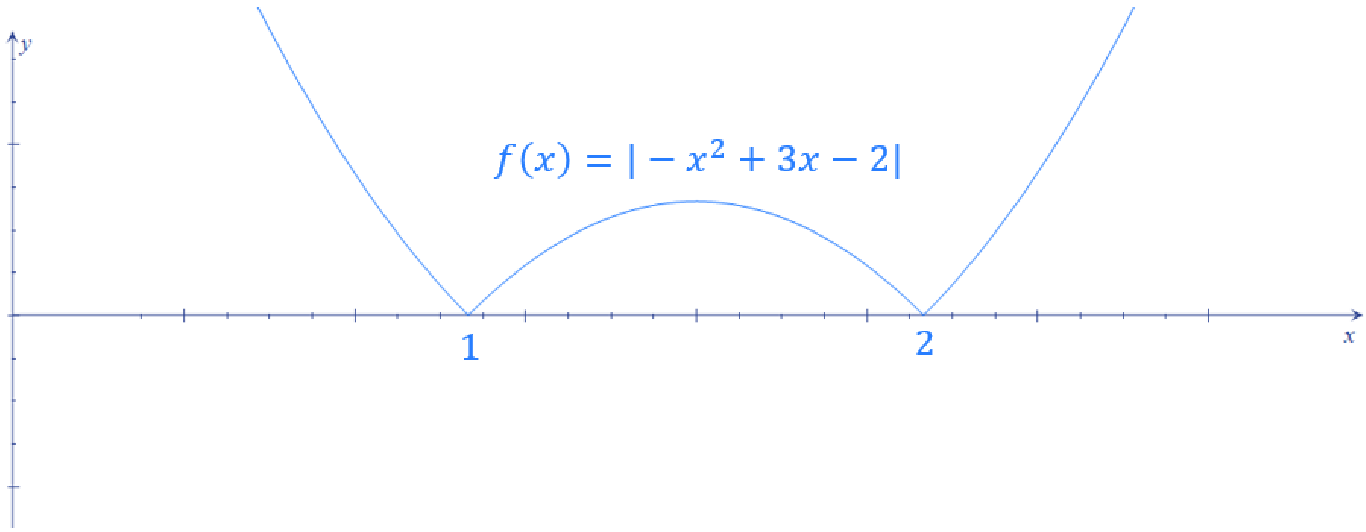


Construa o gráfico de $f(x) = |-x^2 + 3x - 2|$.

As raízes da função quadrática $q(x) = -x^2 + 3x - 2$ são **1** e **2**. Como o coeficiente a é menor do que zero, a concavidade da parábola é para baixo, e função pode ser desenhada da seguinte forma:



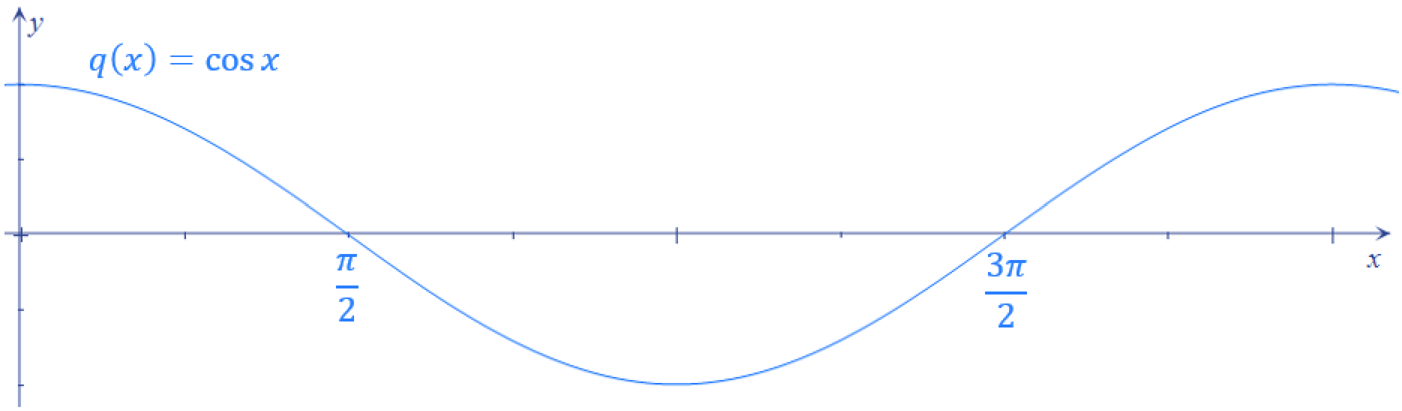
Ao aplicar o **módulo** na função $q(x) = -x^2 + 3x - 2$, temos a **função modular** $f(x) = |-x^2 + 3x - 2|$. Note que, para os casos em que a função original era negativa, o gráfico foi "espelhado" com relação ao eixo x.



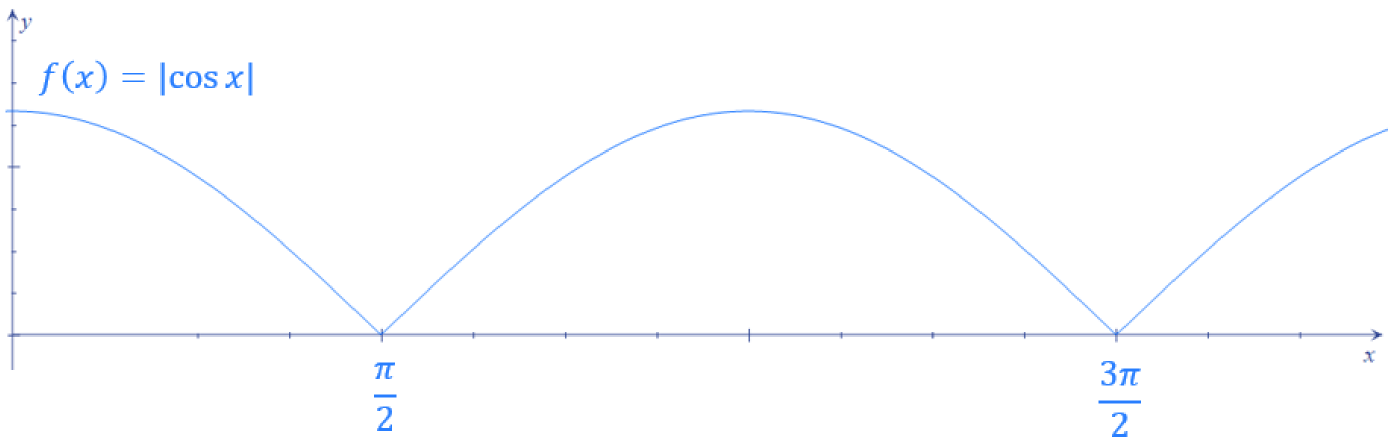
Construa o gráfico de $f(x) = |cos\ x|$.

Pessoal, $q(x) = \cos x$ é uma função trigonométrica, que será vista em aula própria, caso faça parte do edital. Inserimos ela aqui apenas para ilustrar o que a acontece quando inserimos um módulo.

A função $q(x) = \cos x$ apresenta o seguinte gráfico:



Ao aplicar o **módulo** na função $q(x) = cos\ x$, temos a **função modular** $f(x) = |cos\ x|$. Note que, <u>para os casos em que a função original era negativa</u>, <u>o gráfico foi "espelhado" com relação ao eixo x</u>.



Módulo na variável x

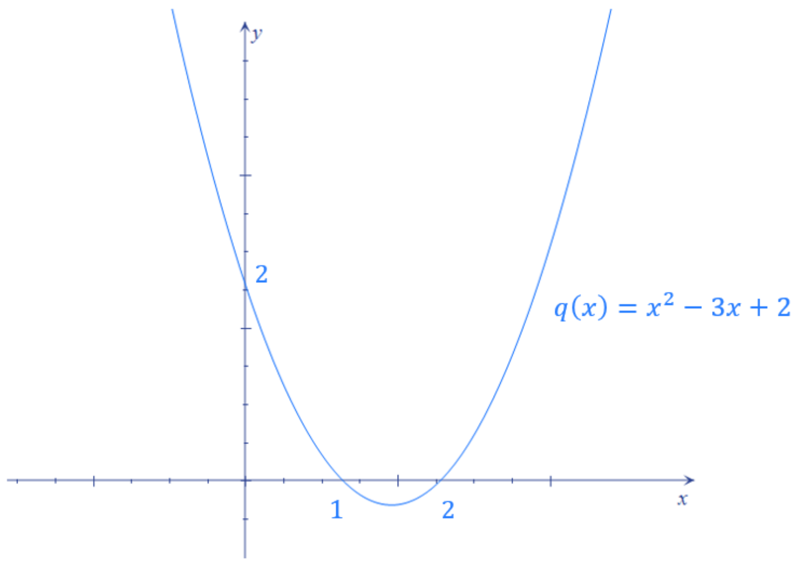
Ao se aplicar um **módulo na variável x**, o novo gráfico é obtido do seguinte modo:

- Para $x \geq 0$, o novo gráfico é **igual ao gráfico original**; e
- Para **x negativo**, o novo gráfico é um "**espelho**", **com relação ao eixo y**, do caso $x \geq 0$.

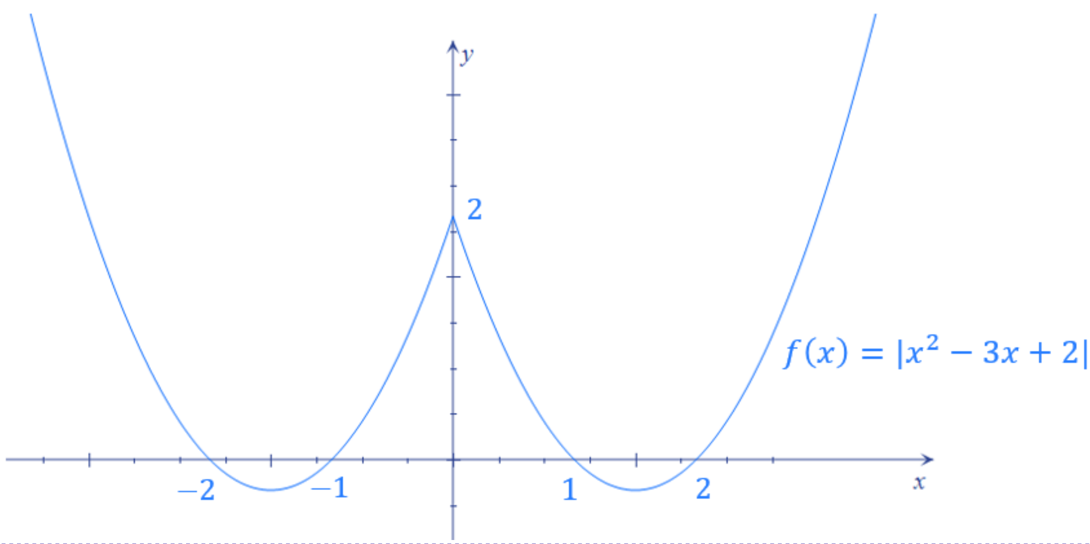
Vejamos um exemplo:

Construa o gráfico de $f(x) = |x|^2 - 3|x| + 2$.

As raízes da função quadrática $q(x) = x^2 - 3x + 2$ são **1** e **2**. Como o coeficiente a é maior do que zero, a concavidade da parábola é para cima, e função pode ser desenhada da seguinte forma:



Ao aplicar o **módulo na variável x**, temos a **função $f(x) = |x|^2 - 3|x| + 2$**. Note que, para os casos em que x é negativo, o novo gráfico é um "espelho" **com relação ao eixo y**.

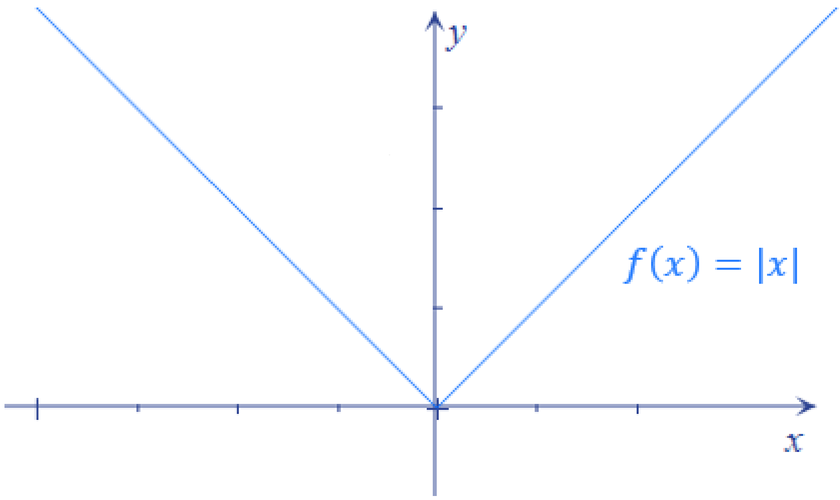


Translação vertical

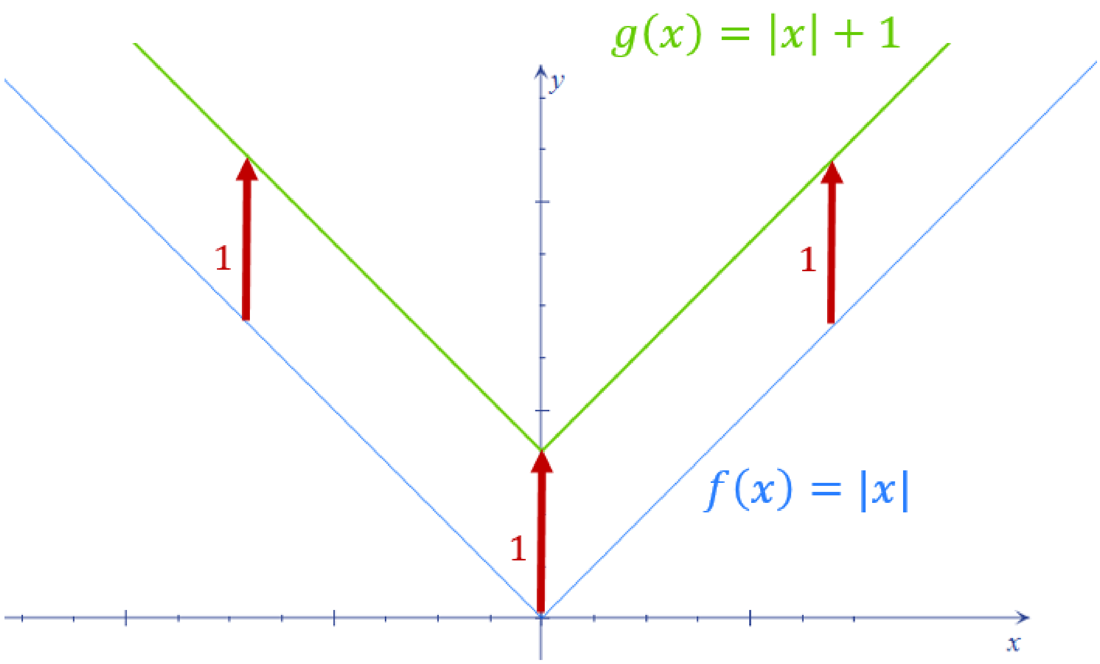
Ao **somar** ou **subtrair** uma constante **de uma função** qualquer, estamos transladando **verticalmente** **para cima** ou **para baixo** o gráfico dessa função. Vejamos dois exemplos para o caso da função modular.

Construa o gráfico de $g(x) = |x| + 1$.

Vimos que a função $f(x) = |x|$ é representada da seguinte forma:

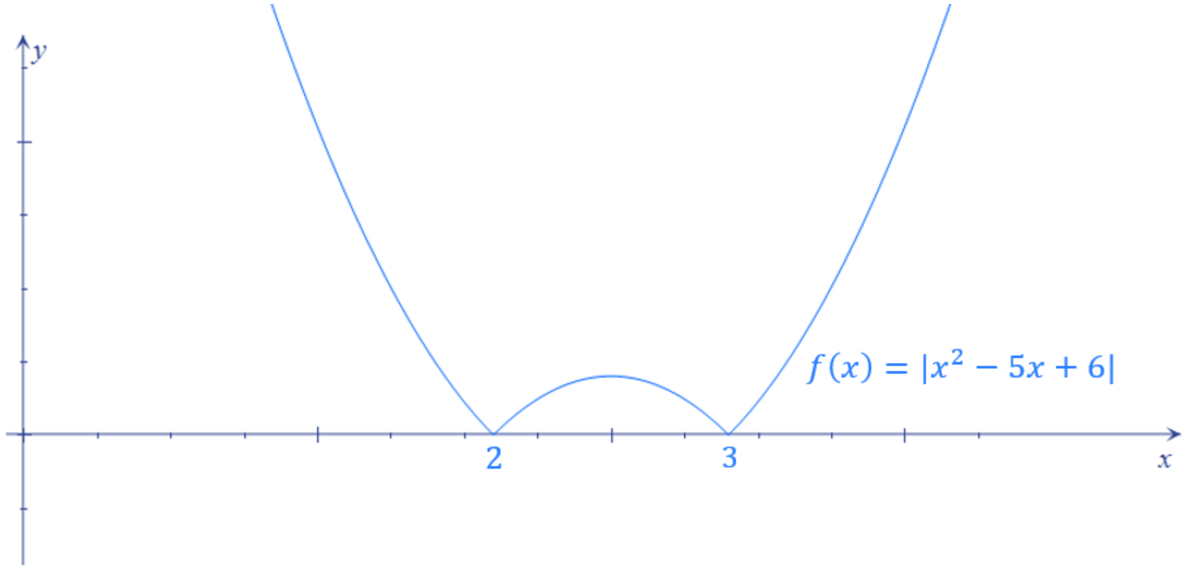


Ao somar uma unidade à função $f(x) = |x|$, obtemos a função $g(x) = |x| + 1$. Note que o gráfico é transladado verticalmente para cima em uma unidade.

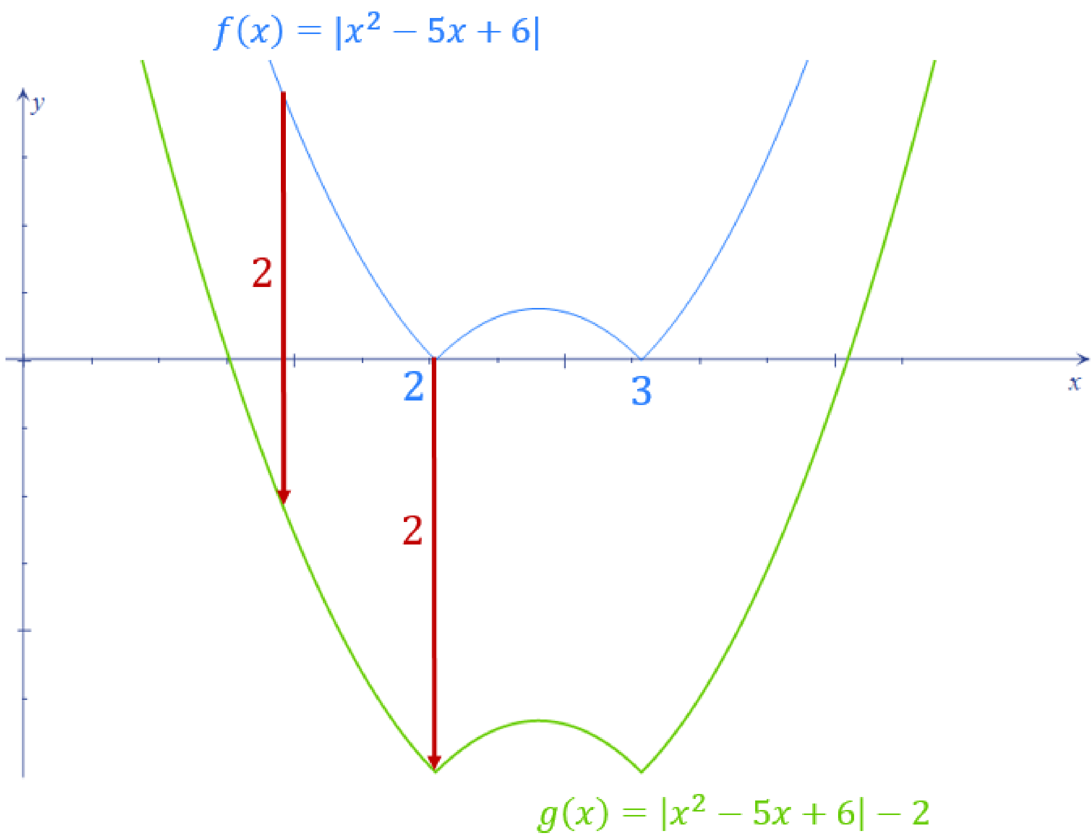


Construa o gráfico de $g(x) = |x^2 - 5x + 6| - 2$.

Vimos que a função $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ é representada da seguinte forma:



Ao **subtrair** duas unidades da função $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$, obtemos a função $g(x) = |x^2 - 5x + 6| - 2$. Note que o gráfico é transladado verticalmente **para baixo** em duas unidades.

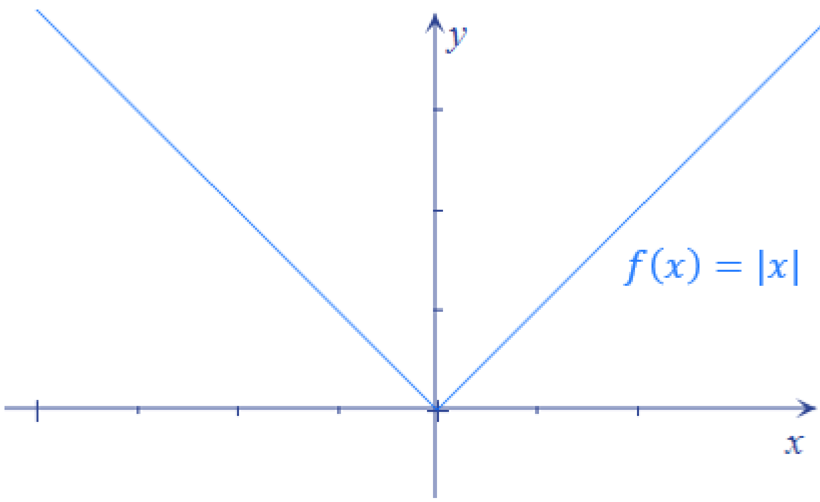


Translação horizontal

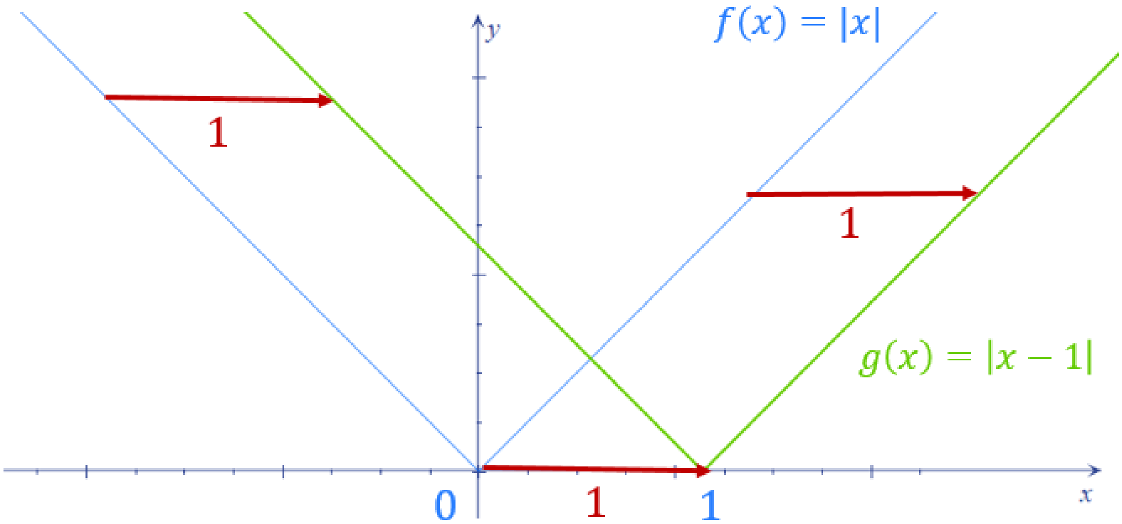
Ao **somar** ou **subtrair** uma constante **da variável x** de uma função qualquer, estamos transladando **horizontalmente** **para a esquerda** ou **para a direita** o gráfico dessa função. Vejamos dois exemplos para o caso da função modular:

Construa o gráfico de $g(x) = |x-1|$.

Vimos que a função $f(x) = |x|$ é representada da seguinte forma:

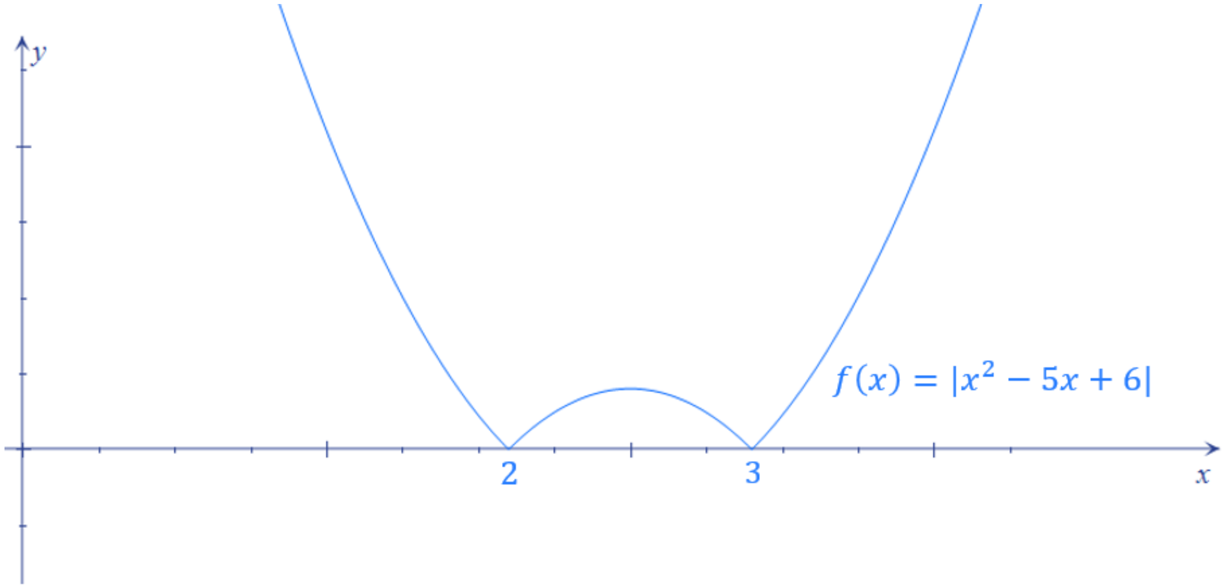


Ao **subtrair** uma unidade da variável x, obtemos $g(x) = |x-1|$. Note que o gráfico é transladado horizontalmente **para a direita** em uma unidade.

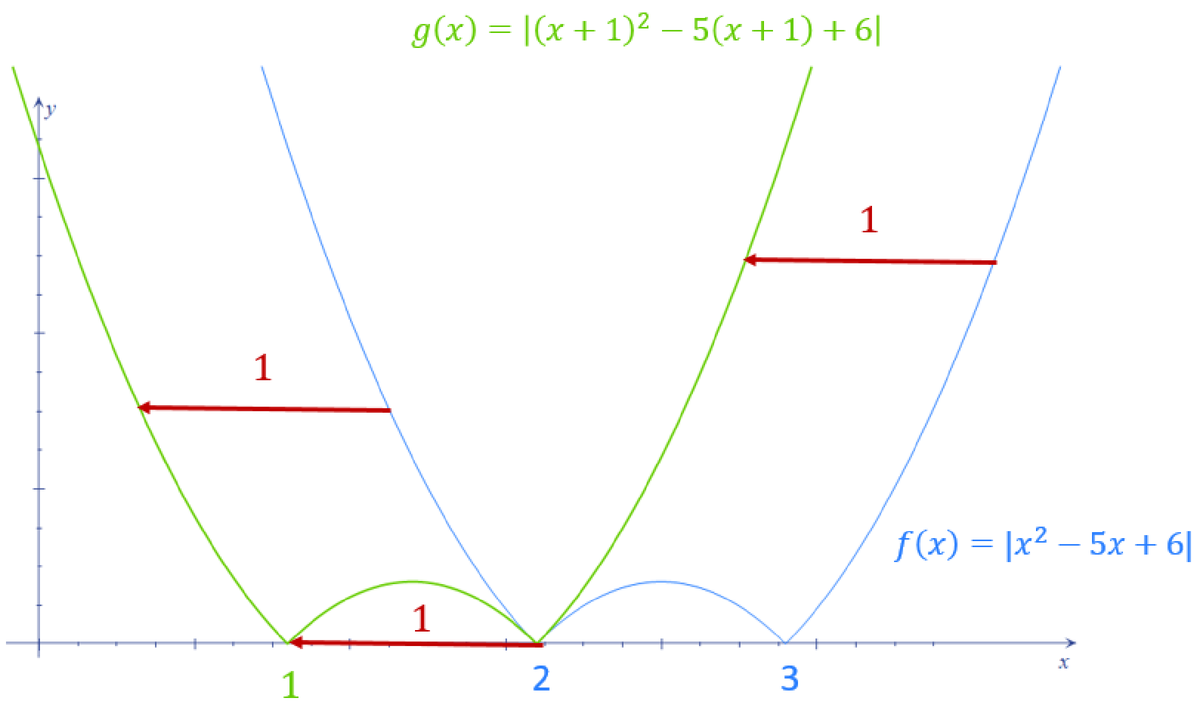


Construa o gráfico de $g(x) = \left|(x+1)^2 - 5(x+1) + 6\right|$.

Vimos que a função $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ é representada da seguinte forma:



Ao **somar** uma unidade da variável x, obtemos $g(x) = |(x+1)^2 - 5(x+1) + 6|$. Note que o gráfico é transladado horizontalmente **para a esquerda** em uma unidade.

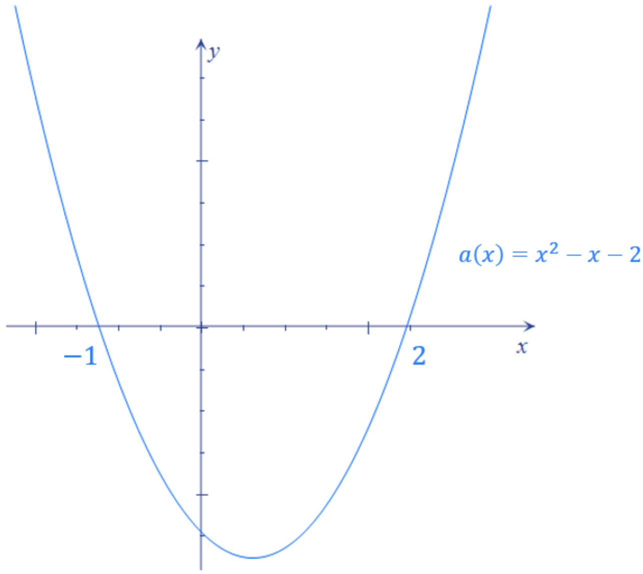


Outros exemplos

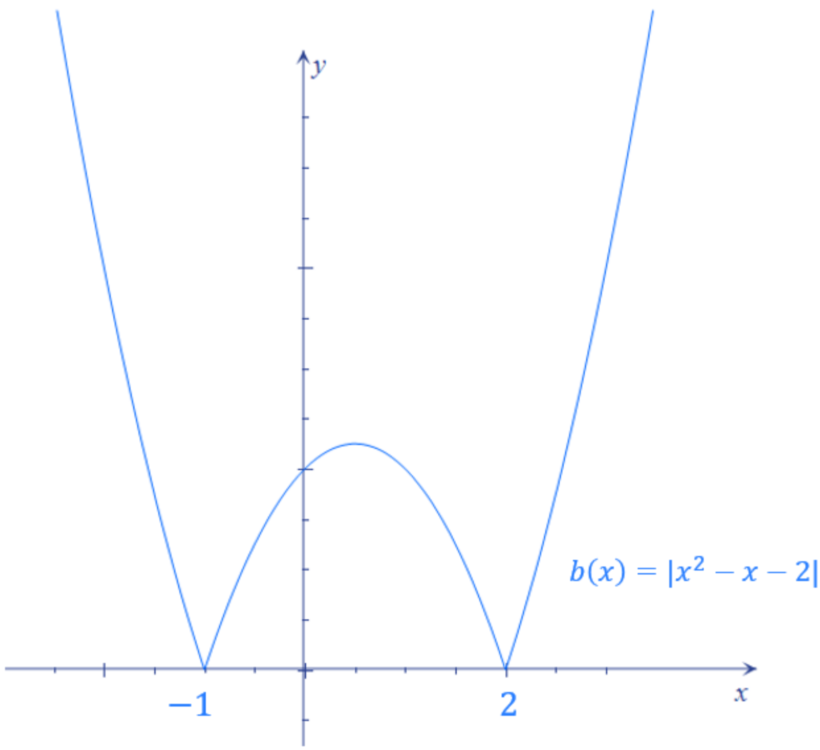
Vamos realizar mais alguns exemplos de construção de gráficos.

Construa o gráfico de $d(x) = -|x^2 - x - 2| + 1$

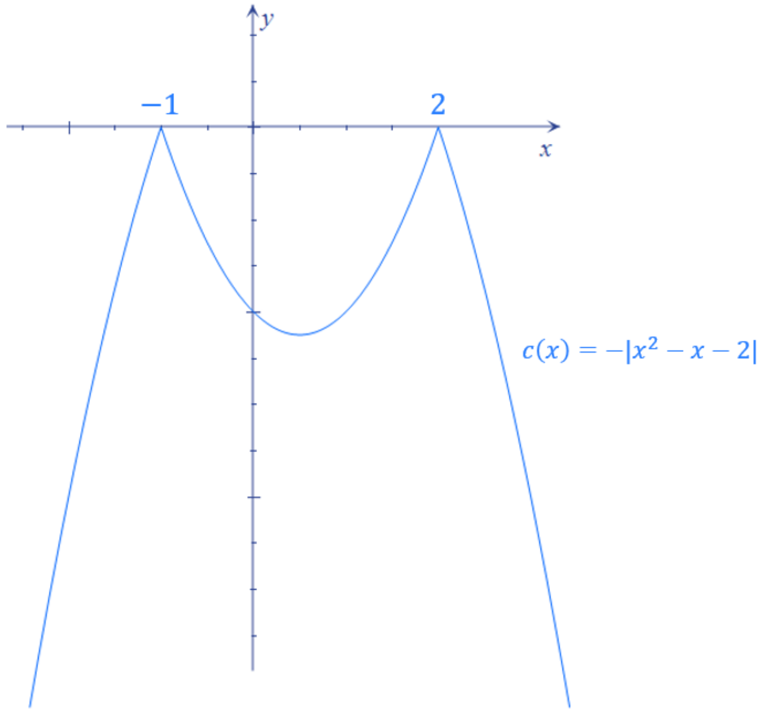
As raízes da função quadrática $a(x) = x^2 - x - 2$ são **−1** e **2**. Como o coeficiente a é maior do que zero, a concavidade da parábola é para cima, e função pode ser desenhada da seguinte forma:



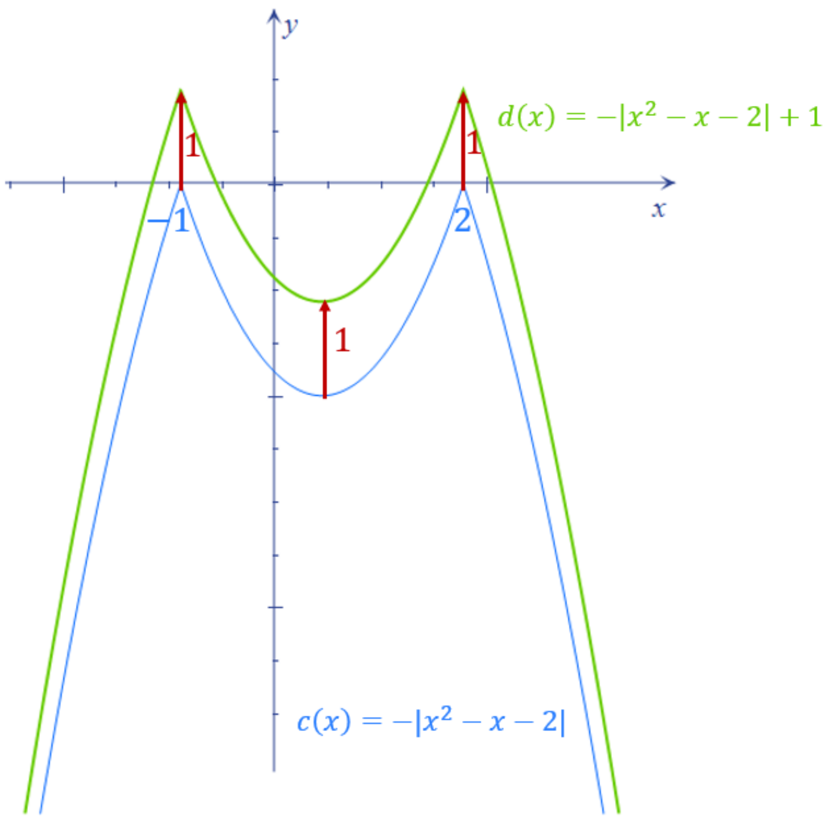
Ao aplicar o **módulo** na função $a(x) = x^2 - x - 2$, temos a **função $b(x) = |x^2 - x - 2|$**. Note que, para os casos em que a função original era negativa, o gráfico foi "espelhado" com relação ao eixo x.



Ao **multiplicar a função** $\boldsymbol{b(x) = |x^2 - x - 2|}$ **por** $\boldsymbol{-1}$**, devemos espelhar toda a função com relação ao eixo** $\boldsymbol{x}$. Nesse caso $\boldsymbol{c(x) = -|x^2 - x - 2|}$ pode ser representada da seguinte forma:

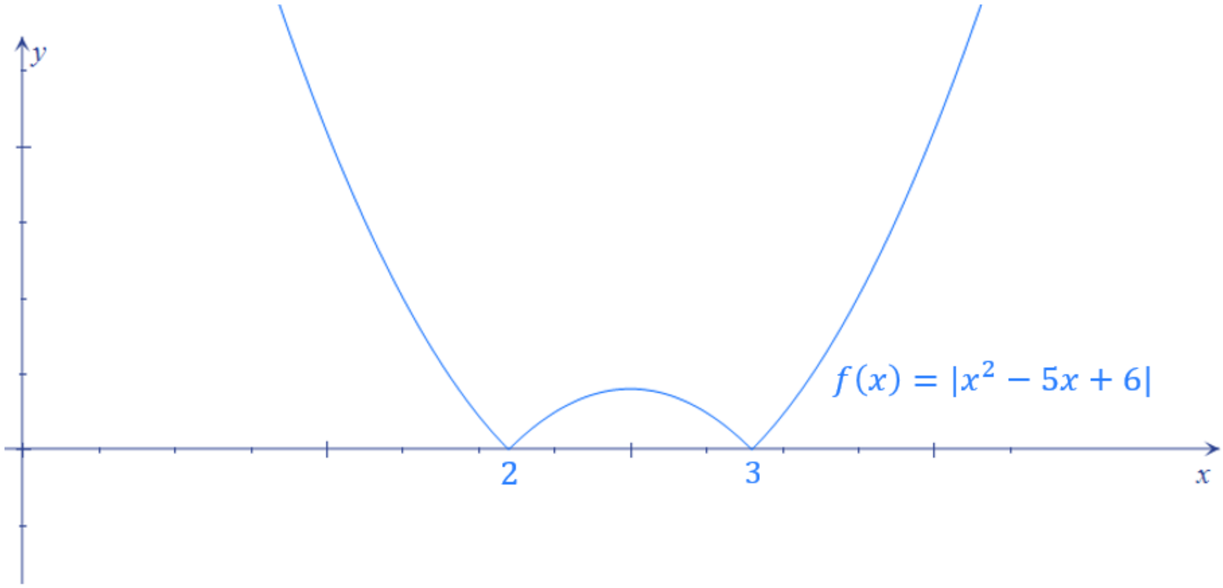


Ao **somar** uma unidade à função $\boldsymbol{c(x) = -|x^2 - x - 2|}$, obtemos a função $\boldsymbol{d(x) = -\left|x^2 + 3x + 2\right| + 1}$. Note que o gráfico é transladado verticalmente **para cima** em uma unidade.

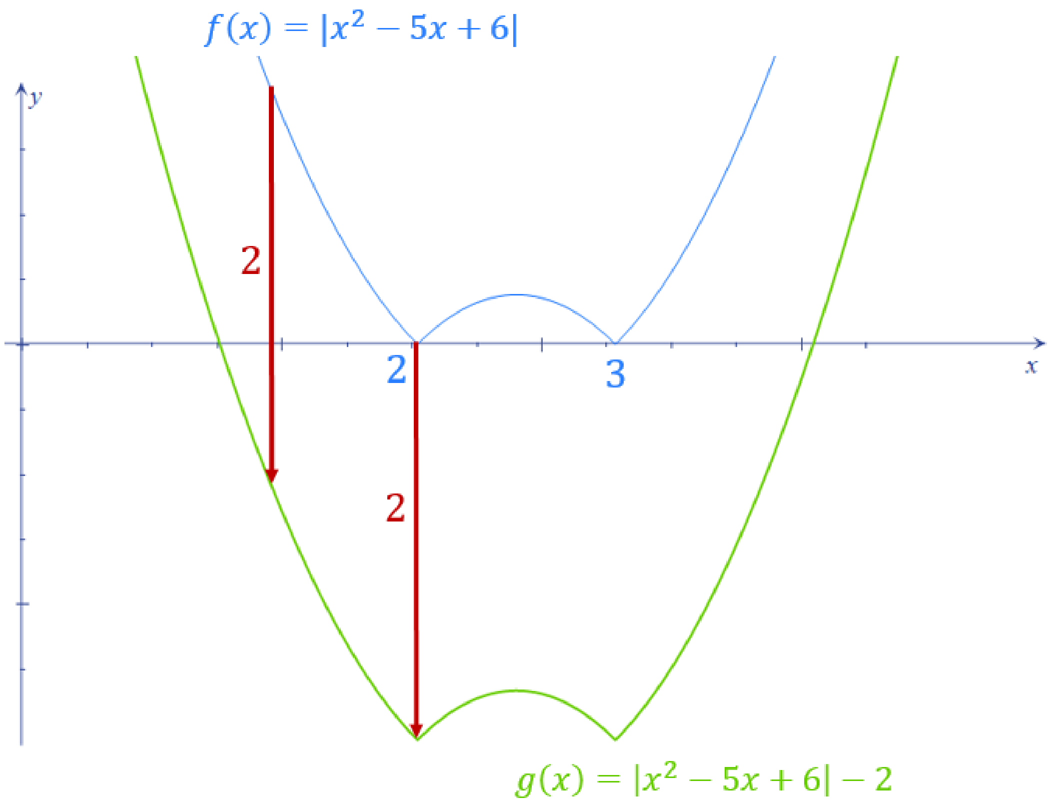


Construa o gráfico de $h(x) = \left||x^2 - 5x + 6| - 2\right|$.

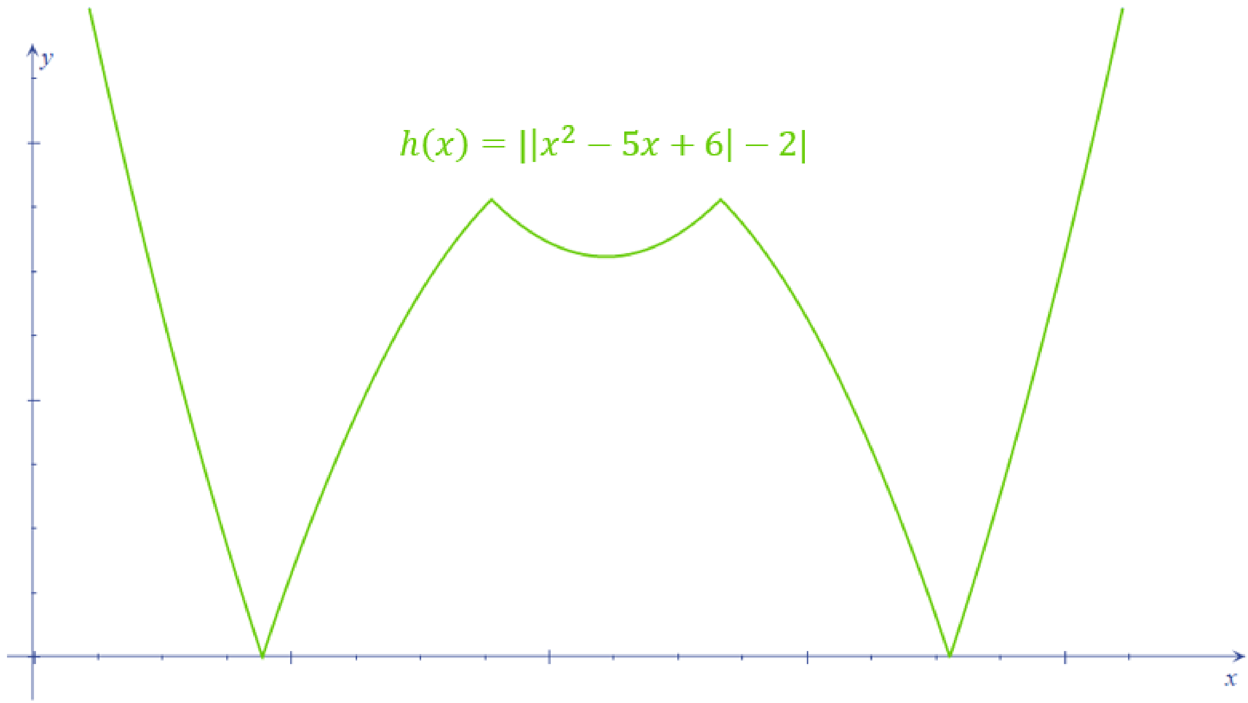
Vimos que a função $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ é representada da seguinte forma:



Vimos também que, ao **subtrair** duas unidades da função $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$, obtemos a função $g(x) = |x^2 - 5x + 6| - 2$. O gráfico é transladado verticalmente **para baixo** em duas unidades.



Para obter $\boldsymbol{h(x) = \left||x^2 - 5x + 6| - 2\right|}$, devemos aplicar o módulo em $\boldsymbol{g(x) = |x^2 - 5x + 6| - 2}$. Assim, para os casos em que $g(x)$ é negativa, devemos "espelhar" a função com relação ao eixo x. Ficamos com:



Para finalizar a teoria de funções modulares, vamos a um último exemplo.

Construa o gráfico de $f(x) = |x - 1| + |2x + 1|$

Pessoal, nesse tipo de problema devemos recorrer à **definição de módulo**:

- **Se o que está dentro das duas barras é positivo ou zero, mantenha o que está dentro das barras; ou**
- **Se o que está dentro das duas barras é negativo, insira um sinal de menos.**

Vamos verificar o sinal de $\boldsymbol{x - 1}$:

$$\boldsymbol{x - 1 \geq 0} \rightarrow \boldsymbol{x \geq 1}$$

$$\boldsymbol{x - 1 < 0} \rightarrow \boldsymbol{x < 1}$$

Agora verificar o sinal de $\boldsymbol{2x + 1}$:

$$\boldsymbol{2x + 1 \geq 0} \rightarrow 2x \geq -1 \rightarrow \boldsymbol{x \geq -\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{2x + 1 < 0} \rightarrow 2x < -1 \rightarrow \boldsymbol{x < -\frac{1}{2}}$$

Logo, devemos analisar a função $\boldsymbol{f(x) = |x - 1| + |2x + 1|}$ para três casos:

- $\boldsymbol{x} < -\frac{1}{2}$;
- $-\frac{1}{2} \leq \boldsymbol{x} < 1$; e
- $\boldsymbol{x} \geq 1$.

Caso 1: $\boldsymbol{x < -\frac{1}{2}}$

$$\boldsymbol{f(x)} = |\underbrace{\boldsymbol{x-1}}_{\textbf{Negativo}}| + |\underbrace{\boldsymbol{2x+1}}_{\textbf{Negativo}}|$$

$$= -(x-1) - (2x+1)$$

$$= -3x$$

Caso 2: $\boldsymbol{-\frac{1}{2} \leq x < 1}$

$$\boldsymbol{f(x)} = |\underbrace{\boldsymbol{x-1}}_{\textbf{Negativo}}| + |\underbrace{\boldsymbol{2x+1}}_{\textbf{Positivo}}|$$

$$= -(x-1) + (2x+1)$$

$$= x + 2$$

Caso 3: $\boldsymbol{x \geq 2}$

$$\boldsymbol{f(x)} = |\underbrace{\boldsymbol{x-1}}_{\textbf{Positivo}}| + |\underbrace{\boldsymbol{2x+1}}_{\textbf{Positivo}}|$$

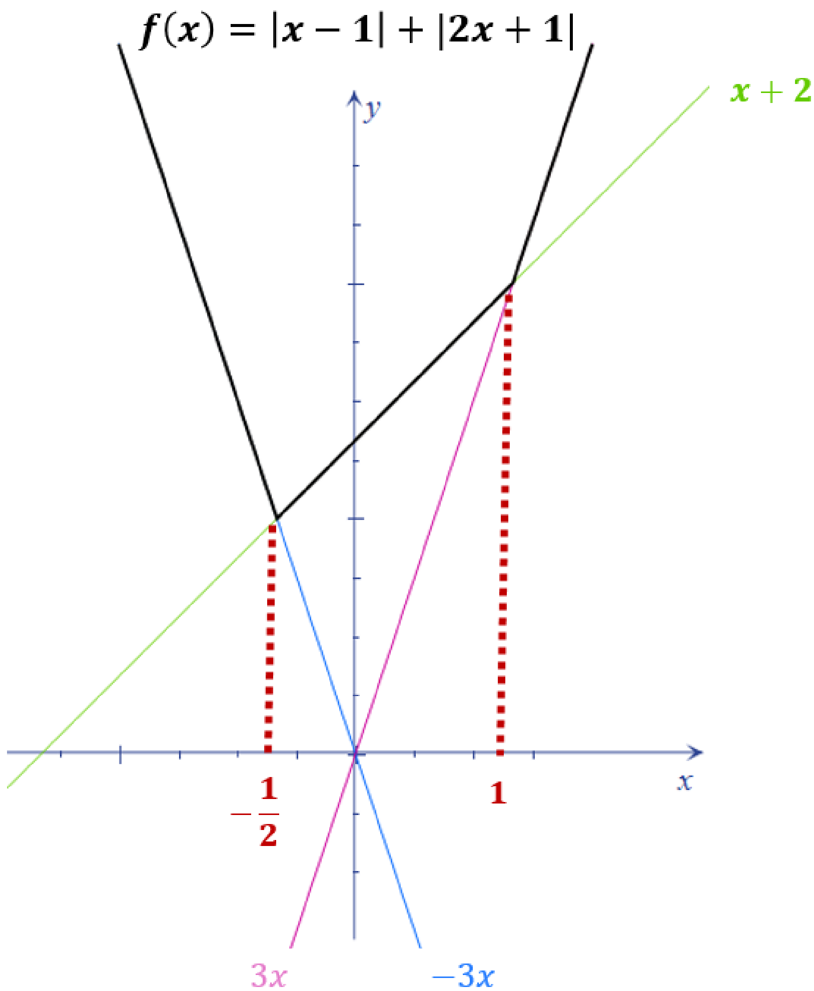
$$= (x-1) + (2x+1)$$

$$= 3x$$

Portanto, pela definição de módulo, a função $\boldsymbol{f(x) = |x-1| + |2x+1|}$ pode ser descrita assim:

$$f(x) = \begin{cases} -3x; & x < -\dfrac{1}{2} \\ x+2; & -\dfrac{1}{2} < x < 1 \\ 3x; & x \geq 1 \end{cases}$$

Para desenhar o gráfico de $f(x)$, devemos representar o gráfico de $\boldsymbol{-3x}$ **quando** $\boldsymbol{x < -\frac{1}{2}}$, o gráfico de $\boldsymbol{x+2}$ **para** $\boldsymbol{-\frac{1}{2} < x < 1}$, e o gráfico de $\boldsymbol{3x}$ **quando** $\boldsymbol{x \geq 1}$.



$f(x) = |x - 1| + |2x + 1|$
$x + 2$
y
x
$-\frac{1}{2}$
1
$3x$
$-3x$

QUESTÕES COMENTADAS - MULTIBANCAS

Módulo de um número real

Outras Bancas

1.(MS CONCURSOS/SEAD Passo Fundo/2016) Considere a função $f(x) = 1 - |x + 2|$.

O valor de $f(-3)$ é igual a:

a) –1

b) 0

c) 1

d) 2

Comentários:

Para obter o valor de $f(-3)$, basta substituir x por −3 na função apresentada.

$$f(x) = 1 - |x + 2|$$
$$f(-3) = 1 - |-3 + 2|$$
$$= 1 - |-3 + 2|$$
$$= 1 - |-1|$$
$$= 1 - 1$$
$$= 0$$

Gabarito: Letra B.

2.(ISAE/PM AM/2011) Se $f(x) = |x - 3| - |2 - x|$ então $f(-2)$ é igual a:

a) -1;

b) 0;

c) 1;

d) 2.

Comentários:

Para obter o valor de $f(-2)$, basta substituir x por −2 na função apresentada.

$$f(x) = |x - 3| - |2 - x|$$
$$f(-2) = |(-2) - 3| - |2 - (-2)|$$

$$= |-5| - |4|$$
$$= 5 - 4$$
$$= 1$$

Gabarito: Letra C.

3. (DIRENS/EEAR/2012) Seja a função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |2x^2 - 3|$. O valor de $1 + f(-1)$ é

a) −1

b) 0

c) 1

d) 2

Comentários:

Para obter o valor de $f(-1)$, basta substituir x por −1 na função apresentada.

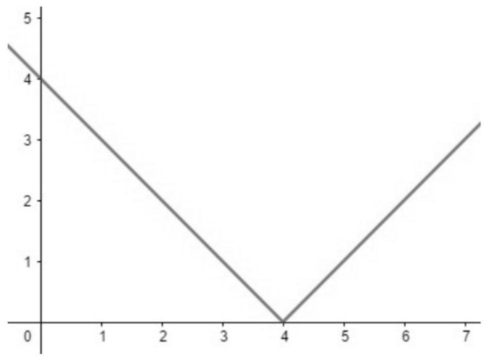
$$f(x) = |2x^2 - 3|$$
$$f(-1) = |2.(-1)^2 - 3|$$
$$= |2.1 - 3|$$
$$= |2 - 3|$$
$$= |-1|$$
$$= 1$$

Portanto, **o valor de $1 + f(-1)$ é**:

$$1 + f(-1)$$
$$= 1 + 1$$
$$= 2$$

Gabarito: Letra D.

4.(FAFIPA/Pref. Arapongas/2020) Considere a função real $f(x) = |x - 4|$ que também pode ser representada pelo gráfico abaixo e assinale a alternativa CORRETA.



a) $f(-1) = -5$.

b) $f(-3) + f(3) = 0$.

c) $f(-2) = f(10)$.

d) $f(4) = f(-4)$.

e) $f(0) = -4$.

Comentários:

Vamos avaliar cada alternativa e assinalar a correta, lembrando que a função é dada por:

$$f(x) = |x - 4|$$

a) $f(-1) = -5$. ERRADO.

$$f(-1) = |-1 - 4| = |-5| = 5$$

b) $f(-3) + f(3) = 0$. ERRADO.

$$\begin{gathered} f(-3) + f(3) \\ = |-3 - 4| + |3 - 4| \\ = |-7| + |-1| \\ = 7 + 1 \\ = 8 \end{gathered}$$

c) $f(-2) = f(10)$. CERTO. Este é o **gabarito**.

$$\begin{gathered} f(-2) = |-2 - 4| = |-6| = 6 \\ f(10) = |10 - 4| = |6| = 6 \end{gathered}$$

Logo, **é correto afirmar que $f(-2) = f(10)$**.

d) $f(4) = f(-4)$. ERRADO.

$$f(4) = |4 - 4| = |0| = 0$$

$$f(-4) = |-4 - 4| = |-8| = 8$$

Logo, **$f(4)$ é diferente de $f(-4)$.**

e) $f(0) = -4$. ERRADO.

$$f(0) = |0 - 4| = |-4| = 4$$

Gabarito: Letra C.

5.(Instituto AOCP/IBC/2013) Quando $x \leq 2$, então $|x - 2| + |3 - x|$ é igual a:

a) 5

b) $2x - 5$

c) 2

d) $x + 2$

e) $-2x + 5$

Comentários:

Para **determinar a soma quando $x \leq 2$**, devemos saber:

- Se $|x - 2|$ corresponde a $x - 2$ ou a $-(x - 2)$ **quando $x \leq 2$**; e
- Se $|3 - x|$ corresponde a $3 - x$ ou a $-(3 - x)$ **quando $x \leq 2$**.

Como podemos descrever $|x - 2|$?

- Se $x - 2$ é **positivo** ou **zero**, **mantenha o que está dentro das barras**; ou
- Se $x - 2$ é **negativo**, **insira um sinal de menos**.

De um modo mais formal, podemos dizer:

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2; & x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2); & x - 2 < 0 \end{cases}$$

Desenvolvendo um pouco mais, temos:

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2; & x \geq 2 \\ 2 - x; & x < 2 \end{cases}$$

Portanto, **para $x \leq 2$, temos que $|x - 2| = 2 - x$**. Observe quando ocorre a igualdade $x = 2$, tanto faz escrever $x - 2$ ou $2 - x$, pois nesse caso temos $x - 2 = 2 - x = 0$.

Agora, como podemos descrever $|3 - x|$?

- Se $3 - x$ é **positivo** ou **zero**, **mantenha o que está dentro das barras**; ou
- Se $3 - x$ é **negativo**, **insira um sinal de menos**.

De um modo mais formal, podemos dizer:

$$|3 - x| = \begin{cases} \mathbf{3 - x}; & \mathbf{3 - x \geq 0} \\ -(\mathbf{3 - x}); & \mathbf{3 - x < 0} \end{cases}$$

Desenvolvendo um pouco mais, temos:

$$|3 - x| = \begin{cases} \mathbf{3 - x}; & \mathbf{3 \geq x} \\ \mathbf{x - 3}; & \mathbf{3 < x} \end{cases}$$

De modo mais organizado, temos:

$$|3 - x| = \begin{cases} \mathbf{3 - x}; & \mathbf{x \leq 3} \\ \mathbf{x - 3}; & \mathbf{x > 3} \end{cases}$$

Portanto, **para $x \leq 2$, temos que $|3 - x| = 3 - x$**.

Voltando ao problema, queremos saber o valor de $|\mathbf{x - 2}| + |\mathbf{3 - x}|$ **para $x \leq 2$**.

$$|x - 2| + |3 - x|$$

$$= \mathbf{2 - x + 3 - x}$$

$$= -2x + 5$$

Gabarito: Letra E.

6.(CSC IFPA/IF PA/2019) Usando a definição de função modular, podemos concluir com relação à função $f\colon [0; 2] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = |x^2 - 2x| + |x - 1|$ que:

a) $x^2 + x + 1$ se $0 \leq x \leq 1$

b) $-x^2 - x + 1$ se $0 \leq x \leq 1$

c) $-x^2 - x + 1$ se $1 \leq x \leq 2$

d) $-x^2 + 3x + 1$ se $1 \leq x \leq 2$

e) $-x^2 + 3x + 1$ se $1 \leq x \leq 2$

Comentários:

Note que as respostas apresentam a soma requerida para dois intervalos distintos: $\mathbf{0 \leq x \leq 1}$ e $\mathbf{1 \leq x \leq 2}$. Logo, devemos saber, para os dois intervalos:

- Se $|x^2 - 2x|$ corresponde a $\mathbf{x^2 - 2x}$ ou a $-(x^2 - 2x)$; e
- Se $|x - 1|$ corresponde a $\mathbf{x - 1}$ ou a $-(x - 1)$.

Como podemos descrever $|x^2 - 2x|$?

- Se $x^2 - 2x$ é **positivo** ou **zero**, **mantenha o que está dentro das barras**; ou
- Se $x^2 - 2x$ é **negativo**, **insira um sinal de menos**.

Agora temos um problema: devemos determinar quando $x^2 - 2x$ é **positivo** ou **zero** e quando $x^2 - 2x$ é **negativo**. Para tanto, é necessário **encontrar as raízes da função quadrática**.

Para encontrar as raízes, poderíamos usar **fórmula de Bhaskara**. Ocorre que uma forma mais rápida para esse caso é colocar o x em evidência:

$$x^2 - 2x = 0$$

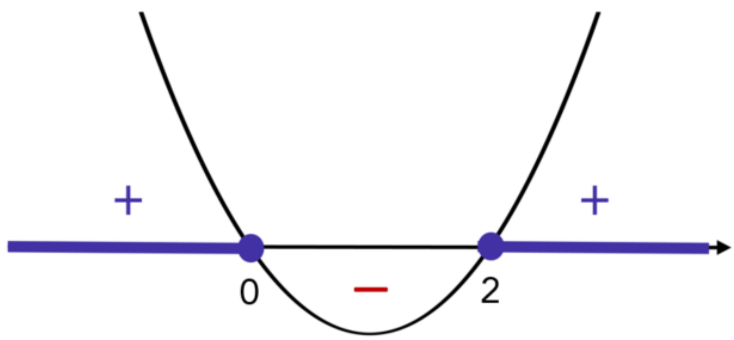
$$x(x - 2) = 0$$

Note que, para o produto ser igual a zero, um dos dois fatores deve ser zero. Portanto, as raízes são:

$$\boldsymbol{x = 0}$$

$$x - 2 = 0 \ \rightarrow \boldsymbol{x = 2}$$

Agora que temos as raízes, podemos descrever a parábola. Como o coeficiente $\boldsymbol{a}$ **é positivo**, a **concavidade** da parábola é **para cima**.



Pronto! Agora sabemos que:

- $x^2 - 2x$ é **positivo** ou **zero** e quando $\boldsymbol{x \geq 2}$ **ou** $\boldsymbol{x \leq 0}$;
- $x^2 - 2x$ é **negativo** quando $\boldsymbol{0 < x < 2}$.

Observe quando ocorre a igualdade $x = 0$ ou $x = 2$, tanto faz escrever $x^2 - 2x$ ou $-(x^2 - 2x)$, pois nesses casos temos $x^2 - 2x \ = -(x^2 - 2x) = 0$.

Logo, tanto para $\boldsymbol{0 \leq x \leq 1}$ quanto para $\boldsymbol{1 \leq x \leq 2}$, temos que:

$$|x^2 - 2x| = -(x^2 - 2x)$$

Agora, como podemos descrever $|x-1|$?

- Se $x-1$ é **positivo** ou **zero**, **mantenha o que está dentro das barras**; ou
- Se $x-1$ é **negativo**, **insira um sinal de menos**.

De um modo mais formal, podemos dizer:

$$|x-1| = \begin{cases} \boldsymbol{x-1}; & \boldsymbol{x-1 \geq 0} \\ \boldsymbol{-(x-1)}; & \boldsymbol{x-1 < 0} \end{cases}$$

Desenvolvendo um pouco mais, temos:

$$|x-1| = \begin{cases} \boldsymbol{x-1}; & \boldsymbol{x \geq 1} \\ \boldsymbol{1-x}; & \boldsymbol{x < 1} \end{cases}$$

Logo, para $\boldsymbol{0 \leq x \leq 1}$, temos:

$$|x-1| = \boldsymbol{1-x}$$

Já para $\boldsymbol{1 \leq x \leq 2}$, temos:

$$|x-1| = \boldsymbol{x-1}$$

Voltando ao problema, vamos calcular $\boldsymbol{|x^2 - 2x| + |x-1|}$ para $\boldsymbol{0 \leq x \leq 1}$ e para $\boldsymbol{1 \leq x \leq 2}$.

Caso 1: $\boldsymbol{0 \leq x \leq 1}$

$$|\underbrace{x^2 - 2x}_{\text{Negativo}}| + |\underbrace{x-1}_{\text{Negativo}}|$$

$$= -(x^2 - 2x) + (\boldsymbol{1-x})$$

$$= -x^2 + 2x + 1 - x$$

$$= -x^2 + x + 1$$

Caso 2: $\boldsymbol{1 \leq x \leq 2}$

$$|\underbrace{x^2 - 2x}_{\text{Negativo}}| + |\underbrace{x-1}_{\text{Positivo}}|$$

$$= -(x^2 - 2x) + (\boldsymbol{x-1})$$

$$= -x^2 + 2x + x - 1$$

$$= -x^2 + 3x - 1$$

Note, portanto, que **a função em questão é dada por $\boldsymbol{-x^2 + 3x + 1}$ se $\boldsymbol{1 \leq x \leq 2}$**.

Gabarito: Letra E.

7.(CESGRANRIO/TRANSPETRO/2011) Sendo $y = \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} + \frac{|d|}{d}$, onde a, b, c e d são números reais diferentes de zero, qual o número de valores possíveis para y?

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

Comentários:

Considere um número x, **diferente de zero**, pertencente ao conjunto dos números reais.

Note que $\frac{|x|}{x}$ pode assumir somente dois valores:

- **1**, se x for **maior do que zero**; ou
- $-$**1**, se x for **menor do que zero**.

Por exemplo, se $x = 5$, temos:

$$\frac{|x|}{x} = \frac{|5|}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Por outro lado, se $x = -5$, temos:

$$\frac{|x|}{x} = \frac{|-5|}{-5} = \frac{5}{-5} = -\frac{5}{5} = -1$$

Isso significa que:

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} \mathbf{1}; & \boldsymbol{x > 0} \\ \mathbf{-1}; & \boldsymbol{x < 0} \end{cases}$$

Note, portanto, que **as frações $\frac{|a|}{a}$, $\frac{|b|}{b}$, $\frac{|c|}{c}$ e $\frac{|d|}{d}$ podem assumir**, **cada uma delas, os valores 1 ou –1**.

- Se a, b, c, e d forem **todos positivos**, o valor de y é:

$$y = \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} = 4$$

- Se **somente um** dos números for **negativo**, temos:

$$y = \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} - \mathbf{1} = 2$$

- Se **somente dois** números forem **negativos**, temos:

$$y = \mathbf{1} + \mathbf{1} - \mathbf{1} - \mathbf{1} = 0$$

- Se **somente três** números forem **negativos**, temos:

$$y = \mathbf{1} - \mathbf{1} - \mathbf{1} - \mathbf{1} = -2$$

- Se **todos** os números a, b, c e d forem **negativos**, temos:

$$y = \mathbf{-1} - \mathbf{1} - \mathbf{1} - \mathbf{1} = -4$$

Note, portanto, que **y pode assumir 5 valores distintos**: 4, 2, 0, -2 e -4.

Gabarito: Letra E.

8.(INAZ do Pará/CRO RJ/2016) O valor da expressão $\sqrt{(x-3)^2}$, para $0 \leq x < 3$ será:

a) x−3

b) 3−x

c) x

d) 3

e) x−1

Comentários:

Sabemos que **a raiz do quadrado** de um número **é igual ao módulo** do número. Para o caso em questão, temos:

$$\sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$$

Pela definição de módulo, temos que:

- Se $x - 3$ é **positivo** ou **zero**, **mantenha o que está dentro das barras**; ou
- Se $x - 3$ é **negativo**, **insira um sinal de menos**.

De um modo mais formal, podemos dizer:

$$|x-3| = \begin{cases} \mathbf{x-3}; & \mathbf{x - 3 \geq 0} \\ \mathbf{-(x-3)}; & \mathbf{x - 3 < 0} \end{cases}$$

Desenvolvendo um pouco mais, temos:

$$|x-3| = \begin{cases} \boldsymbol{x-3}; & \boldsymbol{x \geq 3} \\ \boldsymbol{3-x}; & \boldsymbol{x < 3} \end{cases}$$

Note que a questão restringe o valor de x para o seguinte intervalo: $\boldsymbol{0 \leq x < 3}$. Nesse intervalo, **$\boldsymbol{x}$ é menor do que 3** e, portanto:

$$\sqrt{\boldsymbol{(x-3)^2}} = |x-3| = \boldsymbol{3-x}$$

Gabarito: Letra B.

9. (ESAF/Pref. RJ/2010) Considere $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ números reais. A única opção falsa é:

a) $|a+b| \leq |a| + |b|$

b) $|a| + |b| \geq |a-b|$

c) $|a-b| < |a| - |b|$

d) $|b-a| \geq |b| - |a|$

e) $|b+a| \leq |a| + |b|$

Comentários:

Pessoal, **sabemos que a banca ESAF não mais realiza concursos públicos**. Apesar disso, incluí essa questão no material pelo fato de ser a **única questão que cobra diretamente as propriedades do módulo**.

Primeiramente, vamos resolver a questão de uma forma mais prática, atribuindo valores. Na sequência, a questão será resolvida de um modo mais formal, para que possamos exercitar as propriedades aprendidas.

Resolução atribuindo valores

Na hora da prova, uma possível estratégia para resolver o problema seria atribuir valores para a e para b de modo que um número é positivo e o outro é negativo. Fazendo $a = 2$ e $b = -1$, vamos analisar cada alternativa.

a) $\boldsymbol{|a+b| \leq |a| + |b|}$

$$|2+(-1)| \leq |2| + |-1|$$

$$|1| \leq 2+1$$

$$1 \leq 3$$

Nenhuma contradição foi encontrada com $a = 2$ e $b = -1$, de modo que não se pode descartar essa alternativa.

b) $|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| \geq |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$

$$|2| + |-1| \geq |2 - (-1)|$$
$$2 + 1 \geq |3|$$
$$3 \geq 3$$

Nenhuma contradição foi encontrada com $a = 2$ e $b = -1$, de modo que não se pode descartar essa alternativa.

c) $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| < |\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}|$

$$|2 - (-1)| < |2| - |-1|$$
$$|3| < 2 - 1$$
$$3 < 1$$

Encontramos uma contradição, **pois é errado afirmar que 3 é menor do que 1**. Logo, **a afirmação é falsa**. O **gabarito**, portanto, é **letra C**.

d) $|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}| \geq |\boldsymbol{b}| - |\boldsymbol{a}|$

$$|(-1) - 2| \geq |-1| - |2|$$
$$|-3| \geq 1 - 2$$
$$3 \geq -1$$

Nenhuma contradição foi encontrada com $a = 2$ e $b = -1$, de modo que não se pode descartar essa alternativa.

e) $|\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$

$$|(-1) + 2| \leq |2| + |-1|$$
$$|1| \leq 2 + 1$$
$$1 \leq 3$$

Nenhuma contradição foi encontrada com $a = 2$ e $b = -1$, de modo que não se pode descartar essa alternativa.

Resolução formal

Nesse momento, vamos resolver a questão de um modo mais formal, exercitando as propriedades aprendidas.

a) $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$. **Verdadeiro**.

Vimos na teoria que o **módulo da soma** é **menor ou igual** à **soma dos módulos**.

Como $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$, temos que $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$.

b) $|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| \geq |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$. **Verdadeiro**.

Sabemos que $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$**.** Escrevendo de uma outra forma, podemos dizer:

$$|\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}| \geq |\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|$$

Fazendo $x = a$ e $y = -b$, temos:

$$|\boldsymbol{a}| + |-\boldsymbol{b}| \geq |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$$

Como $|-\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{b}|$, temos:

$$|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| \geq |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$$

c) $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| < |\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}|$. **Falso**. **Este é o gabarito**.

Vimos na teoria que o **módulo da diferença** é **maior ou igual** à **diferença dos módulos**.

Como $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \geq |\boldsymbol{x}| - |\boldsymbol{y}|$, temos que $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| \geq |\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}|$.

A alternativa erra ao trocar o sentido da desigualdade e também ao não considerar a possibilidade de que as expressões sejam iguais. O **gabarito**, portanto, é **letra C**.

d) $|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}| \geq |\boldsymbol{b}| - |\boldsymbol{a}|$. **Verdadeiro**.

Vimos na teoria que o **módulo da diferença** é **maior ou igual** à **diferença dos módulos**.

Como $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \geq |\boldsymbol{x}| - |\boldsymbol{y}|$, temos que $|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}| \geq |\boldsymbol{b}| - |\boldsymbol{a}|$.

e) $|\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$. **Verdadeiro**.

Vimos na teoria que o **módulo da soma** é **menor ou igual** à **soma dos módulos**. Logo:

$$|\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}| \leq |\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{a}|$$

A soma $|\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{a}|$ **é igual a** $|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$. Logo, ficamos com:

$$|\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$$

Gabarito: Letra C.

QUESTÕES COMENTADAS - MULTIBANCAS

Equações modulares

Outras Bancas

1.(IAUPE/Pref. Caetés/2018) No campo dos números reais, o conjunto verdade da equação $|3x-1|=4$ é:

a) $V=\{1\}$

b) $V=\{-1\}$

c) $V=\left\{-\frac{5}{3}\right\}$

d) $V=\left\{\frac{5}{3}\right\}$

e) $V=\left\{-1,\frac{5}{3}\right\}$

Comentários:

Temos uma equação modular em que **o módulo de $f(x)$ é igual a uma constante**. Nesse caso, devemos proceder do seguinte modo:

$$|f(x)|=k \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x)=k \\ \text{ou} \\ f(x)=-k \end{cases}$$

Logo:

$$|3x-1|=4 \rightarrow \begin{cases} 3x-1=4 \\ \text{ou} \\ 3x-1=-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x=5 \\ \text{ou} \\ 3x=-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{3} \\ \text{ou} \\ x=-1 \end{cases}$$

Portanto, o **conjunto verdade** (**conjunto solução**) é:

$$V=\left\{-1;\frac{5}{3}\right\}$$

Gabarito: Letra E.

2.(Instituto AOCP/IBC/2013) O conjunto solução da equação $|2x+3|=7$ é

a) $\{-2{,}5\}$

b) $\{2\}$

c) $\{-5\}$

d) $\{-5{,}2\}$

e) $\emptyset$

Comentários:

Temos uma equação modular em que **o módulo de $f(x)$ é igual a uma constante**. Nesse caso, devemos proceder do seguinte modo:

$$|f(x)| = k \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = k \\ \text{ou} \\ f(x) = -k \end{cases}$$

Logo:

$$|2x+3| = 7 \rightarrow \begin{cases} 2x+3 = 7 \\ \text{ou} \\ 2x+3 = -7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ \text{ou} \\ 2x = -10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = -5 \end{cases}$$

Portanto, o conjunto solução é:

$$S = \{-5; 2\}$$

Gabarito: Letra D.

3.(CONSEP/Pref. Ribamar Fiquene/2011) Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\left|\frac{x-1}{2}+\frac{1}{4}\right| = 1$ e assinale a alternativa correta.

a) x = 2/3 ou x = 0

b) x = 5/2 ou x = −3/2

c) x = - 2 ou x = 3

d) x = 0 ou x = −1

Comentários:

Temos uma equação modular em que **o módulo de $f(x)$ é igual a uma constante**. Nesse caso, devemos proceder do seguinte modo:

$$|f(x)| = k \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = k \\ \text{ou} \\ f(x) = -k \end{cases}$$

Logo:

$$\left|\frac{x-1}{2}+\frac{1}{4}\right|=1 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{2}+\dfrac{1}{4}=1 \\ \text{ou} \\ \dfrac{x-1}{2}+\dfrac{1}{4}=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{2}=1-\dfrac{1}{4} \\ \text{ou} \\ \dfrac{x-1}{2}=-1-\dfrac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{3}{4} \\ \text{ou} \\ \dfrac{x-1}{2}=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-1=\dfrac{3}{2} \\ \text{ou} \\ x-1=-\dfrac{5}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2}+1 \\ \text{ou} \\ x=-\dfrac{5}{2}+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ \text{ou} \\ x=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Logo, temos que **x = 5/2 ou x = −3/2**.

Gabarito: Letra B.

4.(DIRENS/EEAR/2018) Seja $f(x) = |\ 3x - 4\ |$ uma função. Sendo $a \neq b$ e $f(a) = f(b) = 6$, então o valor de a + b é igual a

a) 5/3

b) 8/3

c) 5

d) 3

Comentários:

Note que a e b são dois valores possíveis de x distintos que fazem com que $f(x)$ seja igual a 6.

Vamos encontrar a e b encontrando os valores que satisfazem a equação $f(x) = 6$.

$$|3x-4|=6 \rightarrow \begin{cases} 3x-4=6 \\ \text{ou} \\ 3x-4=-6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x=10 \\ \text{ou} \\ 3x=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{10}{3} \\ \text{ou} \\ x=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Logo, o valor de $a + b$ é:

$$\frac{10}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{3}$$

Gabarito: Letra B.

5.(CEV URCA/Pref. Brejo Santo/2019) A soma das raízes distintas da equação modular $|x^2 - 2x| = 1$ é

a) 3

b) 2

c) $2 + \sqrt{2}$

d) 4

e) $3 - \sqrt{2}$

Comentários:

Temos uma equação modular em que **o módulo de $f(x)$ é igual a uma constante**. Nesse caso, devemos proceder do seguinte modo:

$$|f(x)| = k \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = k \\ \text{ou} \\ f(x) = -k \end{cases}$$

Logo:

$$|x^2 - 2x| = 1 \;\rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 1 \\ \text{ou} \\ x^2 - 2x = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

Devemos encontrar as raízes das duas equações do segundo grau obtidas.

Primeira equação: $x^2 - 2x - 1 = 0$

Para encontrar as raízes, vamos utilizar a **fórmula de Bhaskara**. Temos:

$$a = 1$$

$$b = -2$$

$$c = -1$$

O **discriminante** é dado por:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-2)^2 - 4.1.(-1)$$

$$= 4 - (-4)$$

$$= 8$$

As **raízes** são:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{8}}{2.1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 \times 2}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$x_1 = 1 + \sqrt{2} \; ; \; x_2 = 1 - \sqrt{2}$$

Segunda equação: $\boldsymbol{x^2 - 2x + 1 = 0}$

Para encontrar as raízes, poderíamos utilizar a **fórmula de Bhaskara**. Note, porém, que

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

Logo, a equação $\boldsymbol{x^2 - 2x + 1 = 0}$ corresponde a:

$$(x-1)^2 = 0$$

Essa equação apresenta duas raízes iguais: $x_1 = x_2 = 1$.

Voltando ao problema original, temos:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 1 = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \text{ ou } x = 1 - \sqrt{2} \\ \text{ou} \\ x = 1 \end{cases}$$

Portanto, **a soma das raízes <u>distintas</u> da equação modular** em questão é:

$$\left(1 + \sqrt{2}\right) + \left(1 - \sqrt{2}\right) + 1$$

$$= 3$$

Gabarito: Letra A.

6.(DIRENS/EEAR/2018) Dada a equação $|x^2 - 2x - 4| = 4$, a soma dos elementos do conjunto solução é

a) 4

b) 6

c) 8

d) 10

Comentários:

Temos uma equação modular em que **o módulo de $f(x)$ é igual a uma constante**. Nesse caso, devemos proceder do seguinte modo:

$$|f(x)| = k \quad \leftrightarrow \begin{cases} f(x) = k \\ \text{ou} \\ f(x) = -k \end{cases}$$

Logo:

$$|x^2 - 2x - 4| = 4 \rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 4 = 4 \\ \text{ou} \\ x^2 - 2x - 4 = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 8 = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

Devemos encontrar as raízes das duas equações do segundo grau obtidas.

Primeira equação: $x^2 - 2x - 8 = 0$

Para encontrar as raízes, vamos utilizar a **fórmula de Bhaskara**. Temos:

$$a = 1$$

$$b = -2$$

$$c = -8$$

O **discriminante** é dado por:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-2)^2 - 4.1.(-8)$$

$$= 4 - (-32)$$

$$= 36$$

As **raízes** são:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2.1}$$

$$x = \frac{2 \pm 6}{2}$$

$$x = 1 \pm 3$$

$$x_1 = 4 \ ; \ x_2 = -2$$

Segunda equação: $x^2 - 2x = 0$

Para encontrar as raízes, poderíamos usar **fórmula de Bhaskara**. Ocorre que uma forma mais rápida para esse caso é colocar o x em evidência:

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

Note que, para o produto ser igual a zero, um dos dois fatores deve ser zero. Portanto, as raízes são:

$$\boldsymbol{x = 0}$$

$$x - 2 = 0 \ \rightarrow \boldsymbol{x = 2}$$

Voltando ao problema original, temos:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 8 = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \ \text{ ou } x = 4 \\ \text{ou} \\ x = 0 \text{ ou } x = 2 \end{cases}$$

O conjunto solução é dado por:

$$S = \{-2; 0; 2; 4\}$$

Portanto, **a soma dos elementos do conjunto solução** é:

$$-2 + 0 + 2 + 4$$

$$= 4$$

Gabarito: Letra A.

7.(FUNDATEC/ESE/2019) Analise a seguinte equação modular:

$$\boldsymbol{|4x - 3| = x}$$

A soma de suas soluções é:

a) 1.

b) 0.

c) 3/5.

d) −3/5.

e) 8/5.

Comentários:

Temos uma equação modular em que **o módulo de $f(x)$ é igual a $g(x)$**. Nesse caso, devemos proceder do seguinte modo:

$$|f(x)| = g(x) \;\leftrightarrow\; \begin{cases} f(x) = g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) = -g(x) \\ \textbf{e} \\ \boldsymbol{g(x) \geq 0} \end{cases}$$

Logo:

$$|4x-3| = x \;\rightarrow\; \begin{cases} 4x - 3 = x \\ \text{ou} \\ 4x - 3 = -(x) \\ \textbf{e} \\ \boldsymbol{x \geq 0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x - x = 3 \\ \text{ou} \\ 4x + x = 3 \\ \textbf{e} \\ \boldsymbol{x \geq 0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x = 3 \\ \text{ou} \\ 5x = 3 \\ \textbf{e} \\ \boldsymbol{x \geq 0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{3}{5} \\ \textbf{e} \\ \boldsymbol{x \geq 0} \end{cases}$$

Note que as duas soluções obtidas são válidas, pois satisfazem a condição $\boldsymbol{x \geq 0}$. Portanto, o conjunto solução é:

$$S = \left\{\frac{3}{5}; 1\right\}$$

Logo, a soma das soluções é:

$$\frac{3}{5} + 1 = \frac{3+5}{5} = \frac{8}{5}$$

Gabarito: Letra E.

8.(MS CONCURSOS/SEAD Passo Fundo/2016) Assinale a alternativa que contém a solução da equação $|x| = 4 + x$:

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \,/ -5 < x < -1\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 < x < 5\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \,/ -1 < x < 5\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} / -5 < x < -3\}$

Comentários:

Temos uma equação modular em que **o módulo de $f(x)$ é igual a $g(x)$**. Nesse caso, devemos proceder do seguinte modo:

$$|f(x)| = g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) = -g(x) \\ \mathbf{e} \\ \boldsymbol{g(x) \geq 0} \end{cases}$$

Logo:

$$|x| = 4 + x \rightarrow \begin{cases} x = 4 + x \\ \text{ou} \\ x = -(4 + x) \\ \mathbf{e} \\ \mathbf{4 + x \geq 0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = 4 \\ \text{ou} \\ x = -4 - x \\ \mathbf{e} \\ \boldsymbol{x \geq -4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = 4 \\ \text{ou} \\ 2x = -4 \\ \mathbf{e} \\ \boldsymbol{x \geq -4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = 4 \\ \text{ou} \\ x = -2 \\ \mathbf{e} \\ \boldsymbol{x \geq -4} \end{cases}$$

A equação $\mathbf{0 = 4}$ nos traz algo impossível, em que não há uma solução para x. Por outro lado, **$\boldsymbol{x = -2}$ é uma solução possível**, pois ela respeita a condição $\boldsymbol{x \geq -4}$.

Dentre as opções elencadas nas alternativas, a única que apresenta um intervalo que contém a solução para a equação é a **letra A**.

Gabarito: Letra A.

9.(FAUEL/IF PR/2015) O conjunto solução da equação $|x| = x - 5$ é igual a:

a) $S = \emptyset$.

b) $S = \{0\}$.

c) $S = \{5\}$.

d) $S = \{0, 1\}$.

e) $S = \{0, 5\}$.

Comentários:

Temos uma equação modular em que **o módulo de $f(x)$ é igual a $g(x)$**. Nesse caso, devemos proceder do seguinte modo:

$$|f(x)| = g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) = -g(x) \\ \mathbf{e} \\ \boldsymbol{g(x) \geq 0} \end{cases}$$

Logo:

$$|x| = x - 5 \rightarrow \begin{cases} x = x - 5 \\ \text{ou} \\ x = -(x-5) \\ \mathbf{e} \\ \boldsymbol{x - 5 \geq 0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = -5 \\ \text{ou} \\ x = -x + 5 \\ \mathbf{e} \\ \boldsymbol{x \geq 5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = -5 \\ \text{ou} \\ 2x = 5 \\ \mathbf{e} \\ \boldsymbol{x \geq 5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = -5 \\ \text{ou} \\ x = \frac{5}{2} \\ \mathbf{e} \\ \boldsymbol{x \geq 5} \end{cases}$$

A equação $\mathbf{0} = -\mathbf{5}$ nos traz algo impossível, em que não há uma solução para x. Além disso, $\boldsymbol{x = \frac{5}{2}}$ também não é viável, pois ela não respeita a condição $\boldsymbol{x \geq 5}$. Portanto, o conjunto solução é vazio:

$$S = \emptyset$$

Gabarito: Letra A.

10.(COPESE-UFT/Pref. Gurupi/2014) Encontre o conjunto solução para a seguinte equação modular: $\boldsymbol{|x|^2 + 2|x| - 15 = 0}$.

a) $\{3, -3\}$

b) $\{3, -5\}$

c) $\{-5, -3, 3\}$

d) $\{-5, -3, 3, 5\}$

Comentários:

Devemos encontrar o conjunto solução da equação $|x|^2 + 2|x| - 15 = 0$.

Ao realizar a substituição $y = |x|$, ficamos com:

$$y^2 + 2y - 15 = 0$$

Para encontrar as raízes, vamos utilizar a **fórmula de Bhaskara**. Temos:

$$a = 1$$

$$b = 2$$

$$c = -15$$

O **discriminante** é dado por:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (2)^2 - 4.1.(-15)$$

$$= 4 - (-60)$$

$$= 64$$

As **raízes** são:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2.1}$$

$$y = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

$$y = -1 \pm 4$$

$$\boldsymbol{y_1 = 3} \ ; \ \boldsymbol{y_2 = -5}$$

Voltando ao problema, temos que $y = |x|$. Logo:

- $|x| = \mathbf{3} \rightarrow \boldsymbol{x = 3}$ ou $\boldsymbol{x = -3}$.
- $|x| = \mathbf{-5} \rightarrow$ **Não há $\boldsymbol{x}$ que satisfaça essa igualdade**, **pois $\boldsymbol{|x| \geq 0}$**.

Portanto, o conjunto solução da equação $|x|^2 + 2|x| - 15 = 0$ é:

$$S = \{-3; 3\}$$

Esse conjunto solução está representado na **letra A**.

Gabarito: Letra A.

11.(FUNDEP/Pref. Ibirité/2016) O número de soluções reais da equação $|2x - 3| + 2 = |x + 4|$ é:

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) 3.

Comentários:

Devemos utilizar a **definição de módulo** para resolver esse problema.

Vamos verificar o sinal de $\boldsymbol{2x-3}$:

$$\boldsymbol{2x-3 \geq 0} \rightarrow 2x \geq 3 \rightarrow \boldsymbol{x \geq \frac{3}{2}}$$

$$\boldsymbol{2x-3 < 0} \rightarrow 2x < 3 \rightarrow \boldsymbol{x < \frac{3}{2}}$$

Agora vamos verificar o sinal de $\boldsymbol{x+4}$:

$$\boldsymbol{x+4 \geq 0} \rightarrow \boldsymbol{x \geq -4}$$

$$\boldsymbol{x+4 < 0} \rightarrow \boldsymbol{x < -4}$$

Logo, devemos analisar a equação $|\boldsymbol{2x-3}| + \boldsymbol{2} = |\boldsymbol{x+4}|$ para três casos:

- $\boldsymbol{x < -4}$
- $\boldsymbol{-4 \leq x < \frac{3}{2}}$; e
- $\boldsymbol{x \geq \frac{3}{2}}$.

Podemos inserir esses casos em uma tabela:

-4 $3/2$

2x – 3	Negativo	Negativo	Positivo
x + 4	Negativo	Positivo	Positivo

Caso 1: $\boldsymbol{x < -4}$

$$|\underbrace{\boldsymbol{2x-3}}_{\text{Negativo}}| + \boldsymbol{2} = |\underbrace{\boldsymbol{x+4}}_{\text{Negativo}}|$$

$$-(2x-3)+2 = -(x+4)$$

$$-2x+3+2 = -x-4$$

$$-2x+x = -4-3-2$$

$$-x = -9$$

$$x = 9$$

Note que essa solução para x **não é válida**, pois ela **não é menor do que −4**.

Caso 2: $\boldsymbol{-4 \leq x < \frac{3}{2}}$

$$|\underbrace{\mathbf{2x-3}}_{\text{Negativo}}|+\mathbf{2}=|\underbrace{\mathbf{x+4}}_{\text{Positivo}}|$$

$$-(2x-3)+2=x+4$$

$$-2x+3+2=x+4$$

$$-3x=4-3-2$$

$$-3x=-1$$

$$x=\frac{1}{3}$$

Note que essa solução para x é válida, pois ela **está compreendida no intervalo $-4 \leq x < \frac{3}{2}$.**

Caso 3: $x \geq \frac{3}{2}$

$$|\underbrace{\mathbf{2x-3}}_{\text{Positivo}}|+\mathbf{2}=|\underbrace{\mathbf{x+4}}_{\text{Positivo}}|$$

$$2x-3+2=x+4$$

$$2x-x=4+3-2$$

$$x=5$$

Note que essa solução para x é válida, pois ela **é maior do que $\frac{3}{2}$.**

Portanto, o conjunto solução da equação $|\mathbf{2x-3}|+\mathbf{2}=|\mathbf{x+4}|$ é:

$$S=\left\{\frac{1}{3};\ 5\right\}$$

Logo, **temos <u>duas</u> soluções reais para a equação**.

Gabarito: Letra C.

12.(FAFIPA/FA/2017) Resolva, no conjunto dos números reais, $|2x-5|-|x+3|=8$.

a) $S=\{-2\}$

b) $S=\{16\}$

c) Não admite solução real

d) $S=\{-2;\ 16\}$

Comentários:

Devemos utilizar a **definição de módulo** para resolver esse problema.

Vamos verificar o sinal de $\mathbf{2x-5}$:

$$\mathbf{2x-5 \geq 0} \rightarrow 2x \geq 5 \rightarrow \boldsymbol{x \geq \frac{5}{2}}$$

$$\mathbf{2x-5 < 0} \rightarrow 2x < 5 \rightarrow \boldsymbol{x < \frac{5}{2}}$$

Agora vamos verificar o sinal de $\mathbf{x+3}$:

$$\mathbf{x+3 \geq 0} \rightarrow \boldsymbol{x \geq -3}$$

$$\mathbf{x+3 < 0} \rightarrow \boldsymbol{x < -3}$$

Logo, devemos analisar a equação $|2x - 5| - |x + 3| = 8$ para três casos:

- $\boldsymbol{x < -3}$
- $\boldsymbol{-3 \leq x < \frac{5}{2}}$; e
- $\boldsymbol{x \geq \frac{5}{2}}$.

Podemos inserir esses casos em uma tabela:

−3 5/2

2x − 5	Negativo	Negativo	Positivo
x + 3	Negativo	Positivo	Positivo

Caso 1: $x < -3$

$$|\underbrace{\mathbf{2x-5}}_{\text{Negativo}}| - |\underbrace{\mathbf{x+3}}_{\text{Negativo}}| = 8$$

$$-(2x-5) - -(x+3) = 8$$

$$-2x + 5 + (x+3) = 8$$

$$-2x + x = 8 - 5 - 3$$

$$-x = 0$$

$$x = 0$$

Note que essa solução para x **não é válida**, pois ela **não é menor do que −3**.

Caso 2: $-3 \leq x < \frac{5}{2}$

$$|\underbrace{\mathbf{2x-5}}_{\text{Negativo}}| - |\underbrace{\mathbf{x+3}}_{\text{Positivo}}| = \mathbf{8}$$

$$-(2x-5)-(x+3)=8$$

$$-2x+5-x-3=8$$

$$-3x=8-5+3$$

$$-3x=6$$

$$x=-2$$

Note que essa solução para x é válida, pois ela **está compreendida no intervalo $-3 \leq x < \frac{5}{2}$.**

Caso 3: $x \geq \frac{5}{2}$

$$|\underbrace{\mathbf{2x-5}}_{\text{Positivo}}| - |\underbrace{\mathbf{x+3}}_{\text{Positivo}}| = \mathbf{8}$$

$$(2x-5)-(x+3)=8$$

$$2x-5-x-3=8$$

$$2x-x=8+5+3$$

$$x=16$$

Note que essa solução para x é válida, pois ela **é maior do que $\frac{5}{2}$.**

Portanto, o conjunto solução da equação $|2x - 5| - |x + 3| = 8$ é:

$$S=\{-2;\ 16\}$$

Gabarito: Letra D.

13.(CEV URCA/URCA/2019) O conjunto solução da equação $|x-2|+|x-3|=1$ é:

a) $\{2\}$

b) $\{3\}$

c) $\{2,3\}$

d) $[2,3]$

e) $[0,3]$

Comentários:

Devemos utilizar a **definição de módulo** para resolver esse problema.

Vamos verificar o sinal de $\boldsymbol{x-2}$:

$$\boldsymbol{x-2 \geq 0 \ \rightarrow \ x \geq 2}$$

$$\boldsymbol{x-2 < 0 \ \rightarrow \ x < 2}$$

Agora vamos verificar o sinal de $\boldsymbol{x-3}$:

$$\boldsymbol{x-3 \geq 0 \ \rightarrow x \geq 3}$$

$$\boldsymbol{x-3 < 0 \rightarrow x < 3}$$

Logo, devemos analisar a equação $\boldsymbol{|x-2|+|x-3|=1}$ para três casos:

- $\boldsymbol{x<2}$;
- $\boldsymbol{2 \leq x < 3}$; e
- $\boldsymbol{x \geq 3}$.

Podemos inserir esses casos em uma tabela:

		2		3	
x − 2	Negativo		Positivo		Positivo
x − 3	Negativo		Negativo		Positivo

Caso 1: $\boldsymbol{x < -2}$

$$|\underbrace{\boldsymbol{x-2}}_{\text{Negativo}}|+|\underbrace{\boldsymbol{x-3}}_{\text{Negativo}}| = \boldsymbol{2}$$

$$-(x-2)-(x-3)=1$$

$$-x+2-x+3=1$$

$$-2x=1-2-3$$

$$-2x=-4$$

$$x=2$$

Note que essa solução para x **não é válida**, pois ela **não está compreendida no intervalo** $\boldsymbol{x<2}$**.** Apesar disso, veremos que essa solução será incluída no próximo caso, em que $2 \leq x < 3$.

Caso 2: $2 \le x < 3$

$$|\underbrace{x-2}_{\text{Positivo}}| + |\underbrace{x-3}_{\text{Negativo}}| = 2$$

$$(x-2) - (x-3) = 1$$

$$x - 2 - x + 3 = 1$$

$$1 = 1$$

Observe que, quando $2 \le x < 3$, a equação modular é sempre verdadeira. Portanto, **todos os valores de x compreendidos no intervalo $2 \le x < 3$ são possíveis soluções**, **incluindo o caso $x = 2$**.

Caso 3: $x \ge 3$

$$|\underbrace{x-2}_{\text{Positivo}}| + |\underbrace{x-3}_{\text{Positivo}}| = 2$$

$$x - 2 + x - 3 = 1$$

$$2x = 1 + 2 + 3$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Logo, para $x \ge 3$, temos a solução $x = 3$.

Em resumo, obtivemos os seguintes valores para x que satisfazem a equação modular:

- $2 \le x < 3$, e
- $x = 3$.

Portanto, o conjunto solução **é o intervalo fechado entre 2 e 3**, isto é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / 2 \le x \le 3\} = [2, 3]$$

Gabarito: Letra D.

14.(DIRENS/EEAR/2016) Seja $f(x) = |x - 3|$ uma função. A soma dos valores de x para os quais a função assume o valor 2 é

a) 3

b) 4

c) 6

d) 7

Comentários:

A função $f(x)$ assume o valor 2 quando $f(x) = 2$. Portanto:

$$|x-3|=2$$

Logo:

$$|x-3|=2 \rightarrow \begin{cases} x-3=2 \\ \text{ou} \\ x-3=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=5 \\ \text{ou} \\ x=1 \end{cases}$$

A <u>soma dos valores de x</u> para os quais a função assume o valor 2 é:

$$5+1=6$$

Gabarito: Letra C.

15.(CSEP IFPI/IF PI/2019) Os valores de x que satisfazem a equação $f(x)=0$, onde $f(x)=|x|^2-|x|-6$ são números reais. A soma das raízes de $f(x)=0$ é:

a) −1.

b) 0.

c) 1.

d) 2.

e) 3.

Comentários:

As raízes de $f(x)=0$ correspondem aos valores de x que satisfazem a seguinte equação:

$$|x|^2-|x|-6=0$$

Ao realizar a substituição $y=|x|$, ficamos com:

$$y^2-y-6=0$$

Para encontrar as raízes, vamos utilizar a **fórmula de Bhaskara**. Temos:

$$a=1$$

$$b=-1$$

$$c=-6$$

O **discriminante** é dado por:

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$= (-1)^2 - 4.1.(-6)$$

$$= 1 - (-24)$$

$$= 25$$

As **raízes** são:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2.1}$$

$$y = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$\boldsymbol{y_1 = 3} \;;\; \boldsymbol{y_2 = -2}$$

Voltando ao problema, temos que $y = |x|$. Logo:

- $|x| = \mathbf{3} \rightarrow \boldsymbol{x = 3}$ ou $\boldsymbol{x = -3}$.
- $|x| = \mathbf{-2} \rightarrow$ **Não há $\boldsymbol{x}$ que satisfaça essa igualdade**, **pois $\boldsymbol{|x| \geq 0}$**.

Portanto, o conjunto solução da equação $\boldsymbol{|x|^2 - |x| - 6 = 0}$ é:

$$S = \{-3; 3\}$$

Logo, **a soma das raízes de $\boldsymbol{f(x) = 0}$** é:

$$3 + (-3) = 0$$

Gabarito: Letra B.

16.(MÉTODO/Pref. NB d'Oeste/2021) Determine as raízes da função modular abaixo.

$$\boldsymbol{f(x) = |x - 3| - 3}$$

a) $x = -3$

b) $x = -6$

c) $x = -6$ e $x = 6$

d) $x = 6$ e $x = 0$

Comentários:

Para obter as raízes da função modular, basta fazer $f(x) = 0$.

$$|x - 3| - 3 = 0$$

$$\rightarrow |x-3| = 3 \rightarrow \begin{cases} x-3=3 \\ \text{ou} \\ x-3=-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=6 \\ \text{ou} \\ x=0 \end{cases}$$

Portanto, as raízes da função $f(x)$ são $\boldsymbol{x = 6}$ e $\boldsymbol{x = 0}$.

Gabarito: Letra D.

17.(AOCP/Pref. Feira de Santana/2018) Dada a função modular $f(x) = |x - 3| - 5$, as raízes dessa função serão iguais a

a) – 2 e 8.

b) – 8 e 2.

c) – 2 e – 8.

d) 2 e 8.

e) – 8 e 8.

Comentários:

Para obter as raízes da função modular, basta fazer $f(x) = 0$.

$$|x-3| - 5 = 0$$

$$\rightarrow |x-3| = 5 \rightarrow \begin{cases} x-3=5 \\ \text{ou} \\ x-3=-5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=8 \\ \text{ou} \\ x=-2 \end{cases}$$

Portanto, **as raízes da função $f(x)$ são −2 e 8**.

Gabarito: Letra A.

18.(EDUCA PB/Pref. Várzea/2019) Dada a função $g(x) = |2x + 1| - 5$, a soma dos quadrados de suas raízes é:

a) 4

b) 9

c) 10

d) 12

e) 13

Comentários:

Para obter as raízes da função modular, basta fazer $g(x) = 0$.

$$|2x+1|-5=0$$

$$\rightarrow\ |2x+1|=5 \rightarrow \begin{cases} 2x+1=5 \\ \text{ou} \\ 2x+1=-5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x=5-1 \\ \text{ou} \\ 2x=-5-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x=4 \\ \text{ou} \\ 2x=-6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ \text{ou} \\ x=-3 \end{cases}$$

Portanto, **as raízes da função $g(x)$ são −3 e 2**. A **soma dos quadrados das raízes** é:

$$(-3)^2+2^2=9+4=13$$

Gabarito: Letra E.

19.(EDUCA PB/Pref. Cabedelo/2020) Considere as funções reais $f(x)=|x-3|$ e $g(x)=5$, e a equação $f(x)-g(x)=0$ de raízes a e b $(a>b)$. O valor do quociente entre a e b é igual a:

a) −4

b) −0,25

c) 4

d) 0,25

e) −2

Comentários:

Vamos obter os valores de a e de b, que são raízes da equação $f(x)-g(x)=0$.

$$f(x)-g(x)=0$$

$$|x-3|-5=0$$

$$\rightarrow\ |x-3|=5 \rightarrow \begin{cases} x-3=5 \\ \text{ou} \\ x-3=-5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=8 \\ \text{ou} \\ x=-2 \end{cases}$$

Como $a>b$, temos que $\boldsymbol{a=8}$ e $\boldsymbol{b=-2}$. O valor do **quociente entre a e b** é igual a:

$$\frac{a}{b}=\frac{8}{-2}=-4$$

Gabarito: Letra A.

20.(DES IFSUL/IF SUL/2010) A soma das abscissas dos pontos de intersecção das funções $f\,(x) = x$ e $g(x)\ = |\ x^2 - 1\ |$ é o número real "b" tal que

a) $b\ =\ -\sqrt{5}$

b) $b\ =\ 0$

c) $b\ =\ 1$

d) $b\ =\ \sqrt{5}$

Comentários:

A intersecção de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ **ocorre nos pontos em que $f(x) = g(x)$**.

Para obter o **valor das abcissas desses pontos** (isto é, o **valor de x desses pontos**), **basta resolver a equação $f(x) = g(x)$**. Temos:

$$f(x) = g(x)$$

$$x = |x^2 - 1|$$

$$|x^2 - 1| = x \rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = x \\ \text{ou} \\ x^2 - 1 = -(x) \\ \mathbf{e} \\ \boldsymbol{x \geq 0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 + x - 1 = 0 \\ \mathbf{e} \\ \boldsymbol{x \geq 0} \end{cases}$$

Devemos encontrar as raízes das duas equações do segundo grau obtidas.

Primeira equação: $x^2 - x - 1 = 0$

Para encontrar as raízes, vamos utilizar a **fórmula de Bhaskara**. Temos:

$$a = 1$$

$$b = -1$$

$$c = -1$$

O **discriminante** é dado por:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-1)^2 - 4.1.(-1)$$

$$= 1 - (-4)$$

$$= 5$$

As **raízes** são:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2.1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2};\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Segunda equação: $x^2 + x - 1 = 0$

Para encontrar as raízes, vamos utilizar a **fórmula de Bhaskara**. Temos:

$$a = 1$$

$$b = 1$$

$$c = -1$$

O **discriminante** é dado por:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (1)^2 - 4.1.(-1)$$

$$= 1 - (-4)$$

$$= 5$$

As **raízes** são:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2.1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2};\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

Voltando ao problema original, temos:

$$\begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 + x - 1 = 0 \\ \mathbf{e} \\ \boldsymbol{x \geq 0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ \mathbf{e} \\ \boldsymbol{x \geq 0} \end{cases}$$

Como devemos respeitar a condição de que $\boldsymbol{x \geq 0}$, os únicos valores de x possíveis são $\mathbf{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ e $\mathbf{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.

Portanto, **a soma das abscissas dos pontos de intersecção das funções** é:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{2}$$

$$= \sqrt{5}$$

Gabarito: Letra D.

21.(CEV URCA/URCA/2017) A soma das raízes da função $\boldsymbol{f(x) = |5x-2| + |x+\ 1| - 5}$ é igual a:

a) −1

b) −1/4

c) 0

d) 1

e) 1/2

Comentários:

Para obter as raízes da função, devemos fazer $\boldsymbol{f(x) = 0}$. Temos a seguinte equação:

$$|5x-2| + |x+\ 1| - 5 = 0$$

$$\boldsymbol{|5x-2| + |x+\ 1| = 5}$$

Vamos verificar o sinal de $\boldsymbol{5x-2}$:

$$\boldsymbol{5x - 2 \geq 0} \ \rightarrow \ 5x \geq 2 \ \rightarrow \ \boldsymbol{x \geq \frac{2}{5}}$$

$$\boldsymbol{5x - 2 < 0} \ \rightarrow 5x < 2 \ \rightarrow \ \boldsymbol{x < \frac{2}{5}}$$

Agora vamos verificar o sinal de $\boldsymbol{x+1}$:

$$\boldsymbol{x+1 \geq 0} \ \rightarrow \boldsymbol{x \geq -1}$$

$$\boldsymbol{x+1 < 0} \ \rightarrow \boldsymbol{x < -1}$$

Logo, devemos analisar a equação $|\boldsymbol{5x-2}| + |\boldsymbol{x+\ 1}| = \boldsymbol{5}$ para três casos:

- $\boldsymbol{x < -1}$
- $\boldsymbol{-1 \leq x < \frac{2}{5}}$; e
- $\boldsymbol{x \geq \frac{2}{5}}$.

Podemos inserir esses casos em uma tabela:

-1 $\quad$ $2/5$

5x – 2	Negativo	Negativo	Positivo
x + 1	Negativo	Positivo	Positivo

Caso 1: $\boldsymbol{x < -1}$

$$|\underbrace{\boldsymbol{5x-2}}_{\text{Negativo}}| + |\underbrace{\boldsymbol{x+1}}_{\text{Negativo}}| = \boldsymbol{5}$$

$$-(5x-2) - (x+1) = 5$$

$$-5x + 2 - x - 1 = 5$$

$$-5x - x = 5 - 2 + 1$$

$$-6x = 4$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

Note que essa solução para x **não é válida**, pois ela **não é menor do que −1**.

Caso 2: $\boldsymbol{-1 \leq x < \frac{2}{5}}$

$$|\underbrace{\boldsymbol{5x-2}}_{\text{Negativo}}| + |\underbrace{\boldsymbol{x+1}}_{\text{Positivo}}| = \boldsymbol{5}$$

$$-(5x-2) + (x+1) = 5$$

$$-5x + 2 + x + 1 = 5$$

$$-5x + x = 5 - 2 - 1$$

$$-4x = 2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Note que essa solução para x é válida, pois ela **está compreendida no intervalo $-1 \leq x < \frac{2}{5}$.**

Caso 3: $x \geq \frac{2}{5}$

$$|\underbrace{\mathbf{5x-2}}_{\text{Positivo}}| + |\underbrace{\mathbf{x+1}}_{\text{Positivo}}| = \mathbf{5}$$

$$(5x-2)+(x+1)=5$$

$$5x + x = 5 + 2 - 1$$

$$6x = 6$$

$$x = 1$$

Note que essa solução para x é válida, pois ela **é maior do que $\frac{2}{5}$.**

Portanto, o conjunto solução da equação $|\mathbf{5x-2}| + |\mathbf{x+\ 1}| = \mathbf{5}$ é:

$$S = \left\{-\frac{1}{2};\ 1\right\}$$

Logo, **a soma das raízes de $f(x)$ é**:

$$-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

Gabarito: Letra E.

Questões Comentadas - Multibancas

Inequações modulares

FGV

1.(FGV/CBM-RJ/2022) Considere a desigualdade $|3x - 2| < 10$.

O número de valores inteiros de x que satisfazem a desigualdade dada é

a) 4.

b) 5.

c) 6.

d) 7.

e) 8.

Comentários:

A inequação modular apresenta o caso em que **módulo de $f(x)$ é menor do que constante k**. Devemos utilizar a seguinte propriedade:

$$|f(x)| < k \leftrightarrow -k < f(x) < k$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -k \\ \textbf{e} \\ f(x) < k \end{cases}$$

Logo:

$$|3x - 2| < 10 \rightarrow -10 < 3x - 2 < 10 \rightarrow \begin{cases} 3x - 2 > -10 \\ \textbf{e} \\ 3x - 2 < 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x > -10 + 2 \\ \textbf{e} \\ 3x < 10 + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x > -8 \\ \textbf{e} \\ 3x < 12 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{8}{3} \\ \textbf{e} \\ x < \dfrac{12}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -2{,}66\ldots \\ \textbf{e} \\ x < 4 \end{cases}$$

Logo, devemos **obter os inteiros que estão entre −2,66... e 4**, **sem considerar os extremos do intervalo**. Portanto, os valores inteiros de x que satisfazem a desigualdade são:

$$-2; -1; 0; 1; 2; 3$$

Logo, **o número de valores inteiros de x que satisfazem a desigualdade dada é 6**.

Gabarito: Letra C.

2.(FGV/SEAD-AP/2022) O número de valores inteiros de x que satisfazem a desigualdade $|3x| < 4\pi$ é

a) 9.

b) 8.

c) 7.

d) 6.

e) 5.

Comentários:

Temos o caso em que **módulo de $f(x)$ é menor do que uma constante k**. Logo, devemos utilizar a seguinte propriedade:

$$|f(x)| < k \leftrightarrow -k < f(x) < k$$

Para o caso em questão, $f(x) = 3x$ e $k = 4\pi$. Logo:

$$|3x| < 4\pi \leftrightarrow -4\pi < 3x < 4\pi$$

Dividindo a desigualdade por 3, temos:

$$-\frac{4\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$$

$$-4 \times \frac{\pi}{3} < x < 4 \times \frac{\pi}{3}$$

Sabemos que o valor aproximado de π é 3,14. Logo, **$\frac{\pi}{3}$ é um pouco maior do que 1** e, portanto:

- $4 \times \frac{\pi}{3}$ é um pouco maior do que 4; e
- $-4 \times \frac{\pi}{3}$ é um pouco menor do que -4.

Logo, os números inteiros que satisfazem a desigualdade são:

$$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

Portanto, o número de valores inteiros de x que satisfazem a desigualdade é 9.

Gabarito: Letra A.

3.(FGV/Pref. Paulínia/2021) A soma dos valores inteiros pares de x que satisfazem $|x+2| < 4\pi$ é:

a) −26.

b) −12.

c) 0.

d) 14.

e) 22.

Comentários:

A inequação modular apresenta o caso em que **módulo de $f(x)$ é menor do que constante k**. Devemos utilizar a seguinte propriedade:

$$|f(x)| < k \leftrightarrow -k < f(x) < k$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -k \\ \textbf{e} \\ f(x) < k \end{cases}$$

Logo:

$$|x+2| < 4\pi \rightarrow \ -4\pi < x+2 < 4\pi \rightarrow \begin{cases} x+2 > -4\pi \\ \textbf{e} \\ x+2 < 4\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -4\pi - 2 \\ \textbf{e} \\ x < 4\pi - 2 \end{cases}$$

O valor aproximado de π é 3,14. Logo:

$$\begin{cases} x > -12{,}56 - 2 \\ \textbf{e} \\ x < 12{,}56 - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > \mathbf{-14,56} \\ \textbf{e} \\ x < \mathbf{10,56} \end{cases}$$

Os **inteiros pares** de x que estão **entre $\mathbf{-14,56}$** e $\mathbf{10,56}$ são:

$$-14;\ -12;\ -10;\ -8; -6;\ -4;\ -2;\ 0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10$$

Ao somar os possíveis valores de x, os valores entre -10 e 10 se anulam, restando a seguinte soma:

$$(-14) + (-12)$$

$$= -26$$

Gabarito: Letra A.

Cebraspe

4.(CESPE/Pref. São Luís/2017) Se $x \geq 0$ representa a quantidade de quilômetros percorridos por um veículo em determinado dia, então:

• $f(x) = \frac{x}{12}$ representa a quantidade de litros de combustível consumido pelo veículo para percorrer x quilômetros;

• $g(x) = 60 - \frac{x}{12}$ representa a quantidade de litros de combustível que restam no tanque do veículo depois de percorridos x quilômetros.

Considerando as funções $f(x)$ e $g(x)$ definidas, se x é tal que $|f(x) - g(x)| \leq 5$, então

a) x > 450.

b) x < 270.

c) 270 ≤ x < 330.

d) 330 ≤ x ≤ 390.

e) 390 < x ≤ 450.

Comentários:

Devemos obter a solução da inequação $|f(x) - g(x)| \leq 5$.

$$|f(x) - g(x)| \leq 5$$

$$\left|\frac{x}{12} - \left(60 - \frac{x}{12}\right)\right| \leq 5$$

$$\left|\frac{x}{12} + \frac{x}{12} - 60\right| \leq 5$$

$$\left|\frac{x}{6} - 60\right| \leq 5$$

Devemos agora aplicar a propriedade "**módulo de $f(x)$ menor ou igual a uma constante**".

$$\left|\frac{x}{6} - 60\right| \leq 5 \rightarrow -5 \leq \frac{x}{6} - 60 \leq 5 \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{6} - 60 \geq -5 \\ \textbf{e} \\ \frac{x}{6} - 60 \leq 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{6} \geq 55 \\ \textbf{e} \\ \frac{x}{6} \leq 65 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 330 \\ \textbf{e} \\ x \leq 390 \end{cases}$$

Logo, temos que $330 \leq x \leq 390$.

Gabarito: Letra D.

5.(CESPE/IFF/2018) O conjunto dos números reais x para os quais $6 < |2x - 6| \leq 10$ é

a) [2, 0) ∪ (6, 8].

b) (∞, 0) ∪ (6, + ∞).

c) (∞, 2] ∪ (6, 8].

d) [2, 8].

e) (6, + ∞).

Comentários:

Note que o problema apresenta duas inequações simultâneas:

$$|2x - 6| > 6 \textbf{ e } |2x - 6| \leq 10$$

O **conjunto solução** que queremos obter **deve respeitar as duas inequações ao mesmo tempo**.

Primeira inequação: $|2x - 6| > 6$

Temos o caso em que **módulo de $\boldsymbol{f(x)}$ é maior do que uma constante $\boldsymbol{k}$**. Logo, devemos utilizar a seguinte propriedade:

$$|\boldsymbol{f(x)}| > \boldsymbol{k} \leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{f(x) < -k} \\ \textbf{ou} \\ \boldsymbol{f(x) > k} \end{cases}$$

Aplicando a propriedade para a inequação do problema, temos:

$$|2x - 6| > 6 \ \rightarrow \begin{cases} 2x - 6 < -6 \\ \textbf{ou} \\ 2x - 6 > 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x < 0 \\ \textbf{ou} \\ 2x > 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \textbf{ou} \\ x > 6 \end{cases}$$

Portanto, o conjunto solução da primeira inequação é:

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x < 0 \textbf{ ou } x > 6\}$$

Segunda inequação: $|2x - 6| \leq 10$

Temos o caso em que **módulo de $\boldsymbol{f(x)}$ é menor <u>ou igual</u> a uma constante $\boldsymbol{k}$**. Logo, devemos utilizar a seguinte propriedade:

$$|f(x)| \leq k \quad \leftrightarrow \quad -k \leq f(x) \leq k$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq -k \\ \textbf{e} \\ f(x) \leq k \end{cases}$$

Aplicando a propriedade para a inequação do problema, temos:

$$|2x-6| \leq 10 \ \rightarrow -10 \leq 2x-6 \leq 10 \rightarrow \begin{cases} 2x-6 \geq -10 \\ \quad\quad \mathbf{e} \\ \ 2x-6 \leq 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x \geq -4 \\ \quad \mathbf{e} \\ 2x \leq 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \quad \mathbf{e} \\ \ x \leq 8 \end{cases}$$

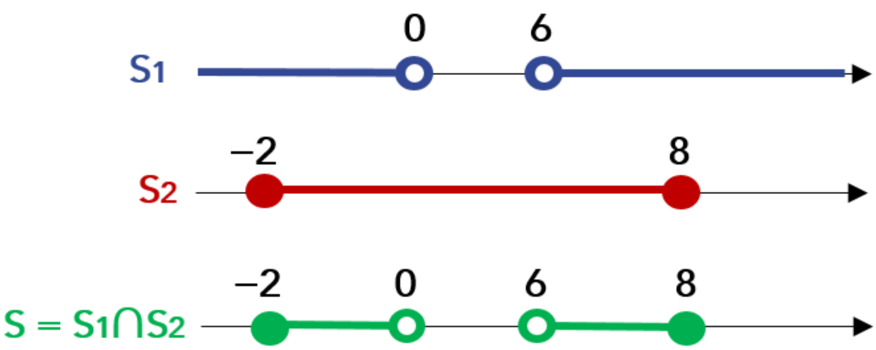
Portanto, o conjunto solução da segunda inequação é:

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq -2 \ \mathbf{e} \ x \leq 8\} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ -2 \leq x \leq 8\}$$

Solução da inequação modular: $6 < |2x-6| \leq 10$

A solução da inequação modular $\mathbf{6 < |2x-6| \leq 10}$ é a **intersecção** das soluções de $\mathbf{|2x-6| > 6}$ com $\mathbf{|2x-6| \leq 10}$:

$$S = S_1 \cap S_2$$



Portanto, o conjunto solução da inequação $\mathbf{6 < |2x-6| \leq 10}$ é:

$$S = \{x \in \mathbb{R}/-2 \leq x < 0 \ \mathbf{ou} \ 6 < x \leq 8\} = [2,0) \cup (6,8]$$

Gabarito: Letra A.

Vunesp

6.(VUNESP/UNESP/2012) No conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, o conjunto solução S da inequação modular $|x|.|x-5| \geq 6$ é:

a) $\mathrm{S} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}/-1 \leq \mathrm{x} \leq 6\}$.

b) $\mathrm{S} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}/\mathrm{x} \leq -1 \text{ ou } 2 \leq \mathrm{x} \leq 3\}$.

c) $\mathrm{S} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}/\mathrm{x} \leq -1 \text{ ou } 2 \leq \mathrm{x} \leq 3 \text{ ou } \mathrm{x} \geq 6\}$.

d) $S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3\}$.

e) $S = \mathbb{R}$.

Comentários:

Sabemos que o **produto dos módulos** de dois números é igual ao **módulo do produto**. Essa propriedade costuma ser descrita da seguinte forma:

$$|x| \times |y| = |xy|$$

Note, portanto, que a inequação modular $|x| \times |x-5| \geq 6$ pode ser descrita assim:

$$|x \times (x-5)| \geq 6$$

$$|x^2 - 5x| \geq 6$$

Temos o caso em que **módulo de $f(x)$ é maior <u>ou igual</u> a uma constante**. Devemos, portanto, utilizar a seguinte propriedade:

$$|f(x)| \geq k \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq -k \\ \textbf{ou} \\ f(x) \geq k \end{cases}$$

Aplicando a propriedade para a inequação do problema, temos:

$$|x^2 - 5x| \geq 6 \rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x \leq -6 \\ \textbf{ou} \\ x^2 - 5x \geq 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 \leq 0 \\ \textbf{ou} \\ x^2 - 5x - 6 \geq 0 \end{cases}$$

Pessoal, a parte da resolução que está relacionada a módulo acaba por aqui. Agora, devemos encontrar o **conjunto solução de cada inequação do segundo grau encontrada**. **O conjunto solução da inequação modular será a <u>união</u> dos dois conjuntos**.

Primeira inequação: $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

Para resolver essa primeira inequação, devemos encontrar as raízes de $\boldsymbol{x^2 - 5x + 6}$.

Para encontrar as raízes, vamos usar a **fórmula de Bhaskara**. Temos:

$$a = 1$$

$$b = -5$$

$$c = 6$$

O **discriminante** é dado por:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6$$

$$= 25 - 24$$

$$= 1$$

As **raízes** são:

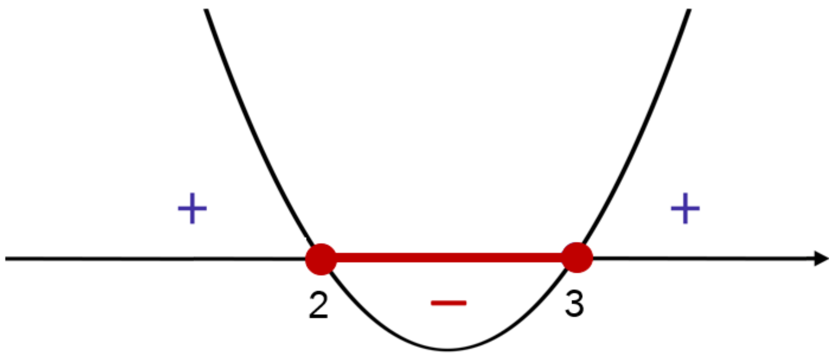
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = 2 \quad ; \quad x_2 = 3$$

Agora que temos as raízes, podemos descrever a parábola. Como o coeficiente ***a* é positivo**, a **concavidade** da parábola é **para cima**.



Portanto, $\boldsymbol{x^2 - 5x + 6 \leq 0}$ **quando** $\boldsymbol{2 \leq x \leq 3}$.

Logo, **conjunto solução** dessa **primeira inequação** é:

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$$

Segunda inequação: $\boldsymbol{x^2 - 5x - 6 \geq 0}$

Para resolver essa segunda inequação, devemos encontrar as raízes de $\boldsymbol{x^2 - 5x - 6}$.

Para encontrar as raízes, vamos usar a **fórmula de Bhaskara**. Temos:

$$a = 1$$

$$b = -5$$

$$c = -6$$

O **discriminante** é dado por:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-6)$$

$$= 25 - (-24)$$

$$= 49$$

As **raízes** são:

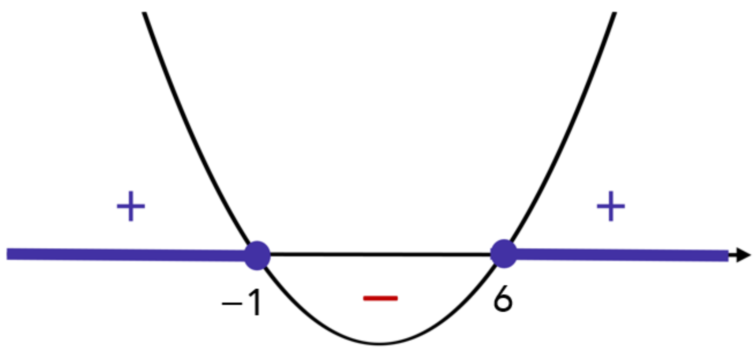
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = 6 \;\; ; \;\; x_2 = -1$$

Agora que temos as raízes, podemos descrever a parábola. Como o coeficiente **a é positivo**, a **concavidade** da parábola é **para cima**.



Portanto, $\boldsymbol{x^2 - 5x - 6 \geq 0}$ **quando $x \leq -1$ ou $x \geq 6$**.

Logo, **conjunto solução** dessa **segunda inequação** é:

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \, / \; x \leq -1 \textbf{ ou } x \geq 6\}$$

Solução da inequação modular

Vimos que a inequação $\left|\boldsymbol{x^2-5x}\right| \geq \mathbf{6}$ corresponde a:

$$\begin{cases} x^2-5x+6 \leq 0 \\ \qquad\textbf{ou} \\ x^2-5x-6 \geq 0 \end{cases}$$

Logo, conjunto solução da inequação $\left|\boldsymbol{x^2-5x}\right| \geq \mathbf{6}$ é a **união** das soluções das duas inequações do segundo grau:

$$S = S_1 \cup S_2$$

Portanto, o conjunto solução da inequação $\left|\boldsymbol{x^2-5x}\right| \geq \mathbf{6}$ é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \; / \; 2 \leq x \leq 3\} \cup \{x \in \mathbb{R} \; / \; x \leq -1 \textbf{ ou } x \geq 6\}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \; / \; x \leq -1 \textbf{ ou } 2 \leq \mathrm{x} \leq 3 \textbf{ ou } \mathrm{x} \geq 6\}$$

Gabarito: Letra C.

7.(VUNESP/Pref. SBC/2010) Um professor de matemática da EJA propôs a resolução de um problema. Nele era procurado um número par, e o professor chamou esse número de x. Trabalhando com uma condição fornecida pelo problema, um aluno chegou à conclusão de que deveria ocorrer a inequação $|3x-2| < 10$. Trabalhando com outra condição fornecida pelo problema, outro aluno apresentou a inequação $|5-2x| < 5$. O professor disse que os dois alunos haviam acertado o problema. Que valor tinha x nesse problema?

a) –4.

b) –2.

c) 0.

d) 2.

e) 4.

Comentários:

Note que que o número x procurado obedece às seguintes condições:

- x é par;
- $|3x-2| < 10$; e
- $|5-2x| < 5$.

Vamos desenvolver as duas inequações, que são do caso em que **módulo de $f(x)$ é menor do que constante k**. Devemos utilizar a seguinte propriedade:

$$|f(x)| < k \leftrightarrow -k < f(x) < k$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -k \\ \text{e} \\ f(x) < k \end{cases}$$

A partir da primeira inequação, obtemos $-\frac{8}{3} < x < 4$:

$$|3x-2| < 10 \rightarrow -10 < 3x-2 < 10 \rightarrow \begin{cases} 3x-2 > -10 \\ \textbf{e} \\ 3x-2 < 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x > -8 \\ \textbf{e} \\ 3x < 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -\frac{8}{3} \\ \textbf{e} \\ x < 4 \end{cases}$$

A partir da segunda inequação, obtemos $0 < x < 5$:

$$|5-2x| < 5 \rightarrow -5 < 5-2x < 5 \rightarrow \begin{cases} 5-2x > -5 \\ \textbf{e} \\ 5-2x < 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x > -10 \\ \textbf{e} \\ -2x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x < 10 \\ \textbf{e} \\ 2x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 5 \\ \textbf{e} \\ x > 0 \end{cases}$$

Note que, para respeitar todas as condições, devemos ter:

- x é par; e
- $0 < x < 4$.

O único número que respeita essas condições é o **número 2**.

Gabarito: Letra D.

Outras Bancas

8.(IMPARH/SME Fortaleza/2018) A função modular é definida no conjunto dos números reais, de modo que para um número real x temos:

$$|x| = \begin{cases} -x, x < 0 \\ x, x \geq 0 \end{cases}$$

Desse modo, a desigualdade $|x| \leq 3$ é equivalente a:

a) $x \leq 3$

b) $x \leq -3$

c) $x \leq -3$ ou $x \geq 3$

d) $-3 \leq x \leq 3$

Comentários:

Temos o caso em que **módulo de $f(x)$ é menor ou igual a uma constante k**. Logo, devemos utilizar a seguinte propriedade:

$$|f(x)| \leq k \leftrightarrow -k \leq f(x) \leq k$$

Para o caso em questão, $f(x) = x$ e $k = 3$. Logo:

$$|x| \leq 3 \leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$$

Gabarito: Letra D.

9.(DIRENS/EEAR/2020) Seja a inequação $|-2x+6| \leq 4$, no conjunto dos números reais. A quantidade de números inteiros contidos em seu conjunto solução é _____ .

a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

Comentários:

Temos o caso em que **módulo de $f(x)$ é menor ou igual a uma constante k**. Logo, devemos utilizar a seguinte propriedade:

$$|f(x)| \leq k \leftrightarrow -k \leq f(x) \leq k$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq -k \\ \mathbf{e} \\ f(x) \leq k \end{cases}$$

Aplicando a propriedade para a inequação do problema, temos:

$$|-2x+6| \leq 4 \rightarrow -4 \leq -2x+6 \leq 4 \rightarrow \begin{cases} -2x+6 \geq -4 \\ \mathbf{e} \\ -2x+6 \leq 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x \geq -10 \\ \mathbf{e} \\ -2x \leq -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x \leq 10 \\ \mathbf{e} \\ 2x \geq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ \mathbf{e} \\ x \leq 1 \end{cases}$$

O conjunto solução da inequação é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 1 \text{ e } x \leq 5\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 \leq x \leq 5\}$$

Temos um total de **5 números inteiros** contidos no conjunto solução:

$$1; 2; 3; 4 \text{ e } 5$$

Gabarito: Letra C.

10.(DIRENS/EEAR/2009) Seja a inequação $|x-1| \leq 3$. A soma dos números inteiros que satisfazem essa inequação é

a) 8.

b) 7.

c) 5.

d) 4.

Comentários:

Temos o caso em que **módulo de $f(x)$ é menor <u>ou igual</u> a uma constante k**. Logo, devemos utilizar a seguinte propriedade:

$$|f(x)| \leq k \leftrightarrow -k \leq f(x) \leq k$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq -k \\ \text{e} \\ f(x) \leq k \end{cases}$$

Aplicando a propriedade para a inequação do problema, temos:

$$|x-1| \leq 3 \rightarrow -3 \leq x-1 \leq 3 \rightarrow \begin{cases} x-1 \geq -3 \\ \text{e} \\ x-1 \leq 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq -3+1 \\ \text{e} \\ x \leq 3+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \text{e} \\ x \leq 4 \end{cases}$$

Devemos somar os números inteiros x tais que $-2 \leq x \leq 4$:

$$-2-1+0+1+2+3+4$$

$$=7$$

Gabarito: Letra B.

11.(AOCP/Pref. Feira de Santana/2018) Seja $f(x)$ uma função real definida por:

$$\begin{cases} x+6, \quad \text{para } x \leq 10, \\ 16, \text{para } 10 < x < 18 \\ -|x-14|+20, \text{para } x \geq 18 \end{cases}$$

Os valores de x, tais que $f(x) < 0$, são:

a)]−∞,−0[∪[1,+∞[

b)]−∞,−34[

c)]−∞,−12[∪[10,+∞[

d)]−∞,−6[∪]34,+∞[

e) [34,+∞[

Comentários:

Para resolver a questão, devemos fazer $f(x) < 0$ para três casos:

- $x \leq 10$;
- $10 < x < 18$; e
- $x \geq 18$

Caso 1: $x \leq 10$

Nesse primeiro caso, temos que $f(x) = x + 6$. Logo, temos a seguinte inequação:

$$f(x) < 0$$

$$x + 6 < 0$$

$$x < -6$$

Portanto, o conjunto solução para esse primeiro caso é:

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < -6\} =]-\infty, -6[$$

Caso 2: $10 < x < 18$

Nesse segundo caso, temos que $f(x) = 16$. Logo, temos a seguinte inequação:

$$f(x) < 0$$

$$16 < 0$$

Não existe x que faça com que 16 seja menor do que zero! Portanto, o conjunto solução é o conjunto vazio.

$$S_2 = \emptyset$$

Caso 3: $x \geq 18$

No terceiro caso, temos que $f(x) = -|x - 14| + 20$. Logo, temos a seguinte inequação:

$$f(x) < 0$$

$$-|x - 14| + 20 < 0$$

$$20 < |x - 14|$$

$$|x - 14| > 20$$

Temos o caso em que **módulo de $f(x)$ é maior do que uma constante k**. Logo, devemos utilizar a seguinte propriedade:

$$|f(x)| > k \leftrightarrow \begin{cases} f(x) < -k \\ \textbf{ou} \\ f(x) > k \end{cases}$$

Aplicando a propriedade para a inequação do problema, temos:

$$|x - 14| > 20 \ \rightarrow \begin{cases} x - 14 < -20 \\ \textbf{ou} \\ x - 14 > 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < -7 \\ \textbf{ou} \\ x > 34 \end{cases}$$

Note que obtivemos $\boldsymbol{x < -7}$ **ou** $\boldsymbol{x > 34}$. Ocorre, porém, que estamos lidando com o caso em que $\boldsymbol{x \geq 18}$. Portanto, devemos **descartar** $\boldsymbol{x < -7}$. Logo, o conjunto solução para esse terceiro caso é:

$$S_3 = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 34\} =]34, +\infty[$$

Solução do problema

O conjunto solução do problema $f(x) < 0$ é a união dos três casos:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$
$$=] - \infty, -6[\cup \ \emptyset \ \cup]34, +\infty[$$
$$=] - \infty, \boldsymbol{-6}[\cup]\boldsymbol{34}, +\infty[$$

Gabarito: Letra D.

12.(DECEx/ESA/2020) A solução da inequação $|3x - 10| \leq 2x$ é dada por:

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq 10\}$.

b) $S = \emptyset$.

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 2 \leq x \leq 10\}$.

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq 2\}$.

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq 2 \text{ ou } x \geq 10\}$.

Comentários:

Devemos **utilizar a definição de módulo para resolver o problema**.

> • **Se o que está dentro das duas barras é positivo ou zero, mantenha o que está dentro das barras; ou**
>
> • **Se o que está dentro das duas barras é negativo, insira um sinal de menos.**

Vamos verificar o sinal de $\mathbf{3x-10}$:

$$\mathbf{3x-10\geq 0}\ \ \rightarrow 3x\geq 10\ \rightarrow \boldsymbol{x\geq \frac{10}{3}}$$

$$\mathbf{3x-10< 0}\ \ \rightarrow 3x< 10\ \rightarrow \boldsymbol{x< \frac{10}{3}}$$

Logo, devemos resolver a inequação $|\mathbf{3x-10}|\leq \mathbf{2x}$ para dois casos:

- $\boldsymbol{x<\frac{10}{3}}$; e
- $\boldsymbol{x\geq\frac{10}{3}}$.

Caso 1: $\boldsymbol{x<\frac{10}{3}}$

$$|\underbrace{\mathbf{3x-10}}_{\text{Negativo}}|\leq \mathbf{2x}$$

$$-(3x-10)\leq 2x$$

$$-3x+10\leq 2x$$

$$10\leq 5x$$

$$5x\geq 10$$

$$x\geq 2$$

Como nesse caso devemos ter $\boldsymbol{x<\frac{10}{3}}$, a solução do **caso 1** é:

$$S_1=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\geq 2\ \mathbf{e}\ x<\frac{10}{3}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ \boldsymbol{2\leq x<\frac{10}{3}}\right\}$$

Caso 2: $\boldsymbol{x\geq\frac{10}{3}}$

$$|\underbrace{\mathbf{3x-10}}_{\text{Positivo}}|\leq \mathbf{2x}$$

$$3x-10\leq 2x$$

$$3x-2x\leq 10$$

$$x\leq 10$$

Como nesse caso devemos ter $\boldsymbol{x\geq\frac{10}{3}}$, a solução do **caso 2** é:

$$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq \frac{10}{3} \textbf{ e } x \leq 10\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \boldsymbol{\frac{10}{3} \leq x \leq 10}\right\}$$

Solução da inequação modular

O conjunto solução da inequação $|\boldsymbol{3x - 10}| \leq \boldsymbol{2x}$ é a união dos dois casos:

$$S = S_1 \cup S_2 = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \boldsymbol{2 \leq x \leq 10}\}$$

Gabarito: Letra C.

13.(CS UFG/Pref. Goiânia/2016) Para um determinado valor da constante k, a inequação modular $|x + 1| \leq |\boldsymbol{k} - x/2|$ possui uma única solução real na incógnita x. Qual é o valor da constante k que satisfaz a propriedade citada?

a) 4

b) −1

c) 5/3

d) −1/2

Comentários:

Via de regra, o conjunto solução de inequações costuma ser um intervalo. Observe que o enunciado nos diz que, para $|x + 1| \leq \left|k - \frac{x}{2}\right|$, temos **uma única solução real**.

Para que tenhamos uma única solução real, deve necessariamente ocorrer a igualdade, isto é:

$$|\boldsymbol{x + 1}| = \left|\boldsymbol{k - \frac{x}{2}}\right|$$

Vamos obter as possíveis soluções, lembrando da seguinte propriedade de **equações modulares**:

$$|f(x)| = |g(x)| \leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

Aplicando a propriedade ao problema, temos:

$$|x + 1| = \left|k - \frac{x}{2}\right| \rightarrow \begin{cases} x + 1 = k - \dfrac{x}{2} \\ ou \\ x + 1 = -\left(k - \dfrac{x}{2}\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + \dfrac{x}{2} = k - 1 \\ ou \\ x + 1 = -k + \dfrac{x}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2}x = k - 1 \\ ou \\ x - \dfrac{x}{2} = -k - 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}(k-1) \\ \quad ou \\ \frac{x}{2} = -(k+1) \end{cases} \quad \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}(k-1) \\ \quad ou \\ x = -2(k+1) \end{cases}$$

Note que, **a princípio**, **teríamos duas soluções reais**: $\boldsymbol{x = \frac{2}{3}(k-1)}$ e $\boldsymbol{x = -2(k+1)}$. **Para que tenhamos apenas uma solução real, essas duas soluções obtidas devem ser iguais**. Logo:

$$\frac{2}{3}(k-1) = -2(k+1)$$

$$k - 1 = \frac{3}{2} \times -2(k+1)$$

$$k - 1 = -3(k+1)$$

$$k - 1 = -3k - 3$$

$$k + 3k = 1 - 3$$

$$4k = -2$$

$$k = -\frac{1}{2}$$

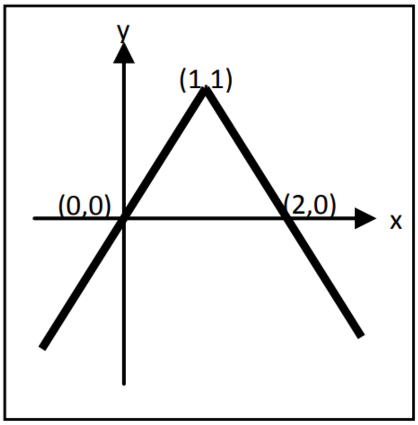
Gabarito: Letra D.

QUESTÕES COMENTADAS - MULTIBANCAS

Função modular

FGV

1.(FGV/Pref. Osasco/2014) Assinale a única função, dentre as opções seguintes, que pode estar representada no gráfico a seguir:



a) y = 1 – |x – 1|;

b) y = 1 – |x + 1|;

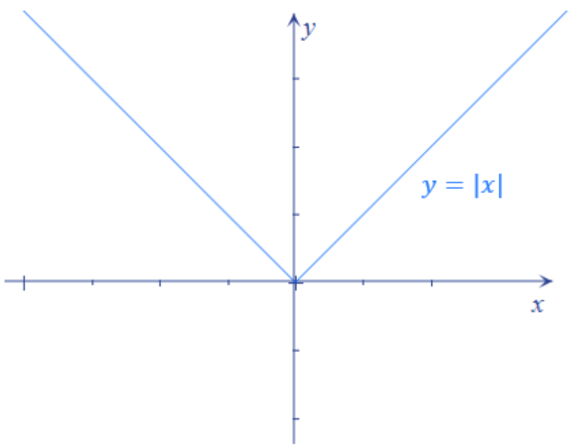
c) y = 1 + |x – 1|;

d) y = 1 + |x + 1|;

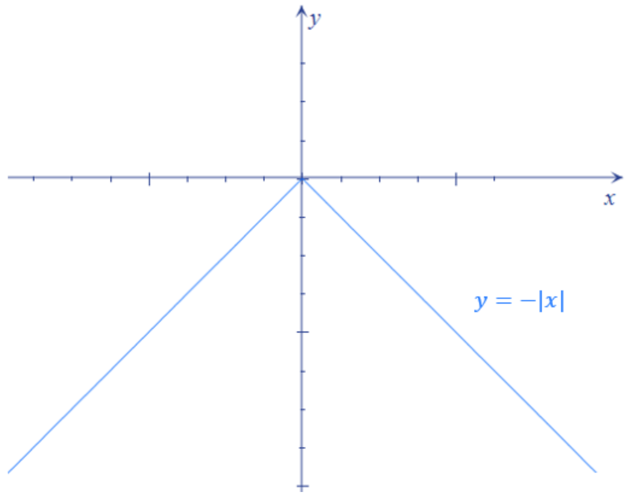
e) y = |x – 1| + |x + 1|.

Comentários:

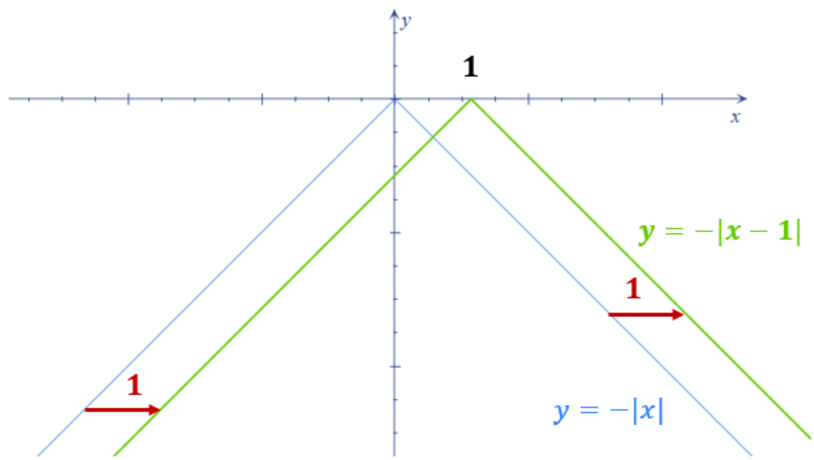
Vamos obter o gráfico apresentado a partir da função básica $\boldsymbol{y = |x|}$.



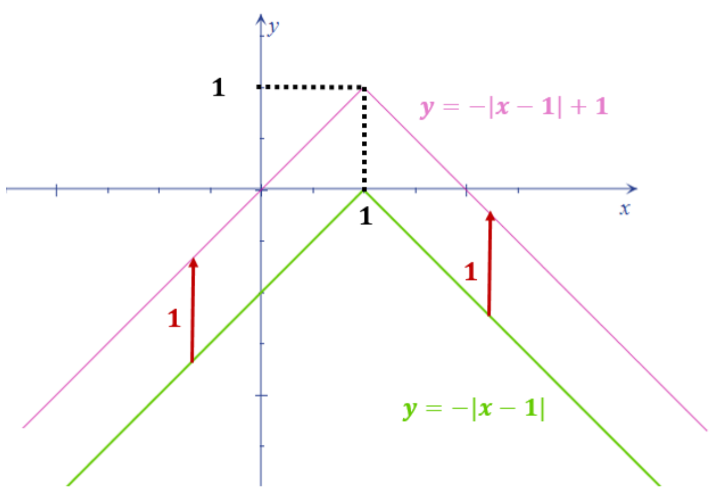
A partir do gráfico de $|\boldsymbol{x}|$, podemos espelhar toda a função com relação ao eixo x, obtendo $-|\boldsymbol{x}|$.



A partir do gráfico de $-|\boldsymbol{x}|$, podemos realizar uma translação horizontal em uma unidade para a direita, obtendo $-|\boldsymbol{x}-\mathbf{1}|$.



A partir do gráfico de $-|\boldsymbol{x}-\mathbf{1}|$, podemos realizar uma translação vertical em uma unidade para cima, obtendo $-|\boldsymbol{x}-\mathbf{1}|+\mathbf{1}$



Note que o gráfico obtido é igual ao apresentado no enunciado. Logo, a função procurada é:

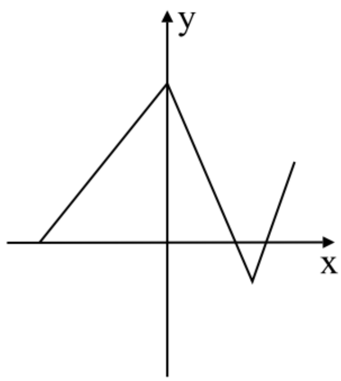
$$y = -|x - 1| + 1$$

$$\boldsymbol{y = 1 - |x - 1|}$$

Gabarito: Letra A.

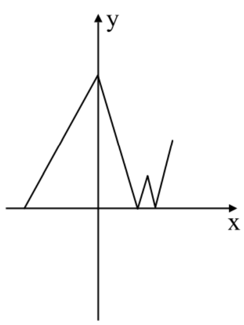
Vunesp

2.(VUNESP/PM SP/2011) Seja f uma função cujo gráfico está representado a seguir.

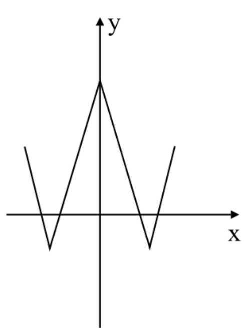


A figura que representa o gráfico da função $g(x) = f(|x|)$ é:

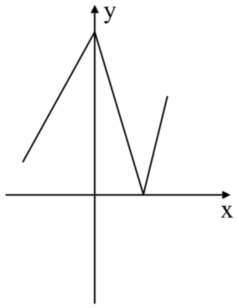
a)



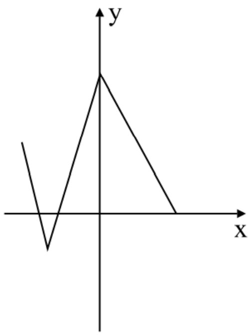
b)



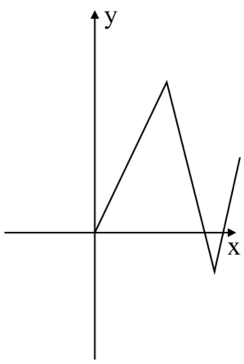
c)



d)



e)



Comentários:

Note que a função $g(x)$ é obtida aplicando-se um **módulo na variável x**.

Ao se aplicar um **módulo na variável x**, o novo gráfico é obtido do seguinte modo:

- Para $\boldsymbol{x \geq 0}$, o novo gráfico é **igual ao gráfico original**; e
- Para $\boldsymbol{x}$ **negativo**, o novo gráfico é um "**espelho**", **com relação ao eixo y**, do caso $x \geq 0$.

Portanto, o gráfico de $g(x) = f(|x|)$ é a apresentado na **alternativa B**.

Gabarito: Letra B.

Outras Bancas

3.(GUALIMP/CM Divino/2020) Dado que $f(x) = |x + 1|$, analise os itens abaixo.

I. Trata-se de uma função do 1º grau.

II. O domínio é o conjunto dos números reais positivos.

III. A imagem é o conjunto dos números reais positivos e o zero.

IV. Se $x = -3, f(x) = 2$.

Dos itens acima:

a) Apenas I está correto.

b) II e III estão corretos.

c) III e IV estão corretos.

d) Apenas IV está correto.

Comentários:

Vamos analisar cada um os itens.

I. Trata-se de uma função do 1º grau. **ERRADO.** Trata-se de uma função modular.

II. O domínio é o conjunto dos números reais positivos. **ERRADO.**

O domínio de uma função são os possíveis valores que x pode assumir. Nesse caso, x pode ser qualquer valor do conjunto dos reais.

III. A imagem é o conjunto dos números reais positivos e o zero. **CERTO.**

A imagem de uma função são os possíveis valores que ela pode assumir.

Os valores que $|x - 1|$ pode assumir é o conjunto dos **reais positivos** e o **zero**, pois **o módulo de um número não pode ser negativo**.

IV. Se $x = -3, f(x) = 2$. **CERTO.**

$$f(x) = |x + 1|$$

$$f(-3) = |-3 + 1|$$

$$f(-3) = |-2|$$

$$f(-3) = 2$$

Gabarito: Letra C.

4. (IBFC/SEDUC MT/2017) Considere a função $f(x) = |x^2 - 5|$, cujo domínio é o conjunto dos números naturais. Assinale a alternativa que indica a qual o menor conjunto que irá pertencer o contradomínio desta função.

a) Números Naturais

b) Números Inteiros

c) Números Racionais

d) Números Reais

e) Números Complexos

Comentários:

O **contradomínio** de uma função é o conjunto que necessariamente contém a imagem de função. Portanto, **o menor contradomínio possível é a imagem da função**. Devemos, portanto, **determinar a imagem de $f(x)$**.

Como o **domínio da função $f(x) = |x^2 - 5|$ é o conjunto dos naturais**, só podemos utilizar valores naturais para x. Exemplos:

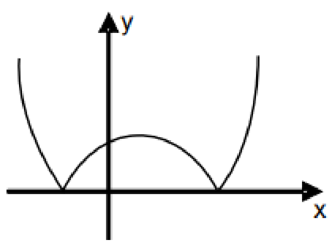
$$f(1) = |1^2 - 5| = |-4| = 4$$
$$f(2) = |2^2 - 5| = |4 - 5| = |-1| = 1$$
$$f(3) = |3^2 - 5| = |4| = 4$$
$$\dots$$

Nesse caso, a função $f(x)$ nos retornará sempre números naturais. Portanto, **o conjunto imagem dessa função é o conjunto dos números naturais**. Logo, o gabarito é letra A.

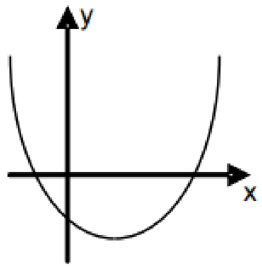
Gabarito: Letra A.

5. (CS UFG/UFG/2012) O gráfico da função modular $f(x) = |ax^2 + bx + c|$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, tais que $b^2 > 4a$ e $a > 0$, é:

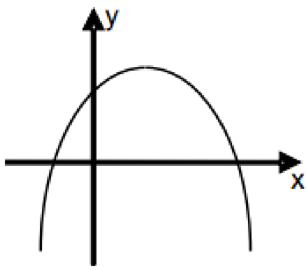
a)



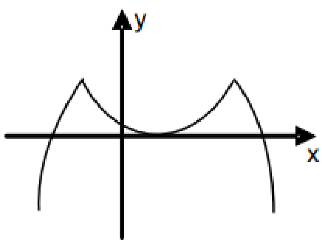
b)



c)



d)



Comentários:

Como $b^2 > 4ac$, temos a garantia de que a função $\boldsymbol{g(x) = ax^2 + bx + c}$ **apresenta duas raízes reais** pois, neste caso, o **discriminante** Δ **é maior do que zero**:

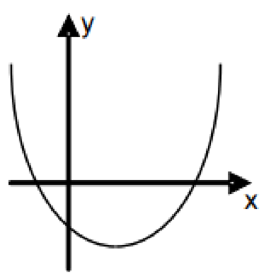
$$b^2 > 4ac$$

$$b^2 - 4ac > 0$$

$$\Delta > 0$$

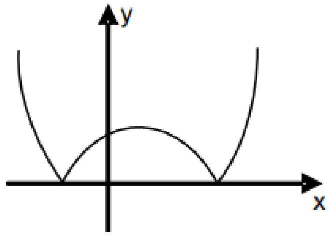
Além disso, **como** $\boldsymbol{a > 0}$, temos que a **concavidade da parábola é para cima**.

Portanto, a função $\boldsymbol{g(x) = ax^2 + bx + c}$ pode ser desenhada do seguinte modo:



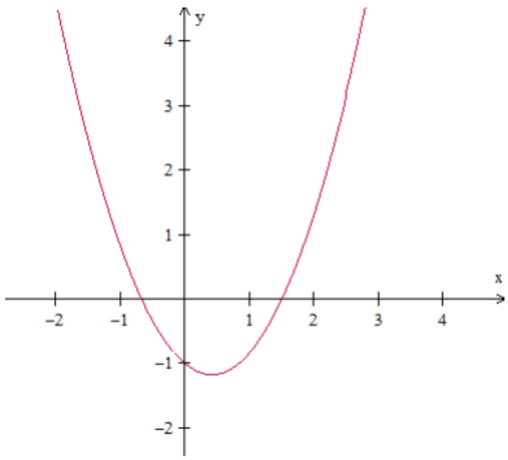
O **gráfico da função $f(x) = |ax^2 + bx + c|$** deve "**espelhar**" a função $g(x)$, **com relação ao eixo x, para os casos em que $g(x)$ é negativa**.

Portanto, o **gráfico da função modular $f(x)$** em questão pode ser descrito da seguinte forma:



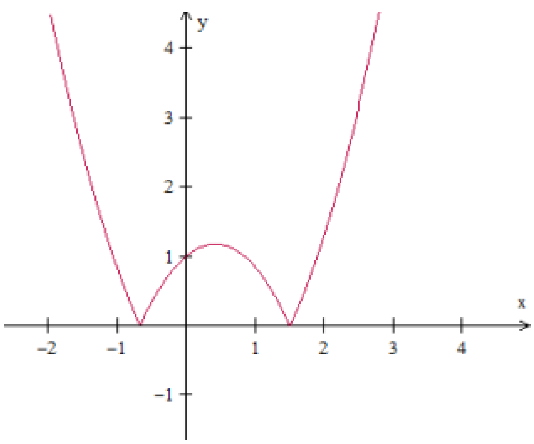
Gabarito: Letra A.

6.(FAEPESUL/ISS Gov. Celso Ramos/2017) Considere a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, cuja representação gráfica se encontra na figura abaixo:

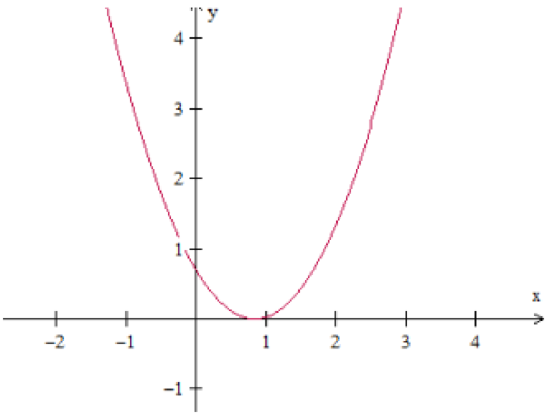


Nestas condições, a função g, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = |f(x)|$, é representada graficamente por:

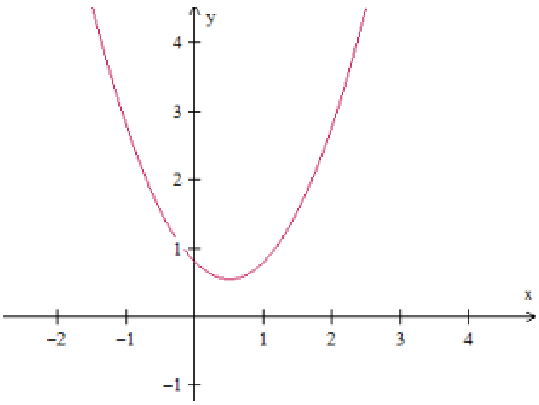
a)



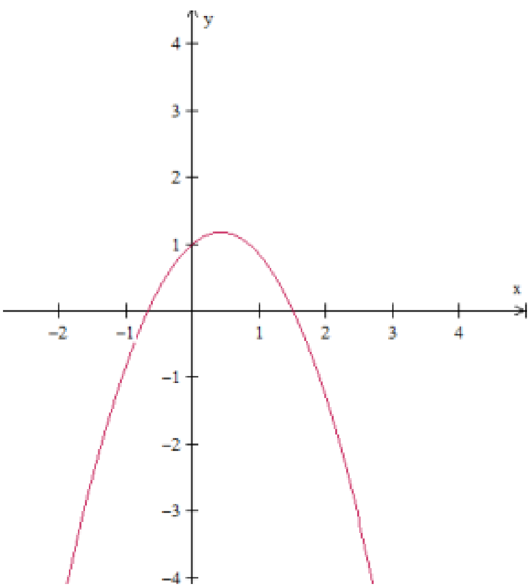
b)



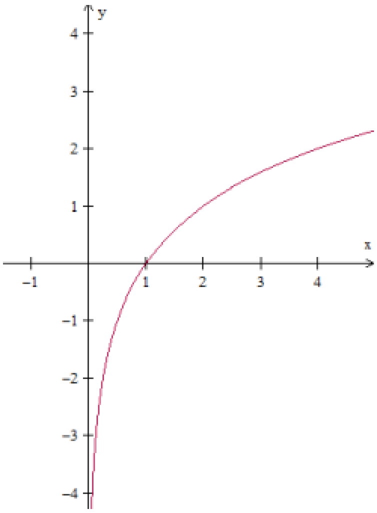
c)



d)



e)



Comentários:

Temos que $g(x) = |f(x)|$.

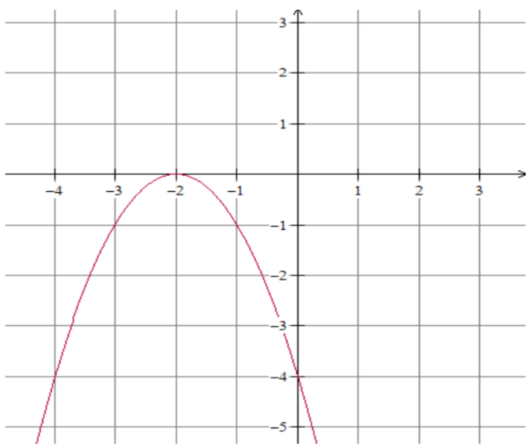
Com relação ao gráfico $f(x)$, o **gráfico da função $g(x)$ será descrito da seguinte forma**:

- Quando $f(x)$ é **positivo** ou **zero**, **mantenha** o gráfico de $f(x)$;
- Quando $f(x)$ é **negativo**, devemos inserir um sinal de menos. Nesse caso, o **gráfico da função original $f(x)$ deve ser "espelhado"** com relação ao eixo x.

A função $g(x)$ que obedece aos dois pontos apresentados está na **alternativa A**.

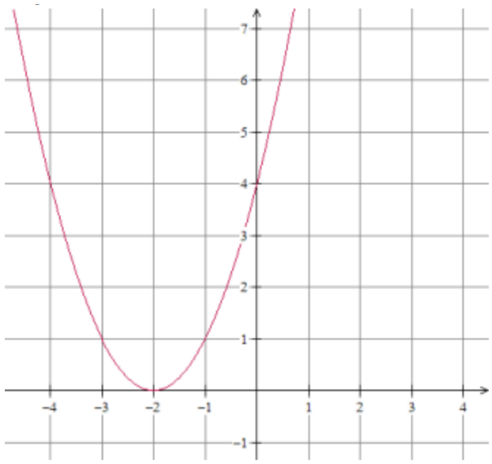
Gabarito: Letra A.

7.(FAEPESUL/Pref. São João Batista SC/2018) Considere a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais, cuja representação gráfica se encontra na figura abaixo:

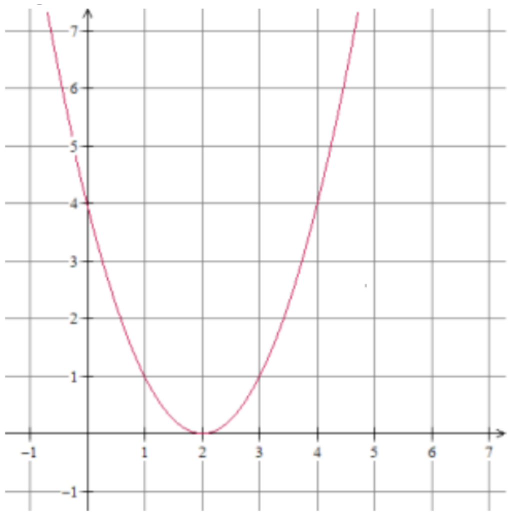


Assinale a alternativa que contém a representação gráfica da função g, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = |f(x)|$.

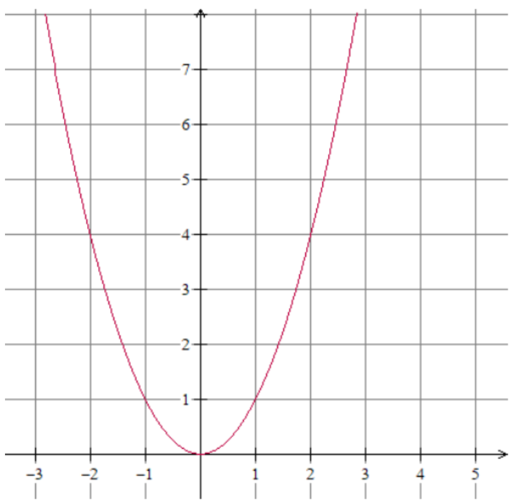
a)



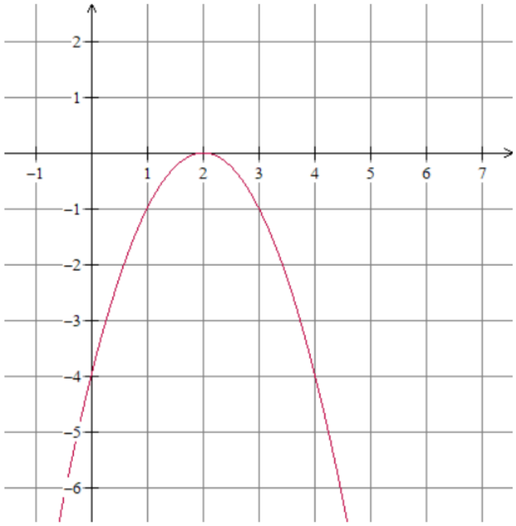
b)



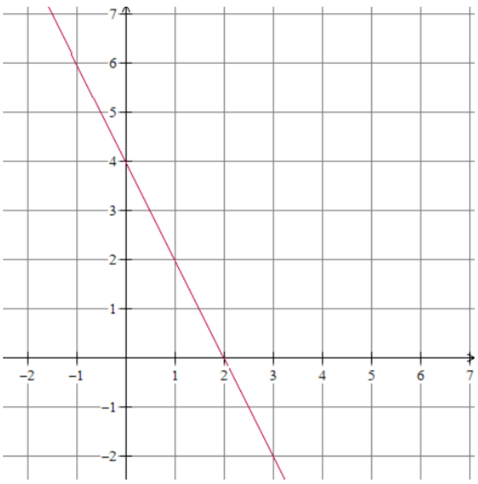
c)



d)



e)



Comentários:

Temos que $g(x) = |f(x)|$.

Com relação ao gráfico $f(x)$, o **gráfico da função $g(x)$ será descrito da seguinte forma**:

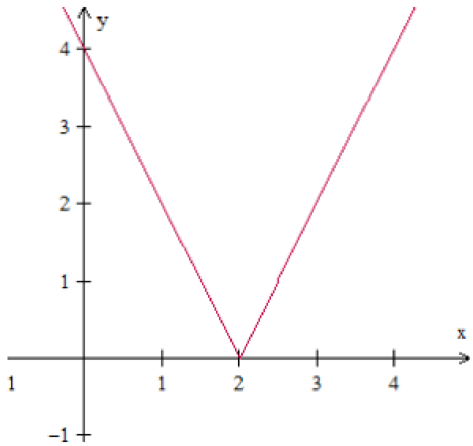
- Quando $f(x)$ é **positivo** ou **zero**, **mantenha** o gráfico de $f(x)$;
- Quando $f(x)$ é **negativo**, devemos inserir um sinal de menos. Nesse caso, o **gráfico da função original $f(x)$ deve ser "espelhado"** **com relação ao eixo x**.

A função $g(x)$ que obedece aos dois pontos apresentados está na **alternativa A**.

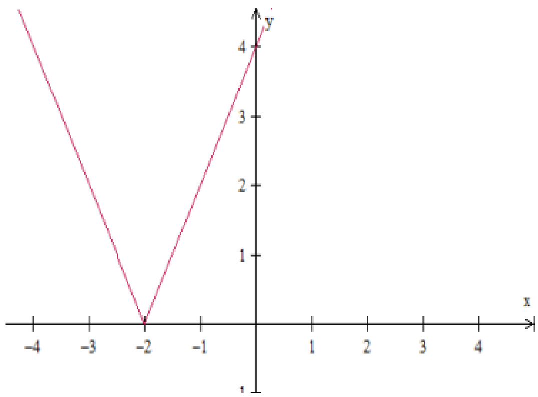
Gabarito: Letra A.

8.(FAEPESUL/Pref. Araranguá/2016) Assinale a alternativa em que apresenta o gráfico da função f definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ em que $y = f(x) = |2x - 4|$.

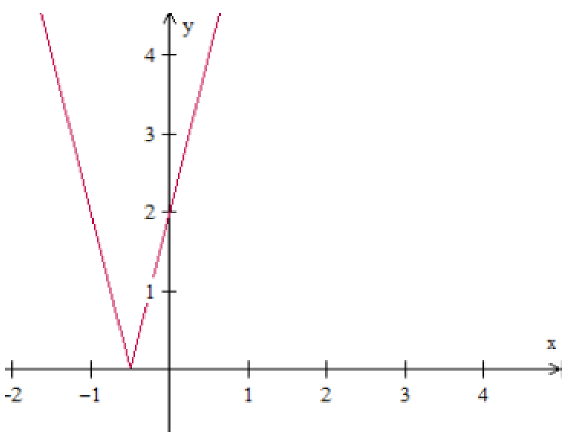
a)



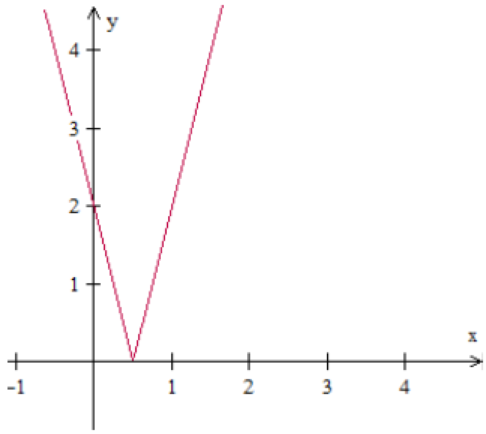
b)



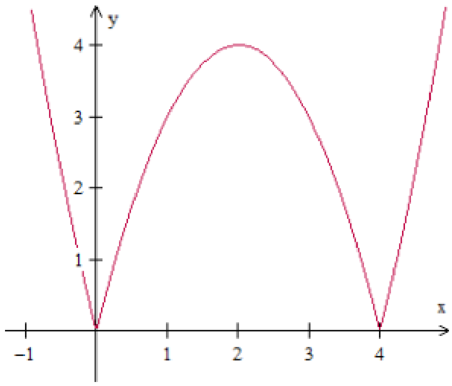
c)



d)



e)



Comentários:

Primeiramente, vamos desenhar o gráfico de $\boldsymbol{g(x) = 2x - 4}$.

A função $\boldsymbol{g(x) = 2x - 4}$ corta o eixo x quando $y = g(x) = 0$.

Logo, **$g(x)$ corta o eixo x no ponto $(2; 0)$**:

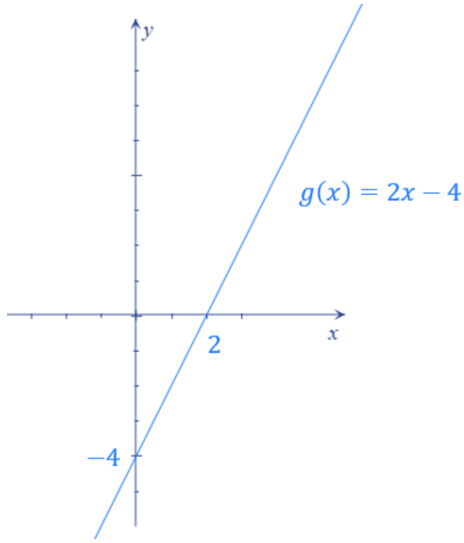
$$y = 0$$
$$2x - 4 = 0$$
$$2x = 4$$
$$\boldsymbol{x = 2}$$

Além disso, $\boldsymbol{g(x) = 2x - 4}$ corta o eixo y quando $x = 0$.

Logo, **$g(x)$ corta o eixo y em $y = -4$**:

$$y = 2x - 4$$
$$y = 2 \times 0 - 4$$
$$\boldsymbol{y = -4}$$

Temos o seguinte gráfico para $\boldsymbol{g(x) = 2x - 4}$:

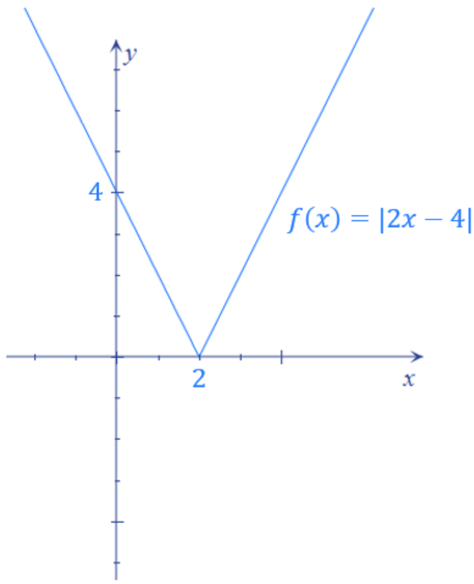


Sabemos que $f(x) = |g(x)| = |2x - 4|$.

O **gráfico da função $f(x)$** deve ser descrito da seguinte forma:

- Quando $g(x)$ é **positivo** ou **zero**, **mantenha o gráfico** de $g(x)$;
- Quando $g(x)$ é **negativo**, devemos **inserir um sinal de menos**. Nesse caso, o **gráfico da função original** $g(x)$ deve ser "**espelhado**" **com relação ao eixo x**.

Logo, o gráfico de $f(x)$ é o seguinte:



O **gabarito**, portanto, é **letra A**.

Gabarito: Letra A.

9.(IDIB/CRM MT/2020) A partir do gráfico função modular $f(x) = |x|$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, assinale a alternativa que apresenta uma função g que representa a translação de f para a esquerda no eixo "x".

a) g(x) = |x + 1|, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) g(x) = |x – 1|, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

c) g(x) = |x| + 1, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

d) g(x) = |x| - 1, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Comentários:

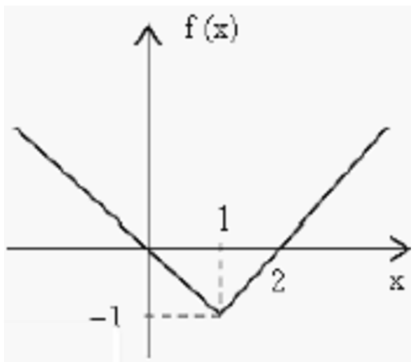
Quanto à **translação horizontal**, temos que:

> Ao **somar** ou **subtrair** uma constante **da variável x** de uma função qualquer, estamos transladando horizontalmente **para a esquerda** ou **para a direita** o gráfico dessa função.

Portanto, a função que apresenta uma translação de $|x|$ para **esquerda** é $\boldsymbol{g(x) = |x+1|}$.

Gabarito: Letra A.

10.(GUALIMP/Pref. Porciúncula/2019) A função que originou o gráfico a seguir trata-se de uma função:



a) Logarítmica.

b) Delta.

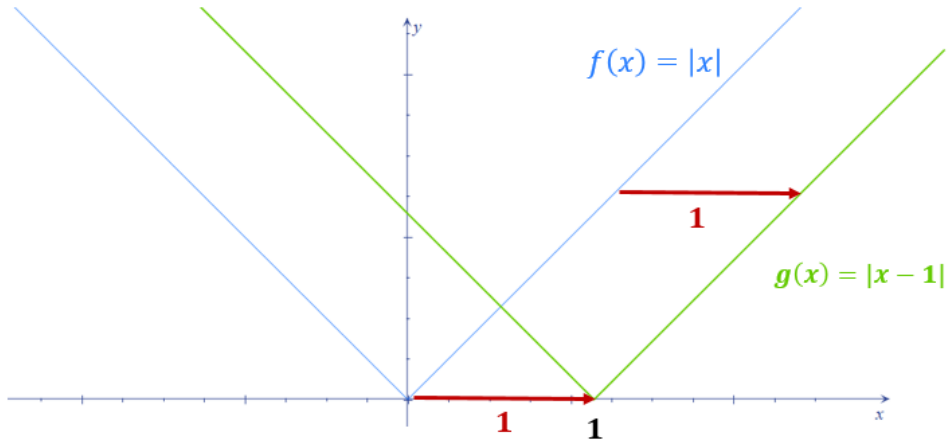
c) Modular.

d) Quadrática.

Comentários:

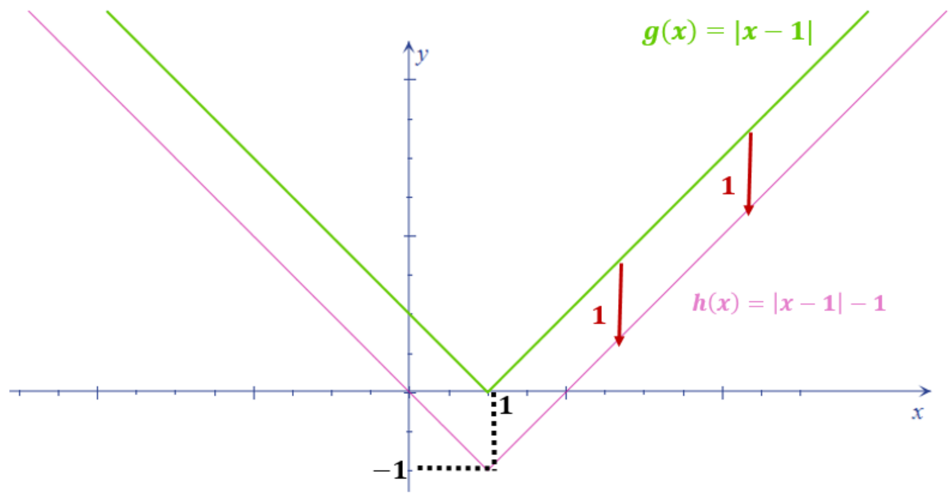
Note que, a partir de $f(x) = |x|$, podemos realizar uma **translação horizontal** em **uma unidade para a direita**, obtendo:

$$g(x) = |x - 1|$$



Na sequência, podemos realizar uma **translação vertical** em **uma unidade para baixo**, obtendo:

$$h(x) = |x - 1| - 1$$



Note que $h(x)$ é a função procurada.

Portanto, a função que originou o gráfico apresentado é uma **função modular**.

Gabarito: Letra C.

11.(DIRENS/EEAR/2010) A função modular $f(x) = |x - 2|$ é decrescente para todo x real tal que

a) 0 < x < 4.

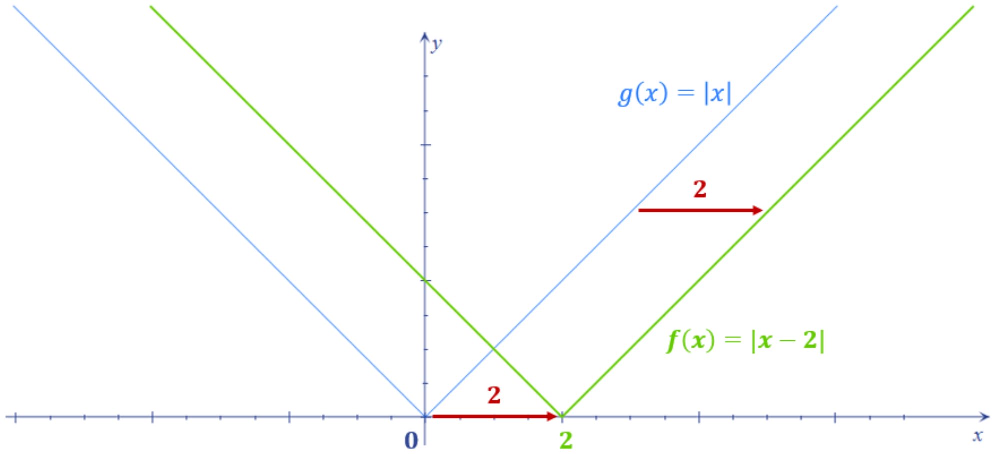
b) x > 0.

c) x > 4.

d) x ≤ 2.

Comentários:

Podemos desenhar o **gráfico de $f(x) = |x - 2|$** realizando uma **translação horizontal** em **duas unidades <u>para a direita</u>** a partir da função $g(x) = |x|$.

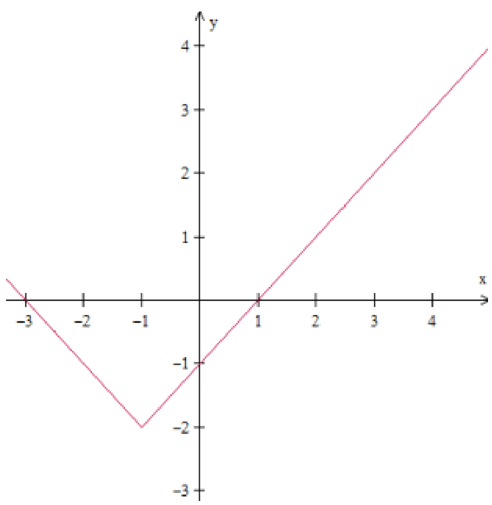


Note que $f(x) = |x - 2|$ **é decrescente** para os **valores de x menores ou iguais a 2**.

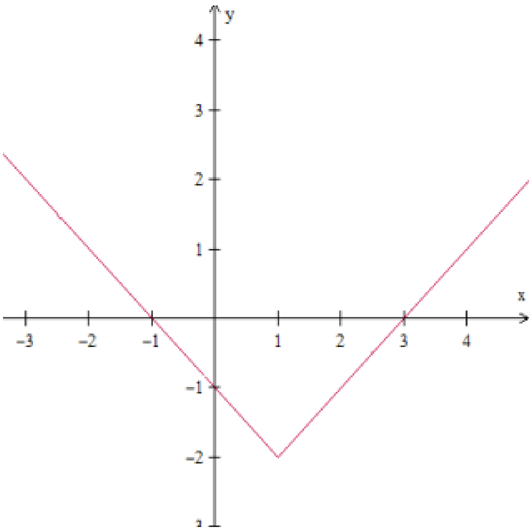
Gabarito: Letra D.

12. (FAEPESUL/Pref. Araranguá/2016) Assinale a alternativa que apresenta o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x + 1| - 2$.

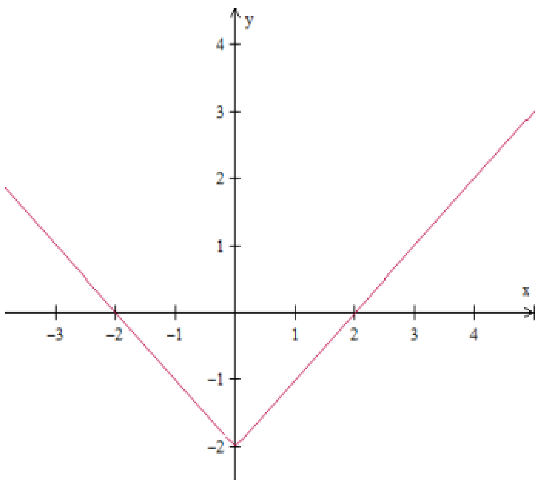
a)



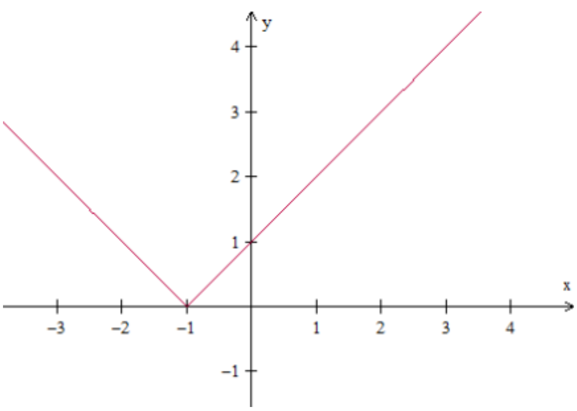
b)



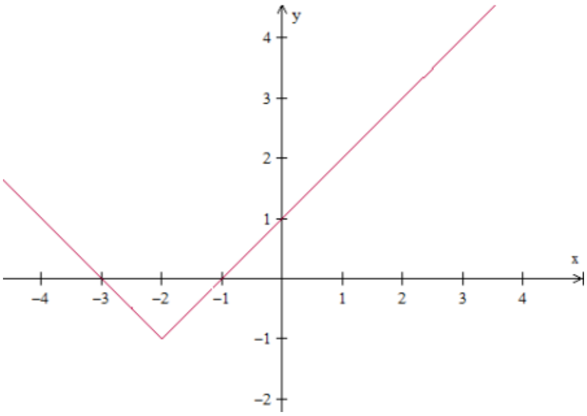
c)



d)

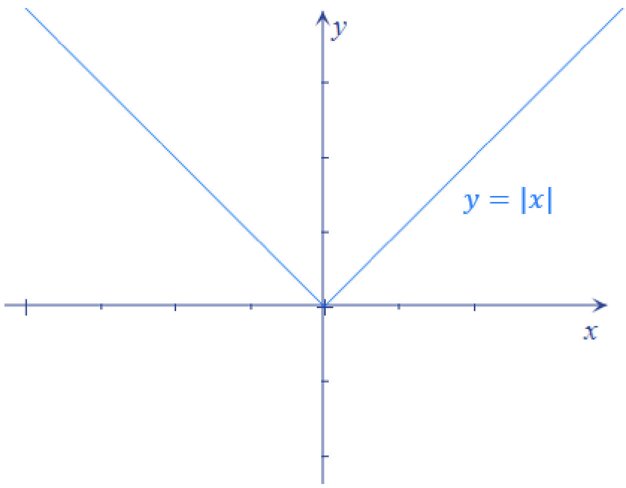


e)

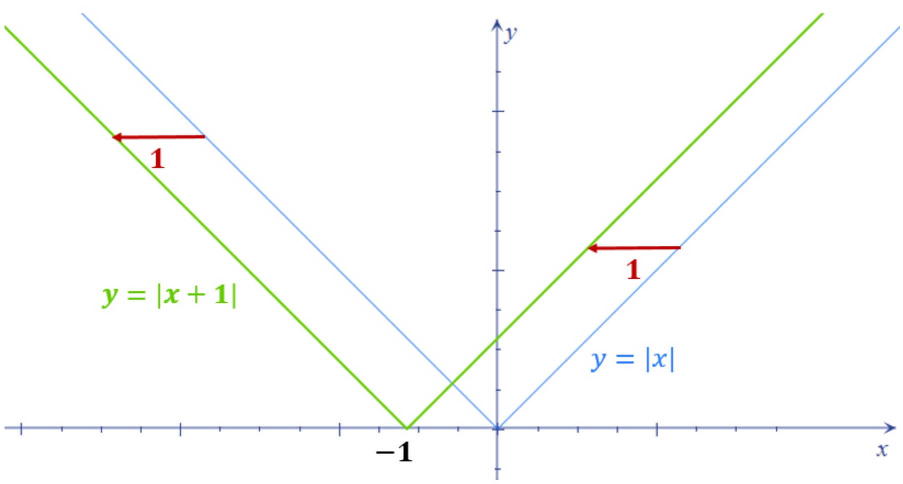


Comentários:

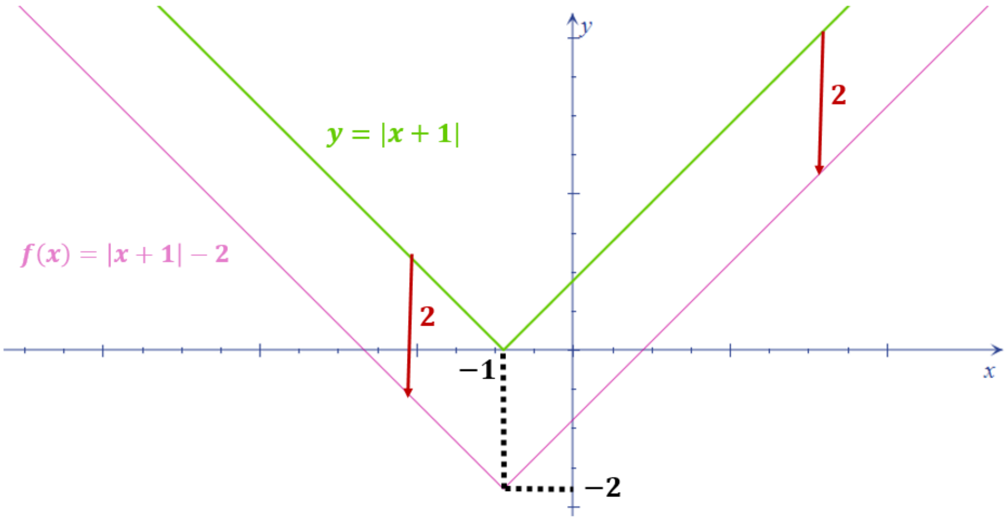
Vamos obter o gráfico de $\boldsymbol{f(x) = |x+1| - 2}$ a partir da função básica $\boldsymbol{y = |x|}$.



A partir do gráfico de $|\boldsymbol{x}|$, podemos obter $|\boldsymbol{x+1}|$ realizando uma translação horizontal de uma unidade para a esquerda.



A partir do gráfico de $|x+1|$, podemos obter $\boldsymbol{f(x) = |x+1| - 2}$ realizando uma translação vertical de duas unidades para baixo.

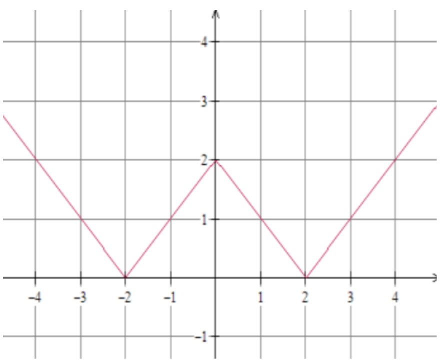


Observe que o gráfico obtido corresponde ao que está apresentado na **alternativa A**.

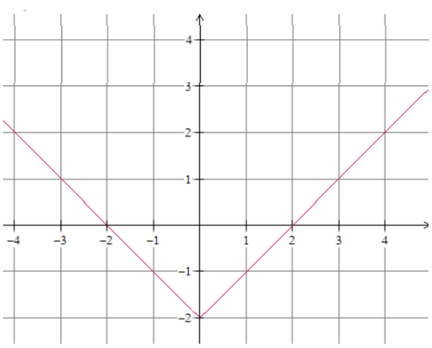
Gabarito: Letra A.

13. (FAEPESUL/Pref. São João Batista SC/2018) Assinale a alternativa que apresenta o gráfico da função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ||x| - 2|$.

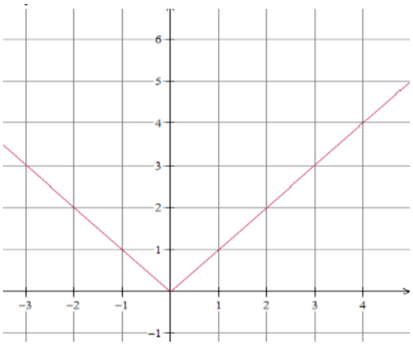
a)



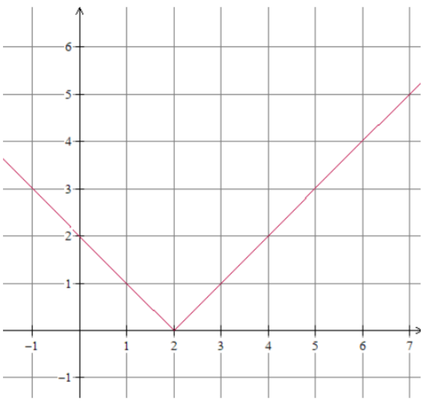
b)



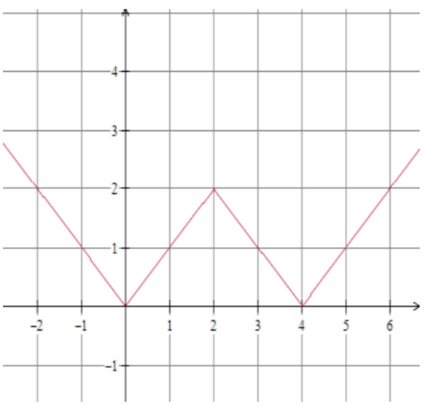
c)



d)

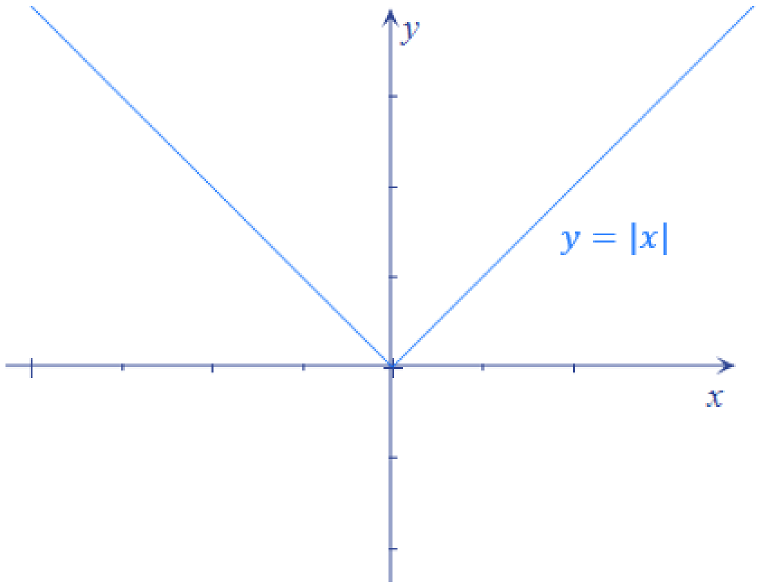


e)

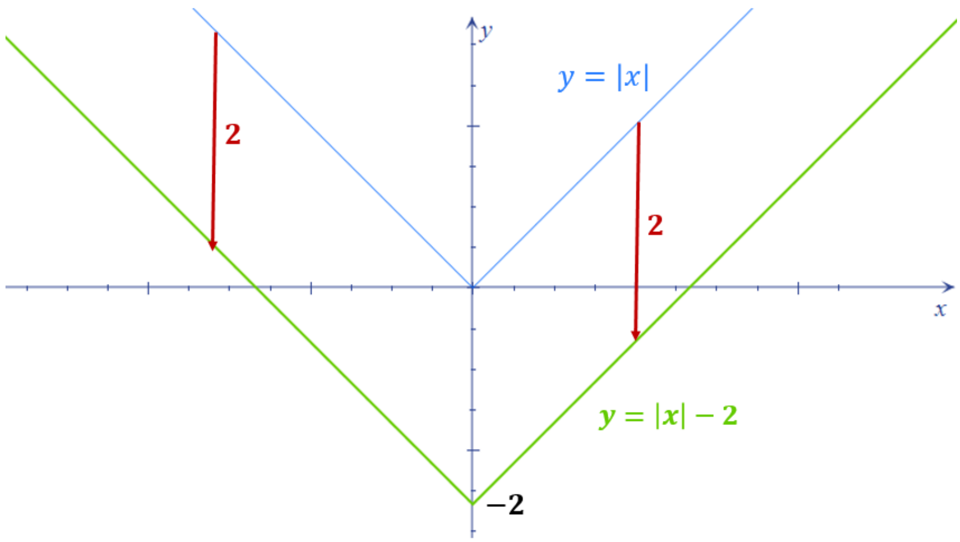


Comentários:

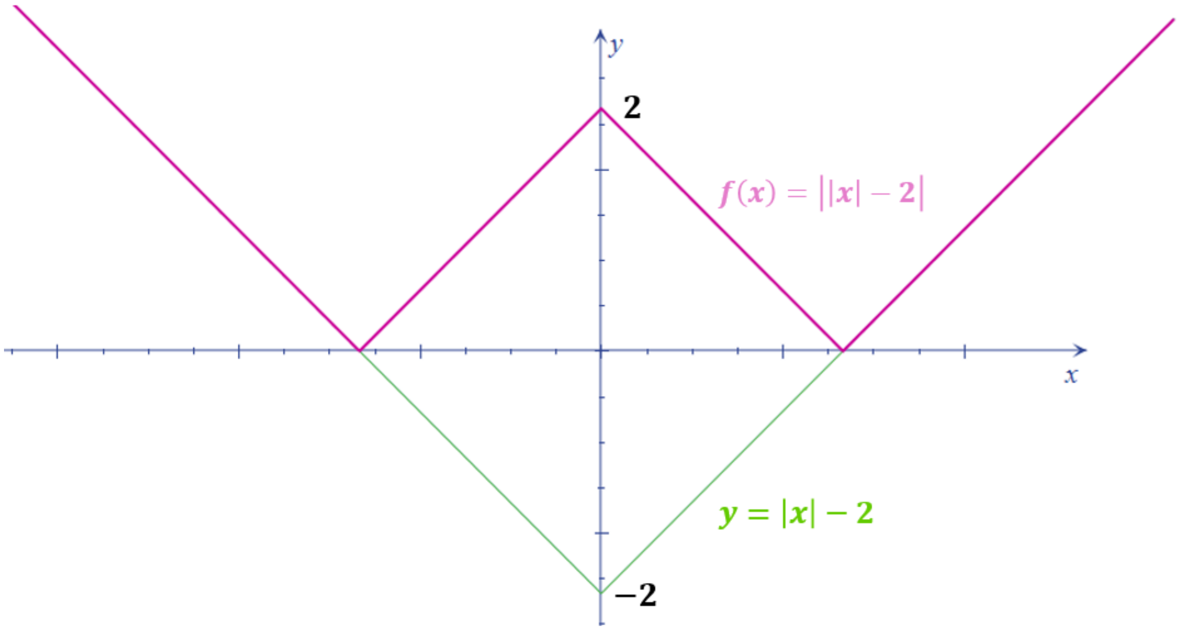
Vamos obter o gráfico de $\boldsymbol{f(x)=\big||x|-2\big|}$ a partir da função básica $\boldsymbol{y=|x|}$.



A partir do gráfico de $|\boldsymbol{x}|$, podemos obter $|\boldsymbol{x}|-\boldsymbol{2}$ realizando uma translação vertical de duas unidades para baixo.



A partir do gráfico de $|\boldsymbol{x}|-\boldsymbol{2}$, podemos obter $\boldsymbol{f(x)=||x|-2|}$ "espelhando" a função $\boldsymbol{y=|x|-2}$ para os casos em que ela é negativa.



Observe que o gráfico obtido corresponde ao que está apresentado na **alternativa A**.

Gabarito: Letra A.

LISTA DE QUESTÕES - MULTIBANCAS

Módulo de um número real

Outras Bancas

1.(MS CONCURSOS/SEAD Passo Fundo/2016) Considere a função $f(x) = 1 - |x + 2|$.

O valor de $f(-3)$ é igual a:

a) –1

b) 0

c) 1

d) 2

2.(ISAE/PM AM/2011) Se $f(x) = |x - 3| - |2 - x|$ então $f(-2)$ é igual a:

a) -1;

b) 0;

c) 1;

d) 2.

3. (DIRENS/EEAR/2012) Seja a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |2x^2 - 3|$. O valor de $1 + f(-1)$ é

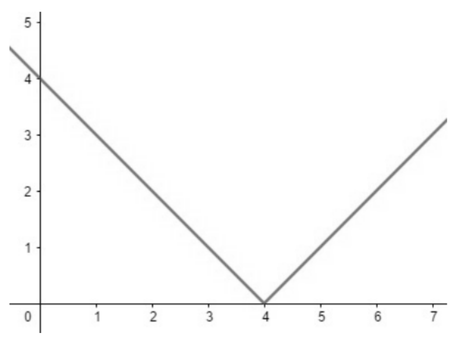
a) –1

b) 0

c) 1

d) 2

4.(FAFIPA/Pref. Arapongas/2020) Considere a função real $f(x) = |x - 4|$ que também pode ser representada pelo gráfico abaixo e assinale a alternativa CORRETA.



a) $f(-1) = -5$.

b) $f(-3) + f(3) = 0$.

c) $f(-2) = f(10)$.

d) $f(4) = f(-4)$.

e) $f(0) = -4$.

5. (Instituto AOCP/IBC/2013) Quando $x \leq 2$, então $|x-2| + |3-x|$ é igual a:

a) 5

b) $2x - 5$

c) 2

d) $x + 2$

e) $-2x + 5$

6.(CSC IFPA/IF PA/2019) Usando a definição de função modular, podemos concluir com relação à função $f: [0;2] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = |x^2 - 2x| + |x-1|$ que:

a) $x^2 + x + 1$ se $0 \leq x \leq 1$

b) $-x^2 - x + 1$ se $0 \leq x \leq 1$

c) $-x^2 - x + 1$ se $1 \leq x \leq 2$

d) $-x^2 + 3x + 1$ se $1 \leq x \leq 2$

e) $-x^2 + 3x + 1$ se $1 \leq x \leq 2$

7.(CESGRANRIO/TRANSPETRO/2011) Sendo $y = \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} + \frac{|d|}{d}$, onde a, b, c e d são números reais diferentes de zero, qual o número de valores possíveis para y?

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

8.(INAZ do Pará/CRO RJ/2016) O valor da expressão $\sqrt{(x-3)^2}$, para $0 \leq x < 3$ será:

a) x−3

b) 3−x

c) x

d) 3

e) x−1

9. (ESAF/Pref. RJ/2010) Considere a e b números reais. A única opção falsa é:

a) $|a+b| \leq |a| + |b|$

b) $|a| + |b| \geq |a-b|$

c) $|a-b| < |a| - |b|$

d) $|b-a| \geq |b| - |a|$

e) $|b+a| \leq |a| + |b|$

Gabarito - Multibancas

Módulo de um número real

1. LETRA B
2. LETRA C
3. LETRA D
4. LETRA C
5. LETRA E
6. LETRA E
7. LETRA E
8. LETRA B
9. LETRA C

Lista de Questões - Multibancas

Equações modulares

Outras Bancas

1.(IAUPE/Pref. Caetés/2018) No campo dos números reais, o conjunto verdade da equação $|3x-1|=4$ é:

a) $V=\{1\}$

b) $V=\{-1\}$

c) $V=\left\{-\frac{5}{3}\right\}$

d) $V=\left\{\frac{5}{3}\right\}$

e) $V=\left\{-1,\frac{5}{3}\right\}$

2.(Instituto AOCP/IBC/2013) O conjunto solução da equação $|2x+3|=7$ é

a) $\{-2,5\}$

b) $\{2\}$

c) $\{-5\}$

d) $\{-5,2\}$

e) $\emptyset$

3.(CONSEP/Pref. Ribamar Fiquene/2011) Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\left|\frac{x-1}{2}+\frac{1}{4}\right|=1$ e assinale a alternativa correta.

a) x = 2/3 ou x = 0

b) x = 5/2 ou x = −3/2

c) x = - 2 ou x = 3

d) x = 0 ou x = −1

4.(DIRENS/EEAR/2018) Seja $f(x)=|\,3x-4\,|$ uma função. Sendo $a\neq b$ e $f(a)=f(b)=6$, então o valor de a + b é igual a

a) 5/3

b) 8/3

c) 5

d) 3

5.(CEV URCA/Pref. Brejo Santo/2019) A soma das raízes distintas da equação modular $|x^2 - 2x| = 1$ é

a) 3

b) 2

c) $2 + \sqrt{2}$

d) 4

e) $3 - \sqrt{2}$

6.(DIRENS/EEAR/2018) Dada a equação $|x^2 - 2x - 4| = 4$, a soma dos elementos do conjunto solução é

a) 4

b) 6

c) 8

d) 10

7.(FUNDATEC/ESE/2019) Analise a seguinte equação modular:

$$|4x - 3| = x$$

A soma de suas soluções é:

a) 1.

b) 0.

c) 3/5.

d) −3/5.

e) 8/5.

8.(MS CONCURSOS/SEAD Passo Fundo/2016) Assinale a alternativa que contém a solução da equação $|x| = 4 + x$:

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \,/ -5 < x < -1\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 < x < 5\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \,/ -1 < x < 5\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} / -5 < x < -3\}$

9.(FAUEL/IF PR/2015) O conjunto solução da equação $|x| = x - 5$ é igual a:

a) $S = \emptyset$.

b) $S = \{0\}$.

c) $S = \{5\}$.

d) $S = \{0, 1\}$.

e) $S = \{0, 5\}$.

10.(COPESE-UFT/Pref. Gurupi/2014) Encontre o conjunto solução para a seguinte equação modular: $|x|^2 + 2|x| - 15 = 0$.

a) $\{3, -3\}$

b) $\{3, -5\}$

c) $\{-5, -3, 3\}$

d) $\{-5, -3, 3, 5\}$

11.(FUNDEP/Pref. Ibirité/2016) O número de soluções reais da equação $|2x - 3| + 2 = |x + 4|$ é:

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) 3.

12.(FAFIPA/FA/2017) Resolva, no conjunto dos números reais, $|2x - 5| - |x + 3| = 8$.

a) $S = \{-2\}$

b) $S = \{16\}$

c) Não admite solução real

d) $S = \{-2;\ 16\}$

13.(CEV URCA/URCA/2019) O conjunto solução da equação $|x - 2| + |x - 3| = 1$ é:

a) $\{2\}$

b) $\{3\}$

c) $\{2{,}3\}$

d) $[2{,}3]$

e) $[0{,}3]$

14.(DIRENS/EEAR/2016) Seja $f(x) = |x - 3|$ uma função. A soma dos valores de x para os quais a função assume o valor 2 é

a) 3

b) 4

c) 6

d) 7

15.(CSEP IFPI/IF PI/2019) Os valores de x que satisfazem a equação $f(x) = 0$, onde $f(x) = |x|^2 - |x| - 6$ são números reais. A soma das raízes de $f(x) = 0$ é:

a) −1.

b) 0.

c) 1.

d) 2.

e) 3.

16.(MÉTODO/Pref. NB d'Oeste/2021) Determine as raízes da função modular abaixo.

$$f(x) = |x - 3| - 3$$

a) $x = -3$

b) $x = -6$

c) $x = -6$ e $x = 6$

d) $x = 6$ e $x = 0$

17.(AOCP/Pref. Feira de Santana/2018) Dada a função modular $f(x) = |x - 3| - 5$, as raízes dessa função serão iguais a

a) – 2 e 8.

b) – 8 e 2.

c) – 2 e – 8.

d) 2 e 8.

e) – 8 e 8.

18.(EDUCA PB/Pref. Várzea/2019) Dada a função $g(x) = |2x + 1| - 5$, a soma dos quadrados de suas raízes é:

a) 4

b) 9

c) 10

d) 12

e) 13

19.(EDUCA PB/Pref. Cabedelo/2020) Considere as funções reais $f(x) = |x - 3|$ e $g(x) = 5$, e a equação $f(x) - g(x) = 0$ de raízes a e b $(a > b)$. O valor do quociente entre a e b é igual a:

a) −4

b) −0,25

c) 4

d) 0,25

e) −2

20.(DES IFSUL/IF SUL/2010) A soma das abscissas dos pontos de intersecção das funções $f(x) = x$ e $g(x) = | x^2 - 1 |$ é o número real "b" tal que

a) $b = -\sqrt{5}$

b) $b = 0$

c) $b = 1$

d) $b = \sqrt{5}$

21.(CEV URCA/URCA/2017) A soma das raízes da função $f(x) = |5x - 2| + |x + 1| - 5$ é igual a:

a) −1

b) −1/4

c) 0

d) 1

e) 1/2

Gabarito - Multibancas

Equações modulares

1. LETRA E
2. LETRA D
3. LETRA B
4. LETRA B
5. LETRA A
6. LETRA A
7. LETRA E
8. LETRA A
9. LETRA A
10. LETRA A
11. LETRA C
12. LETRA D
13. LETRA D
14. LETRA C
15. LETRA B
16. LETRA D
17. LETRA A
18. LETRA E
19. LETRA A
20. LETRA D
21. LETRA E

LISTA DE QUESTÕES - MULTIBANCAS

Inequações modulares

FGV

1.(FGV/CBM-RJ/2022) Considere a desigualdade $|3x - 2| < 10$.

O número de valores inteiros de x que satisfazem a desigualdade dada é

a) 4.

b) 5.

c) 6.

d) 7.

e) 8.

2.(FGV/SEAD-AP/2022) O número de valores inteiros de x que satisfazem a desigualdade $|3x| < 4\pi$ é

a) 9.

b) 8.

c) 7.

d) 6.

e) 5.

3.(FGV/Pref. Paulínia/2021) A soma dos valores inteiros pares de x que satisfazem $|x + 2| < 4\pi$ é:

a) −26.

b) −12.

c) 0.

d) 14.

e) 22.

Cebraspe

4.(CESPE/Pref. São Luís/2017) Se $x \geq 0$ representa a quantidade de quilômetros percorridos por um veículo em determinado dia, então:

• $f(x) = \frac{x}{12}$ representa a quantidade de litros de combustível consumido pelo veículo para percorrer x quilômetros;

• $g(x) = 60 - \frac{x}{12}$ representa a quantidade de litros de combustível que restam no tanque do veículo depois de percorridos x quilômetros.

Considerando as funções $f(x)$ e $g(x)$ definidas, se x é tal que $|f(x) - g(x)| \leq 5$, então

a) x > 450.

b) x < 270.

c) 270 ≤ x < 330.

d) 330 ≤ x ≤ 390.

e) 390 < x ≤ 450.

5.(CESPE/IFF/2018) O conjunto dos números reais x para os quais $6 < |\,2x - 6| \leq 10$ é

a) [2, 0) ∪ (6, 8].

b) (∞, 0) ∪ (6, + ∞).

c) (∞, 2] ∪ (6, 8].

d) [2, 8].

e) (6, + ∞).

Vunesp

6.(VUNESP/UNESP/2012) No conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, o conjunto solução S da inequação modular $|x|.|x - 5| \geq 6$ é:

a) $S = \{x \in \mathbb{R}/-1 \leq x \leq 6\}$.

b) $S = \{x \in \mathbb{R}/x \leq -1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3\}$.

c) $S = \{x \in \mathbb{R}/x \leq -1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3 \text{ ou } x \geq 6\}$.

d) $S = \{x \in \mathbb{R}/x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3\}$.

e) $S = \mathbb{R}$.

7.(VUNESP/Pref. SBC/2010) Um professor de matemática da EJA propôs a resolução de um problema. Nele era procurado um número par, e o professor chamou esse número de x. Trabalhando com uma condição fornecida pelo problema, um aluno chegou à conclusão de que deveria ocorrer a inequação $|3x - 2| < 10$. Trabalhando com outra condição fornecida pelo problema, outro aluno apresentou a inequação $|5 - 2x| < 5$. O professor disse que os dois alunos haviam acertado o problema. Que valor tinha x nesse problema?

a) –4.

b) –2.

c) 0.

d) 2.

e) 4.

Outras Bancas

8.(IMPARH/SME Fortaleza/2018) A função modular é definida no conjunto dos números reais, de modo que para um número real x temos:

$$|x| = \begin{cases} -x, x < 0 \\ x, x \geq 0 \end{cases}$$

Desse modo, a desigualdade $|x| \leq 3$ é equivalente a:

a) $x \leq 3$

b) $x \leq -3$

c) $x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3$

d) $-3 \leq x \leq 3$

9.(DIRENS/EEAR/2020) Seja a inequação $|-2x + 6| \leq 4$, no conjunto dos números reais. A quantidade de números inteiros contidos em seu conjunto solução é ____ .

a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

10.(DIRENS/EEAR/2009) Seja a inequação $|x-1| \leq 3$. A soma dos números inteiros que satisfazem essa inequação é

a) 8.

b) 7.

c) 5.

d) 4.

11.(AOCP/Pref. Feira de Santana/2018) Seja $f(x)$ uma função real definida por:

$$\begin{cases} x+6, \quad \text{para } x \leq 10, \\ 16, \text{para } 10 < x < 18 \\ -|x-14|+20, \text{para } x \geq 18 \end{cases}$$

Os valores de x, tais que $f(x) < 0$, são:

a)]−∞,−0[∪[1,+∞[

b)]−∞,−34[

c)]−∞,−12[∪[10,+∞[

d)]−∞,−6[∪]34,+∞[

e) [34,+∞[

12.(DECEx/ESA/2020) A solução da inequação $|3x - 10| \leq 2x$ é dada por:

a) $\mathrm{S} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq 10\}$.

b) $S = \emptyset$.

c) $\mathrm{S} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2 \leq x \leq 10\}$.

d) $\mathrm{S} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 2\}$.

e) $\mathrm{S} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq 2 \text{ ou } x \geq 10\}$.

13.(CS UFG/Pref. Goiânia/2016) Para um determinado valor da constante k, a inequação modular $|x+1| \leq |k - x/2|$ possui uma única solução real na incógnita x. Qual é o valor da constante k que satisfaz a propriedade citada?

a) 4

b) −1

c) 5/3

d) −1/2

GABARITO - MULTIBANCAS

Inequações modulares

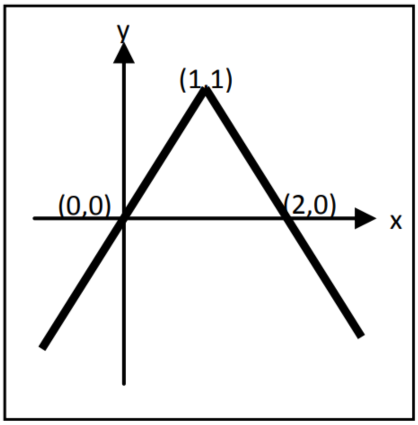
1. LETRA C
2. LETRA A
3. LETRA A
4. LETRA D
5. LETRA A
6. LETRA C
7. LETRA D
8. LETRA D
9. LETRA C
10. LETRA B
11. LETRA D
12. LETRA C
13. LETRA D

Lista de Questões - Multibancas

Função modular

FGV

1.(FGV/Pref. Osasco/2014) Assinale a única função, dentre as opções seguintes, que pode estar representada no gráfico a seguir:



a) y = 1 – |x – 1|;

b) y = 1 – |x + 1|;

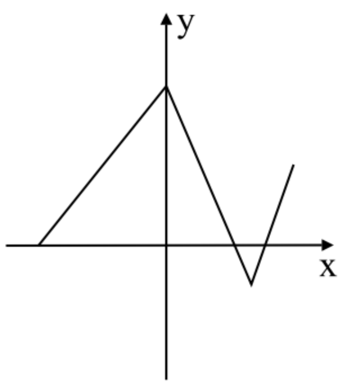
c) y = 1 + |x – 1|;

d) y = 1 + |x + 1|;

e) y = |x – 1| + |x + 1|.

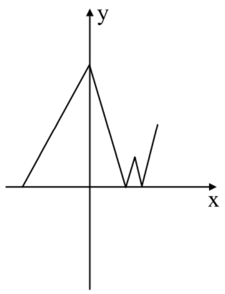
Vunesp

2.(VUNESP/PM SP/2011) Seja f uma função cujo gráfico está representado a seguir.

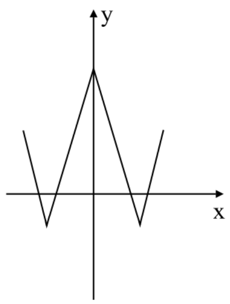


A figura que representa o gráfico da função $g(x) = f(|x|)$ é:

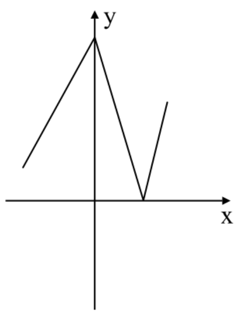
a)



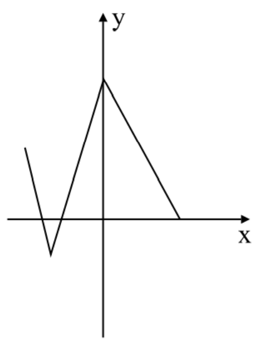
b)



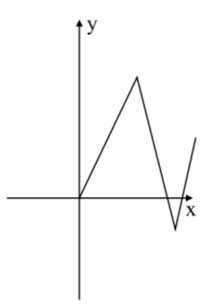
c)



d)



e)



Outras Bancas

3.(GUALIMP/CM Divino/2020) Dado que $f(x) = |x + 1|$, analise os itens abaixo.

I. Trata-se de uma função do 1º grau.

II. O domínio é o conjunto dos números reais positivos.

III. A imagem é o conjunto dos números reais positivos e o zero.

IV. Se $x = -3$, $f(x) = 2$.

Dos itens acima:

a) Apenas I está correto.

b) II e III estão corretos.

c) III e IV estão corretos.

d) Apenas IV está correto.

4.(IBFC/SEDUC MT/2017) Considere a função $f(x) = |x^2 - 5|$, cujo domínio é o conjunto dos números naturais. Assinale a alternativa que indica a qual o menor conjunto que irá pertencer o contradomínio desta função.

a) Números Naturais

b) Números Inteiros

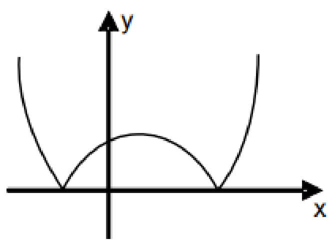
c) Números Racionais

d) Números Reais

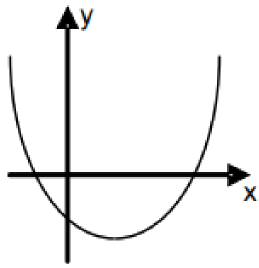
e) Números Complexos

5. (CS UFG/UFG/2012) O gráfico da função modular $f(x) = |ax^2 + bx + c|$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, tais que $b^2 > 4ac$ e $a > 0$, é:

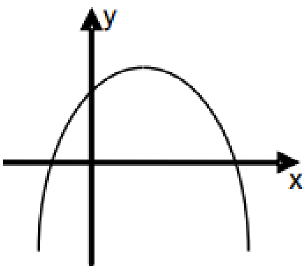
a)



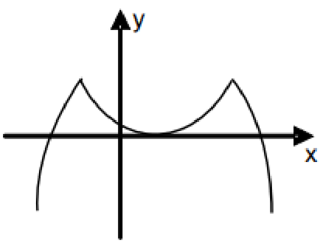
b)



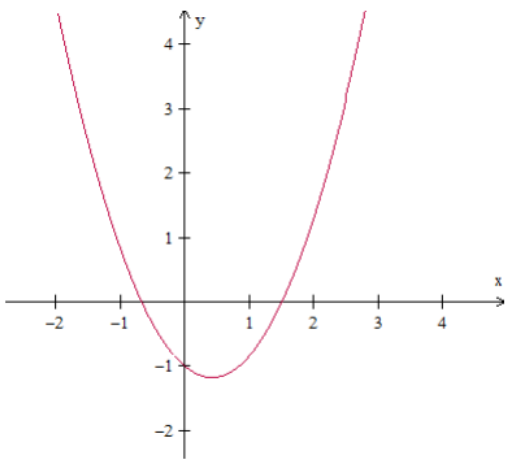
c)



d)

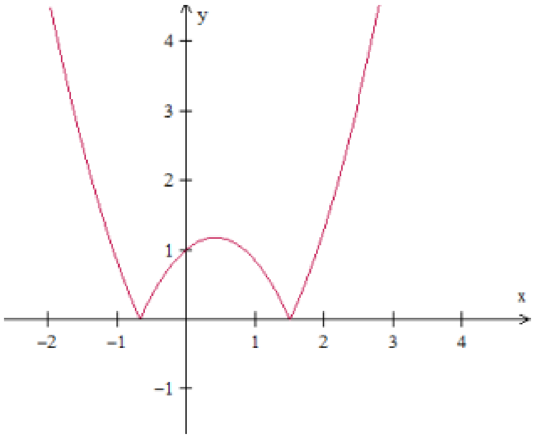


6.(FAEPESUL/ISS Gov. Celso Ramos/2017) Considere a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, cuja representação gráfica se encontra na figura abaixo:

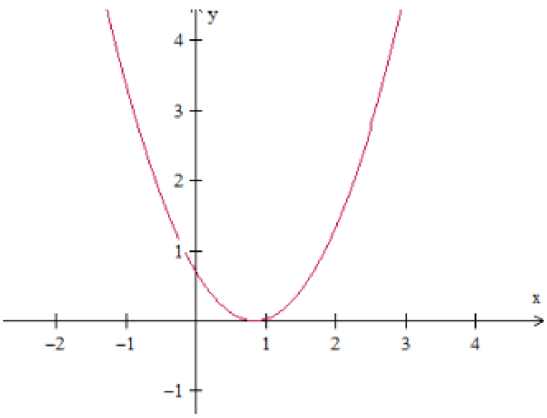


Nestas condições, a função g, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = |f(x)|$, é representada graficamente por:

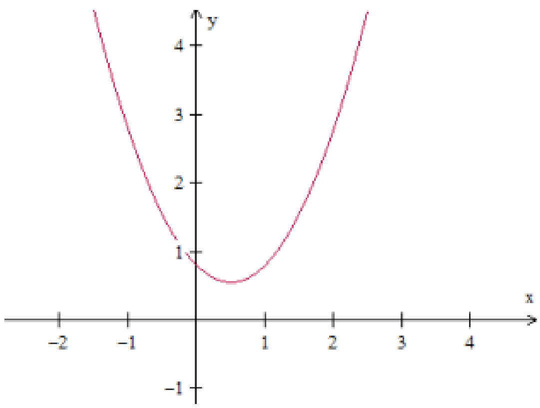
a)



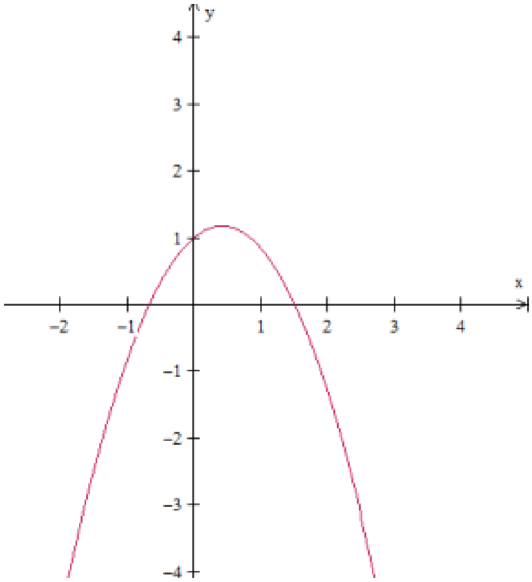
b)



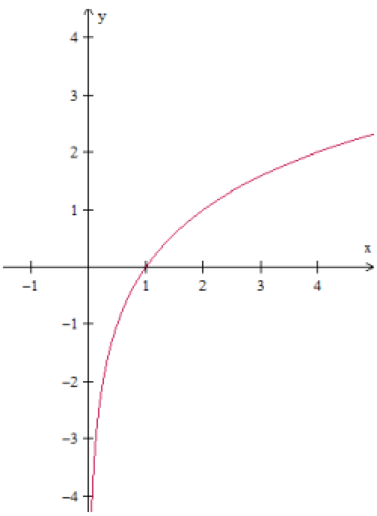
c)



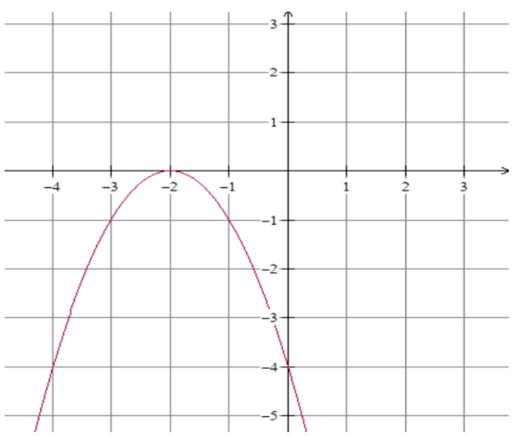
d)



e)

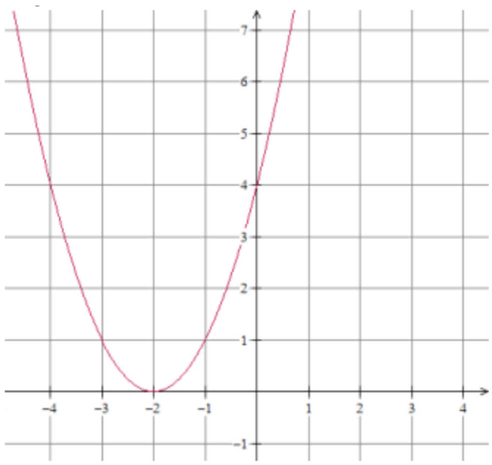


7.(FAEPESUL/Pref. São João Batista SC/2018) Considere a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais, cuja representação gráfica se encontra na figura abaixo:

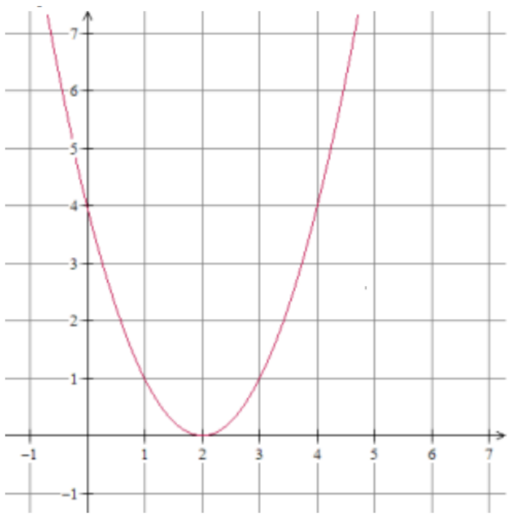


Assinale a alternativa que contém a representação gráfica da função g, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = |f(x)|$.

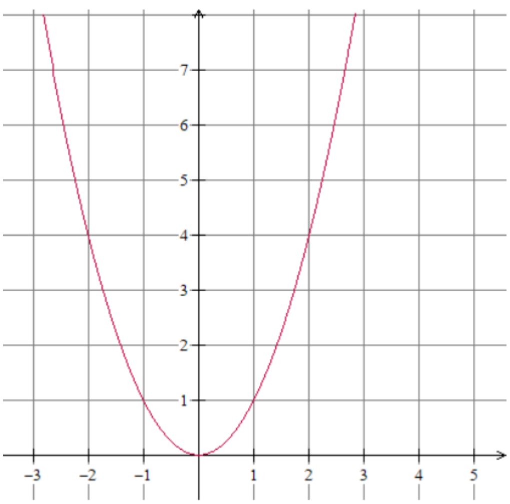
a)



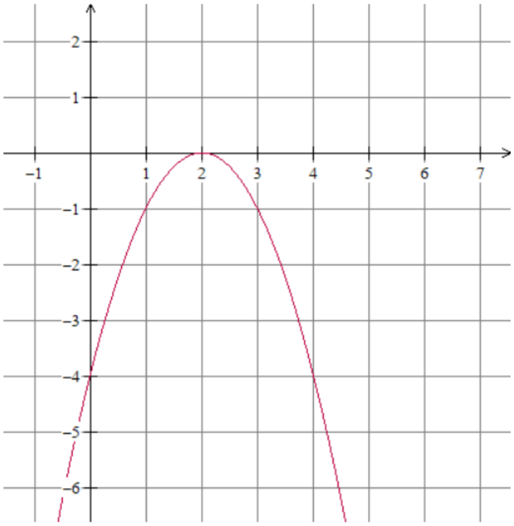
b)



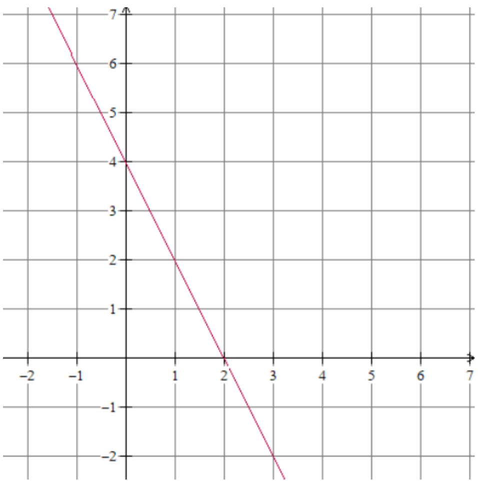
c)



d)

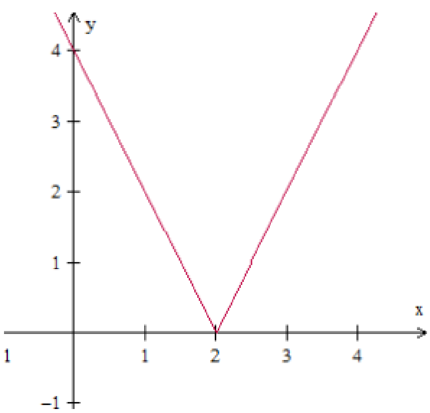


e)

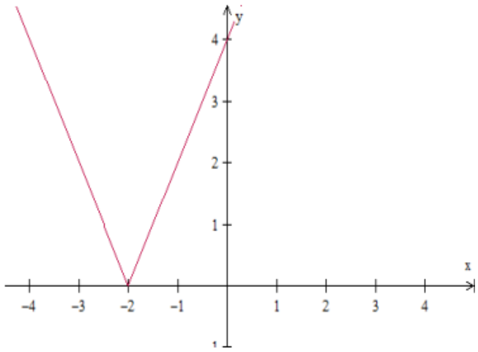


8.(FAEPESUL/Pref. Araranguá/2016) Assinale a alternativa em que apresenta o gráfico da função f definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ em que $y = f(x) = |2x - 4|$.

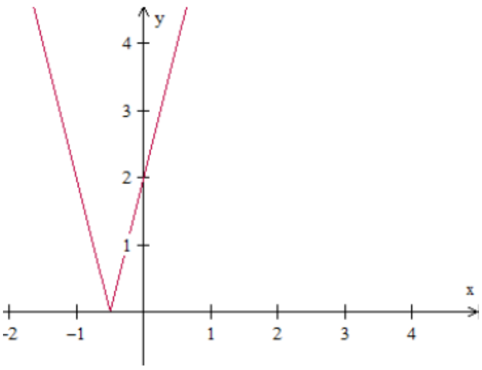
a)



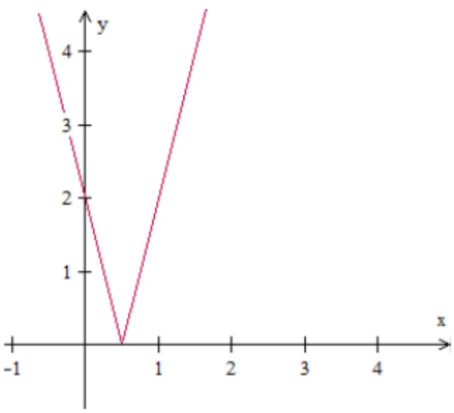
b)



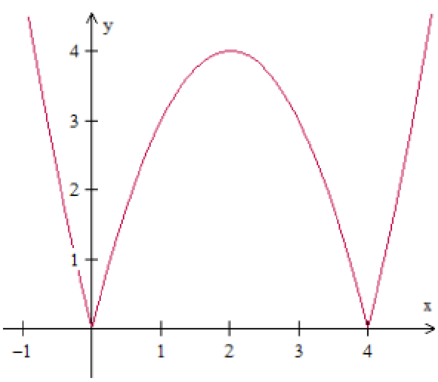
c)



d)



e)



9.(IDIB/CRM MT/2020) A partir do gráfico função modular $f(x) = |x|$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, assinale a alternativa que apresenta uma função g que representa a translação de f para a esquerda no eixo "x".

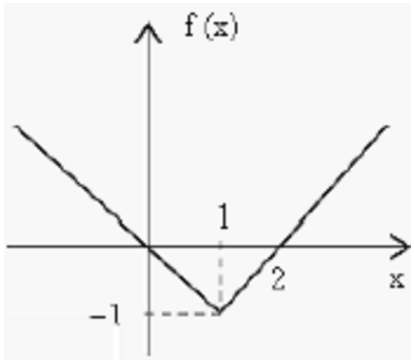
a) $g(x) = |x + 1|$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) $g(x) = |x - 1|$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

c) $g(x) = |x| + 1$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

d) $g(x) = |x| - 1$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

10.(GUALIMP/Pref. Porciúncula/2019) A função que originou o gráfico a seguir trata-se de uma função:



a) Logarítmica.

b) Delta.

c) Modular.

d) Quadrática.

11.(DIRENS/EEAR/2010) A função modular $f(x) = |x - 2|$ é decrescente para todo x real tal que

a) $0 < x < 4$.

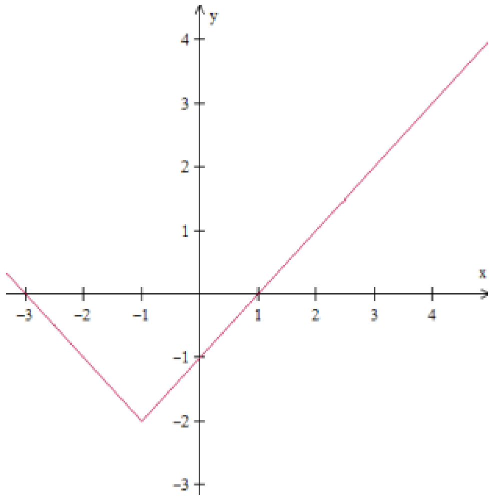
b) $x > 0$.

c) $x > 4$.

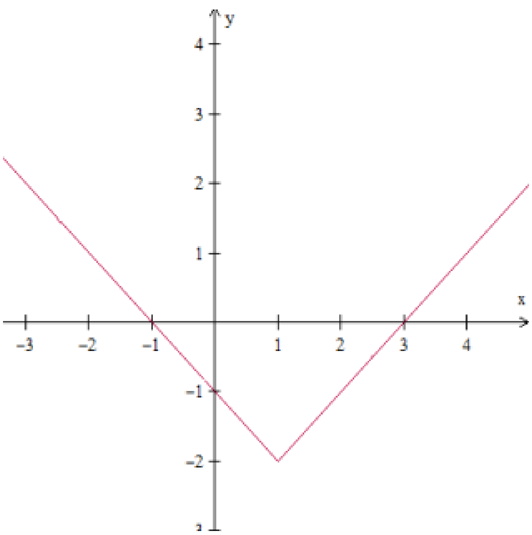
d) $x \leq 2$.

12. (FAEPESUL/Pref. Araranguá/2016) Assinale a alternativa que apresenta o gráfico da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x+1| - 2$.

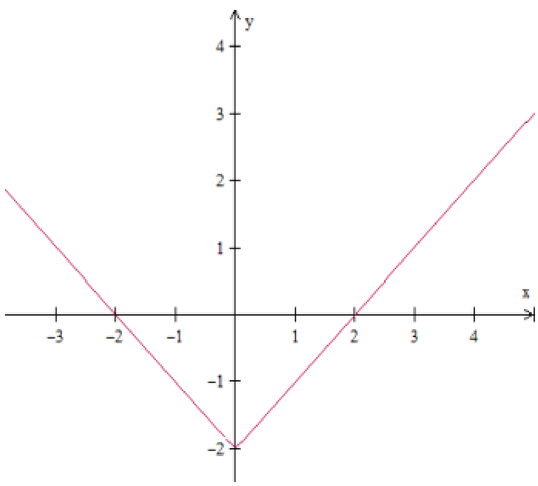
a)



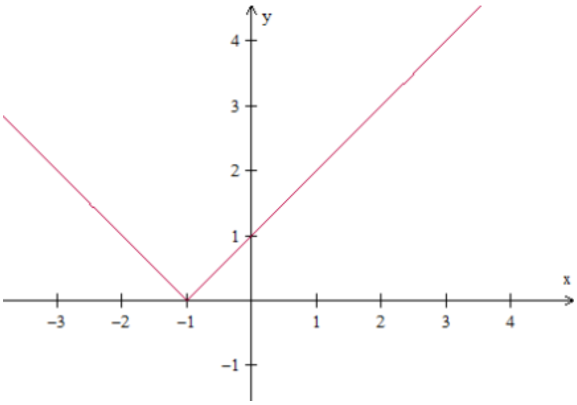
b)



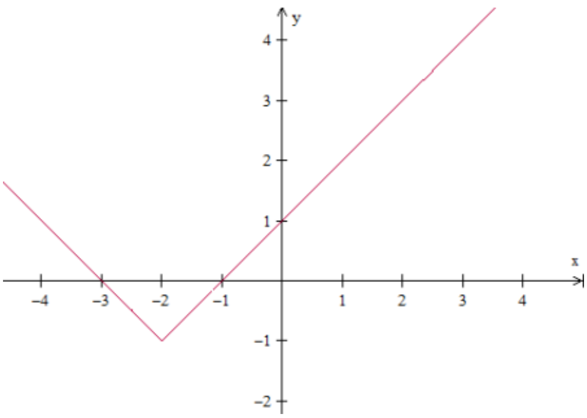
c)



d)

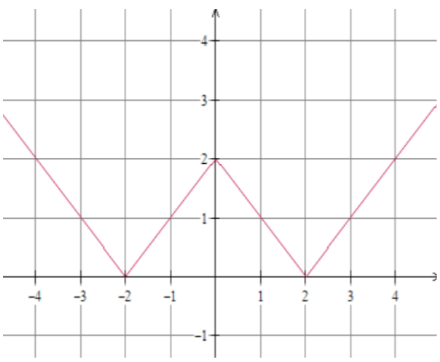


e)

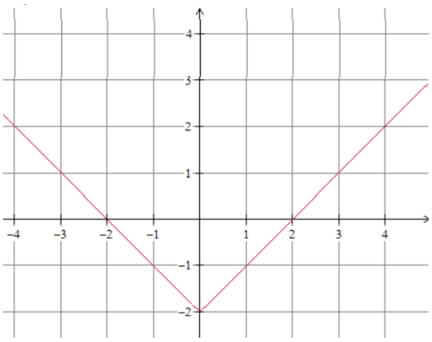


13. (FAEPESUL/Pref. São João Batista SC/2018) Assinale a alternativa que apresenta o gráfico da função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ||x| - 2|$.

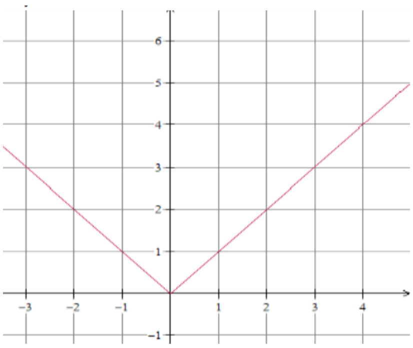
a)



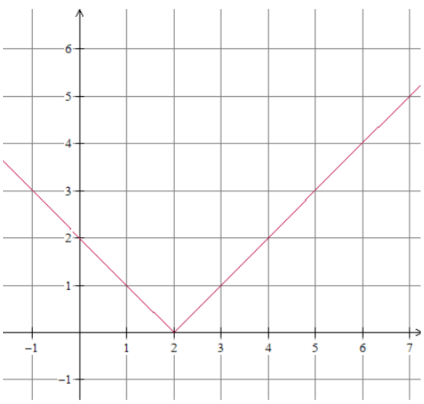
b)



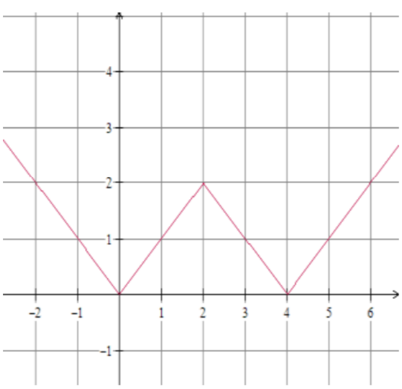
c)



d)



e)



GABARITO - MULTIBANCAS

Função modular

1. LETRA A
2. LETRA B
3. LETRA C
4. LETRA A
5. LETRA A
6. LETRA A
7. LETRA A
8. LETRA A
9. LETRA A
10. LETRA C
11. LETRA D
12. LETRA A
13. LETRA A

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:

PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.