@mapasdalulu

MATRIZES

REPRESENTAÇÃO

- Matriz m x n = tabela retangular formada por números reais distribuídos em:
  - m linhas
  - n colunas

$$\begin{array}{c} \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \dots & z \\ \dots & \dots & \dots \\ k & \dots & j \end{bmatrix}}_{n} \end{array} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} a \\ \dots \\ k \end{bmatrix}}\right\} m$$

- Elemento = a_{ij}

$\mathcal{M} = (a_{ij})\,.\,m\ x\ n$ (Linha i coluna j)

MATRIZES ESPECIAIS

RETANGULAR

= m ≠ n

QUADRADA

= m = n → matriz quadrada de ordem n

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

diagonal secundária

diagonal principal

Traço = soma dos elementos da diagonal principal

LINHA

- m = 1

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \dots & z \end{bmatrix}}_{n}$$

COLUNA

- n = 1

$$\left.\begin{bmatrix} a \\ b \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix}\right\} m$$

MATRIZES ESPECIAIS

DIAGONAL

= matriz quadrada cujos elementos que não pertencem à diagonal principal são nulos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

IDENTIDADE

= matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_n = matriz\ identidade\ de\ ordem\ n$$

ESCALAR

= matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são iguais

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

NULA

= todos seus elementos são nulos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRIZES

MATRIZES ESPECIAIS (continuação)

MATRIZ SIMÉTRICA

= Matriz quadrada de ordem n tal que $a_{ij} = a_{ji}$, para todo i e todo j

- A diagonal principal atua como um eixo de simetria (não há restrição aos elementos da diagonal principal)

$$\begin{bmatrix} 9 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ ANTI-SIMÉTRICA

= Matriz quadrada de ordem n tal que $a_{ij} = -a_{ji}$, para todo i e todo j

- A diagonal principal deve ser formada por zeros

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 9 \\ -3 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRIZ OPOSTA

= Quando a soma das duas matrizes resulta em uma matriz nula

- A + B= Matriz Nula

$$a_{ij} = -b_{ij}$$

- A matriz oposta de A é -A

TRIANGULAR SUPERIOR

= Matriz quadrada em que todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos (a_{ij}=0, para i > j)

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TRIANGULAR INFERIOR

= Matriz quadrada em que todos os elementos acima da diagonal principal são nulos (a_{ij}=0, para i < j)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZES

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE MATRIZES

- Só se da entre matrizes do mesmo tipo (Mesmo número de linhas e colunas)
- O resultado também é uma matriz do mesmo tipo

C= A +B

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Faz-se a operação termo a termo

PROPRIEDADES

- (A + B) + C = A+ (B + C)

  A + B = B + A

- É o equivalente para a subtração

  C = A – B

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

- Ex.:

$$\begin{bmatrix} 9 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 4 \\ 11 & 6 & 7 \\ 2 & 14 & 5 \end{bmatrix}$$

PRODUTO DE UM NÚMERO POR MATRIZ

- Para multiplicar uma matriz A por um número real k, basta multiplicar **todos os elementos** de A (a_{ij}) por k
- Ex.:

k=3

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow k.A =$$

$$= 3\,.\begin{bmatrix} 9 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 24 & 0 \\ 24 & 12 & 21 \\ 0 & 21 & 3 \end{bmatrix}$$

MATRIZES

MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

- Para multiplicar duas matrizes A, B, é necessário que o número de colunas de A seja igual ao de linhas de B

$$A_{m \times \underbrace{n} \times B_{n} \times p}$$

as dimensões do meio devem coincidir

ATENÇÃO! Nem sempre é possível multiplicar duas matrizes

DIMENSÕES DA MATRIZ RESULTANTE

$$\underbrace{A\ m \times n \times B\ n \times p} = C\ m \times p$$

As dimensões das extremidades vão para a matriz resultante

- Ex.:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{2x4} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 3 & -3 & -4 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{4x3} = \underbrace{\begin{bmatrix} 15 & 28 & 39 \\ 1 & 21 & 28 \end{bmatrix}}_{2x3}$$

= 1.1 +3.0+(-2).3 +5.4
=1+0+(-6)+20=15

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} . a_{rj}}$$

PROPRIEDADES

- (A . B) . C = A . (B . C) (Associativa)
- (A + B) . C = A . C + B . C (Distributiva em relação à adição)
- (kA) . B = A(kB) = k . (A . B)
- I . A = A . I = A (Sendo A uma matriz quadrada)

A matriz identidade é o elemento neutro da multiplicação de matrizes quadradas

POTENCIALIZAÇÃO DE MATRIZES

$$A^n = \underbrace{A . A . A ... A}_{\text{n fatores}}$$

- $A^1 = A$
- $A^0 = 1$

@mapasdalulu

MATRIZES

MATRIZ TRANSPOSTA

- Seja $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$, sua transposta será ${A^t}_{n\,x\,m}$ a matriz que se obtém trocando as linhas pelas colunas
- Ex.:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}}_{A} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}}_{A^t}$$

PROPRIEDADES

DECORE!

- $(A^t)^t = A$
- $(A + B)^t = A^t + B^t$ (Sendo A e B matrizes do mesmo tipo)
- $(k.A)^t = k.A^t$
- $(A.B)^t = A^t.B^t$ (Sendo A e B matrizes que podem ser multiplicadas)
- Matriz simétrica: $A^t = A$
- Matriz antissimétrica: $A^t = -A$

MATRIZES INVERSAS

- Seja A uma matriz quadrada de ordem n, e B sua inversa:

$$\boxed{A\,.\,B = B\,.\,A = I_n}$$

(B = A^{-1})

- Se A não é inversível = matriz singular

PROPRIEDADES

(Sendo A e B matrizes quadradas de mesma ordem e inversíveis)

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A.B)^{-1} = A^{-1}.B^{-1}$
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

- **MATRIZ ORTOGONAL** → se a inversa da matriz é igual a sua transposta. $(A^{-1} = A^t)$