Sumário

Teoria dos Conjuntos

1. Conceito

Conjuntos → **É uma *coleção* de objetos ou elementos *bem definidos* que possuem *características em comum.***

2. Relação de pertinência

É aquela que existe **dos elementos com os conjuntos**. Cuidado, pois **não se trata de relações entre conjuntos**.

Se **x** é de elemento de um conjunto **A**, então dizemos que **x pertence ao conjunto A** e podemos representar assim:

$$x \in A$$

Por outro lado, se **x** não é um elemento de **A**, então dizemos que **x não pertence ao conjunto A** e podemos representar assim:

$$x \notin A$$

3. Representação de um conjunto e de seus elementos

3.1. Representação por enumeração

Na **representação por enumeração** são alistados entre colchetes os elementos de um conjunto, apresentados, um após o outro, separados por vírgula. Exemplos:

1) O conjunto A dos números pares maiores do que 100:

A = {102, 104, 106, 108, ...} → Conjunto infinito

2) O conjunto B dos números ímpares positivos menores do que 200:

B = {1, 3, 5, 7, 9, ..., 199} → Conjunto finito

3.2. Repreensão por propriedade

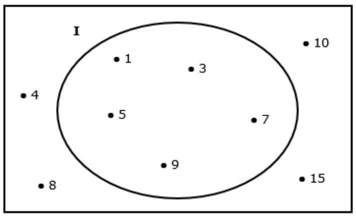
Trata-se do método **mais formal** para definirmos um conjunto. Na **representação por propriedade**, os elementos são identificados por obedecerem a uma ou mais propriedades que são dadas numa expressão entre chaves, de forma que torne possível decidir se um objeto qualquer "x" pertence ou não ao conjunto em análise.

A título de exemplo, vamos definir o conjunto N dos números inteiros maiores do que 12:

$$N = \{x \mid x \in Z \; e \; x > 12\}$$

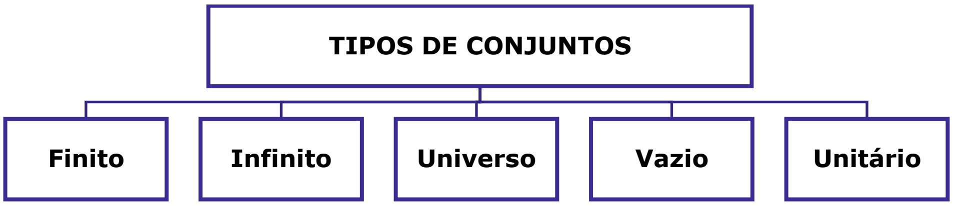
3.3. Representação por diagrama

Vamos representar, por meio de um **diagrama**, ou seja, de forma gráfica, o conjunto **I** dos números ímpares menores do que 10:



4. Tipos de conjuntos

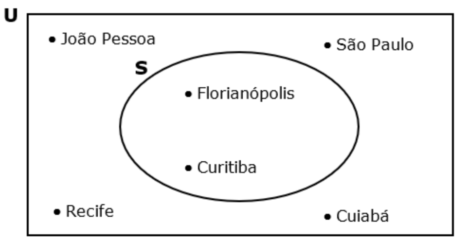
Os conjuntos podem ser divididos, a partir da quantidade de elementos que possuem, veja abaixo o esquema com os **tipos de conjuntos**:



4.1. Conjunto Universo

O **Conjunto Universo** é aquele em que consideramos que pertencem todos os elementos possíveis, e ele existe para evitar o aparecimento de paradoxos. O **Conjunto Universo** é representado por um retângulo e indicado pela letra **U**.

Veja o exemplo:



4.4. Conjunto Vazio

Esse é simples, pois se trata do conjuntos que **não possui elementos** e é representado simbolicamente por **Ø** ou por **{ }**.

4.5. Conjunto Unitário

Dizemos que um conjunto é **unitário** quando **possui apenas um elemento**.

5. Subconjuntos e Relação de Inclusão

Dizemos que o conjunto **B** é um **subconjunto** do conjunto **A** quando todos os elementos do conjunto **B** também são elementos de **A**.

$$B \subset A$$

Dizer que **B** está contido em **A** é o mesmo que afirmar que **A contém B**. Nesse caso, usamos a seguinte notação:

$$\boldsymbol{A \supset B}$$

5.1. Propriedades da relação de inclusão

A relação de inclusão tem algumas **propriedades**, as quais esquematizamos a seguir:

PROPRIEDADES DA INCLUSÃO

O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto	$\emptyset \subset A$, para qualquer conjunto A
Qualquer conjunto é subconjunto de si mesmo	$A \subset A$, para qualquer conjunto A
Conjuntos iguais são subconjuntos um do outro	Para $A = B$, temos: $A \subset B$ e $B \subset A$
Todo conjunto A é subconjunto do conjunto universo	$A \subset U$, para qualquer conjunto A
Relação transitiva	Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$

5.2. Quantidade de subconjuntos

Se um conjunto **A** possui **n** elementos, então ele possui **2^n subconjuntos**.

Se liga na propriedade:

Todo conjunto possuirá o **conjunto vazio** e **ele mesmo** como subconjuntos.

5.3. Conjunto das partes de um conjunto

Dado um conjunto **A** qualquer, chamamos de **conjunto das partes de A** o conjunto que **reúne todos os subconjuntos possíveis de A**, sendo simbolizado por **P(A),** você já sabe que a quantidade de elementos desse conjunto será dada por 2^n.

$$P(A) = \{x \mid x \subset A\}$$

6. Relação de Igualdade

Dizemos que dois conjuntos **A** e **B** são **iguais** quando **todos os elementos de A pertencem ao conjunto B e, reciprocamente, todos os elementos de B pertencem ao conjunto A**. Assim, basta que um elemento seja diferente para que não sejam idênticos.

$$A = B \leftrightarrow A \subset B \text{ e } B \subset A$$

Cuidado com essa dica abaixo:

> Na definição de **igualdade entre conjuntos** a ordem entre os elementos não interfere em nada. Por exemplo, os conjuntos {a; b; c; d} e {d; c; b; a} são <u>iguais</u>.

6.1. Propriedades da relação de igualdade

A relação de igualdade tem algumas **propriedades**, as quais esquematizamos a seguir:

PROPRIEDADES DA IGUALDADE	
Reflexiva	Todo conjunto é igual a ele próprio (A = A)
Simétrica	Na igualdade entre dois conjuntos não importa a ordem (A = B ↔ B = A)
Transitiva	Se A = B e B = C, então A = C

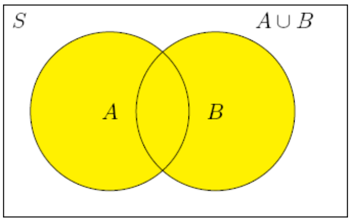
7. Operações entre conjuntos

7.1. União de Conjuntos

A **união** entre dois conjuntos, simbolizada por $\boldsymbol{A \cup B}$, é um outro conjunto formado pela **reunião dos elementos de A e de B**. Assim, os elementos serão todos os elementos de A e B, inclusive os da interseção, que vão aparecer apenas uma vez, é óbvio.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Note que todo elemento **x** compreendido pelo conjunto união deve pertencer a **pelo menos um dos conjuntos**. A **representação gráfica** da união entre dois conjuntos é dada pelo seguinte diagrama:



7.1.1. Propriedades da União

Propriedades da União

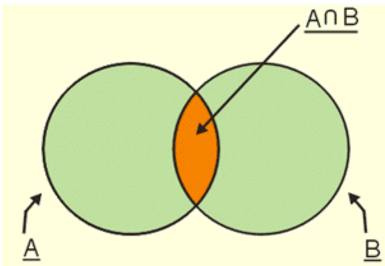
A ordem dos conjuntos não altera o resultado	A ∪ B = B ∪ A
Associatividade	(A ∪ B) ∪ C = A ∪ (B ∪ C)
A união de A com B será o proprio conjunto B se e somente se A é subconjunto de B	(A ∪ B) = B ⟷ A ⊂ B
A união de A com o conjunto vazio é sempre o próprio A	(A ∪ ∅) = A

7.2. Interseção de Conjuntos

A interseção entre dois conjuntos, **A ∩ B**, é o conjunto formado pelos **elementos que são comuns aos dois conjuntos**. Simbolicamente temos:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

A **representação gráfica** da interseção entre dois conjuntos é dada pelo seguinte desenho:



7.2.1. Conjuntos Disjuntos

Dois conjuntos quaisquer são chamados **disjuntos** se e somente se sua **interseção é o conjunto vazio**. Assim, não aqueles que não possuem nenhum elemento que pertence a ambos.

$$A \text{ e } B \text{ são disjuntos} \leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

7.2.2. Propriedades da Interseção

A operação de interseção entre conjuntos possui algumas **propriedades**, as quais esquematizamos a seguir:

Propriedades da Interseção

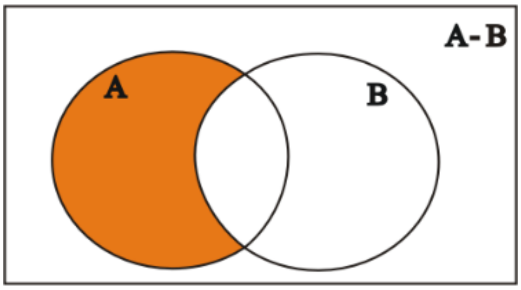
A ordem dos conjuntos não altera o resultado	$A \cap B = B \cap A$
Associatividade	$(A \cap B) \cap C$ $=$ $A \cap (B \cap C)$
A interseção de A com B será o proprio conjunto A se e somente se A é subconjunto de B	$(A \cap B) = A$ $\boxed{\leftrightarrow}$ $A \subset B$
A interseção de A com o conjunto vazio é sempre o conjunto vazio	$(A \cap \emptyset) = \cap$

7.3. Diferença de Conjuntos

A diferença entre dois conjuntos, **A – B**, é o conjunto formado pelos **elementos de A que não pertencem a B**. É tudo que está no primeiro e não está no segundo, ou seja, é o conjunto A menos a interseção.

$$\boldsymbol{A - B = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}}$$

A **representação gráfica** da diferença entre dois conjuntos (A – B) é dada pelo seguinte desenho:



7.3.1. Propriedades da Diferença

A operação de diferença entre conjuntos possui algumas **propriedades**, as quais esquematizamos a seguir:

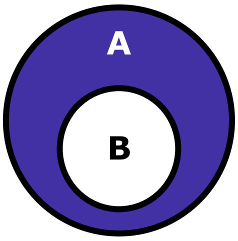
Propriedades da Diferença		
	A ordem dos conjuntos normalmente altera o resultado	$A - B \neq B - A$ (sempre que $A \neq B$)
	Não é associativa	$(A - B) - C \neq A - (B - C)$
	A diferença A - B é o conjunto vazio se e somente se A é subconjunto de B	$A - B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B$

7.3.2. Complementar de um conjunto

O complementar de um conjunto é um caso particular da diferença entre dois conjuntos. Assim, dados dois conjuntos **A** e **B**, com **B ⊂ A**, **a diferença A - B chama-se complementar de B em relação a A**. Simboliza-se:

$$\boldsymbol{C_A^B = \overline{B} = A - B}$$

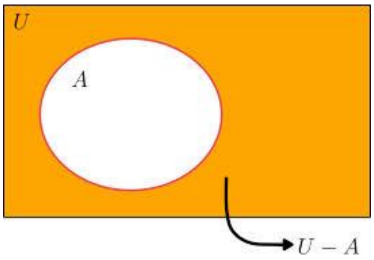
A **representação gráfica** do complemento do conjunto **B** em relação ao conjunto **A** é dada pelo seguinte desenho:



Cuidado com o **complementar de um conjunto A em relação ao conjunto universo U**. Batizamos este conjunto de **A'**, que é formado por <u>**todos os elementos que não pertencem ao conjunto A**</u>, ou seja:

$$\boldsymbol{C_U^A = A' = U - A = \{x \mid x \notin A\}}$$

A **representação gráfica** do complemento do conjunto **A** em relação ao conjunto Universo é dada pelo seguinte desenho:



7.3.2.1. Propriedades do Complementar de um Conjunto

A operação de complementar de um conjunto possui algumas **propriedades**, as quais esquematizamos a seguir:

PROPRIEDADES DO COMPLEMENTO		
	O complemento de um conjunto A em relação a ele próprio é o conjunto vazio	$C_A^A = \emptyset$
	O complemento do conjunto vazio em relação a um conjunto A é o próprio conjunto A	$C_A^{\emptyset} = A$
	O complemento do complemento de um conjunto A é o próprio conjunto	$\bar{\bar{A}} = A$
	1ª Lei de Morgan O complementar da União de dois ou mais conjuntos é a Interseção dos complementares desses mesmos conjuntos	$(\overline{A \cup B}) = \bar{A} \cap \bar{B}$
	2ª Lei de Morgan O complementar da Interseção de dois ou mais conjuntos é a União dos complementares desses mesmos conjuntos	$(\overline{A \cap B}) = \bar{A} \cup \bar{B}$

8. Número de elementos dos conjuntos

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$
$$\boldsymbol{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)}$$

Por fim, a equação abaixo nos mostra o número de elementos da diferença, de acordo com a conceituação que demos aqui no nosso resumo:

$$\boldsymbol{n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)}$$

9. Conjuntos Numéricos

9.1. Números Naturais

Os **números naturais** têm esse nome por serem aqueles mais intuitivos, de “contagem natural”. Simbolizamos por um $\mathbb{N}$ (**n** maiúsculo). Ele é formado por todos os números **inteiros não negativos**, tendo como primeiro elemento o **número zero**:

$$\mathbb{N} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \ldots\}$$

Um importante **subconjunto de** $\mathbb{N}$ é chamado de $\mathbb{N}^*$ e é dado por todos os **números naturais estritamente positivos**, ou seja, o conjunto $\mathbb{N}$ excluindo-se o zero, o asterisco simboliza a exclusão do número zero.

$$\mathbb{N}^* = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \ldots\}$$

9.2. Números Inteiros

Os **números inteiros** são os **números naturais e seus respectivos simétricos** (negativos). Inclusive o número zero faz parte dos inteiros, por definição. Simbolizamos por um $\mathbb{Z}$ (z maiúsculo).

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -\mathbf{4}, -\mathbf{3}, -\mathbf{2}, -\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4} \ldots\}$$

Observe que todos os elementos do conjunto dos números naturais também pertencem ao conjunto Z, de modo que **$\mathbb{N}$ é um subconjunto de $\mathbb{Z}$, uma vez que os inteiros contêm os naturais**:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

9.3. Números Racionais

O conjunto dos **números racionais** abrange os **quocientes** ou resultados de divisões entre números inteiros, daí a origem do seu símbolo $\mathbb{Q}$ (**q** maiúsculo).

Dessa maneira, os elementos deste conjunto **podem ser representados na forma de fração em que os dois são números inteiros**. Isto é, são aqueles números que podem ser escritos na forma $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ (lê-se: a dividido por b), em que **a** e **b** são números inteiros.

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Portanto, agora podemos definir formalmente o conjunto dos números racionais:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{em\ que\ a\ e\ b} \in \mathbb{Z}, \boldsymbol{com\ b} \neq \mathbf{0} \right\}$$

Além disso, destacamos que no conjunto dos números racionais temos basicamente 4 tipos de números:

Números Racionais		
	Frações	$\frac{5}{3}$
	Números Decimais	2,75
	Dízimas Periódicas	0,333...
	Números Inteiros	$7 = \frac{7}{1}$

Assim, toda **fração**, todo **número decimal**, toda **dízima periódica** e todo **número inteiro** pertencem ao conjunto $\mathbb{Q}$.

9.4. Números Irracionais

Os **Números Irracionais**, simbolizados por **I** (**i** maiúsculo), são aqueles que, ao contrário dos Racionais, **não podem ser obtidos da divisão de dois inteiros** e são formados por uma **sequência infinita de algarismos,** lembrando que as dízimas periódicas não são irracionais, pois são números que podem ser representados por uma fração (fração geratriz).

O conhecido número **π** ("pi"), muito utilizado na trigonometria, possui infinitas casas decimais que não se repetem como em uma dízima periódica, o que faz dele um número irracional:

$$\boldsymbol{\pi = 3,1415926535...}$$

9.5. Números Reais

O conjunto dos **Números Reais**, simbolizado por um $\mathbb{R}$ (**r** maiúsculo), é formado pela **união dos números Racionais e Irracionais**:

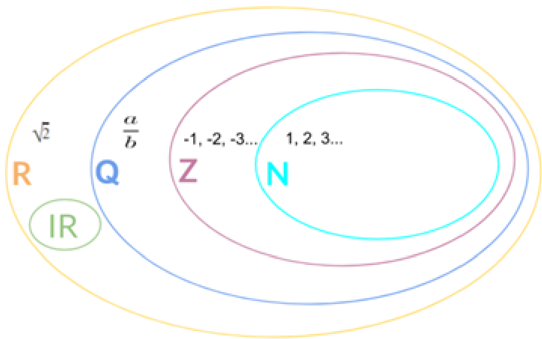
$$\mathbb{R} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{Q} \ \boldsymbol{ou} \ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}\}$$

Desta forma, podemos dizer que o conjunto dos **Números Naturais** está contido no dos **Inteiros**, que está contido no dos **Racionais**, que está contido no dos **Reais**:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Além disso, também afirmamos que o conjunto dos Números **Irracionais** está contido no dos Números **Reais**:

$$\boldsymbol{I} \subset \mathbb{R}$$


√2
a/b
-1, -2, -3...
1, 2, 3...
R
Q
Z
N
IR