Aula 06

Banco do Brasil (Escriturário - Agente de Tecnologia) Probabilidade e Estatística - 2023 (Pós-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

30 de Dezembro de 2022

Índice

Olá, amigos! Tudo certo até aqui com Estatística?

Nesta aula, vamos estudar a **Teoria da Probabilidade**. Além de ser um tópico **muito frequente** nas provas de concursos, ela também é a base para todo o estudo de Estatística Inferencial.

A matéria não é complicada, mas é preciso entender bem um assunto antes de passar para o próximo, porque ela é bem **encadeada**. Então, vamos com bastante calma!

Te espero!

Luana Brandão

Não me conhece? Sou Doutora em Engenharia de Produção, pela Universidade Federal Fluminense, e Auditora Fiscal da SEFAZ-RJ. Quero muito te ajudar com Estatística, para você conseguir a tão sonhada aprovação!

Se tiver alguma dúvida, entre em **contato** comigo!

professoraluanabrandao@gmail.com

@professoraluanabrandao

“Determinação, coragem e autoconfiança são fatores decisivos para o sucesso.”

Dalai Lama

PROBABILIDADE

Conceitos Iniciais

A Teoria da Probabilidade é o ramo da Estatística que estuda experimentos e fenômenos **aleatórios**, cujos resultados são **incertos**. Como exemplo, podemos citar:

- lançamentos de dados ou moedas;
- seleções feitas ao acaso (ou aleatoriamente), como de uma carta no baralho, de uma pessoa ou peça dentro de um grupo, etc.;
- fenômenos naturais, como chuva em determinado dia.

Embora os resultados sejam incertos, se tais experimentos ou fenômenos são **repetidos** muitas vezes, é possível encontrar certo **padrão** em seus resultados. Se lançarmos uma moeda comum muitas vezes esperamos que, em torno de metade das vezes, a face superior seja cara e, na outra metade, coroa.

Porém, para encontrar tal padrão, é necessário que os experimentos/fenômenos possam ser **repetidos indefinidamente**, sob **condições inalteradas**.

Um exemplo em que essa condição **não** é atendida é o lançamento de uma moeda próximo a um bueiro. Em algum lançamento, é possível que a moeda caia no bueiro, não sendo mais possível repetir o experimento. Para esse tipo de situação, **não** podemos utilizar todos os conceitos da Teoria da Probabilidade que estudaremos aqui.

ESQUEMATIZANDO

Os Experimentos/Fenômenos aleatórios:

i) Podem ser **repetidos indefinidamente**, sob condições inalteradas;
ii) Apresentam **resultado incerto**, porém com um **padrão conhecido**.

Espaço Amostral

O Espaço Amostral de um experimento/fenômeno aleatório é o conjunto de **todos** os resultados possíveis. Também podemos chamar o Espaço Amostral de **Universo**, e ele pode ser representado como **U** ou **Ω**.

No lançamento de uma **moeda**, por exemplo, o Espaço Amostral é o conjunto:

$$U_M = \{CARA, COROA\}$$

Para o lançamento de um **dado** (com 6 faces), o Espaço Amostral é o conjunto:

$$U_D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Se o experimento for o lançamento de **2 moedas**, o Espaço Amostral é dado por:

$$U_{2M} = \{(CARA, CARA), (CARA, COROA), (COROA, CARA), (COROA, COROA)\}$$

Podemos, ainda, chamar **cada resultado possível** de **ponto amostral**. No lançamento de 2 moedas que acabamos de ver, por exemplo, há **4 pontos amostrais**.

(2017 – Secretaria de Educação/MG) Em Teoria das Probabilidades, um conceito importante ao se trabalhar com experimentos aleatórios é o conceito de Espaço Amostral. Assinale a alternativa que indica o correto significado deste conceito.

a) Conjunto de todos os resultados possíveis do experimento

b) Tamanho total da amostra

c) Proporção entre o tamanho da amostra tomada e o tamanho total da população

d) Intervalo no qual as probabilidades somadas ultrapassam 0,5

e) Somatória dos todos os possíveis resultados de um experimento

Comentários:

O Espaço Amostral de um experimento é o conjunto de todos os seus resultados possíveis.

Gabarito: A

Evento

Um evento é **todo** e **qualquer subconjunto** do Espaço Amostral.

Por exemplo, no lançamento de **2 moedas**, podemos chamar de evento A aquele em que ambas as moedas apresentam o **mesmo resultado** para a face superior. Portanto, o evento A é o subconjunto:

$$A = \{(CARA, CARA), (COROA, COROA)\}$$

Observamos que o evento A apresenta 2 elementos (ou 2 pontos amostrais). Denotamos o **número de elementos** do evento A por **n(A)**. Nesse exemplo, temos:

$$n(A) = 2$$

Considerando como exemplo o lançamento de **2 dados**, podemos chamar de evento B aquele em que a **soma** das faces superiores dos dois dados é igual a **12**. O evento B é, portanto, o subconjunto:

$$B = \{(6,6)\}$$

Ou seja, temos **n(B) = 1**. Nesse caso, dizemos que o evento é **simples** ou **elementar**.

E se disséssemos que o evento C corresponde ao subconjunto em que a soma das faces superiores dos dois dados é igual a 13? Nesse caso, **não há elemento algum** do Espaço Amostral que atenda a esse requisito (a soma máxima é 12). Por isso, esse evento é um **conjunto vazio** (simbolizamos o conjunto vazio por $\varnothing$):

$$C = \varnothing$$

Como não há elemento algum no subconjunto, temos **n(C) = 0**. Dizemos que esse evento é **impossível**!

Podemos ter, ainda, um evento que corresponda a **todo** o Espaço Amostral. Por exemplo, considerando o lançamento de um **único dado**, podemos chamar de evento D aquele em que o número indicado na face superior é menor que 7. Assim, o evento D corresponde ao subconjunto:

$$D = \{1,2,3,4,5,6\} = U_D$$

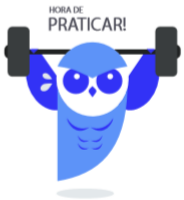
Como ambos os conjuntos (evento D e Espaço Amostral U_D) são iguais, o número de elementos de ambos os conjuntos também é igual: **$n(D) = n(U_D)$**. Dizemos que esse evento é **certo**!

RESUMINDO

Evento **simples** ou **elementar** → n(B) = 1

Evento **impossível**: $C = \varnothing$ → n(C) = 0

Evento **certo**: D = U → n(D) = n(U)



(2017 – Instituto de Previdência de João Pessoa) Sobre as afirmações a seguir, assinale a única correta no que diz respeito ao espaço amostral.

a) Se Ω é um espaço amostral do experimento, todo subconjunto A contido em Ω será chamado de evento, Ω é o evento certo, ϕ o evento impossível. Se o evento ω pertence a Ω, o evento {ω} é dito elementar

b) Se Ω é um espaço amostral do experimento, todo subconjunto A contido em Ω será chamado de subespaço amostral, Ω é o evento certo, ϕ o evento vazio. Se o evento ω pertence a Ω, o evento {ω} é dito elementar

c) Se Ω é um espaço amostral do experimento, todo subconjunto A contido em Ω será chamado de evento, Ω é o evento vazio, ϕ o evento neutro. Se o evento ω pertence a Ω o evento {ω} é dito elementar.

d) Se Ω é um espaço de probabilidades do experimento, todo subconjunto A contido em Ω será chamado de evento, Ω é o evento certo, ϕ o evento vazio. Se o evento ω pertence a Ω, o evento {ω} é dito único.

e) Se Ω é um espaço de probabilidades do experimento, todo subconjunto A contido em Ω será chamado de evento, Ω é o evento certo, ϕ o evento vazio. Se o evento ω pertence a Ω , o evento {ω} é dito unitário.

Comentários:

i) Podemos denotar por **Ω** um **Espaço Amostral** (não um espaço de probabilidades, como descrito nas alternativas "d" e "e");

ii) Todo **subconjunto do Espaço Amostral** é chamado de **evento** (não de subespaço amostral, como descrito na alternativa "b");

iii) O evento **igual ao Espaço Amostral** (Ω) é dito **certo** (não vazio, como descrito na alternativa "c");

iv) O evento que corresponde ao **conjunto vazio** (ϕ) é dito **impossível** (não neutro, como descrito na alternativa "c");

v) O evento com um **único elemento**, como é o caso de B = {(6, 6)} que vimos anteriormente, é dito **elementar**.

Logo, a única afirmação correta é a alternativa A.

Gabarito: A

DEFINIÇÕES DE PROBABILIDADE

A probabilidade representa as **chances** de um evento ocorrer. Agora, veremos como ela pode ser calculada.

A principal definição é a **clássica**, que veremos primeiro. Porém, em alguns casos, ela não pode ser utilizada, sendo necessário recorrer à definição frequentista de probabilidade, que veremos em seguida.

Definição Clássica

Sendo U o Espaço Amostral, a **probabilidade** de ocorrer o evento A é, pela definição clássica:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

Ou seja, a probabilidade de um evento é a **razão** entre o número de elementos do **Evento**, $n(A)$, e o número de elementos do **Espaço Amostral**, $n(U)$.

Por exemplo, no lançamento de **2 moedas**, o Espaço Amostral (U_{2M}) é:

U_{2M} = {(CARA, CARA), (CARA, COROA), (COROA, CARA), (COROA, COROA)}

E o número de elementos desse Espaço Amostral é:

$n(U_{2M}) = 4$

O evento em que ambas as moedas fornecem o **mesmo resultado**, que vamos chamar de A, é o subconjunto:

A = {(CARA, CARA), (COROA, COROA)}

E o número de elementos do evento A é:

$n(A) = 2$

Portanto, a **probabilidade** de o evento **A** ocorrer é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U_{2M})} = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

Também podemos dizer que a probabilidade é a **razão** entre o número de casos **favoráveis** ao evento e o número de casos **totais**:

$$P = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ totais}$$

ESCLARECENDO!

Para utilizar a definição clássica, há uma **condição** crucial: todos os elementos do Espaço Amostral devem ser **igualmente prováveis**.

Se isso **não** for verdade, **não** podemos utilizar a **definição clássica** de probabilidade.

Por exemplo, se tivermos uma moeda viciada, em que a probabilidade de cair CARA é maior que a probabilidade de cair COROA, **não** poderemos utilizar a definição clássica.

HORA DE PRATICAR!

(FGV/2019 – Prefeitura de Angra dos Reis/RJ) Uma pesquisa feita com os alunos de uma sala mostrou que 7 alunos torcem pelo Flamengo, 6 pelo Vasco, 5 pelo Fluminense, 4 pelo Botafogo e 3 não torcem por time nenhum. Escolhendo ao acaso um dos alunos dessa turma, a probabilidade de que ele seja torcedor do Vasco é de

a) 12%

b) 18%

c) 20%

d) 24%

e) 30%

Comentários:

A probabilidade de escolher um torcedor do Vasco equivale à razão entre o número de torcedores do Vasco (casos favoráveis) e o número de alunos (casos totais):

$$P = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ totais} = \frac{n(V)}{n(U)}$$

O número total de alunos é de:

$$n(U) = 7 + 6 + 5 + 4 + 3 = 25$$

O número de torcedores do Vasco é n(V) = 6. Logo, a probabilidade desejada é:

$$P = \frac{6}{25} = 0{,}24 = 24\%$$

Gabarito: D.

(VUNESP/2020 – PM/SP) Em um pote, há 60 balas, todas de mesmo tamanho e formato, embaladas individualmente. Desse total, 25 são balas de leite com recheio de chocolate, 15 são balas de café sem recheio, e as demais são balas de frutas também com recheio de chocolate. Retirando-se aleatoriamente uma bala desse pote, a probabilidade de que ela tenha recheio de chocolate é de

a) $\frac{5}{6}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{3}{5}$

Comentários:

A probabilidade de escolher uma bala com recheio de chocolate é a razão entre o número de balas com recheio de chocolate (casos favoráveis) e o número de balas no total (casos totais):

$$P = \frac{n(casos\ favoráveis)}{n(casos\ totais)} = \frac{n(RC)}{n(U)}$$

O enunciado informa que há 60 balas, logo, n(U) = 60.

As balas com recheio de chocolate são as balas de leite e as balas de frutas, ou seja, todas as balas **exceto** as balas de café. Sabendo que há 15 balas de café, o número de balas com recheio de chocolate é:

n(RC) = 60 – 15 = 45

Logo, a probabilidade desejada é:

$$P = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$$

Gabarito: B.

(FCC/2017 – Secretaria da Administração/BA) Uma sala de aula com 40 alunos fez uma pesquisa sobre a ocorrência de dengue no contexto familiar. A pesquisa consistia em tabular, no universo de 120 pessoas, se cada aluno e seus respectivos pais e mães já tiveram dengue, ou não. As respostas estão tabuladas abaixo.

	Teve dengue	Não teve dengue
Alunos	1	39
Pais de alunos	2	38
Mães de alunos	0	40

Sorteando-se ao acaso uma das 120 pessoas pesquisadas, a probabilidade de que ela tenha respondido na pesquisa que já teve dengue é igual a

a) 2,5%.

b) 2,3%.

c) 7,8%.

d) 3,8%.

e) 1,4%.

Comentários:

A probabilidade é a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos totais:

$$P = \frac{casos\ favoráveis}{casos\ totais} = \frac{n(D)}{n(U)}$$

Os casos favoráveis correspondem às pessoas que tiveram dengue. A tabela mostra que o número de pessoas que tiveram dengue é:

$$n(D) = 1 + 2 = 3$$

O enunciado informa que, no total, 120 pessoas participaram da pesquisa: n(U) = 120.

Assim, a probabilidade desejada é:

$$P(D) = \frac{3}{120} = \frac{1}{40} = 2{,}5\%$$

Gabarito: A.

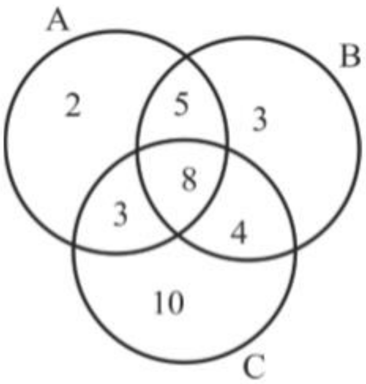
(CESPE/2018 – EBSERH) Uma pesquisa revelou característica da população de uma pequena comunidade composta apenas por casais e seus filhos. Todos os casais dessa comunidade são elementos do conjunto $A \cup B \cup C$, em que

A = {casais com pelo menos um filho com mais de 20 anos de idade};

B = {casais com pelo menos um filho com menos de 10 anos de idade};

C = {casais com pelo menos 4 filhos}.

Considerando que n(P) indique a quantidade de elementos de um conjunto P, suponha que $n(A) = 18$; $n(B) = 20$; $n(C) = 25$; $n(A \cap B) = 13$; $n(A \cap C) = 11$; $n(B \cap C) = 12$ e $n(A \cap B \cap C) = 8$. O diagrama a seguir mostra essas quantidades de elementos.



Com base nas informações e no diagrama precedentes, julgue o item a seguir.

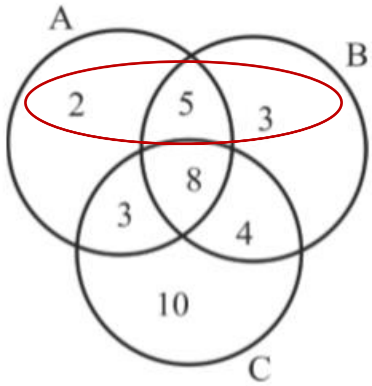
Se um casal dessa comunidade for escolhido ao acaso, então a probabilidade de ele ter menos de 4 filhos será superior a 0,3.

Comentários:

A probabilidade é a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos totais:

$$P = \frac{casos\ favoráveis}{casos\ totais} = \frac{n(E)}{n(U)}$$

Os casos favoráveis correspondem ao número de casais com menos de 4 filhos. Sabendo que C representa os casais com pelo menos 4 filhos, então os casais com menos de 4 filhos são aqueles que não estão em C, conforme indicado abaixo:



Assim, o número de casos favoráveis é:

$$n(E) = 2 + 5 + 3 = 10$$

E o número de casos totais é:

$$n(U) = 2 + 5 + 3 + 3 + 8 + 4 + 10 = 35$$

Logo, a probabilidade é:

$$P = \frac{10}{35} \cong 0{,}286$$

Ou seja, é inferior a 0,3.

Gabarito: Errado.

(FGV/2022 – PC/RJ) Treze cadeiras numeradas consecutivamente de 1 a 13 formam uma fila. Quatro pessoas devem sentar-se nelas e o número da cadeira em que cada uma deve se sentar será decidido por sorteio. Para as três primeiras pessoas foram sorteados os números 3, 8 e 11 e será feito o sorteio para a última cadeira a ser ocupada. A probabilidade de que a quarta pessoa NÃO se sente ao lado de nenhuma pessoa já sentada é:

a) 1/2

b) 1/4

c) 2/5

d) 7/10

e) 4/13

Comentários:

O enunciado informa que há 13 cadeiras e que três pessoas ocupam as cadeiras 3, 8 e 11; e pede a probabilidade de a quarta pessoa não se sentar ao lado de ninguém.

A probabilidade é a razão entre o número de eventos favoráveis e o número total de eventos possíveis:

$$P = \frac{eventos\ favoráveis}{eventos\ possíveis} = \frac{n(A)}{n(U)}$$

Os eventos possíveis correspondem às 13 - 3 = 10 cadeiras restantes:

$$n(U) = 10$$

E os eventos favoráveis correspondem às cadeiras que não estão ao lado de ninguém sentado, ilustradas a seguir, em que P representa uma pessoa sentada e X representa uma cadeira ao lado de uma pessoa sentada:

	X	**P**	X			X	**P**	X	X	**P**	X	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Podemos observar que há 4 cadeiras que não estão ao lado de ninguém sentado (eventos favoráveis):

$$n(A) = 4$$

E a probabilidade é a razão:

$$P = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Gabarito: C

Para resolver diversas questões de probabilidade, envolvendo a definição clássica, será necessário utilizar as técnicas de **análise combinatória**, para calcular o número de elementos do evento e/ou o número de elementos do Espaço Amostral.

EXEMPLIFICANDO

Vamos supor haja **5 peças amarelas** e **6 peças verdes** dentro de um saco e que teremos que retirar **2 peças** sem olhar. Qual é a probabilidade de retirar **2 peças amarelas**?

A probabilidade é a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos totais:

$$P = \frac{casos\ favoráveis}{casos\ totais} = \frac{n(A)}{n(U)}$$

Os **casos favoráveis** são as maneiras de retirar **2** dentre as **5 peças amarelas**. Como a ordem não importa, temos a combinação 2, dentre 5 elementos:

$$n(A) = C_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

Os **casos totais** são as maneiras de retirar **2 peças**, de um total de **11 peças** (entre amarelas e verdes), também sem importância de ordem:

$$n(U) = C_{11,2} = \frac{11!}{(11-2)! \times 2!} = \frac{11 \times 10 \times 9!}{9! \times 2!} = \frac{11 \times 10}{2} = 55$$

Logo, a probabilidade de retirar 2 peças amarelas é: $P = \frac{10}{55}$

E se a ordem importasse?

EXEMPLIFICANDO

Vamos supor, então, que há **5 mulheres** e **6 homens**, dos quais **2** serão escolhidos para ocupar a posição de presidente e vice-presidente do grupo.

Qual seria a probabilidade de escolher **mulheres** para ambos os cargos?

A probabilidade é calculada pela razão:

$$P = \frac{casos\ favoráveis}{casos\ totais} = \frac{n(A)}{n(U)}$$

Os **casos favoráveis** são as maneiras de escolher **2 mulheres**, dentre as **5**, sendo que a ordem importa, por serem cargos distintos:

$$n(A) = A_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

Os **casos totais** são as maneiras de escolher **2 pessoas**, de um total de 11 (dentre mulheres e homens), também com importância de ordem:

$$n(U) = A_{11,2} = \frac{11!}{(11-2)!} = \frac{11 \times 10 \times 9!}{9!} = 11 \times 10 = 110$$

Logo, a probabilidade de escolher 2 mulheres é:

$$P = \frac{20}{110} = \frac{10}{55}$$

Esse é o **mesmo resultado** que obtivemos antes!

Quando estivermos escolhendo o **mesmo número de elementos**, com o **mesmo critério** em relação à importância da ordem, tanto nos casos favoráveis, quanto nos casos totais, **não** faz diferença se consideramos que a ordem importa ou não!

Se a ordem **importa**, temos o arranjo, tanto para os casos favoráveis, quanto para os totais. Para o nosso exemplo das **5 mulheres** e **6 homens**, a probabilidade de escolher **2 mulheres** para cargos distintos foi calculada como:

$$P = \frac{A_{5,2}}{A_{11,2}} = \frac{\frac{\mathbf{5}!}{(\mathbf{5}-\mathbf{2})!}}{\frac{\mathbf{11}!}{(\mathbf{11}-\mathbf{2})!}}$$

Se a ordem **não importa**, temos a combinação, tanto para os casos favoráveis, quanto para os casos totais. Para o nosso exemplo das **5 peças amarelas** e **6 peças verdes**, a probabilidade de escolher **2 peças amarelas**, sem importância de ordem, foi:

$$P = \frac{C_{5,2}}{C_{11,2}} = \frac{\frac{5!}{(5-2)!\times 2!}}{\frac{11!}{(11-2)!\times 2!}} = \frac{\frac{\mathbf{5}!}{(\mathbf{5}-\mathbf{2})!}}{\frac{\mathbf{11}!}{(\mathbf{11}-\mathbf{2})!}}$$

Ou seja, o cálculo da probabilidade será o mesmo, independentemente de a ordem importar ou não!

(FGV/2019 – Prefeitura de Salvador/BA) Entre 6 deputados, 3 do Partido A e 3 do Partido B, serão sorteados 2 para uma comissão. A probabilidade de os 2 deputados sorteados serem do Partido A é de:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{1}{6}$

Comentários:

A probabilidade é a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos totais:

$$P = \frac{n(casos\ favoráveis)}{n(casos\ totais)} = \frac{n(A)}{n(U)}$$

Os casos totais são as maneiras de escolher 2 deputados, dentre todos os 6 (sem importância de ordem):

$$n(U) = C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

Os casos favoráveis são as maneiras de escolher 2 deputados, dentre os 3 do Partido A (também sem importância de ordem):

$$n(A) = C_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)! \times 2!} = \frac{3 \times 2!}{1! \times 2!} = 3$$

Logo, a probabilidade desejada é:

$$P = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

Gabarito: D.

(CESPE/2017 – PM-MA) Uma operação policial será realizada com uma equipe de seis agentes, que têm prenomes distintos, entre eles André, Bruno e Caio. Um agente será o coordenador da operação e outro, o assistente deste; ambos ficarão na base móvel de operações nas proximidades do local de realização da operação. Nessa operação, um agente se infiltrará, disfarçado, entre os suspeitos, em reunião por estes marcada em uma casa noturna, e outros três agentes, também disfarçados, entrarão na casa noturna para prestar apoio ao infiltrado, caso seja necessário. A respeito dessa situação hipotética, julgue o item seguinte.

Se os dois agentes que ficarão na base móvel forem escolhidos aleatoriamente, a probabilidade de André e Bruno serem os escolhidos será superior a 30%.

Comentários:

Para calcular a probabilidade, temos:

$$P = \frac{casos\ favoráveis}{casos\ totais} = \frac{n(A)}{n(U)}$$

Os casos totais correspondem a todas as maneiras de escolher um coordenador e um assistente, dentre 6 agentes. Considerando que os cargos são **distintos**, temos um **arranjo** de 2 elementos, dentre 6:

$$n(U) = A_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!} = 6 \times 5 = 30$$

Os casos favoráveis correspondem às maneiras de escolher André e Bruno como coordenador e assistente, em qualquer ordem. Podemos ter André como coordenador e Bruno como assistente OU Bruno como coordenador e Bruno como assistente. Logo, há 2 possibilidades: n(A) = 2. Assim, a probabilidade é:

$$P = \frac{2}{30} = \frac{1}{15} \cong 6{,}7\%$$

Que é inferior a 30%.

Gabarito: Errado.

(FCC/2016 – Conselho Regional de Medicina/SP) Em dezembro serão vistoriados 10 estabelecimentos de saúde, sendo 2 hospitais, 1 pronto-socorro, 3 ambulatórios e 4 postos de saúde. Sorteando-se ao acaso a ordem de visita dos 10 estabelecimentos, a probabilidade de que os dois primeiros sejam postos de saúde é igual a

a) 2/15

b) 4/25

c) 2/25

d) 3/20

e) 3/25

Comentários:

Para calcular a probabilidade de 2 postos de saúde serem os primeiros vistoriados (evento A), utilizamos a definição clássica de probabilidade:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

O Espaço Amostral corresponde a todas as possibilidades de se ordenar 10 elementos:

$$n(U) = P_{10} = 10!$$

O evento A corresponde às possibilidades de se escolher 2 postos de saúde, dentre 4, sendo a ordem relevante (**arranjo**), E de escolher a ordem dos demais 8 elementos (**permutação**). Pelo princípio multiplicativo (análise combinatória), temos:

▪

$$n(A) = A_{4,2} \times 8! = \frac{4!}{2!} \times 8! = 4 \times 3 \times 8!$$

A probabilidade do evento A é, portanto:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{4 \times 3 \times 8!}{10!} = \frac{4 \times 3}{10 \times 9} = \frac{2}{5 \times 3} = \frac{2}{15}$$

Gabarito: A

Probabilidade como Frequência Relativa ou Empírica

Agora, vamos supor que estejamos **observando os resultados** de um experimento, **repetidos N vezes**.

Sabendo que um evento específico ocorreu **n vezes**, de um total **N repetições**, podemos calcular a **frequência relativa** (ou **empírica**) do evento, pela fórmula:

$$\boldsymbol{f} = \frac{n^{\underline{o}}\ de\ observações\ do\ evento}{n^{\underline{o}}\ total\ de\ repetições} = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{N}}$$

Vamos supor que estejamos observando os resultados de sucessivos lançamentos de uma moeda. A frequência da face COROA será a razão entre o número de vezes em que obtemos COROA e o número total de lançamentos efetuados:

$$f = \frac{n(COROA)}{n(Lançamentos)}$$

Para ilustrar esse experimento, utilizei o excel para gerar resultados aleatórios, considerando que 0 (zero) representa CARA e 1 representa para COROA.

Adotando esse procedimento para 100 células, ou seja, $N = 100$, obtive 48 vezes o número 1 (COROA), isto é, $n = 48$ (se você fizer esse procedimento, é bem possível que obtenha outro resultado).

Portanto, temos a seguinte frequência relativa para COROA:

$$f = \frac{n}{N} = \frac{48}{100} = 48\%$$

Esse resultado é **próximo** da probabilidade de 50% que conhecemos, porém **diferente**. Para $N = 1.000$, obtive 505 vezes o número 1, portanto:

$$f = \frac{n}{N} = \frac{505}{1.000} = 50{,}5\%$$

Agora, o resultado ficou **mais próximo**. Em um último teste, com $N = 10.000$, obtive $n = 5016$:

$$f = \frac{n}{N} = \frac{5.016}{10.000} = 50{,}16\%$$

Observe que estamos nos aproximando cada vez mais do valor de 50%. Ou seja, não podemos dizer que a frequência é exatamente **igual** à probabilidade. Porém, quanto maior for o número de experimentos, mais a frequência relativa se **aproxima** da probabilidade.

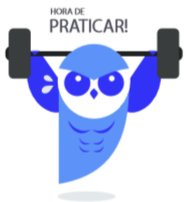
Para **infinitas repetições**, a probabilidade se torna igual à frequência relativa:

$$P = \lim_{N \to \infty} \frac{n}{N}$$

Essa definição de probabilidade pode ser utilizada para eventos que não são igualmente prováveis, em que a definição clássica não pode ser aplicada.

Por exemplo, para uma moeda não equilibrada, se verificamos, após muitos experimentos, que obtemos 1 face COROA a cada 4 lançamentos, então a probabilidade de obter COROA é:

$$p = f = \frac{n}{N} = \frac{1}{4}$$



(2019 – Prefeitura de Candói/PR) Em uma obra foram entregues 8 milheiros de tijolos maciços. Sabe-se que, durante o transporte, em média 100 tijolos são danificados. Qual é a probabilidade de, ao acaso, selecionar um tijolo, e ele estar danificado?

a) 0,00125%

b) 0,0125%

c) 0,125%

d) 1,25%

e) 12,5%

Comentários:

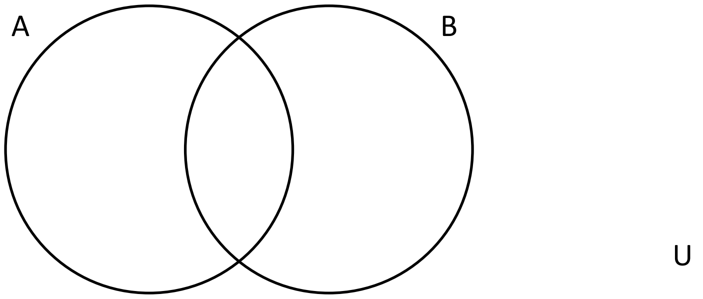
Para resolver essa questão, devemos calcular a probabilidade a partir da frequência relativa observada:

$$P = f = \frac{n}{N} = \frac{100}{8.000} = \frac{1}{80} = 0{,}0125 = 1{,}25\%$$

Gabarito: D

COMBINAÇÕES DE EVENTOS

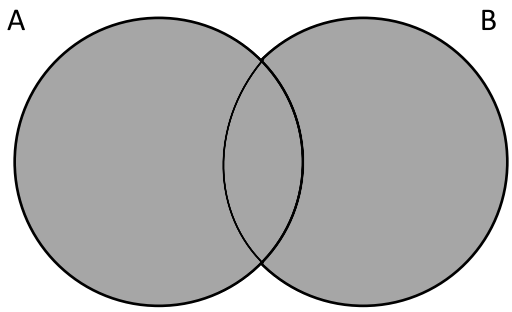
Nessa seção, veremos formas de **combinar** eventos. Para esse estudo, pode ser bastante proveitoso utilizar o **Diagrama de Venn**, ilustrado abaixo para dois eventos A e B quaisquer, dentro de um Espaço Amostral (U).



Teorema da União

A **união** do evento A com o evento B, que representamos como **A ∪ B**, é um novo evento, em que estão incluídos tanto os **elementos de A** quanto os **elementos de B**.

Dizemos que, para ocorrer o evento união, pode ocorrer o evento A **ou** o evento B (ou ambos). A união corresponde a toda a região cinza indicada no diagrama abaixo.



Por exemplo, considerando o lançamento de um dado, se o evento A representa os resultados **menores que 4** e o evento B representa os resultados **maiores que 3**, então a **união** dos eventos corresponde aos valores menores que 4 **ou** maiores que 3.

Temos, portanto, os seguintes subconjuntos:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{4, 5, 6\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

TOME NOTA!

Quando a **união** de eventos corresponde a **todo** o Espaço Amostral, dizemos que tais eventos são **exaustivos**.

Eventos A e B **Exaustivos**: **A ∪ B = U**

No exemplo que acabamos de ver, a união corresponde à **soma** dos elementos de A e os elementos de B.

Agora vamos supor que o evento C corresponda aos resultados **menores que 5** e o evento D, aos resultados **maiores que 3**:

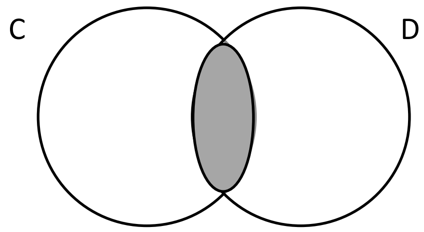
$$C = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$D = \{4, 5, 6\}$$

$$C \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Nesse caso, somamos os elementos de C e os elementos de D, mas com atenção para **não duplicar** os elementos que constam em C **e** em D (nesse exemplo, o número 4).

Os elementos que constam em **ambos** os eventos pertencem à **interseção** desses eventos, a qual representamos como C ∩ D, e corresponde à região cinza indicada no diagrama abaixo.



Nesse último exemplo, temos:

$$C \cap D = \{4\}$$

No exemplo anterior, em que A = {1, 2, 3} e B = {4, 5, 6}, não havia elementos que pertencessem tanto ao evento A, quanto ao evento B, ou seja, a interseção é um **conjunto vazio**:

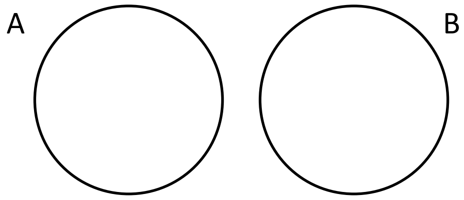
$$A \cap B = \varnothing$$

TOME NOTA!

Quando a **interseção** de eventos é um **conjunto vazio**, dizemos que tais eventos são **mutuamente excludentes** (ou **exclusivos**).

Podemos dizer, ainda, que os conjuntos são **disjuntos.**

Eventos A e B **Mutuamente Excludentes**: **A ∩ B = ∅**



Para calcular o número de elementos na **união** de C e D, sem duplicarmos os elementos da interseção, **somamos** os elementos de ambos os eventos e **subtraímos** os elementos da **interseção**, para que não sejam somados duas vezes:

$$n(C \cup D) = n(C) + n(D) - n(C \cap D)$$

Dividindo todos esses termos por n(U), obtemos a fórmula da probabilidade da União:

$$\frac{n(C \cup D)}{n(U)} = \frac{n(C)}{n(U)} + \frac{n(D)}{n(U)} - \frac{n(C \cap D)}{n(U)}$$

$$\boldsymbol{P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D)}$$

Por exemplo, sendo C = {1, 2, 3, 4}, D = {4, 5, 6} e C ∩ D = {4}, as probabilidades dos eventos C, D e da interseção, considerando o Espaço Amostral U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, são, respectivamente:

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(U)} = \frac{4}{6}, \qquad P(D) = \frac{n(D)}{n(U)} = \frac{3}{6}, \qquad P(C \cap D) = \frac{n(C \cap D)}{n(U)} = \frac{1}{6}$$

Com base nessas probabilidades, podemos calcular a probabilidade da união:

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Para eventos **mutuamente excludentes**, isto é, que **não** possuem elementos em sua **interseção**, como no caso de A = {1, 2, 3} e B = {4, 5, 6}, a **probabilidade da interseção é zero**:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(U)} = \frac{0}{n(U)} = 0$$

Portanto, a probabilidade da **união** de eventos **mutuamente excludentes** pode ser calculada como:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{0}$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}}$$

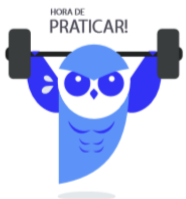
Para o exemplo em que A = {1, 2, 3}, B = {4, 5, 6}, as probabilidades dos eventos A e B, considerando o Espaço Amostral U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, são, respectivamente:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \qquad P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Como são eventos mutuamente excludentes, a probabilidade da união é:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Eventos A e B **Mutuamente Excludentes**: **P(A ∩ B) = P(∅) = 0**
Probabilidade da **União** (caso geral): **P(C ∪ D) = P(C) + P(D) – P(C ∩ D)**
Probabilidade da **União** de **Eventos Excludentes**: **P(A ∪ B) = P(A) + P(B)**



(FGV/2018 – ALE/RO) Dois eventos A e B ocorrem, respectivamente, com 40% e 30% de probabilidade. A probabilidade de que A ocorra ou B ocorra é 50%. Assim, a probabilidade de que A e B ocorram é igual a

a) 10%

b) 20%

c) 30%

d) 40%

e) 50%

Comentários:

A probabilidade de A OU B ocorrer corresponde à **união** desses eventos, dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

O enunciado informa que:

- P(A) = 40%
- P(B) = 30%
- $P(A \cup B)$ = 50%

Substituindo esses valores na equação da união, temos:

$$50\% = 40\% + 30\% - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 70\% - 50\% = 20\%$$

Gabarito: B

(CESPE/2018 – BNB) Um tabuleiro quadrado e quadriculado, semelhante a um tabuleiro de xadrez, com 12 linhas e 12 colunas, e, portanto, com 12 × 12 = 144 quadradinhos pintados: 54, na cor azul; 30, na cor marrom; 40, na cor amarela; e 20, na cor verde. A cada quadradinho é associado um cartão com dois números, que indicam a posição do quadradinho no tabuleiro; o primeiro número corresponde ao número da linha, e o segundo corresponde ao número da coluna. Por exemplo, o cartão com os números 5,10 corresponde ao quadradinho posicionado na linha 5 e na coluna 10. Esses cartões estão em uma urna, da qual podem ser retirados aleatoriamente.

A respeito desse tabuleiro e desses cartões, julgue o item a seguir.

A probabilidade de retirar dessa caixa, de maneira aleatória, um cartão correspondente a um quadrado pintado na cor amarela ou na cor verde é superior a 0,44.

Comentários:

A probabilidade de retirar um cartão da cor amarela **ou** na cor verde corresponde à probabilidade da **união** desses eventos.

Considerando que não há interseção entre esses eventos (não existem quadrados amarelos E verdes), então a probabilidade da união é dada por:

$$P(A \cup V) = P(A) + P(V)$$

Sabendo que há 40 quadrados amarelos e 144 quadrados no total, a probabilidade de retirar um quadrado amarelo é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{40}{144} = \frac{10}{36}$$

Considerando que há 20 quadrados verdes, a probabilidade de retirar um cartão verde é:

$$P(V) = \frac{n(V)}{n(U)} = \frac{20}{144} = \frac{5}{36}$$

A probabilidade de retirar um cartão amarelo ou verde é, então:

$$P(A \cup V) = \frac{10}{36} + \frac{5}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \cong 0{,}42$$

Ou seja, é inferior a 0,44.

Gabarito: Errado.

(FCC/2019 – Secretaria de Estado da Fazenda/BA) Uma sala contém 20 homens e 30 mulheres em que todos são funcionários de uma empresa. Verifica-se que metade desses homens e metade dessas mulheres possuem nível superior. Escolhendo aleatoriamente uma pessoa dessa sala para realizar uma tarefa, a probabilidade de ela ser mulher ou possuir nível superior é igual a

a) 2/3.

b) 3/10.

c) 5/6.

d) 3/4.

e) 4/5.

Comentários:

Essa questão envolve a união entre os eventos ser mulher (M) com possuir nível superior (S), cuja probabilidade é calculada por:

$$P(M \cup S) = P(M) + P(S) - P(M \cap S)$$

A questão informa que o número de mulheres é:

n(M) = 30

Sabendo que além dessas 30 mulheres, há 20 homens, então o total de pessoas é:

n(U) = 30 + 20 = 50

Logo, a probabilidade de escolher uma **mulher** é:

$$P(M) = \frac{n(M)}{n(U)} = \frac{\mathbf{30}}{\mathbf{50}}$$

A questão informa que metade de todas as pessoas possui nível superior. Logo o número de pessoas com nível superior é:

$$n(S) = \frac{50}{2} = 25$$

Assim, a probabilidade de escolher uma pessoa com nível superior é:

$$P(S) = \frac{n(S)}{n(U)} = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{50}}$$

Por fim, o sabemos que metade das 30 mulheres possui nível superior. Então o número de mulheres com nível superior (interseção entre os eventos) é:

$$n(M \cap S) = \frac{30}{2} = 15$$

Logo, a probabilidade associada à interseção dos eventos é:

$$P(M \cup S) = \frac{n(M \cap S)}{n(U)} = \mathbf{\frac{15}{50}}$$

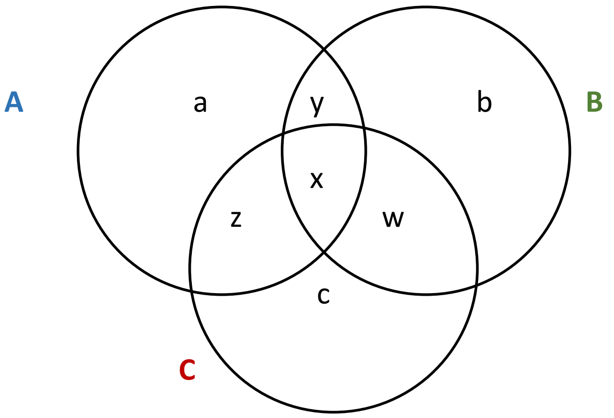
Substituindo os valores que calculamos na equação da probabilidade da união, temos:

$$P(M \cup S) = \mathbf{\frac{30}{50}} + \mathbf{\frac{25}{50}} - \mathbf{\frac{15}{50}} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$$

Gabarito: E.

União de Três Eventos

A união de 3 eventos, A, B e C, pode ser representada pelo seguinte Diagrama de Venn:



A união corresponde à **soma de todos os elementos** indicados no diagrama acima:

$$n(A \cup B \cup C) = a + z + y + x + b + w + c$$

n(B)

n(A)

n(C)

Podemos observar que há diversos elementos que se **repetiriam** se simplesmente somássemos os elementos de A, de B e de C para encontrar a união dos três eventos. Na verdade, estaríamos somando duas vezes os elementos das interseções, 2 a 2, e três vezes os elementos da interseção de todos os conjuntos.

Porém, ao subtrairmos os elementos da interseção 2 a 2, estaríamos deixando de fora os elementos da interseção de todos os três eventos. Por isso, precisamos somá-los novamente.

Assim, a união de 3 eventos é dada por:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Dividindo todos os termos por n(U), obtemos a fórmula da probabilidade da união de 3 eventos:

$$\frac{n(A \cup B \cup C)}{n(U)} = \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} + \frac{n(C)}{n(U)} - \frac{n(A \cap B)}{n(U)} - \frac{n(B \cap C)}{n(U)} - \frac{n(A \cap C)}{n(U)} + \frac{n(A \cap B \cap C)}{n(U)}$$

$$\boxed{P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)}$$

Em vez de decorar a fórmula, pode ser mais simples utilizar o diagrama de Venn para encontrar o número de elementos da união $n(A \cup B \cup C)$ e depois dividir o resultado por $n(U)$.

EXEMPLIFICANDO

Vamos considerar as seguintes informações, a respeito das probabilidades de 3 eventos:

- P(A) = 1/2
- P(B) = 5/8
- P(A ∩ B) = 1/4
- P(A ∩ C) = 5/16
- P(B ∩ C) = 3/8
- P(A ∩ B ∩ C) = 3/16
- P(A ∪ B ∪ C) = 1

Com essas informações, podemos calcular P(C). Para isso, vamos primeiro utilizar a fórmula da probabilidade da união e substituir as informações do enunciado:

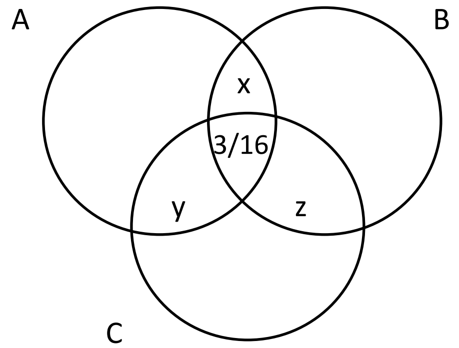
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{5}{8} + P(C) - \frac{1}{4} - \frac{5}{16} - \frac{3}{8} + \frac{3}{16}$$

$$1 = P(C) + \frac{8+10-4-5-6+3}{16} = P(C) + \frac{6}{16}$$

$$P(C) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

Alternativamente, podemos utilizar o **diagrama de Venn**, e preencher os valores fornecidos, começando pela interseção de 3 eventos.



O valor de x corresponde à probabilidade dos elementos da **interseção** de A e B, A ∩ B, que **não** estão na interseção de todos os 3 eventos, A ∩ B ∩ C, isto é, a diferença entre P(A ∩ B) e P(A ∩ B ∩ C):

$$x = P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} - \frac{3}{16} = \frac{4-3}{16} = \frac{1}{16}$$

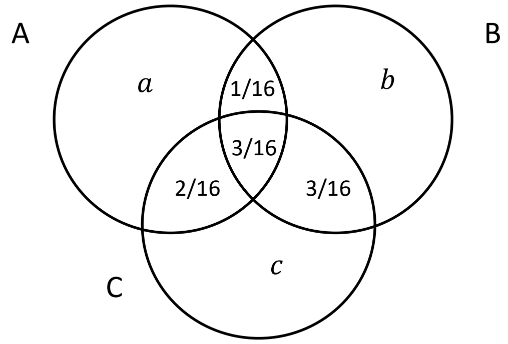
O valor de y corresponde à probabilidade dos elementos da **interseção** de A e C, A ∩ C, que **não** estão na interseção de todos os 3 eventos, A ∩ B ∩ C, isto é, a diferença entre P(A ∩ C) e P(A ∩ B ∩ C):

$$x = P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) = \frac{5}{16} - \frac{3}{16} = \frac{2}{16}$$

O valor de z corresponde à probabilidade dos elementos da **interseção** de B e C, B ∩ C, que **não** estão na interseção de todos os 3 eventos, A ∩ B ∩ C, isto é, a diferença entre P(B ∩ C) e P(A ∩ B ∩ C):

$$x = P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) = \frac{3}{8} - \frac{3}{16} = \frac{6-3}{16} = \frac{3}{16}$$

Inserindo esses valores no diagrama de Venn, temos:



O valor de a corresponde à probabilidade dos elementos de A que **não** pertencem a **qualquer interseção**:

$$a = P(A) - x - y - P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} - \frac{2}{16} - \frac{3}{16} = \frac{8-6}{16} = \frac{2}{16}$$

O valor de b corresponde à probabilidade dos elementos de B que **não** pertencem a **qualquer interseção**:

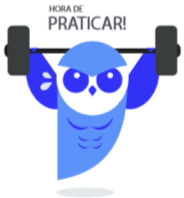
$$b = P(B) - x - z - P(A \cap B \cap C) = \frac{5}{8} - \frac{1}{16} - \frac{3}{16} - \frac{3}{16} = \frac{10-7}{16} = \frac{3}{16}$$

Assim, o valor de c pode ser calculado como a diferença entre a probabilidade da **união dos 3 eventos** e **todos os demais campos**. Para facilitar, em vez de subtrair todos os campos separadamente, podemos subtrair P(A), $b = \frac{3}{16}$ e $z = \frac{3}{16}$:

$$c = P(A \cup B \cup C) - P(A) - b - z = 1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{16} - \frac{3}{16} = \frac{16 - 8 - 6}{16} = \frac{2}{16}$$

Logo, o valor de P(C) é a soma de $c = \frac{2}{16}$, $y = \frac{2}{16}$, $z = \frac{3}{16}$ e $P(A \cap B \cap C) = \frac{3}{16}$:

$$P(C) = c + y + z + P(A \cap B \cap C) = \frac{2}{16} + \frac{2}{16} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$



(FCC/2018 – SEPLAG de Recife/PE) Em um censo realizado em uma cidade em que são consumidos somente os sabonetes de marca X, Y e Z, verifica-se que:

I. 40% consomem X.

II. 40% consomem Y.

III. 47% consomem Z.

IV. 15% consomem X e Y.

V. 5% consomem X e Z.

VI. 10% consomem Y e Z.

VII. qualquer elemento da população consome pelo menos uma marca de sabonete.

Então, escolhendo aleatoriamente um elemento dessa população, a probabilidade de ele consumir uma e somente uma marca de sabonete é igual a

a) 79%.

b) 70%.

c) 60%.

d) 80%.

e) 76%.

Comentários:

Como toda a população consome alguma marca, então vamos aplicar a fórmula da probabilidade da união, que vimos, para calcular a interseção de todos os eventos:

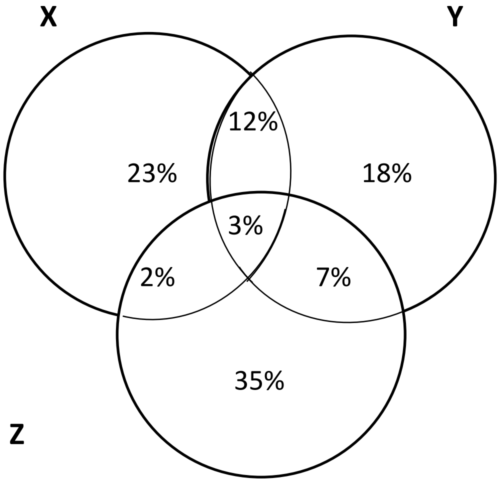
$$P(X \cup Y \cup Z) = P(X) + P(Y) + P(Z) - P(X \cap Y) - P(X \cap Z) - P(Y \cap Z) + P(X \cap Y \cap Z) = 100\%$$

$$40\% + 40\% + 47\% - 15\% - 5\% - 10\% + P(X \cap Y \cap Z) = 100\%$$

$$P(X \cap Y \cap Z) = 100\% - 97\% = 3\%$$

Agora, vamos utilizar o diagrama de Venn.

Começamos preenchendo P(X ∩ Y ∩ Z). Em seguida, inserimos as **interseções dois a dois**, **subtraindo-se o valor de P(X ∩ Y ∩ Z).** Por fim, inserimos os valores correspondentes a cada marca, individualmente, subtraindo-se todas as interseções.



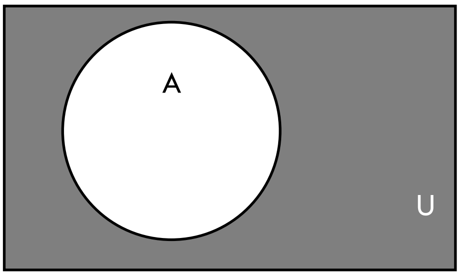
Portanto, a probabilidade de o elemento consumir apenas uma marca é:

23% + 18% + 35% = 76%

Gabarito: E

Teorema do Evento Complementar

O complementar de um evento corresponde a **todos os elementos do Espaço Amostral** que **não** pertencem a tal evento, como representado abaixo (a região em cinza corresponde ao complementar de A).



No exemplo do lançamento de um dado, em que C = {1, 2, 3, 4}, o evento complementar de C, indicado por $\bar{C}$, corresponde ao seguinte subconjunto:

$$\bar{C} = \{5, 6\}$$

Por definição, o número de elementos do **evento** somado ao número de elementos do **complementar** é **igual ao total de elementos**:

$$n(C) + n(\bar{C}) = n(U)$$

Dividindo toda a equação por $n(U)$, podemos calcular a probabilidade do evento complementar:

$$\frac{n(C)}{n(U)} + \frac{n(\bar{C})}{n(U)} = \frac{n(U)}{n(U)}$$

$$P(C) + P(\bar{C}) = 1$$

$$\boldsymbol{P(\bar{C}) = 1 - P(C)}$$

Para o exemplo do lançamento do dado, em que C = {1, 2, 3, 4} e o Espaço Amostral é $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a probabilidade do evento C é:

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(U)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Pelo **Teorema do Evento Complementar**, a probabilidade do seu complementar é:

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

De fato, sabemos que o evento complementar é $\bar{C} = \{5, 6\}$. Pela **definição clássica** de probabilidade, temos:

$$P(\bar{C}) = \frac{n(\bar{C})}{n(U)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Que é justamente o resultado que encontramos aplicando o Teorema do Evento Complementar.

(2019 – Prefeitura de Palhoça/SC) Uma urna tem dez bolas vermelhas, três azuis e duas pretas. Qual é probabilidade de sortearmos uma bola que não seja da cor vermelha?

a) 33,33%

b) 45,66%

c) 38,23%

d) 25,45%

Comentários:

A probabilidade do evento complementar é:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

A probabilidade de sortear uma bola vermelha, sabendo que há 10 bolas vermelhas e 15 bolas no total, é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{10}{15}$$

Assim, a probabilidade de não sortear uma bola vermelha é:

$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{10}{15} = \frac{15-10}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \cong 33{,}33\%$$

Gabarito: A

(CESPE/2018 – BNB) Um tabuleiro quadrado e quadriculado, semelhante a um tabuleiro de xadrez, com 12 linhas e 12 colunas, e, portanto, com 12 × 12 = 144 quadradinhos pintados: 54, na cor azul; 30, na cor marrom; 40, na cor amarela; e 20, na cor verde. A cada quadradinho é associado um cartão com dois números, que indicam a posição do quadradinho no tabuleiro; o primeiro número corresponde ao número da linha, e o segundo corresponde ao número da coluna. Por exemplo, o cartão com os números 5,10 corresponde ao quadradinho posicionado na linha 5 e na coluna 10. Esses cartões estão em uma urna, da qual podem ser retirados aleatoriamente.

A respeito desse tabuleiro e desses cartões, julgue o item a seguir.

A probabilidade de retirar dessa caixa, de maneira aleatória, um cartão correspondente a um quadrado que não tenha sido pintado na cor marrom é inferior a 0,72.

Comentários:

A probabilidade de retirar um cartão que **não** seja marrom pode ser calculada pelo teorema do evento **complementar**:

$$P(\bar{M}) = 1 - P(M)$$

A probabilidade de retirar um cartão marrom é a razão entre o número de cartões marrons e o número de cartões no total:

$$P(M) = \frac{n(M)}{n(U)}$$

O enunciado informa que há:

- 144 quadrados, logo, n(U) = 144; e

- 30 quadrados marrons, logo n(M) = 30

Assim, a probabilidade de retirar um cartão marrom é:

$$P(M) = \frac{30}{144} = \frac{15}{72}$$

A probabilidade de retirar um cartão **não** marrom é complementar:

$$P(\bar{M}) = 1 - \frac{15}{72} = \frac{72-15}{72} = \frac{57}{72} \cong 0{,}79$$

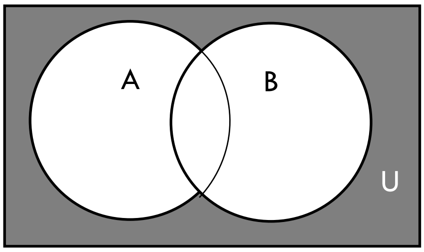
Que é superior a 0,72.

Gabarito: Errado.

Complementar da União e da Interseção

O **Teorema do Evento Complementar** $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ pode ser aplicado, mesmo quando o evento A for resultado de uma **combinação** de eventos, seja a união seja a interseção.

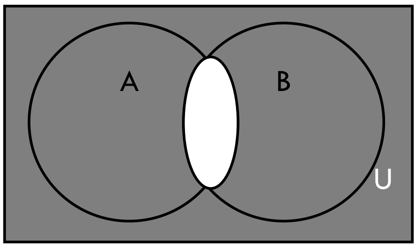
O **complementar da união** está representado pela região cinza indicada no diagrama abaixo:



Pelo Teorema que acabamos de ver, a **probabilidade do complementar da união** é dada por:

$$\boxed{P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)}$$

Já o **complementar da interseção** está representado pela região cinza indicada a seguir:



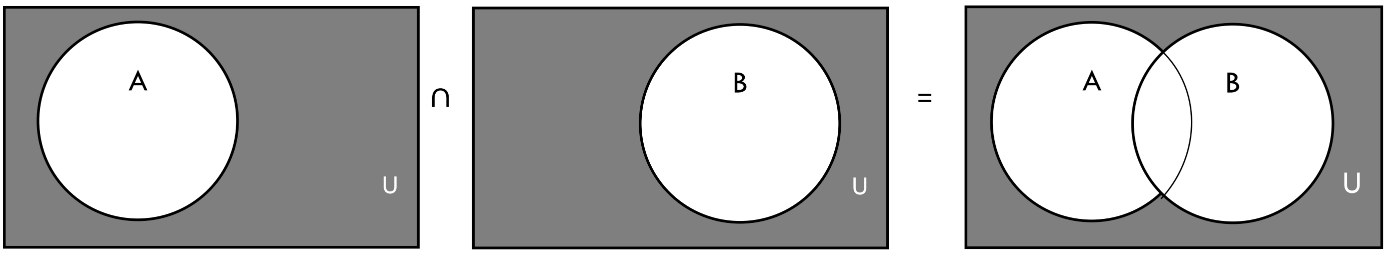
Pelo Teorema que acabamos de ver, a **probabilidade do complementar da interseção** é:

$$\boxed{P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)}$$

As seguintes relações também são importantes:

1. $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$ então **P($\bar{A} \cap \bar{B}$) = P($\overline{A \cup B}$) = 1 – P($A \cup B$)**

A **interseção** entre o **complementar de A** e o **complementar de B** é igual ao **complementar da união** do evento A com o evento B, como ilustrado a seguir.



De fato, a situação do tipo "**nem A nem B**" significa a interseção dos complementares:

não A E não B

Essa situação implica que **não** temos qualquer elemento de A **ou** B, ou seja, o **complementar da união**.

E já sabemos calcular a probabilidade do complementar da união:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) \ = \ P(\overline{A \cup B}) \ = 1 - P(A \cup B)$$

Por **exemplo**, em um lançamento do dado, em que o Espaço Amostral é U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, vamos supor que o evento A corresponda a todos os números pares: A = {2, 4, 6} e o evento B corresponda aos números menores que 4: B = {1, 2, 3}.

A união dos eventos é A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 6} e sua probabilidade é:

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(U)} = \frac{5}{6}$$

Aplicando a fórmula, podemos calcular a probabilidade de **não** ocorrer A **nem** B (**não** A **E** **não** B):

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) \ = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

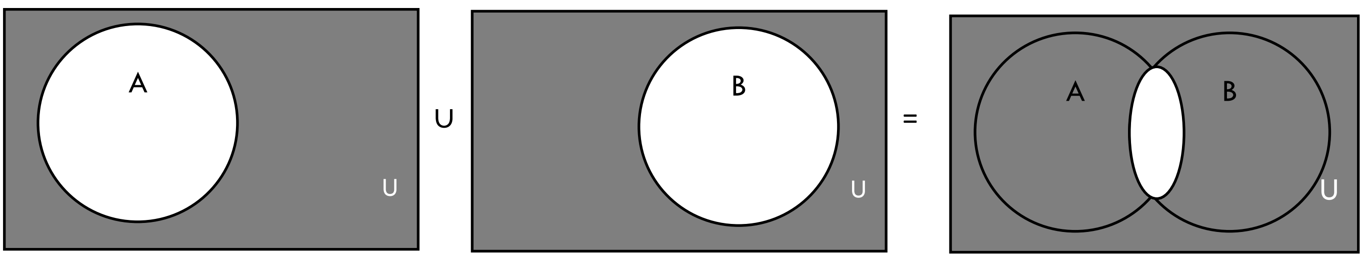
De fato, podemos observar que o elemento que não pertence ao evento A e nem ao evento B é $\bar{A} \cap \bar{B} = \{5\}$, cuja probabilidade é:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{n(\bar{A} \cap \bar{B})}{n(U)} = \frac{1}{6}$$

Que é justamente o resultado que obtivemos aplicando a fórmula $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$.

2. $\bar{A} \ \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$ então **P($\bar{A} \cup \bar{B}$) = P($\overline{A \cap B}$) = 1 – P($A \cap B$)**

A **união** do **complementar de A** com o **complementar de B** é igual ao **complementar da interseção** de A e B, como ilustrado abaixo.



Vamos supor que em um restaurante haja x pessoas que estejam comendo e bebendo, c pessoas que estejam só comendo e b pessoas que estejam só bebendo.

Primeiro, pedimos que as pessoas que não estejam comendo se levantem (as b pessoas que estão somente bebendo se levantarão). Em seguida, pedimos que as pessoas que não estejam bebendo também se levantem (as c pessoas que estão somente comendo se levantarão).

Ao final, estarão em pé as c pessoas que estavam somente comendo e as b pessoas que estavam somente bebendo, isto é, todos menos as x pessoas que estavam fazendo as duas coisas (complementar da interseção) – essas pessoas permanecerão sentadas.

Considerando o exemplo anterior do lançamento do dado, em que A = {2, 4, 6} e B = {1, 2, 3}, a interseção dos eventos é A ∩ B = {2} e sua probabilidade é:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(U)} = \frac{1}{6}$$

Aplicando a fórmula que acabamos de ver, podemos calcular a probabilidade de **não** ocorrer o evento A **OU não** ocorrer o evento B, que equivale à probabilidade de **não** ocorrer a **interseção** $A \cap B$:

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

De fato, os elementos que não pertencem ao conjunto A são $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$ e os elementos que não pertencem ao conjunto B são $\bar{B} = \{4, 5, 6\}$.

A união desses dois eventos complementares é $\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$, que contém todos os elementos exceto a interseção A ∩ B = {2}. E a probabilidade dessa união $\bar{A} \cup \bar{B}$ é:

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{n(\bar{A} \cup \bar{B})}{n(U)} = \frac{5}{6}$$

Que é justamente o resultado que obtivemos aplicando a fórmula $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B)$.

Esses casos podem ser extrapolados para diversos eventos. Para três eventos A, B e C, temos:

$$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \overline{A \cup B \cup C} \rightarrow \boldsymbol{P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)}$$

$$\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} = \overline{A \cap B \cap C} \rightarrow \boldsymbol{P(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) = P(\overline{A \cap B \cap C}) = 1 - P(A \cap B \cap C)}$$

ESQUEMATIZANDO

Probabilidade **Complementar**: $\boldsymbol{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$

Interseção dos complementares = **complementar** da união:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

União dos complementares = **complementar** da interseção:

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$$

HORA DE PRATICAR!

(FGV/2017 – SEPOG/RO) A probabilidade de que certo evento A ocorra é de 20%, a probabilidade de que o evento B ocorra é de 30% e a probabilidade de que A e B ocorram é de 10%. Assim, a probabilidade de que nem A nem B ocorra é igual a:

a) 30%

b) 40%

c) 50%

d) 60%

e) 70%

Comentários:

A probabilidade de que nem A nem B ocorra corresponde à interseção dos complementares, que, por sua vez, equivale ao complementar da união:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

E a probabilidade da união é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

O enunciado informa que:

- P(A) = 20%
- P(B) = 30%
- $P(A \cap B)$ = 10%

Substituindo esses valores na equação da união, temos:

$$P(A \cup B) = 20\% + 30\% - 10\% = 40\%$$

O complementar da união, que a questão exige, é, portanto:

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 100\% - 40\% = 60\%$$

Gabarito: D

(2019 – Fundação Santo André/SP) Considere: Num campeonato de futebol descobriu-se que dos 1000 torcedores, 440 torciam para o time A, 320 torciam para o time B.

Ao escolher uma pessoa no estádio, ao acaso, assinale a alternativa correta quanto à probabilidade dessa pessoa não torcer para nenhum desses times.

a) 24%

b) 76%

c) 27%

d) 32%

Comentários:

A interseção dos complementares (não A e não B) equivale ao complementar da união:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

Nesse caso, os eventos são mutuamente excludentes ($A \cap B = \emptyset$), pois, ninguém torce para mais de um time. Por isso, a probabilidade da união é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

A probabilidade de uma pessoa torcer para A é a razão entre o número de torcedores de A, que é n(A) = 440, e o número total de torcedores, que é n(U) = 1000. Logo:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{440}{1000} = 44\%$$

A probabilidade de uma pessoa torcer para B é a razão entre o número de torcedores de B, que é n(B) = 320, e o número total de torcedores:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{320}{1000} = 32\%$$

Portanto, a probabilidade da união é:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 44\% + 32\% = 76\%$$

Dessa forma a probabilidade de uma pessoa não torcer para A e nem para B é:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 100\% - 76\% = 24\%$$

Gabarito: A

(CESPE/2013 – CBM/CE) Uma pessoa que possua sangue classificado como O– é considerada doadora universal pelo fato de seu sangue poder, em tese, ser ministrado a qualquer pessoa de qualquer tipo sanguíneo. A pessoa que possua sangue classificado como AB+ é considerada receptora universal pelo fato de poder receber, em tese, sangue proveniente de doador de qualquer tipo sanguíneo. Dentro de um mesmo grupo sanguíneo, os de fator Rh– podem doar aos de fator Rh+. O sangue O+ pode ser doado para qualquer pessoa que possua sangue com fator Rh+. A tabela abaixo apresenta a distribuição do tipo sanguíneo e do fator Rh de membros de uma corporação.

Fator Rh	grupo sanguíneo				Total
	A	B	AB	O	
Rh$^+$	12	15	18	21	66
Rh$^-$	16	11	6	1	34
Total	28	26	24	22	100

Tendo como referência essas informações e a tabela acima, julgue o item que se segue.

Escolhendo-se aleatoriamente um membro dessa corporação, a probabilidade de ele não ser nem receptor universal nem doador universal é superior à probabilidade de um membro dessa mesma corporação ter o fator Rh+.

Comentários:

A probabilidade de um membro não ser nem receptor universal (AB_+) nem doador universal (O_-) corresponde à interseção dos complementares, que, por sua vez, equivale ao complementar da união desses eventos.

$$P(\overline{AB_+} \cap \overline{O_-}) = P(\overline{AB_+ \cup O_-}) = 1 - P(AB_+ \cup O_-)$$

A probabilidade de um membro ser receptor universal (AB_+) é dada pela razão entre a proporção de receptores universais e o total. Pela tabela, observamos que $n(AB_+) = 18$ e $n(U) = 100$. Assim, a probabilidade de um membro ser receptor universal é:

$$P(AB_+) = \frac{n(AB_+)}{n(U)} = \frac{18}{100} = 18\%$$

A probabilidade de um membro ser doador universal (O_-) é dada pela razão entre a proporção de doadores universais e o total. Pela tabela, observamos que $n(O_-) = 1$. Assim, a probabilidade de um membro ser doador universal é:

$$P(O_-) = \frac{n(O_-)}{n(U)} = \frac{1}{100} = 1\%$$

Considerando que não há interseção entre esses eventos (são eventos mutuamente exclusivos), então a probabilidade da união é dada por:

$$P(AB_+ \cup O_-) = P(AB_+) + P(O_-) = 18\% + 1\% = 19\%$$

Assim, a probabilidade de a pessoa **não** ser doadora universal ou receptora universal é dada pelo Teorema do Evento Complementar:

$$P(\overline{AB_+ \cup O_-}) = 1 - P(AB_+ \cup O_-) = 100\% - 19\% = 81\%$$

Por outro lado, para calcular a probabilidade de uma pessoa ter Rh+, precisamos do número de pessoas com Rh+: n(+) = 66. Logo, essa probabilidade é:

$$P(+) = \frac{66}{100} = 66\%$$

Como 81% é maior que 66%, então a probabilidade de a pessoa não ser doadora ou receptora universal é, de fato, maior que a probabilidade de ela ter Rh+.

Gabarito: Certo.

(2018 – Conselho Regional de Medicina Veterinária/ES) Em uma pesquisa feita com 200 usuários de uma pasta de dente, verificou-se o seguinte:

- 76 usam a pasta de dente A
- 86 usam a pasta de dente B
- 140 usam a pasta de dente C
- 68 usam a pasta de dente A e B
- 34 usam a pasta de dente A e C
- 48 usam a pasta de dente B e C
- 30 usam a pasta de dente A, B e C

Marque a probabilidade que, em um sorteio ao acaso de todos os usuários entrevistados, é sorteado aquele que não utiliza nenhuma das três pastas apresentada.

a) 18%

b) 9%

c) 12%

d) 21%

e) 15%

Comentários:

A probabilidade de o sorteado não utilizar qualquer pasta, A, B e nem C, é:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$$

Vimos na seção anterior que:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

O enunciado informa que a pesquisa foi feita com **200** usuários e que:

- 76 usam a pasta de dente A, logo $P(A) = \frac{76}{200}$
- 86 usam a pasta de dente B, logo $P(B) = \frac{86}{200}$
- 140 usam a pasta de dente C, logo $P(C) = \frac{140}{200}$
- 68 usam a pasta de dente A e B, logo $P(A \cap B) = \frac{68}{200}$
- 34 usam a pasta de dente A e C, logo $P(A \cap C) = \frac{34}{200}$
- 48 usam a pasta de dente B e C, logo $P(B \cap C) = \frac{48}{200}$
- 30 usam a pasta de dente A, B e C, logo $P(A \cap B \cap C) = \frac{30}{200}$

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{76}{200} + \frac{86}{200} + \frac{140}{200} - \frac{68}{200} - \frac{34}{200} - \frac{48}{200} + \frac{30}{200}$$

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{182}{200}$$

Nota: se preferir, utilize o Diagrama de Venn para encontrar o número de elementos na união. Depois, basta dividir pelo total (200) para encontrar a probabilidade da união. Assim:

$$P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$$

$$P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - \frac{182}{200} = \frac{18}{200} = 9\%$$

Gabarito: B

AXIOMAS DE PROBABILIDADE

Os chamados **axiomas** são verdades tão básicas que dispensam qualquer demonstração. É a partir dessas verdades, que as propriedades e os teoremas são desenvolvidos.

Em probabilidade, temos os **Axiomas de Kolmogorov**. São eles:

1. $\boldsymbol{P(A) \geq 0}$

   A probabilidade de qualquer evento é **maior ou igual a 0**, ou seja, **não** há probabilidade **negativa**.

2. $\boldsymbol{P(U) = 1}$

   A probabilidade associada a todo o **Espaço Amostral**, ou seja, a todos os eventos possíveis, é igual a **1** (100%). Por exemplo, considerando o lançamento de um dado, qual é a probabilidade de ocorrer um dos resultados 1, 2, 3, 4, 5 ou 6? Como teremos algum desses resultados, certamente, então a probabilidade de ocorrer um desses eventos é 100% = 1.

3. Se A e B são **mutuamente excludentes** ($A \cap B = \emptyset$), então a probabilidade da união desses eventos corresponde à soma das probabilidades dos eventos:

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Com base nesses três axiomas, é possível deduzir as **propriedades** de probabilidade:

i) Evento **impossível**: Sendo A um evento impossível, a sua probabilidade é igual a **zero**:

$$\text{Se } A = \emptyset, \text{ então } P(A) = 0$$

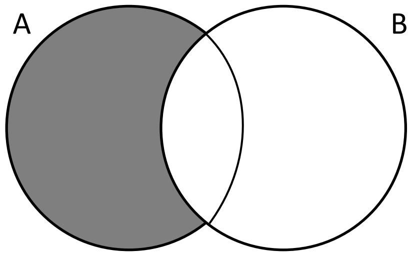
ii) Sendo A um evento qualquer, a sua **probabilidade** está **entre 0 e 1**:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

iii) Sendo A e B eventos quaisquer, a probabilidade de **ocorrer A e não ocorrer B**, que indicamos como P(A – B) ou P(A \ B), é a **diferença** entre a probabilidade de **A** e a probabilidade da **interseção**:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

O evento A – B = A \ B está ilustrado a seguir:



iv) Se A e B são eventos tais que **A implica B**, isto é, **A** está **contido** em **B** (A ⊆ B), então a probabilidade de A é **menor ou igual** à probabilidade de B.

$$P(A) \leq P(B)$$

Também são propriedades decorrentes dos Axiomas de Kolmogorov, a Probabilidade da **União** de eventos quaisquer e a Probabilidade do **Evento Complementar**:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

ESQUEMATIZANDO

Axiomas

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(U) = 1$
3. Se A e B são **mutuamente excludentes** então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Propriedades

i) Se $A = \varnothing$, então $P(A) = 0$
ii) $0 \leq P(A) \leq 1$
iii) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
iv) Se A ⊆ B, então $P(A) \leq P(B)$
v) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
vi) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

HORA DE PRATICAR!

(VUNESP/2016 - Prefeitura de Alumínio/SP - *Adaptada*) Uma moeda é viciada de modo que a probabilidade de sair cara é 4 vezes a de sair coroa. A probabilidade de sair cara em um lançamento qualquer é

a) 50%

b) 25%

c) 20%

d) 75%

e) 80%

Comentários:

Para calcular a probabilidade de sair CARA/COROA em um lançamento de uma moeda **viciada**, **não** podemos utilizar a **definição clássica de probabilidade**, pois os resultados **não são equiprováveis**.

Nesse caso, podemos calcular as probabilidades dos resultados utilizando o axioma P(U) = 1, combinado com o dado do enunciado de que a probabilidade de sair CARA é 4 vezes maior que a probabilidade de sair COROA.

Chamando a probabilidade de sair COROA de p, então a probabilidade de sair CARA é $4p$. Logo:

$$P(U) = 4p + p = 1$$

$$p = \frac{1}{5}$$

E a probabilidade de sair CARA é:

$$4p = \frac{4}{5} = 80\%$$

Resposta: E

(FCC/2019 – SANASA/SP) O número de ocorrências diárias de um determinado evento foi registrado por um funcionário de uma empresa durante um longo período. Esse trabalho permitiu, com o objetivo de análise, elaborar a distribuição de probabilidade conforme tabela abaixo, sabendo-se que o evento nunca ocorre mais que 5 vezes em um dia.

Número de ocorrências diárias	0	1	2	3	4	5
Probabilidade de ocorrência	0,20	p	2p	3p	2p	p

A probabilidade de que em 1 dia o evento ocorra, pelo menos, uma vez, mas não mais que 3 vezes, é igual a

a) 2/9

b) 1/3

c) 5/12

d) 4/5

e) 8/15

Comentários:

Primeiro, precisamos calcular o valor de p. Sabendo que a tabela corresponde a todo o Espaço Amostral, uma vez que o evento nunca ocorre mais que 5 vezes no dia, temos:

$$0{,}20 + p + 2p + 3p + 2p + p = 1$$

$$9p = 0{,}8$$

$$p = \frac{8}{90}$$

A probabilidade de ocorrer pelo menos 1 vez e não mais de 3 vezes é:

$$P(1) + P(2) + P(3) = p + 2p + 3p = 6p = 6 \times \frac{8}{90} = \frac{8}{15}$$

Gabarito: E

(FCC/2017 – SABESP) Em um grupo de 100 pessoas, 80 possuem telefone celular, 50 possuem telefone fixo, e 10 não possui telefone celular nem telefone fixo. Sorteando-se ao acaso uma dessas 100 pessoas, a probabilidade de que ela tenha telefone fixo mas não tenha telefone celular é de

a) 50%.

b) 5%.

c) 1%.

d) 20%.

e) 10%.

Comentários:

A questão informa que, de um total de 100 pessoas, 10 não possuem nem celular, nem fixo. Portanto, 90 pessoas possuem celular **ou** fixo:

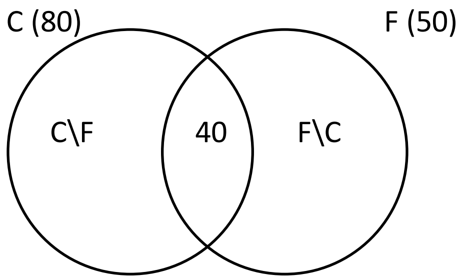
$$n(C) + n(F) - n(C \cap F) = 90$$

Além disso, o enunciado informa que n(C) = 80 e n(F) = 50. Substituindo esses valores, temos:

$$80 + 50 - n(C \cap F) = 90$$

$$n(C \cap F) = 40$$

Ou seja, 40 pessoas possuem celular **e** fixo, conforme representado a seguir.



Portanto, o número de pessoas que têm fixo, mas não têm celular (evento $F \backslash C$) é:

$$n(F \backslash C) = n(F) - n(F \cap C) = 50 - 40 = 10$$

Sabendo que há n(U) = 100 pessoas no total, a probabilidade do evento $F \backslash C$ é:

$$P(F \backslash C) = \frac{n(F \backslash C)}{n(U)} = \frac{10}{100} = 10\%$$

Gabarito: E

PROBABILIDADE CONDICIONAL

A probabilidade condicional trabalha com a probabilidade de um evento ocorrer, **sabendo** que outro **já ocorreu**.

Por exemplo, vamos supor que, em um auditório, existam enfermeiros e dentistas, tanto homens quanto mulheres. Podemos calcular a probabilidade de uma pessoa escolhida aleatoriamente ser enfermeiro, **sabendo** que é homem.

O fato de sabermos que a pessoa escolhida é homem corresponde a uma **redução** do **universo** de possibilidades – não estamos mais considerando todo o auditório, mas apenas os homens nesse auditório. Com esse "novo" universo, calculamos a probabilidade de esse homem ser enfermeiro.

Para ilustrar, vamos atribuir números a esse exemplo, conforme tabela abaixo:

	Homens	Mulheres	**Totais**
Enfermeiros	40	50	**90**
Dentistas	80	30	**110**
Totais	**120**	**80**	**200**

Nesse caso, o "novo" universo são os 120 homens, ao invés de todas as 200 pessoas no auditório. Assim, a probabilidade de ser um enfermeiro pode ser calculado pela razão entre os casos favoráveis (número de enfermeiros) e os casos possíveis (número de homens), nesse "novo" universo:

$$P = \frac{casos\ favoráveis}{casos\ possíveis} = \frac{n(A)}{n(U')}$$

$$P = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

O que fizemos foi dividir o número de enfermeiros e homens (interseção) pelo número de homens (evento que se sabe ter ocorrido).

$$P = \frac{n(E \cap H)}{n(H)}$$

Dividindo tanto o numerador quanto o denominador pelo número de elementos de todo o Espaço Amostral n(U), obtemos a fórmula da **probabilidade de condicional** do evento E, **dado** o evento H, indicada por P(E|H):

$$P(E|H) = \frac{\frac{n(E \cap H)}{n(U)}}{\frac{n(H)}{n(U)}} = \frac{P(E \cap H)}{P(H)}$$

$$\boldsymbol{P(E|H) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)}}$$

O evento que **sabemos ter ocorrido** (o evento "homem", no nosso exemplo) é chamado de evento a **priori** (ocorre antes). O outro evento é aquele cuja **probabilidade** queremos calcular (no nosso exemplo, o evento "enfermeiro"). Esse evento é chamado de evento a **posteriori** (ocorre depois).

É possível que a **interseção** dos eventos seja equivalente ao próprio evento a **posteriori**. Por exemplo, suponha que, dos 90 enfermeiros indicados na tabela, 10 tenham mais de vinte anos de profissão. Agora, vamos calcular a probabilidade de ter sorteado um enfermeiro com mais de vinte anos de profissão (X), sabendo que foi sorteado um enfermeiro. Essa probabilidade é dada por:

$$P(X|E) = \frac{P(X \cap E)}{P(E)}$$

Ora, todos os enfermeiros com mais de vinte anos de profissão (X) pertencem ao grupo dos enfermeiros (E). Assim, a interseção $X \cap E$ corresponde ao próprio evento X, logo:

$$P(X|E) = \frac{P(X)}{P(E)} = \frac{n(X)}{n(E)}$$

$$P(X|E) = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$$

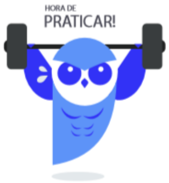
Podemos efetuar as **mesmas operações** de combinação de eventos com a probabilidade condicional. Em especial, a probabilidade condicional **complementar** é:

$$P(\bar{E}|H) = 1 - P(E|H)$$

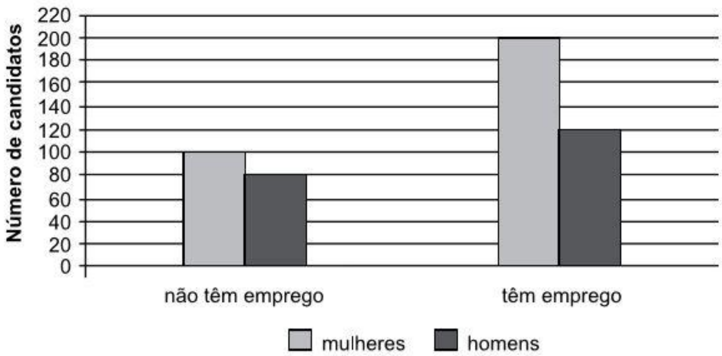
O **complementar** do evento **E**, **dado H**, é **não E**, **dado H**. Assim, o evento a **priori**, que sabemos que ocorreu, **permanece** como evento a priori.

Para o nosso exemplo, temos $P(E|H) = \frac{1}{3}$. Então, dado que foi selecionado um homem, a probabilidade de a pessoa selecionada não ser um enfermeiro, é:

$$P(\bar{E}|H) = 1 - P(E|H) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



(VUNESP/2019 – Prefeitura da Estância Balneária de Peruíbe/SP) O gráfico a seguir apresenta dados referentes a homens e mulheres que se inscreveram para prestar um concurso para trabalhar em uma instituição pública. Entre os candidatos, alguns já tinham emprego.



Um desses candidatos foi escolhido aleatoriamente. Sabendo-se que esse candidato não tem emprego, a probabilidade de que ele seja homem é:

a) 2/9

b) 4/9

c) 2/5

d) 1/5

e) 3/8

Comentários:

A questão pede a probabilidade de o candidato ser homem, **dado** que **não tem emprego** (probabilidade condicional). Essa probabilidade pode ser calculada pela razão clássica entre os eventos favoráveis e os eventos totais, restringindo-os aos candidatos que não têm emprego (universo conhecido):

$$P = \frac{n(Homens\ sem\ emprego)}{n(Candidatos\ sem\ emprego)}$$

Obs.: Se preferir, considere a definição de probabilidade condicional para calcular a probabilidade de o candidato ser homem (H), dado que não tem emprego ($\bar{E}$):

$$P(H|\bar{E}) = \frac{P(H \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{n(H \cap \bar{E})}{n(\bar{E})}$$

Pelo gráfico, observamos que o número de homens sem emprego é:

$$n(H \cap \bar{E}) = n(Homens\ sem\ emprego) = 80$$

O gráfico informa também que o número de mulheres sem emprego é de 100. Logo, o número total de candidatos sem emprego é:

$$n(\bar{E}) = n(Candidatos\ sem\ emprego) = 80 + 100 = 180$$

Assim, a probabilidade desejada é:

$$P(H|\bar{E}) = \frac{80}{180} = \frac{4}{9}$$

Gabarito: B.

(CESPE/2018 – ABIN) Como forma de melhorar a convivência, as famílias Turing, Russell e Gödel disputaram, no parque da cidade, em um domingo à tarde, partidas de futebol e de vôlei. O quadro a seguir mostra os quantitativos de membros de cada família presentes no parque, distribuídos por gênero.

Família	Masculino	Feminino
Turing	5	7
Russell	6	5
Gödel	5	9

A partir dessa tabela, julgue o item subsequente.

Considere que, em eventual sorteio de brindes, um nome tenha sido retirado, ao acaso, do interior de uma urna que continha os nomes de todos os familiares presentes no evento. Nessa situação, sabendo-se que o sorteado não é uma mulher da família Gödel, a probabilidade de ser uma mulher da família Russel será superior a 20%.

Comentários:

A questão indaga sobre probabilidade condicional. Podemos calcular essa probabilidade, utilizando a fórmula da probabilidade clássica, porém **restringindo** os casos considerados ao evento que sabemos ter ocorrido, no caso, o fato de **não ser uma mulher da família Gödel**:

$$P = \frac{casos\ favoráveis}{casos\ possíveis} = \frac{n(A)}{n(U')}$$

Obs.: Se preferir, considere a definição de probabilidade condicional para calcular a probabilidade de o sorteado ser uma mulher da família Russel (M_R), dado que não é uma mulher da Gödel ($\overline{M_G}$):

$$P(M_R|\overline{M_G}) = \frac{P(M_R \cap \overline{M_G})}{P(\overline{M_G})}$$

Perceba que a interseção entre as mulheres da família Russel e as pessoas que **não** são mulheres da família Gödel, $M_R \cap \overline{M_G}$, equivale exatamente às mulheres da família Russel, M_R, logo:

$$P(M_R|\overline{M_G}) = \frac{P(M_R)}{P(\overline{M_G})} = \frac{n(M_R)}{n(\overline{M_G})}$$

Ou seja, sabendo que o sorteado não é uma mulher da família Gödel, então os casos possíveis correspondem a todos os familiares exceto as mulheres dessa família:

$$n(\overline{M_G}) = n(U') = 5 + 7 + 6 + 5 + 5 = 28$$

Os casos favoráveis correspondem ao número de mulheres da família Russel:

$$n(M_R) = n(A) = 5$$

Logo, a probabilidade é dada por:

$$P = \frac{5}{28} \cong 18\%$$

Ou seja, é inferior a 20%.

Gabarito: Errado.

(FCC/2018 – Banrisul/RS) Em uma empresa com 400 funcionários, 30% ganham acima de 5 Salários Mínimos (S.M.). O quadro de funcionários dessa empresa é formado por 180 homens e 220 mulheres, sendo que 160 mulheres ganham no máximo 5 S.M. Escolhendo aleatoriamente 1 funcionário dessa empresa e verificando que é homem, a probabilidade de ele ganhar mais do que 5 S.M. é igual a

a) 1/2.

b) 3/20.

c) 1/3.

d) 3/11.

e) 3/10.

Comentários:

A probabilidade de a pessoa ganhar mais que 5SM, **dado que é homem**, pode ser calculada como:

$$P(G|H) = \frac{P(G \cap H)}{P(H)} = \frac{n(G \cap H)}{n(H)}$$

A questão informa que n(H) = 180, que representa o "novo Universo".

Também é informado que 30% dos funcionários ganham mais que 5SM: n(G) = 30% x 400 = 120.

Sabendo que 160 mulheres ganham menos que 5SM, então 220 – 160 = 60 mulheres ganham mais que 5SM. Então, o número de homens que ganham mais que 5SM é:

$$n(G \cap H) = n(G) - n(G \cap \overline{H}) = 120 - 60 = 60$$

Portanto:

$$P(G|H) = \frac{n(G \cap H)}{n(H)} = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}$$

Gabarito: C

(FGV/2022 – SEFAZ/ES) As probabilidades de dois eventos A e B são P[A] = 0,5, P[B] = 0,8. A probabilidade condicional de A ocorrer dado que B ocorre é P[A|B] = 0,6. Assim, a probabilidade de que A ou B ocorram é igual a

a) 0,56

b) 0,60

c) 0,76

d) 0,82

e) 0,94

Comentários:

O enunciado informa a probabilidade dos eventos A e B, bem como a probabilidade condicional de A, dado B, a qual corresponde à razão entre a probabilidade da interseção e a probabilidade do evento a priori, no caso, o evento B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Sabendo que $P(B) = 0{,}8$ e que $P(A|B) = 0{,}6$, podemos calcular a probabilidade da interseção:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{0{,}8} = 0{,}6$$

$$P(A \cap B) = 0{,}6 \times 0{,}8 = 0{,}48$$

Conhecendo as probabilidades $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}8$ e $P(A \cap B) = 0{,}48$, podemos calcular a probabilidade da união (A OU B):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}8 - 0{,}48 = 0{,}82$$

Gabarito: D

Teorema da Multiplicação

O Teorema da Multiplicação pode ser visto como uma forma diferente de escrever a fórmula da **probabilidade condicional**. Como vimos, a probabilidade condicional é:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

O Teorema da Multiplicação fornece a probabilidade da **interseção**, a partir da probabilidade **condicional**:

$$\boxed{\boldsymbol{P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A)}}$$

Ou seja, a probabilidade da interseção de dois eventos é o **produto** da probabilidade **condicional** pela probabilidade do evento a **priori**.

Para o nosso exemplo anterior, vimos que a probabilidade de ter sido selecionado um enfermeiro, sabendo que foi homem é:

$$\boldsymbol{P(E|H)} = \frac{1}{3}$$

Assim, conhecendo a probabilidade de selecionar um homem (evento a priori), podemos calcular a probabilidade de selecionar um enfermeiro homem (interseção).

Para isso, vejamos novamente a tabela desse exemplo:

	Homens	Mulheres	**Totais**
Enfermeiros	40	50	**90**
Dentistas	80	30	**110**
Totais	**120**	**80**	**200**

A probabilidade de selecionar um homem (evento a priori) é, pela definição clássica:

$$P(H) = \frac{n(H)}{n(U)} = \frac{120}{200} = \frac{3}{5}$$

Agora, podemos calcular a probabilidade da interseção **P(E ∩ H)**, pelo Teorema da Multiplicação:

$$\boldsymbol{P(E \cap H) = P(E|H) \times P(H)} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

De fato, aplicando a definição clássica de probabilidade para calcular a interseção, a partir da tabela, temos:

$$P(E \cap H) = \frac{n(E \cap H)}{n(U)} = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$$

Observe que podemos aplicar o Teorema da Multiplicação, **invertendo-se** os eventos a priori e a posteriori. Se, em vez de $P(E|H)$, conhecêssemos $P(H|E)$, poderíamos calcular a probabilidade da **interseção** $P(E \cap H)$ como:

$$\boldsymbol{P(E \cap H) = P(H|E) \times P(E)}$$

Já conhecemos a probabilidade da interseção, mas vamos efetuar os cálculos com essa **inversão**?

A probabilidade condicional de a pessoa selecionada ser homem, dado que é enfermeiro (homem ou mulher) é, pela tabela:

$$P(H|E) = \frac{casos\ favoráveis}{casos\ possíveis} = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$$

E a probabilidade de selecionar um enfermeiro é, pela tabela (definição clássica):

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(U)} = \frac{90}{200} = \frac{9}{20}$$

Com $P(H|E)$ e $P(E)$, podemos calcular a probabilidade da interseção $P(E \cap H)$, aplicando-se o Teorema da Multiplicação:

$$P(E \cap H) = P(H|E) \times P(E) = \frac{4}{9} \times \frac{9}{20} = \frac{1}{5}$$

Que é o resultado que obtivemos antes!

Para **3 eventos**, a interseção é dada por:

$$\boxed{\boldsymbol{P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B|A) \times P(C|A \cap B)}}$$

Ou seja, é a probabilidade do evento a priori (A), multiplicada pela probabilidade condicional do primeiro evento a posteriori (B|A), multiplicada pela probabilidade condicional do segundo evento a posteriori (C|A∩B).

(VUNESP/2016 – Prefeitura de Alumínio/SP – *Adaptada*) Um estudante resolve uma prova com apenas questões em forma de testes de múltipla escolha, com 4 alternativas cada teste. Ele sabe 75% da matéria da prova. Quando ele sabe a matéria da questão ele acerta e, quando não sabe, escolhe a alternativa ao acaso. A probabilidade de o aluno acertar uma questão qualquer por acaso é igual a

a) 6,25%

b) 8,5%

c) 15%

d) 17,25%

e) 18,75%

Comentários:

A probabilidade de o aluno acertar uma questão qualquer por acaso corresponde à **interseção** dos eventos "não saber a matéria" (que podemos chamar de $\bar{S}$) **E** "acertar a questão" (que podemos chamar de A) é:

$$P(\bar{S} \cap A)$$

Considerando que a probabilidade de o aluno acertar a questão **depende** do evento saber ou não a matéria, a probabilidade da interseção é dada por:

$$P(\bar{S} \cap A) = P(\bar{S}) \times P(A|\bar{S})$$

O enunciado informa que:

- O aluno sabe 75% da matéria da prova: P(S) = 0,75

Logo, o aluno **não sabe** o restante da matéria (evento **complementar**):

$$P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$$

- O aluno escolhe a alternativa ao acaso, se ele não souber a matéria.

Havendo 4 alternativas, a probabilidade de o aluno **acertar** a questão, **dado que não sabe** a matéria é:

$$P(A|\bar{S}) = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Substituindo esses valores na fórmula da probabilidade da interseção, obtemos a probabilidade de o aluno acertar uma questão qualquer por acaso:

$$P(\bar{S} \cap A) = 0{,}25 \times 0{,}25 = 0{,}0625 = 6{,}25\%$$

Gabarito: A

(VUNESP/2019 – Prefeitura de Campinas/SP) Ao operar em um turno de trabalho, uma linha de produção se interrompe totalmente se uma máquina M1 falhar. Para diminuir o risco de interrupção, ligou-se ao sistema uma máquina M2 programada para entrar imediatamente em funcionamento caso M1 falhe, fazendo com que o sistema prossiga. A probabilidade de M1 falhar é de 1/20 e a probabilidade de M2 falhar é também de 1/20. A probabilidade de que o sistema não se interrompa durante um turno de trabalho após a inclusão de M2 é de

a) 99,75%

b) 95%

c) 99%

d) 90,25%

e) 97,5%

Comentários:

A probabilidade de o sistema não se interromper pode ser calculada pelo **complementar** de ele se interromper:

$$P(\bar{I}) = 1 - P(I)$$

Para o sistema se interromper, é necessário que a máquina M1 falhe **E** que a máquina M2 falhe. Logo, temos a interseção desses eventos:

$$P(I) = P(F1) \times P(F2|F1)$$

Representamos a falha da M2 como F2|F1, pois a máquina atua **somente** se a M1 falhar.

O enunciado informa que a probabilidade de tanto uma quanto outra falhar é de 1/20:

$$P(I) = \frac{1}{20} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{400} = 0{,}0025$$

Assim, a probabilidade de o sistema **não** interromper é complementar:

$$P(\bar{I}) = 1 - P(I) = 1 - 0{,}0025 = 0{,}9975 = 99{,}75\%$$

Gabarito: A.

(FGV/2018 – ALE/RO) Uma urna I contém inicialmente 4 bolas azuis e 6 bolas vermelhas; nessa ocasião, a urna II contém 5 bolas azuis e 4 bolas vermelhas, e a urna III, 2 azuis e 7 vermelhas. Uma bola é sorteada da urna I e colocada na urna II. Em seguida, uma bola é sorteada da urna II e colocada na urna III. Por fim, uma bola é sorteada da urna III. A probabilidade de que a bola sorteada da urna III seja azul é igual a

a) 0,166

b) 0,182

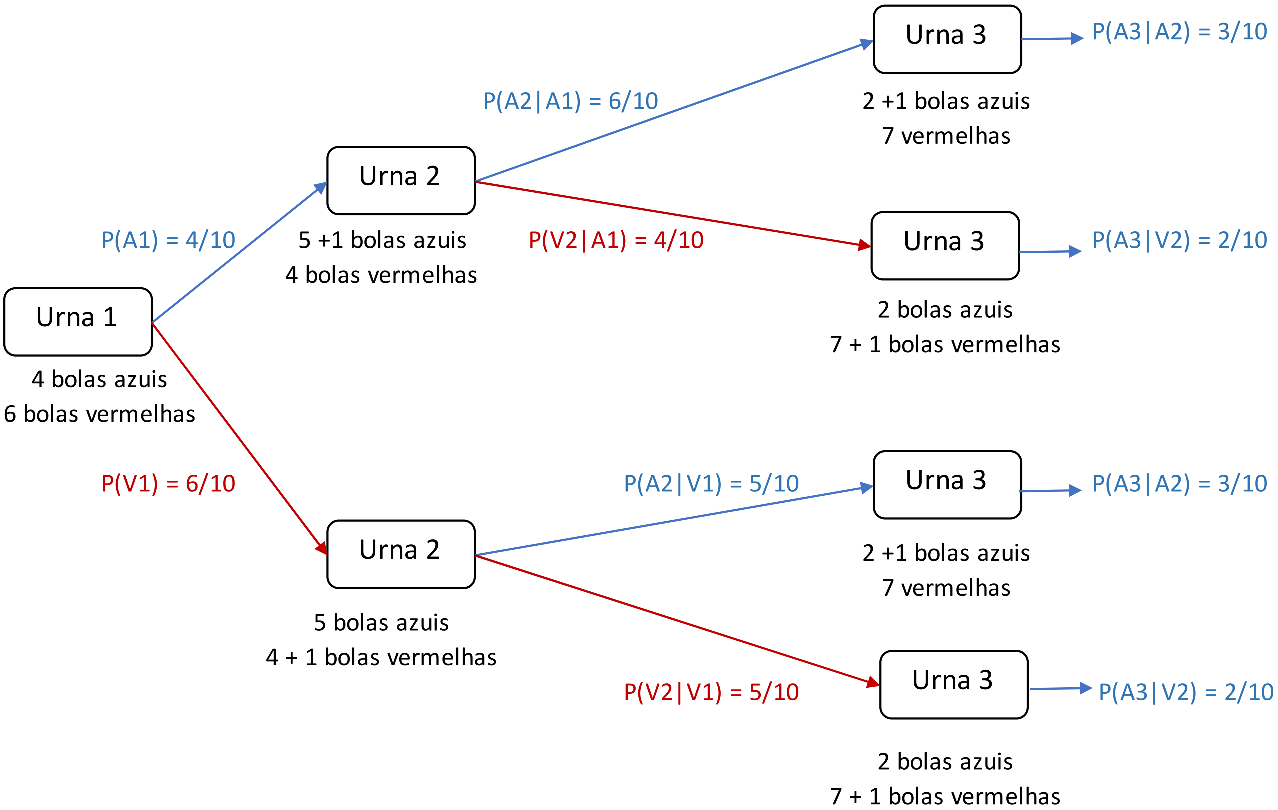
c) 0,254

d) 0,352

e) 0,368

Comentários:

A probabilidade de retirar uma bola azul da urna III depende de qual bola é retirada da urna II, que, por sua vez, depende de qual bola é retirada da urna I, conforme ilustrado abaixo:



Na figura, temos as quantidades de bolas nas urnas, para cada caso, o que nos permite calcular a probabilidade de retirar uma bola azul ou vermelha, em cada etapa.

Para encontrar a probabilidade de tirar uma bola azul, precisamos da interseção dos eventos subsequentes (retirada da urna 1, da urna 2 e da urna 3) e da união das possibilidades alternativas (isto é, dos diferentes caminhos).

A probabilidade do primeiro caminho (superior) é dada por:

$$P(A1 \cap A2 \cap A3) = P(A1) \times P(A2|A1) \times P(A3|A2) = 0{,}4 \times 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}072$$

A probabilidade do segundo caminho é:

$$P(A1 \cap V2 \cap A3) = P(A1) \times P(V2|A1) \times P(A3|V2) = 0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}2 = 0{,}032$$

A probabilidade do terceiro caminho é dada por:

$$P(V1 \cap A2 \cap A3) = P(V1) \times P(A2|V1) \times P(A3|A2) = 0{,}6 \times 0{,}5 \times 0{,}3 = 0{,}09$$

A probabilidade do quarto caminho (inferior) é dada por:

$$P(V1 \cap V2 \cap A3) = P(V1) \times P(V2|V1) \times P(A3|V2) = 0{,}6 \times 0{,}5 \times 0{,}2 = 0{,}06$$

E a probabilidade de retirar uma bola azul, considerando todas essas possibilidades (mutuamente exclusivas) é, pelo princípio aditivo:

$$P(A3) = P(A1 \cap A2 \cap A3) + P(A1 \cap V2 \cap A3) + P(V1 \cap A2 \cap A3) + P(V1 \cap V2 \cap A3)$$

$$P(A3) = 0{,}072 + 0{,}032 + 0{,}09 + 0{,}06 = 0{,}254$$

Gabarito: C

Independência de Eventos

Eventos independentes são aqueles que **não influenciam** uns nos outros. Por exemplo, o resultado do lançamento de um dado em nada influencia o resultado de outro lançamento.

Como fica a probabilidade condicional desses eventos, então?

Vamos supor que o resultado de um lançamento de um dado tenha sido o número 3: A = {3}. Sabendo disso, qual é a probabilidade de um novo lançamento do dado ser B = {4}?

Bem, o resultado do 1º lançamento (evento A) em nada influencia o 2º lançamento (evento B). Portanto, a probabilidade de o 2º lançamento ser 4 é a **mesma** (P = 1/6), **independentemente** do resultado do 1º lançamento.

Isso quer dizer que, sendo A e B eventos **independentes**, a **probabilidade condicional** de B, sabendo que o evento A ocorreu, é igual à probabilidade de B (e vice-versa):

$$\boxed{P(B|A) = P(B)}$$

Vamos a mais uma pergunta: sabendo que o resultado do 1º lançamento foi A = {3}, qual é a probabilidade de **não** sair 4 no 2º lançamento (evento $\bar{B}$)?

Sabendo que a probabilidade de sair 4 no 2º lançamento é a mesma, independente do resultado do 1º lançamento, então a probabilidade de **não** sair 4 **também** é **independente** do 1º lançamento.

De forma geral, se A e B são **independentes**, então os **complementares** também são **independentes**. Isso implica nas seguintes igualdades:

i. $\boldsymbol{P(B|\bar{A}) = P(B)}$

Por exemplo, a probabilidade de sair 4 no 2º lançamento (evento B), **dado** que o resultado do 1º lançamento **não** foi 3 (evento $\bar{A}$), é a mesma (P = 1/6), **independentemente** do resultado do 1º lançamento.

ii. $\boldsymbol{P(\overline{B}|A) = P(\overline{B})}$

Por exemplo, a probabilidade de **não** sair 4 no 2º lançamento (evento $\overline{B}$), **dado** que o resultado do 1º lançamento foi 3 (evento A), é a mesma (P = 5/6), **independentemente** do resultado do 1º lançamento.

iii. $\boldsymbol{P(\overline{B}|\overline{A}) = P(\overline{B})}$

Por exemplo, a probabilidade de **não** sair 4 no 2º lançamento (evento $\overline{B}$), **dado** que o resultado do 1º lançamento **não** foi 3 (evento $\bar{A}$), é a mesma (P = 5/6), **independentemente** do resultado do 1º lançamento.

E como fica o teorema da multiplicação para eventos independentes?

Bem, para eventos **quaisquer**, temos:

$$P(A \cap B) = P(B|A).P(A)$$

Considerando que, para eventos independentes, temos $P(B|A) = P(B)$, então a **interseção** de eventos **independentes** é calculada como:

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(B) \times P(A)}$$

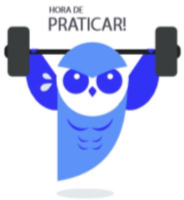
Por exemplo, a probabilidade de obter 3 no 1º lançamento (evento A), com probabilidade P(A) = 1/6 **E** de obter 4 no 2º lançamento (evento B), com probabilidade P(B) = 1/6, é:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Essa relação entre a **interseção** de eventos **independentes** e o **produto** das probabilidades é uma propriedade de "**ida e volta**".

Em outras palavras, se soubermos que A e B são **independentes**, podemos concluir que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$; e, se soubermos que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, podemos concluir que A e B são **independentes**.

Por exemplo, mesmo sem conhecer os eventos, se soubermos que $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{6}$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$, **podemos** concluir que A e B são **independentes**.



(CESPE/2015 – Telebras) Nas chamadas de suporte de uma empresa de telecomunicações, o funcionário Pedro resolve o problema do cliente em duas de cada três vezes em que é solicitado, enquanto Marcos resolve em três de cada quatro chamadas.

A partir dessa situação hipotética, julgue o item seguinte, considerando que os funcionários sejam suficientemente experientes para que a tentativa de resolução do problema de qualquer chamada não esteja subordinada a tentativas anteriores.

Se Pedro não resolver o problema de um cliente, considerando-se que nenhuma informação a respeito da tentativa é repassada a Marcos, a probabilidade de que este também não resolva o referido problema será inferior a 20%.

Comentários:

A questão pede a probabilidade de Marcos não resolver o problema, dado que Pedro não o resolveu (probabilidade condicional), que podemos representar por $P(\overline{R_M}|\overline{R_P})$.

O item esclarece que nenhuma informação a respeito da tentativa é repassada a Marcos, indicando que são eventos **independentes**. Para esses eventos, a probabilidade condicional é igual à probabilidade **não** condicional:

$$P(\overline{R_M}|\overline{R_P}) = P(\overline{R_M})$$

O enunciado informa que Marcos resolve o problema em 3 de 4 ligações, logo a probabilidade de Marcos resolver é 3/4 e a probabilidade de Marcos **não** resolver é o **complementar**:

$$P(\overline{R_M}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 25\%$$

Que é superior a 20%.

Gabarito: Errado.

(CESPE/2019 – TJ/AM) Em um espaço de probabilidades, as probabilidades de ocorrerem os eventos independentes A e B são, respectivamente, P(A) = 0,3 e P(B) = 0,5.

Nesse caso, P(A⋂B) = 0,15.

Comentários:

Sendo A e B eventos **independentes**, a probabilidade da **interseção** é o **produto** das probabilidades:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Sendo P(A) = 0,3 e P(B) = 0,5, então:

$$P(A \cap B) = 0,3 \times 0,5 = 0,15$$

Gabarito: Certo.

(FGV/2019 – Prefeitura de Angra dos Reis/RJ) Peter é um ótimo lançador de dardos. A cada lançamento, a probabilidade de Peter acertar o alvo é de 90% e independe de Peter ter acertado ou não o alvo em lançamentos anteriores. Após fazer dois lançamentos em sequência, a probabilidade de Peter ter acertado o alvo nos dois lançamentos é de

a) 180%

b) 90%

c) 81%

d) 72%

e) 160%

Comentários:

O enunciado informa que os lançamentos são eventos **independentes**. Portanto, a probabilidade de acertar os dois lançamentos, que corresponde à **interseção** dos eventos (A_1 **E** A_2) é o **produto** das probabilidades:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2)$$

A probabilidade de acerto é 90%, ou seja, $P(A_1) = P(A_2) = 90\%$. Logo, a probabilidade da interseção é:

$$P(A_1 \cap A_2) = 90\% \times 90\% = 81\%$$

Gabarito: C

(FGV/2018 – ALE/RO) A urna A tem dois cartões vermelhos e três amarelos e, a urna B, três cartões vermelhos e dois amarelos. Retira-se, aleatoriamente, um cartão de cada urna. A probabilidade de os dois cartões retirados serem amarelos é

a) $\frac{6}{25}$

b) $\frac{5}{25}$

c) $\frac{4}{25}$

d) $\frac{3}{25}$

e) $\frac{2}{25}$

Comentários:

A probabilidade de retirar 2 cartões amarelos, isto é, retirar um cartão amarelo da urna A **E** um cartão amarelo da urna B, corresponde à **interseção** desses eventos. Considerando que esses eventos (que podemos chamar por A e B) são **independentes**, então a interseção é dada pelo **produto** das probabilidades:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Considerando que há 3 cartões amarelos, de um total de 5 cartões, na urna A, a probabilidade de retirar um cartão de A é: $P(A) = \frac{3}{5}$

Considerando que há 2 cartões amarelos, de um total de 5 cartões, na urna B, a probabilidade de retirar um cartão de A é: $P(B) = \frac{2}{5}$

Assim, a probabilidade de retirar 2 cartões amarelos é:

$$P(A \cap B) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$

Gabarito: A.

(FGV/2019 – DPE/RJ – *Adaptada*) A partir dos axiomas da Teoria das Probabilidades, algumas proposições podem ser estabelecidas. Para quaisquer eventos não vazios, julgue as seguintes proposições.

I) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) - P(A).P(B)$

II) Se $P(A \cap B) = P(A).P(B) \rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}).P(\bar{B})$

Comentários:

Em relação ao item I, a probabilidade da união é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Se A e B fossem independentes, teríamos $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Porém, essa **não** é uma condição **dada pelo enunciado**. Logo, é possível que os eventos sejam dependentes e, consequentemente, termos:

$$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

Pontue-se que não é possível afirmar qual das duas probabilidades $P(A \cap B)$ ou $P(A) \times P(B)$ é maior.

Sabendo que a probabilidade da interseção pode ser diferente do produto das probabilidades, então a probabilidade da união pode ser diferente de:

$$P(A \cup B) \neq P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

Logo, o item I está errado.

Em relação ao item II, o item informa que:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Isso nos permite concluir que A e B são eventos **independentes**. Consequentemente, os eventos **complementares** também são **independentes**. Logo, a **interseção** dos eventos complementares é o **produto**:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B})$$

Assim, o item II está correto.

Resposta: item I errado; item II certo.

Algumas questões pedem a probabilidade da forma "**pelo menos um**", ou da **união** de diversos eventos, em que será mais simples calcular a probabilidade **complementar**.

Vejamos algumas questões desse estilo.

(CESPE/2015 – DEPEN) Considerando que, entre a população carcerária de um presídio, a probabilidade de um detento contrair tuberculose seja igual a 0,01; que dois detentos sejam selecionados aleatoriamente dessa população carcerária; e que as ocorrências de tuberculose entre esses detentos sejam eventos independentes, julgue o próximo item.

A probabilidade de pelo menos um detento na amostra contrair tuberculose será superior a 0,01 e inferior a 0,03.

Comentários:

A probabilidade de **pelo menos um** detento, dentre os 2 detentos da amostra, contrair tuberculose pode ser calculada como o **complementar** da probabilidade de **nenhum dos 2** detentos contrair a doença.

A probabilidade de um detento qualquer não contrair a doença é o complementar da probabilidade de ele contraí-la:

$$P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$$

A probabilidade de nenhum dos 2 detentos contrair a doença é a interseção da probabilidade de cada um **não** a contrair. Como os eventos são independentes, basta **multiplicar** as probabilidades:

$$P_{nenhum} = P(\overline{D}) \times P(\overline{D}) = 0{,}99 \times 0{,}99 \cong 0{,}98$$

Assim, a probabilidade de pelo menos um dos 2 detentos contrair a doença é o complementar:

$$P_{pelo\ menos\ 1} = 1 - P_{nenhum} \cong 1 - 0{,}98 = 0{,}02$$

Esse resultado é, de fato, superior a 0,01 e inferior a 0,03.

Gabarito: Certo

(FGV/2021 – FEMPAR) Suponha que cada dose de certa vacina, ao ser aplicada em uma população específica, garanta a imunização contra uma doença, de metade daqueles que não estão imunizados. Inicialmente, toda essa população estava não imunizada e todos os seus indivíduos foram submetidos a duas doses consecutivas dessa vacina. Sorteando-se, ao acaso, um indivíduo dessa população, a probabilidade de que esteja imunizado contra a doença é de

a) 100%

b) 87,5%

c) 75%

d) 50%

e) 25%

Comentários:

Segundo o enunciado, quando uma dose de vacina é aplicada em uma população não imunizada, metade ficará imunizada. Em outras palavras, há uma probabilidade de 50% de uma pessoa não imunizada se tornar imunizada com uma dose de vacina. E a questão afirma que foram aplicadas 2 doses em uma população inicialmente não imunizada.

Vamos calcular a probabilidade de uma pessoa estar imunizada pelo seu **complemento**, qual seja de não estar imunizada:

$$P(imunizado) = 1 - P(não\ imunizado)$$

Para isso, é necessário que ela não tenha sido imunizada na primeira dose, com probabilidade de 50%, **E** não ter sido imunizada na segunda dose, também com probabilidade de 50%. Assim, temos a **interseção** de eventos **independentes**, cuja probabilidade é dada pelo **produto**:

$$P(não\ imunizado) = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$$

E a probabilidade complementar é:

$$P(imunizado) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75 = 75\%$$

Gabarito: C

Independência de Três Eventos

Quando há três eventos independentes, a situação é um pouco diferente de quando há apenas dois eventos. Se os eventos A, B e C são independentes, então temos **todas** as situações a seguir:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A).P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B).P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$$

Dessa forma, os três eventos são considerados independentes somente se **todos forem independentes entre si,** tanto quando comparados dois a dois, quanto para todos os 3.

Ou seja, se os eventos são independentes, então podemos concluir que:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$$

Por exemplo, lançando-se 3 moedas equilibradas, e sendo os eventos A = {CARA na 1ª moeda}, B = {COROA na 2ª moeda} e C = {CARA na 3ª moeda}, então a probabilidade $P(A \cap B \cap C)$ é dada por:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Porém, o **contrário não é verdadeiro**, ou seja, **não** podemos concluir que os eventos são independentes a partir desta identidade somente.

Por exemplo, **sem conhecer** os eventos A, B e C, mas sabendo que:

$$P(A) = \frac{1}{2}, \qquad P(B) = \frac{1}{2}, \qquad P(C) = \frac{1}{2}, \qquad P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8}$$

não podemos, com base apenas nessas informações, concluir que A, B e C são independentes.

Além disso, é possível que todos os eventos sejam **independentes 2 a 2**, porém os **3 eventos não** serem independentes. Ou seja, sabendo que A e B são independentes, B e C são independentes, A e C são independentes, ainda assim, **não** podemos concluir que os 3 eventos são independentes.

Também é possível que A e B sejam independentes e que B e C sejam independentes. Com base nessas informações, **não** podemos concluir que A e C são independentes.

Por exemplo, suponha que o 1º e 2º lançamentos serão de moedas **equilibradas**. Suponha que, se o resultado do 1º lançamento for CARA, o 3º lançamento será de uma moeda **desequilibrada**; caso contrário, o 3º lançamento será de uma moeda equilibrada.

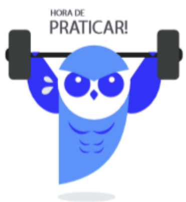
Suponha os mesmos eventos A = {CARA na 1ª}, B = {COROA na 2ª} e C = {CARA na 3ª}.

Nesse exemplo, os eventos A e B são **independentes** (2 lançamentos separados) e os eventos B e C são **independentes**, pois o resultado do 2º lançamento em nada influencia no resultado do 3º lançamento. Porém, os eventos A e C **não são independentes**, pois o resultado do 1º lançamento afeta o resultado do 3º lançamento.

Generalizando, para n eventos independentes, vale a relação:

$$\boxed{\boldsymbol{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \ldots \times P(A_n)}}$$

Porém, o **contrário não** é verdadeiro, ou seja, não podemos concluir que os eventos são independentes, a partir dessa igualdade.



(VUNESP/2019 – Prefeitura de Cerquilho/SP) Em uma prova de múltipla escolha de língua chinesa, cada uma das 5 questões tem 4 alternativas. A probabilidade de uma pessoa acertar todas as questões, sem conhecer a língua, e escolhendo, aleatoriamente, uma alternativa em cada questão, é

a) $\frac{1}{1024}$

b) $\frac{1}{512}$

c) $\frac{1}{256}$

d) $\frac{1}{20}$

e) $\frac{1}{4}$

Comentários:

A probabilidade de acertar todas as questões, escolhendo aleatoriamente as respostas, corresponde à **interseção** de acertar cada uma das questões.

Sabendo que há 4 alternativas, a probabilidade de acertar uma questão é:

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

Assim, a probabilidade de acertar as 5 questões, considerando que são eventos **independentes**, é o **produto**:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = P(A) \times P(A) \times P(A) \times P(A) \times P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{1024}$$

Gabarito: A.

(VUNESP/2018 – UNICAMP/SP) Dentre os bebedores de cerveja, sabe-se que 1/3 preferem a marca A. Se três deles são escolhidos ao acaso, a probabilidade de que nenhum deles preferem a marca A é

a) $\frac{1}{27}$

b) $\frac{5}{9}$

c) $\frac{8}{27}$

d) $\frac{2}{9}$

e) $\frac{2}{3}$

Comentários:

Sabendo que $\frac{1}{3}$ dos bebedores preferem a marca A, então a probabilidade de escolher um bebedor que não prefira é complementar:

$$P = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Considerando que a escolha de um bebedor **independe** da escolha de outro, então, escolhendo 3 bebedores ao acaso, a probabilidade de que nenhum dos 3 bebedores prefira a marca A corresponde à **interseção** dos eventos (**produto** das probabilidades):

$$P \times P \times P = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

Gabarito: C.

(FGV/2017 – TJ/AL) Os eventos A, B e C de um espaço amostral são tais que A é independente de B, e B é independente de C. Sabe-se ainda que os três têm probabilidade não nula de ocorrência.

Com tais informações, é correto afirmar que:

a) A é independente de C;

b) A, B e C são mutuamente independentes;

c) A e C são mutuamente exclusivos;

d) B é independente do complementar de C;

e) $P(A).P(B).P(C) = P(A \cap B|C)$.

Comentários:

Sabendo que A é independente de B e que B é independente de C, **não** podemos afirmar nada a respeito da dependência entre A e C, muito menos a respeito da dependência dos 3 eventos. Por esses motivos, as alternativas A e B estão incorretas.

Por outro lado, podemos afirmar que os **complementares** dos eventos apresentam a mesma relação de independência dos respectivos eventos. Logo, a afirmativa D está correta.

Em relação à alternativa C, se 2 eventos são mutuamente exclusivos, a sua **interseção** é **nula**. Como o enunciado não menciona a respeito da interseção, não podemos saber se os eventos são mutuamente exclusivos, ou não. Logo, a alternativa C está incorreta.

Em relação à alternativa E, pela definição de probabilidade condicional, temos:

$$P(A \cap B|C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)}$$

Como não sabemos se A, B e C são independentes e considerando que o enunciado não forneceu elementos que nos permitem calcular $P(A \cap B \cap C)$, não podemos calcular $P(A \cap B|C)$. Logo, a alternativa E está incorreta.

Gabarito: D

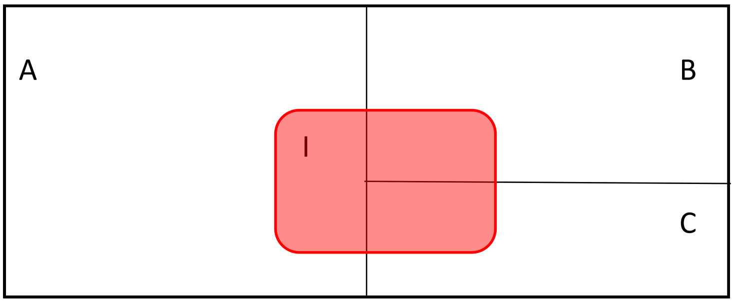
Teorema da Probabilidade Total

O Teorema da Probabilidade Total permite calcular a probabilidade de um evento B, quando conhecemos as **probabilidades condicionais** desse evento.

Por exemplo, suponha que, em um banco, o nível de inadimplência dos pagadores do grupo A (melhores pagadores) seja 1%; o nível de inadimplência dos pagadores do grupo B seja 5%; e o nível de inadimplência dos pagadores do grupo C seja de 10%.

Além disso, suponha que o grupo A represente 50% dos pagadores; o grupo B represente 30%; e o grupo C represente 20%. Com base nesses valores, podemos calcular a **probabilidade total** de inadimplência, ou seja, a probabilidade de inadimplência de um cliente qualquer, sem saber a que grupo ele pertence.

Para isso, consideramos que a probabilidade do evento I (inadimplência) está “espalhada” nos três grupos, ou seja, temos os inadimplentes do grupo A, os inadimplentes do grupo B e os inadimplentes do grupo C, como representado a seguir.



Portanto, a probabilidade total de inadimplência é a soma dos inadimplentes de cada grupo, ou seja, a soma das interseções de I com os grupos A, B e C:

$$\boldsymbol{P(I) = P(I \cap A) + P(I \cap B) + P(I \cap C)}$$

Pelo **Teorema da Multiplicação**, substituímos as interseções pelos produtos das probabilidades:

$$\boxed{\boldsymbol{P(I) = P(I|A) \times P(A) + P(I|B) \times P(B) + P(I|C) \times P(C)}}$$

Nesse exemplo, temos P(A) = 0,5, P(B) = 0,3, P(C) = 0,2, P(I|A) = 0,01, P(I|B) = 0,05 e P(I|C) = 0,1. Logo, a probabilidade de um cliente qualquer ser inadimplente é:

$$P(I) = 0{,}5 \times 0{,}01 + 0{,}3 \times 0{,}05 + 0{,}2 \times 0{,}1$$

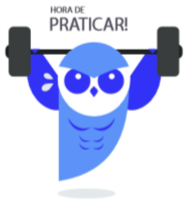
$$P(I) = 0{,}005 + 0{,}015 + 0{,}02 = 0{,}04 = 4\%$$

Essa relação vale para qualquer número de eventos. Havendo **apenas 2 eventos a priori**, como se fossem apenas 2 classificações de clientes, A e $\bar{A}$, a probabilidade total $P(I)$ é dada por:

$$\boxed{\boldsymbol{P(I) = P(I|A) \times P(A) + P(I|\bar{A}) \times P(\bar{A})}}$$

Generalizando, com n eventos A_i e conhecendo $P(I|A_i)$, temos $P(I)$ dado por:

$$\boxed{\boldsymbol{P(I) = P(I|A_1) \times P(A_1) + P(I|A_2).P(A_2) + \cdots + P(I|A_n).P(A_n)}}$$



(CESPE/2015 – Departamento Penitenciário Nacional – Área 4) As probabilidades dos eventos aleatórios A = "o infrator é submetido a uma pena alternativa" e B = "o infrator reincide na delinquência" são representadas, respectivamente, por P(A) e P(B). Os eventos complementares de A e B são denominados, respectivamente, por $\bar{A}$ e $\bar{B}$. Considerando que P(A) = 0,4, e que as probabilidades condicionais $P(B|\bar{A}) = 0{,}3$ e $P(B|A) = 0{,}1$, julgue o item a seguir.

P(B) ≤ 0,2.

Comentários:

A questão trata da **probabilidade total** de B, dada por:

$$P(B) = P(B|A) \times P(A) + P(B|\bar{A}) \times P(\bar{A})$$

O enunciado informa que $P(A) = 0{,}4$; $P(B|A) = 0{,}1$ e $P(B|\bar{A}) = 0{,}3$.

Ademais, sabendo que $P(A) = 0{,}4$, o seu complementar é:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$

Substituindo esses valores, temos:

$$P(B) = 0{,}1 \times 0{,}4 + 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}04 + 0{,}18 = 0{,}22$$

Esse resultado é **maior** que 0,2: $P(B) > 0{,}2$.

Gabarito: Errado.

(FGV/2019 – DPE/RJ) 10% das lâmpadas fabricadas pela empresa A queimam antes de 1000h de funcionamento. Das fabricadas pela empresa B, 5% queima antes de 1000h de funcionamento. Das fabricadas pela empresa C, 1% queima antes de 1000h de funcionamento. Em uma grande loja de varejo, 20% das lâmpadas em estoque são da marca A, 30% são da marca B e 50% são da marca C. Uma lâmpada é escolhida ao acaso do estoque dessa loja.

A probabilidade de que ela não queime antes de 1000h de funcionamento é igual a.

a) 0,76

b) 0,84

c) 0,92

d) 0,96

e) 0,98

Comentários:

A questão trabalha com o Teorema da Probabilidade Total, pois informa as probabilidades de durabilidade, condicionadas aos fabricantes, e pede a probabilidade de durabilidade, não condicionada.

A probabilidade de a lâmpada **não queimar** antes de 1000h é **complementar** à probabilidade de ela **queimar** antes de 1000h:

$$P(\bar{Q}) = 1 - P(Q)$$

O enunciado informa que:

- 10% das lâmpadas fabricadas por A queimam antes de 1000h: P(Q|A) = 0,1;
- 5% das lâmpadas fabricadas por B queimam antes de 1000h: P(Q|B) = 0,05;
- 1% das lâmpadas fabricadas por C queimam antes de 1000h: P(Q|C) = 0,01;
- 20% das lâmpadas são fabricadas por A: P(A) = 0,2;
- 30% das lâmpadas são fabricadas por B: P(B) = 0,3;
- 50% das lâmpadas são fabricadas por C: P(C) = 0,5.

Pelo Teorema da Probabilidade Total, temos:

$$P(Q) = P(Q|A) \times P(A) + P(Q|B) \times P(B) + P(Q|C) \times P(C)$$

Substituindo os valores fornecidos, temos:

$$P(Q) = 0{,}1 \times 0{,}2 + 0{,}05 \times 0{,}3 + 0{,}01 \times 0{,}5 = 0{,}02 + 0{,}015 + 0{,}005 = 0{,}04$$

Portanto, a probabilidade de a lâmpada não queimar é complementar:

$$P(\bar{Q}) = 1 - P(Q) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$$

Gabarito: D

(FCC/2016 – Analista Judiciário do TRT 11ª Região) Um determinado órgão público recebe mensalmente processos que devem ser analisados por 2 analistas: A e B. Sabe-se que esses dois analistas recebem a mesma proporção de processos para a análise. Sabe-se que 20% de todos os processos encaminhados para A são analisados no mês de recebimento e que 10% são indeferidos. Sabe-se também que 40% dos processos encaminhados para B são analisados no mês de recebimento e que 20% são indeferidos.

Um processo recebido em determinado mês é selecionado ao acaso. A probabilidade de ele ser deferido naquele mesmo mês é igual a

a) 0,245

b) 0,350

c) 0,500

d) 0,420

e) 0,250

Comentários:

Pela probabilidade total, a probabilidade de um processo ser **deferido** no mesmo mês é:

$$P(D) = P(D|A) \times P(A) + P(D|B) \times P(B)$$

Sabemos que P(A) = P(B). Como P(A) + P(B) = 1, então P(A) = P(B) = 0,5.

Além disso, sabemos que a probabilidade de o processo ser **deferido** no mesmo mês é o **complementar** de ele ser **indeferido** no mesmo mês.

O enunciado informa que:

- 20% dos processos de A são analisados no mês e 10% deles são **indeferidos**. Ou seja, 90% dos processos analisados no mês por A são **deferidos**:

$$P(D|A) = 0{,}2 \times 0{,}9 = 0{,}18$$

- 40% dos processos de B são analisados no mês e 20% deles são **indeferidos**. Ou seja, 80% dos processos analisados no mês por B são **deferidos**:

$$P(D|B) = 0{,}4 \times 0{,}8 = 0{,}32$$

Inserindo esses valores no Teorema da Probabilidade Total, temos:

$$P(D) = 0{,}18 \times 0{,}5 + 0{,}32 \times 0{,}5 = 0{,}09 + 0{,}16 = 0{,}25$$

Gabarito: E

Teorema de Bayes

O Teorema de Bayes é usado quando conhecemos as probabilidades condicionais da forma P(B|A), e queremos calcular a probabilidade condicional da forma P(A|B), isto é, **invertendo**-se os eventos a **priori** e a **posteriori**.

No exemplo da inadimplência que vimos antes, conhecemos as probabilidades de **inadimplência para cada grupo**, isto é, com a **inadimplência** sendo o evento a **posteriori** e os **grupos** A, B e C sendo os eventos a **priori**:

- P(**I**|A) = 0,01
- P(**I**|B) = 0,05
- P(**I**|C) = 0,1.

Mas, podemos calcular a probabilidade de um cliente **pertencer a um dos grupos** (por exemplo ao grupo A), **sabendo** que ele foi **inadimplente**, ou seja, tendo a **inadimplência** como evento a **priori**:

- P(A|**I**) = ?

Para isso, vamos utilizar a fórmula da **probabilidade condicional**:

$$P(A|I) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)}$$

Pelo **Teorema da Multiplicação**, podemos escrever o numerador em função da probabilidade condicional P(I|A), que **conhecemos**, isto é, com o evento **inadimplência a posteriori**:

$$P(A \cap I) = P(I|A) \times P(A)$$

Pelo **Teorema da Probabilidade Total**, podemos escrever o denominador como:

$$P(I) = P(I|A) \times P(A) + P(I|B) \times P(B) + P(I|C) \times P(C)$$

Assim, a fórmula do **Teorema de Bayes** para é:

$$\boxed{\boldsymbol{P(A|I) = \frac{P(I|A)\times P(A)}{P(I|A)\times P(A)+P(I|B)\times P(B)+P(I|C)\times P(C)}}}$$

Para o nosso exemplo, já calculamos o denominador, que corresponde à probabilidade de um cliente ser inadimplente, pela probabilidade total:

$$P(I) = P(A).P(I|A) + P(B).P(I|B) + P(C).P(I|C) = 0{,}04$$

Também sabemos que P(I|A) = 0,01 e P(A) = 0,5, portanto, a probabilidade de um cliente inadimplente ser do grupo A é:

$$P(A|I) = \frac{0{,}01 \times 0{,}5}{0{,}04} = \frac{0{,}005}{0{,}04} = \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\%$$

De maneira geral, com n eventos A_i e conhecendo as probabilidades $P(B|A_i)$, então a probabilidade de algum evento A_m, condicionada ao evento B é:

$$\boldsymbol{P(A_m|B) = \frac{P(B|A_m).P(A_m)}{P(B|A_1).P(A_1) + P(B|A_2).P(A_2) + \cdots + P(B|A_n).P(A_n)}}$$

(FGV/2019 – DPE/RJ) A abrangência do atendimento da Defensoria Pública depende da condição econômica do cidadão e também do tipo de causa envolvida. Sabe-se que 80% das demandas surgem em função da hipossuficiência econômica, e os outros 20% devem-se a causas no âmbito criminal. Entre aqueles que não dispõem de recursos, 90% têm suas necessidades atendidas, enquanto entre os envolvidos em ações criminais, só 40% são beneficiados com a gratuidade.

Suponha que um indivíduo do cadastro dos que procuram a Defensoria seja sorteado ao acaso, verificando-se tratar-se de alguém atendido gratuitamente.

Então, a probabilidade de que o sorteado seja um dos que procuraram a Defensoria por causa de questões criminais é igual a:

a) $\frac{1}{10}$

b) $\frac{2}{10}$

c) $\frac{6}{10}$

d) $\frac{7}{10}$

e) $\frac{9}{10}$

Comentários:

A questão trabalha com o Teorema de Bayes, pois informa as probabilidades de gratuidade condicionadas aos tipos de situação e pergunta pela probabilidade do tipo de situação, condicionada à gratuidade, isto é, **inverte** os eventos **a priori** e **a posteriori**.

O enunciado informa que:

- 80% das demandas surgem por hipossuficiência econômica: P(H) = 0,8;
- Os outros 20% das demandas surgem por causas criminais: P(C) = 0,2;
- 90% das demandas de hipossuficiência econômica conseguem gratuidade: P(G|H) = 0,9
- 40% das demandas por causas criminais conseguem gratuidade: P(G|C) = 0,4

Assim, a probabilidade de a demanda ser por causas criminais, sabendo que conseguiu gratuidade, P(C|G), é dada pela fórmula de Bayes:

$$P(C|G) = \frac{P(G|C) \times P(C)}{P(G|C) \times P(C) + P(G|H) \times P(H)}$$

Substituindo os valores do enunciado, temos:

$$P(C|G) = \frac{0{,}4 \times 0{,}2}{0{,}4 \times 0{,}2 + 0{,}9 \times 0{,}8} = \frac{0{,}08}{0{,}08 + 0{,}72} = \frac{0{,}08}{0{,}80} = \frac{1}{10}$$

Gabarito: A

(FCC/2018 – Analista Judiciário do TRT 14ª Região) Uma cidade sede do interior possui três varas trabalhistas. A 1ª Vara comporta 50% das ações trabalhistas, a 2ª Vara comporta 30% e a 3ª Vara as 20% restantes. As porcentagens de ações trabalhistas oriundas da atividade agropecuária são 3%, 4% e 5% para a 1ª, 2ª e 3ª Varas, respectivamente. Escolhe-se uma ação trabalhista aleatoriamente e constata-se ser originária da atividade agropecuária. A probabilidade dessa ação ser da 1ª Vara trabalhista é, aproximadamente:

a) 0,5312.

b) 0,3332.

c) 0,1241.

d) 0,4909.

e) 0,4054.

Comentários:

O enunciado fornece as proporções das ações de atividade agropecuária para cada uma das varas (ou seja, tendo as ações de atividade agropecuária como probabilidade a **posteriori**) e exige a probabilidade uma ação de ser da 1ª Vara, sabendo que ela trata atividade agropecuária (ou seja, tendo as ações de atividade agropecuária como evento a **priori**).

Pelo Teorema de Bayes, $P(V_1|A)$ é dado por:

$$P(V_1|A) = \frac{P(A|V_1) \times P(V_1)}{P(A|V_1) \times P(V_1) + P(A|V_2) \times P(V_2) + P(A|V_3) \times P(V_3)}$$

A questão informa que:

- A 1ª Vara comporta 50% das ações: $P(V_1) = 0{,}5$;
- A 2ª Vara comporta 30% das ações: $P(V_2) = 0{,}3$;
- A 3ª Vara comporta 20% das ações: $P(V_3) = 0{,}2$;
- As percentagens das ações de atividade agropecuária para as Varas 1, 2 e 3 são, respectivamente, 3%, 4% e 5%: $P(A|V_1) = 0{,}03$, $P(A|V_2) = 0{,}04$ e $P(A|V_3) = 0{,}05$.

Substituindo esses valores na fórmula do Teorema de Bayes, temos:

$$P(V_1|A) = \frac{0{,}03 \times 0{,}5}{0{,}03 \times 0{,}5 + 0{,}04 \times 0{,}3 + 0{,}05 \times 0{,}2} = \frac{0{,}015}{0{,}015 + 0{,}012 + 0{,}01} = \frac{0{,}015}{0{,}037} \cong 0{,}4054$$

Gabarito: E.

(CESPE/2019 – TJ/AM) Se Carlos estiver presente na aula ministrada pela professora Paula, a probabilidade de ele aprender o conteúdo abordado é de 80%; se ele estiver ausente, essa probabilidade cai para 0%. Em 25% das aulas da professora Paula, Carlos está ausente.

Com relação a essa situação hipotética, julgue o item seguinte.

Se Carlos não aprendeu o conteúdo ministrado na aula da professora Paula, então a probabilidade de ele ter estado presente na aula é inferior a 50%.

Comentários:

O enunciado informa que:

- Se Carlos estiver presente na aula, a probabilidade de aprender o conteúdo é de 80%: $P(Ap|P) = 0{,}8$, em que Ap corresponde ao aprendizado e P corresponde à presença;
- Se Carlos estiver ausente, a probabilidade de aprender é 0%: $P(Ap|\bar{P}) = 0$, em que $\bar{P}$ corresponde à não presença, isto é, à ausência;
- Carlos está ausente em 25%: $P(\bar{P}) = 0{,}25$.

Para calcular a probabilidade de Carlos ter estado presente, sabendo que ele não aprendeu o conteúdo, isto é, $P(P|\overline{Ap})$, em que $\overline{Ap}$ corresponde ao não aprendizado, utilizamos a fórmula de Bayes:

$$P(P|\overline{Ap}) = \frac{P(\overline{Ap}|P) \times P(P)}{P(\overline{Ap}|P) \times P(P) + P(\overline{Ap}|\bar{P}) \times P(\bar{P})}$$

Sabemos que a probabilidade de Carlos **aprender**, dado que esteve presente, é $P(Ap|P) = 0{,}8$. Assim, a probabilidade de Carlos **não aprender**, dado que esteve presente, corresponde à probabilidade do evento **complementar**:

$$P(\overline{Ap}|P) = 1 - P(Ap|P) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

Sabemos ainda que a probabilidade de Carlos **não** estar presente é $P(\bar{P}) = 0{,}25$. Logo, a probabilidade de Carlos estar presente corresponde à probabilidade do evento **complementar**:

$$P(P) = 1 - P(\bar{P}) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

Por fim, sabemos que a probabilidade de Carlos **aprender**, dado que **não** esteve **presente**, é $P(Ap|\bar{P}) = 0$. Logo, a probabilidade de Carlos **não aprender**, dado que **não** esteve **presente**, é complementar:

$$P(\overline{Ap}|\bar{P}) = 1 - P(Ap|\bar{P}) = 1 - 0 = 1$$

Substituindo esses valores na fórmula de Bayes, temos:

$$P(P|\overline{Ap}) = \frac{0{,}2 \times 0{,}75}{0{,}2 \times 0{,}75 + 1 \times 0{,}25} = \frac{0{,}15}{0{,}15 + 0{,}25} = \frac{0{,}15}{0{,}4} = 37{,}5\%$$

Ou seja, a probabilidade de Carlos estar presente, sabendo que ele não aprendeu é inferior a 50%

Gabarito: Certo.

ESQUEMATIZANDO

Probabilidade Condicional

Probabilidade **Condicional**: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Teorema da **Multiplicação**: $P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A)$

Teorema da **Probabilidade Total**: $P(I) = P(I|A) \times P(A) + P(I|B) \times P(B)$

Teorema de **Bayes**: $P(A|I) = \frac{P(I \cap A)}{P(I)} = \frac{P(I|A) \times P(A)}{P(I|A) \times P(A) + P(I|B) \times P(B)}$

Independência

A e B independentes $\leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

A, B e C independentes $\rightarrow$ $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$

Resumo da Aula

Definição clássica de probabilidade

$$P(A) = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ totais} = \frac{n(A)}{n(U)}$$

Probabilidade da União – caso geral

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidade da União – eventos mutuamente excludentes: $P(A \cap B) = 0$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Teorema do Evento Complementar

Vale também para combinação de eventos (união e interseção) e para probabilidades condicionais

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Axiomas/Propriedades de Probabilidade

$$P(U) = 1$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Probabilidade Condicional – quando sabemos que o evento A ocorreu

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A)$$

Eventos Independentes – o resultado de um não influencia o resultado do outro

$$P(B|A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A)$$

Teorema da Probabilidade Total: probabilidade do todo, a partir das probabilidades condicionais

$$P(I) = P(I|A) \times P(A) + P(I|B) \times P(B) + P(I|C) \times P(C)$$

Teorema de Bayes: quando a questão inverte os eventos a priori e a posteriori

$$P(A|I) = \frac{P(I|A) \times P(A)}{P(I|A) \times P(A) + P(I|B) \times P(B) + P(I|C) \times P(C)}$$

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Conceitos Iniciais

1. (CESGRANRIO/2010 – IBGE) A teoria da probabilidade permite que se calcule a chance de ocorrência de um número em um experimento aleatório. Considerando a teoria das probabilidades analise as afirmações abaixo.

I - Experimentos mutuamente excludentes são aqueles cujos elementos integrantes apresentam características únicas e os resultados possíveis não serão previsíveis.

II - Experimento aleatório é aquele cujo resultado é imprevisível, porém pertence necessariamente a um conjunto de resultados possíveis denominado espaço amostral.

III - Qualquer subconjunto do espaço amostral é denominado evento, sendo que, se esse subconjunto possuir apenas um elemento, o denominamos evento elementar.

É(São) correta(s) a(s) afirmativa(s)

a) I, apenas.

b) II, apenas.

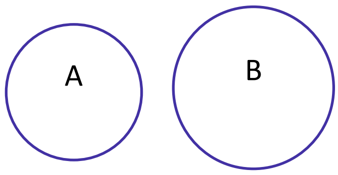
c) I e II, apenas.

d) II e III, apenas.

e) I, II e III.

Comentários:

Em relação à afirmativa I, experimentos mutuamente excludentes são aqueles que não apresentam interseção, conforme ilustrado abaixo:



Podemos calcular as suas probabilidades, como fazemos para quaisquer outros eventos. Logo, a afirmativa I está incorreta.

Em relação à afirmativa II, não sabemos quais serão os resultados dos experimentos aleatórios, mas conhecemos o conjunto de suas possibilidades, o que chamamos de Espaço Amostral, de fato. Logo, a afirmativa II está correta.

Em relação à afirmativa III, um evento é um subconjunto do Espaço Amostral e, quando o evento possui apenas 1 elemento, ele é chamado de evento elementar. Logo, a afirmativa III está correta.

Gabarito: D

2. (CESGRANRIO/2010 – IBGE) Relacione os conceitos probabilísticos às suas definições

Conceito

I – Experimentos Aleatórios

II – Espaços Amostrais

III – Eventos Mutuamente Exclusivos

Definição

P – Eventos que não podem acontecer ao mesmo tempo; a ocorrência de um elimina a possibilidade de ocorrência do outro.

Q – Conjuntos universo ou conjuntos de resultados possíveis de um experimento aleatório.

R – Eventos cujos elementos participantes não possuem pontos em comum.

S – Fenômenos que, mesmo repetidos várias vezes sob condições semelhantes, apresentem resultados imprevisíveis.

Estão corretas as associações

a) I – S; II – Q e III – P.

b) I – S; II – P e III – Q.

c) I – P; II – Q e III – S.

d) I – R; II – P e III – Q.

e) I – Q; II – P e III – R.

Comentários:

Experimentos Aleatórios são fenômenos cujos resultados não são conhecidos (não sabemos qual será o resultado de cada experimento). Logo, temos:

I – S

Espaço Amostral é o conjunto de resultados possíveis de um experimento aleatório:

II – Q

Eventos Mutuamente Excludentes são aqueles não podem acontecer ao mesmo tempo (a ocorrência de um elimina a possibilidade do outro) e que não possuem elementos em comum (não possuem interseção):

III – P ou R

Gabarito: A

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Definições de Probabilidade

1. (Cesgranrio/2021 – CEF) Os alunos de certa escola formaram um grupo de ajuda humanitária e resolveram arrecadar fundos para comprar alimentos não perecíveis. Decidiram, então, fazer uma rifa e venderam 200 tíquetes, numerados de 1 a 200. Uma funcionária da escola resolveu ajudar e comprou 5 tíquetes. Seus números eram 75, 76, 77, 78 e 79. No dia do sorteio da rifa, antes de revelarem o ganhador do prêmio, anunciaram que o número do tíquete sorteado era par. Considerando essa informação, a funcionária concluiu acertadamente que a probabilidade de ela ser a ganhadora do prêmio era de

a) 1,0%

b) 2,0%

c) 3,0%

d) 4,0%

e) 5,0%

Comentários:

A probabilidade de um evento é a razão entre o número de casos associado ao evento (favoráveis) e o número total de casos possíveis:

$$P = \frac{n(casos\ favoráveis)}{n(casos\ totais)} = \frac{n(A)}{n(U)}$$

O enunciado informa que, dentre as fichas de 1 a 200, sabe-se que a ficha sorteada é par, logo o total de casos possíveis correspondem às 100 fichas pares:

$$n(U) = 100$$

Em relação à probabilidade de a funcionária ser sorteada, os eventos favoráveis correspondem às fichas pares que a funcionária possui, quais sejam 76 e 78. Logo, há 2 casos favoráveis:

$$n(A) = 2$$

Logo, a probabilidade desejada é a razão entre esses resultados:

$$P = \frac{2}{100} = 2\%$$

Gabarito: B

2. (Cesgranrio/2018 – LIQUIGÁS) Para montar uma fração, deve-se escolher, aleatoriamente, o numerador no conjunto N = {1,3,7,10} e o denominador no conjunto D = {2,5,6,35}. Qual a probabilidade de que essa fração represente um número menor do que 1(um)?

a) 50%

b) 56,25%

c) 25%

d) 75%

e) 87,5%

Comentários:

O enunciado informa que será escolhido 1 numerador, dentre 4 opções; e denominador, dentre outras 4 opções. Logo, o número total de eventos possíveis corresponde às formas de escolher um numerador **E** um denominador. Como são eventos concomitantes, devemos multiplicar as possibilidades (princípio multiplicativo):

$$n(U) = 4 \times 4 = 16$$

E os casos favoráveis correspondem à escolha de um numerador **menor** do que o denominador. Se for escolhido o número 1 como numerador, podemos escolher qualquer uma das **4** opções de denominador. Se for escolhido o número 3 como numerador, podemos escolher {5, 6 ou 35} como denominador, ou seja, há **3** opções. Se for escolhido o número 7 como numerador, podemos escolher apenas 35 como denominador (**1** opção); e se for escolhido o número 10 como numerador, também teremos o número 35 como único denominador possível (**1** opção). Como são eventos mutuamente exclusivos, devemos somar essas possibilidades (princípio aditivo):

$$n(A) = 4 + 3 + 1 + 1 = 9$$

E a probabilidade é a razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos possíveis:

$$P = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{9}{16} = 0{,}5625 = 56{,}25\%$$

Gabarito: B

3. (CESGRANRIO/2018 – BB) Em um jogo, os jogadores escolhem três números inteiros diferentes, de 1 a 10. Dois números são sorteados e se ambos estiverem entre os três números escolhidos por um jogador, então ele ganha um prêmio. O sorteio é feito utilizando-se uma urna com 10 bolas numeradas, de 1 até 10, e consiste na retirada de duas bolas da urna, de uma só vez, seguida da leitura em voz alta dos números nelas presentes. Qual é a probabilidade de um jogador ganhar um prêmio no sorteio do jogo?

a) 1/90

b) 1/30

c) 1/5

d) 1/15

e) 1/20

Comentários:

O enunciado informa que o jogador escolhe 3 números de 1 a 10 e que serão sorteados 2 números de 1 a 10. A probabilidade de o jogador acertar os 2 números sorteados é dada pela razão entre o número de eventos favoráveis n(A) e o total de eventos n(U):

$$P = \frac{n(A)}{n(U)}$$

O total de eventos n(U) corresponde à quantidade de maneiras de sortear 2 números, dentre 10, sem que a ordem importe:

$$n(U) = C_{10,2} = \frac{10!}{(10-2)! \times 2!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8! \times 2!} = \frac{10 \times 9}{2} = 5 \times 9 = 45$$

E os eventos favoráveis correspondem ao sorteio de 2 números, dentre os 3 escolhidos pelo jogador, isto é, à combinação de 2, dentre 3 elementos:

$$n(A) = C_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)! \times 2!} = \frac{3 \times 2!}{1! \times 2!} = 3$$

Assim, a probabilidade é:

$$P = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$$

Gabarito: D

4. (CESGRANRIO/2011 – Transpetro) Dez participantes de um programa de televisão serão distribuídos aleatoriamente em duas casas, sendo que, em cada casa, haverá o mesmo número de participantes, isto é, 5 em cada uma.

Desses 10 participantes, 3 preferem a casa X e 2 preferem a casa Y. Qual é a probabilidade de as preferências serem atendidas?

a) 1/252

b) 5/252

c) 1/126

d) 5/126

e) 30/126

Comentários:

O enunciado informa que 10 participantes serão divididos em 2 casas, cada uma com 5 participantes. A probabilidade das preferências de 5 participantes serem atendidas pode ser calculada pela razão entre o número de eventos favoráveis n(A) pelo número eventos totais n(U):

$$P = \frac{n(A)}{n(U)}$$

O total de eventos n(U) corresponde à quantidade total de maneiras de dividir os 10 participantes em 2 grupos de 5. Observe que ao escolhermos 5 participantes para uma das casas, os participantes da outra casa já estarão definidos. Logo, n(U) corresponde à combinação de 5 elementos, dentre 10:

$$n(U) = C_{10,5} = \frac{10!}{(10-5)! \times 5!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 5!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$n(U) = 2 \times 9 \times 2 \times 7 = 252$$

E os eventos favoráveis correspondem ao número de maneiras em que os 3 interessados pela casa X fiquem nessa casa e os 2 interessados pela casa Y fiquem nessa casa. Nessa situação, restarão 5 participantes, dos quais 2 serão escolhidos para a casa X e 3 ficarão na casa Y. Novamente, após definir os 2 da casa X, os 3 restantes ficarão na casa Y. Logo, n(A) corresponde ao número de maneiras de escolher 2 dentre os 5 participantes que não têm preferência (ou poderíamos pensar em escolher 3 dentre 5, pois o resultado seria o mesmo):

$$n(A) = C_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 5 \times 2 = 10$$

Assim, a probabilidade é:

$$P = \frac{10}{252} = \frac{5}{126}$$

Gabarito: D

5. (Cesgranrio/2018 – PETROBRAS) Um programa de integração será oferecido para os 30 novos funcionários de uma empresa. Esse programa será realizado simultaneamente em duas localidades distintas: X e Y . Serão oferecidas 15 vagas em cada localidade. Sabe-se que 8 funcionários preferem realizar o programa na localidade X e 6, na localidade Y. Se a distribuição for feita de forma aleatória, qual é a probabilidade de todas as preferências serem atendidas?

a) $\frac{C_{16}^{7}}{C_{30}^{15}}$

b) $\frac{C_{15}^{8}.C_{15}^{6}}{C_{30}^{15}}$

c) $\frac{C_{30}^{14}C_{16}^{7}}{C_{30}^{15}.C_{30}^{15}}$

d) $\frac{2.C_{15}^{8}.C_{15}^{6}}{C_{30}^{15}}$

e) $\frac{C_{16}^{7}.C_{16}^{7}.C_{16}^{7}}{C_{30}^{15}}$

Comentários:

O enunciado informa que 30 funcionários serão divididos em dois grupos de 15 (um grupo fará o curso no local X e o outro grupo fará no local Y). Assim, o número total de maneiras de alocar os 30 funcionários corresponde à seleção dos 15 funcionários que irão para um dos locais - os funcionários restantes necessariamente irão para o outro local. Logo, no denominador da fórmula da probabilidade, temos a combinação de 15 elementos, dentre 30:

$$n(U) = C_{30}^{15}$$

E a questão pede a probabilidade de alocar determinados 8 funcionários no local X e outros 6 funcionários específicos no local Y. Ao fazer essa alocação dos 8 + 6 = 14 funcionários, sobrarão 30 - 14 = 16 funcionários. Desses, 15 - 8 = 7 deverão ser alocados em X e os demais em Y. Logo, o número de eventos favoráveis corresponde ao número de maneiras de alocar 7 funcionários em X, dentre os 16 funcionários que sobraram:

$$n(A) = C_{16}^{7}$$

E a probabilidade é a razão:

$$P = \frac{C_{16}^{7}}{C_{30}^{15}}$$

Gabarito: A

Questões Comentadas – CESGRANRIO

Combinações de Eventos

1. (CESGRANRIO/2005 – Casa da Moeda) A probabilidade $P(A \cup (\bar{A} \cap B))$ é igual a:

a) $P(A) + P(B) - P(C)$

b) $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

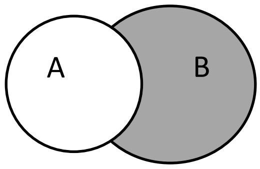
c) $P(A) + P(B) + P(A \cap B)$

d) $P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

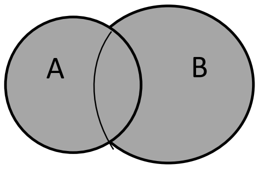
e) $P(A) - P(B) - P(A \cup B)$

Comentários:

O enunciado pede a probabilidade $P(A \cup (\bar{A} \cap B))$. O evento $\bar{A} \cap B$ corresponde a $B \backslash A$, representada em **cinza** no diagrama abaixo:



Quando unimos esse evento ao evento A, $A \cup (\bar{A} \cap B)$, obtemos a região em cinza indicada abaixo:



Portanto o evento $A \cup (\bar{A} \cap B)$ é igual à **união** $A \cup B$. A probabilidade da união é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Gabarito: B

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Axiomas de Probabilidade

1. (Cesgranrio/2018 – Transpetro) Uma empresa de transporte marítimo transporta cargas classificadas como "Químico", "Combustíveis" e "Alimentos", e cada um de seus navios transporta apenas um tipo de carga. Essa empresa informa que, dos 350 navios, 180 transportam combustíveis, e 120 transportam alimentos. Ao chegar ao porto, a probabilidade de um navio dessa empresa estar transportando carga "Químico" ou "Alimentos" é, aproximadamente, de

a) 0,14

b) 0,34

c) 0,49

d) 0,62

e) 0,75

Comentários:

O enunciado informa que há 350 navios que transportam apenas um tipo de carga cada, dos quais 180 transportam combustíveis, 120 transportam alimentos e os demais transportam químico. Logo, o número de navios que transportam químico é:

$$n(Q) = 350 - 180 - 120 = 50$$

E pede a probabilidade de escolher um navio que transporta químico ou alimentos, ou seja, temos a união de eventos mutuamente exclusivos:

$$P(Q \cup A) = P(Q) + P(A)$$

Sabendo que a probabilidade é a razão entre o número de elementos favoráveis e o número total de elementos, temos:

$$P(Q \cup A) = \frac{n(Q)}{n(U)} + \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{50}{350} + \frac{120}{350} = \frac{170}{350} \cong 0{,}49$$

Gabarito: C

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Probabilidade Condicional

1. (Cesgranrio/2021 – BB) A relação do cliente com o sistema bancário tradicional vem passando por transformações nos últimos cincos anos com o crescimento dos bancos digitais. Analisar o perfil dos clientes dos bancos digitais, considerando idade, classe social, renda e motivação, é uma tarefa importante para os bancos tradicionais com o objetivo de preservar a posição de principal Banco na relação com o Cliente. Para tal fim, uma agência bancária analisou os seguintes dados de uma pesquisa amostral sobre bancos digitais:

Em relação a bancos digitais, você...

45% JÁ OUVIU FALAR	19% SABE COMO FUNCIONA	14% POSSUI RELACIONAMENTO	22% NÃO CONHECE

Entre aqueles que têm relacionamento com bancos digitais (14%), os principais motivos para iniciar esse relacionamento foram...

44% Valores das tarifas	39% Pela inovação de ser um banco 100% digital	22% Indicação de amigo / parente / conhecido	16% Por ser diferente de outros bancos	16% Para dividir o dinheiro em várias contas
41% Para resolver tudo pela internet	28% Para ter mais uma fonte de crédito (cartão e limite)	20% Para poder focar em investimentos	12% Por estar insatisfeito com banco atual (não digital)	12% Pela propaganda do banco

Disponível em: <https://www.institutoqualibest.com/wp-content/uploads/2019/06/Finan%C3%A7as-Pessoais-V5-Banking-Fintech-Insights.pdf>. Acesso em: 21 jan. 2021. Adaptado.

Escolhendo-se ao acaso um dos entrevistados dessa pesquisa, qual é, aproximadamente, a probabilidade de esse cliente ter um relacionamento com banco digital e de ter apresentado como motivo para iniciar esse relacionamento a facilidade de poder resolver tudo pela internet?

a) 5,7%

b) 6,2%

c) 6,4%

d) 7,2%

e) 7,8%

Comentários:

A questão pede a probabilidade de um cliente ter um relacionamento com banco digital **E** ter sido pela facilidade de poder resolver tudo pela internet. Pelo Teorema da Multiplicação, a probabilidade da interseção corresponde à probabilidade condicionada (facilidade, dado que tem um relacionamento) multiplicada pela probabilidade do evento a priori (ter um relacionamento):

$$P(Rel \cap Fac) = P(Fac|Rel) \times P(Rel)$$

Pela figura, podemos observar que $P(Rel) = 14\% = 0{,}14$ das pessoas possuem relacionamento; e que, dado que a pessoa possui relacionamento, a probabilidade de ter sido pela facilidade de poder resolver tudo pela internet é $P(Fac|Rel) = 41\% = 0{,}41$. Substituindo esses dados na fórmula, temos:

$$P(Rel \cap Fac) = 0{,}41 \times 0{,}14 = 0{,}0574 \cong 5{,}7\%$$

Gabarito: A

2. (CESGRANRIO/2006 – EPE – *Adaptada*) A probabilidade condicional Pr (A|B), se A e B são eventos mutuamente excludentes, é:

a) 0

b) 1

c) 0,5

d) Pr(A ∪ B)

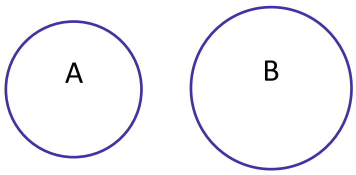
e) Pr(B ∪ A)

Comentários:

A probabilidade condicional P(A|B) é, por definição:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

O enunciado informa que A e B são eventos mutuamente exclusivos, isto é, ou ocorre o evento A ou o evento B, mas não ambos). Podemos representar esses eventos pelo seguinte diagrama:



Logo, não há interseção, portanto $P(A \cap B) = 0$. Assim, a probabilidade condicional também é nula.

Gabarito: A

3. (CESGRANRIO/2016 – IBGE) Sejam dois eventos A e B mutuamente exclusivos definidos num mesmo espaço de probabilidade, tais que P(A) = p > 0 e P(B) = q > 0.

Então garante-se que

a) p + q = 1

b) P(A ∩ B) = p.q

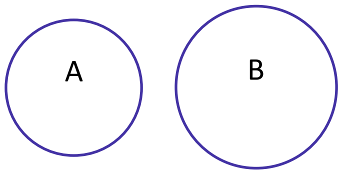
c) P(B | A) = 0

d) P(A | B) = p

e) P(A ∩ B | B) = 1

Comentários:

O enunciado informa que A e B são eventos mutuamente exclusivos, isto é, ou ocorre o evento A ou o evento B, mas não ambos). Podemos representar esses eventos pelo seguinte diagrama:



O enunciado informa, ainda, que a probabilidade de A é P(A) = p > 0 e a probabilidade de B é P(B) = q > 0.

Em relação à alternativa A, não há informação suficiente para garantir que os eventos correspondem a todo o Espaço Amostral (o que chamamos de eventos exaustivos). Os eventos A e B podem ser mutuamente exclusivos e haver um terceiro evento C. Logo, a alternativa A está incorreta.

Em relação à alternativa B, pelo diagrama acima, podemos observar que a interseção entre A e B (isto é, ocorrer o evento A E o evento B) é nula. Logo, a alternativa B está incorreta.

Em relação à alternativa C, sabendo que o evento A ocorreu, a probabilidade de ocorrer evento B é nula, pois não é possível ocorrerem os dois eventos.

Podemos calcular esse resultado, a partir da definição de probabilidade condicional:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Como a probabilidade da interseção é nula, $P(B \cap A) = 0$, então a probabilidade condicional também é nula, $P(B|A) = 0$. Por isso, a alternativa C está correta.

Por esse mesmo motivo, as alternativas D e E estão erradas.

Gabarito: C

4. (CESGRANRIO/2010 – Petrobras) Dois eventos de probabilidade positiva são disjuntos, isto é, não podem ocorrer simultaneamente. Em consequência

a) são eventos independentes.

b) têm a mesma probabilidade.

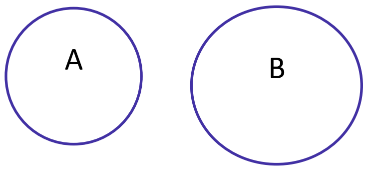
c) a soma de suas probabilidades é igual a 1.

d) sua união tem probabilidade nula.

e) sua intercessão tem probabilidade nula.

Comentários:

O enunciado informa que A e B são eventos mutuamente exclusivos, isto é, ou ocorre o evento A ou o evento B, mas não ambos). Podemos representar esses eventos pelo seguinte diagrama:



Podemos observar que não há interseção entre tais eventos. Portanto, a alternativa E está correta.

Em relação à alternativa D, a probabilidade da união de tais eventos é:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Essa probabilidade é diferente de zero (desde que $P(A) \neq 0$ ou $P(B) \neq 0$). Logo a alternativa D está incorreta.

Em relação à alternativa C, não há informação suficiente para garantir que a soma de suas probabilidades seja igual a 1, ou seja, que a união dos eventos correspondam a todo o Espaço Amostral (o que chamamos de eventos exaustivos). Os eventos A e B podem ser mutuamente exclusivos e haver um terceiro evento C. Logo, a alternativa C está incorreta.

Em relação à alternativa B, também não há informação suficiente para inferir que as probabilidades sejam iguais. Inclusive, na ilustração acima, o evento B é maior (mais provável) do que o evento A.

Em relação à alternativa A, eventos independentes são aqueles que ocorrem de maneira independente à ocorrência ou não do outro. Se A e B fossem independentes, teríamos:

$$P(A|B) = P(A)$$

Por definição, a probabilidade condicional é:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Como não há interseção, $P(A \cap B) = 0$, então a probabilidade condicional também é nula. Assim, temos:

$$P(A|B) \neq P(A)$$

Portanto, eventos mutuamente exclusivos **não** são independentes e a alternativa A está incorreta.

Gabarito: E

5. (CESGRANRIO/2011 – Petrobras) Uma pessoa lança um mesmo dado não viciado duas vezes consecutivas. Como no primeiro lançamento foi obtido o número 5, qual a probabilidade do resultado ser 3 ou 4 no segundo lançamento?

a) 1/3

b) 1/6

c) 1/12

d) 1/18

e) 1/30

Comentários:

Os lançamentos do dado são eventos **independentes** (isto é, o resultado de um lançamento não influencia no outro). Logo, a probabilidade de o resultado ser 3 ou 4 no segundo lançamento, **dado** que a probabilidade no primeiro lançamento foi 5, $P(3 \cup 4|5)$, é **igual** à probabilidade de o resultado ser 3 ou 4:

$$P(3 \cup 4|5) = P(3 \cup 4)$$

Os lançamentos do dado também são eventos **mutuamente exclusivos**, isto é, não há interseção entre os eventos (não é possível obter 3 e 4 em um único lançamento). Assim, a probabilidade da **união** é igual à **soma** das probabilidades:

$$P(3 \cup 4) = P(3) + P(4)$$

Por fim, a probabilidade de obter um resultado qualquer no dado é:

$$P = \frac{1}{6}$$

Logo, a probabilidade da união é:

$$P(3 \cup 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Gabarito: A

6. (Cesgranrio/2018 – PETROBRAS) Um equipamento é aprovado para uso quatro vezes mais frequentemente do que reprovado, quando testado todas as manhãs. Cada manhã o teste é realizado de modo independente. A probabilidade de que, em dois dias seguidos, o equipamento seja reprovado, pelo menos uma vez, é igual a

a) 1/5

b) 4/5

c) 1/25

d) 9/15

e) 6/25

Comentários:

A primeira informação do enunciado é de que o equipamento é aprovado 4 vezes mais do que reprovado. Logo, sendo p a probabilidade de o equipamento ser reprovado, a probabilidade de ser aprovado é $4p$. Sabendo que a probabilidade de ambos os eventos ocorrerem (que correspondem a todo o Espaço Amostral de possibilidades) é igual a 1, podemos calcular p:

$$p + 4p = 1$$

$$5p = 1$$

$$p = \frac{1}{5}$$

Essa é a probabilidade de o equipamento ser reprovado; e a probabilidade de o equipamento ser aprovado é $4p = \frac{4}{5}$.

A questão informa que os testes realizados a cada manhã são **independentes** uns dos outros e pede a probabilidade de que, em 2 dias, o equipamento ser reprovado **pelo menos uma** vez. Essa probabilidade pode ser calculada pelo seu complemento, qual seja de o equipamento ser aprovado em ambos os dias:

$$P(reprovado\ pelo\ menos\ uma\ vez) = 1 - P(aprovado\ em\ ambos)$$

A probabilidade de o equipamento ser aprovado em ambos os dias (um **E** outro) é dada pelo **produto** das probabilidades (**interseção** de eventos **independentes**):

$$P(aprovado\ em\ ambos) = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$$

Logo, a probabilidade de o equipamento ser reprovado pelo menos uma vez é o complemento:

$$P(reprovado\ pelo\ menos\ uma\ vez) = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

Gabarito: D

7. (CESGRANRIO/2010 – Petrobras) Três pessoas nasceram em abril. A probabilidade de que as três façam aniversário no mesmo dia é de

a) 1/3600

b) 1/2700

c) 1/900

d) 1/300

e) 1/30

Comentários:

A probabilidade de 3 pessoas fazerem aniversário no mesmo dia, sabendo que todas nasceram em abril corresponde à interseção dos respectivos eventos, ou seja, equivale ao produto das probabilidades dos eventos:

- A primeira pessoa pode fazer aniversário em qualquer dia: $P_1 = 1$;
- A segunda pessoa precisa fazer aniversário no mesmo dia da primeira pessoa, com probabilidade: $P_2 = \frac{1}{30}$;
- A terceira pessoa também precisa fazer aniversário nesse mesmo dia, com probabilidade: $P_3 = \frac{1}{30}$.

Logo, a probabilidade de as 3 pessoas fazerem aniversário no mesmo dia é:

$$P = P_1 \times P_2 \times P_3 = 1 \times \frac{1}{30} \times \frac{1}{30} = \frac{1}{900}$$

Gabarito: C

8. (CESGRANRIO/2005 – MPE) Qual a probabilidade de serem obtidos três ases em seguida, quando se extraem três cartas de um baralho comum de 52 cartas se a carta extraída é reposta no baralho antes da extração da próxima carta?

a) 1/169

b) 1/221

c) 1/2197

d) 1/5525

e) 1/140608

Comentários:

Um baralho é formado por 4 naipes, cada um com 13 números/figuras, totalizando 52 cartas. Sabendo que há 4 ases, a probabilidade de extrair 1 as é:

$$p = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

E a probabilidade de extrair 3 ases sucessivamente (interseção), considerando que as cartas extraídas retornam ao baralho (ou seja, as probabilidades se mantêm sempre as mesmas, independentemente da carta extraída anteriormente) é o produto:

$$P = \frac{1}{13} \times \frac{1}{13} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{2197}$$

Gabarito: C

9. (CESGRANRIO/2018 – Petrobras) Uma notícia disseminada nas redes sociais tem 2% de probabilidade de ser falsa. Quando a notícia é verdadeira, um indivíduo reconhece corretamente que é verdadeira. Entretanto, se a notícia é falsa, o indivíduo acredita que é verdadeira com probabilidade p.

A probabilidade de esse indivíduo reconhecer corretamente uma notícia disseminada nas redes sociais é

a) 0,02p

b) 1 – 0,02p

c) 0,98 + 0,02p

d) 0,02 – 0,02p

e) 0,02 – 0,98p

Comentários:

A probabilidade de o indivíduo reconhecer corretamente uma notícia disseminada pode ser calculada como o complementar da probabilidade de o indivíduo não reconhecer corretamente.

P(reconhecer) = 1 – P(não reconhecer)

O indivíduo não reconhece a notícia quando ela é falsa (com probabilidade de 2%) **e** ele acredita que a mesma seja verdadeira (com probabilidade p). Assim, a probabilidade dessa interseção é o produto das probabilidades:

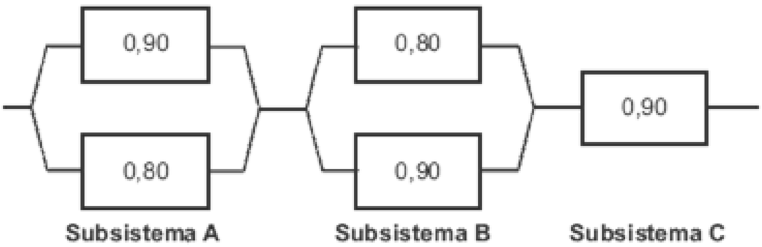
P(não reconhecer) = 0,02.p

Então, a probabilidade de o indivíduo reconhecer corretamente a notícia é o complemento:

P(reconhecer) = 1 – 0,02p

Gabarito: B

10. (CESGRANRIO/2010 – EPE)



Considere o diagrama acima, formado por três subsistemas, representando a estrutura operacional de um sistema eletrônico. A probabilidade de cada componente operar adequadamente está explicitada no diagrama. Para que o sistema funcione, é necessário que o subsistema C e pelo menos um dos componentes de cada um dos subsistemas A e B funcionem. Supondo-se que os componentes operem de forma independente, a probabilidade de que o sistema funcione é

a) $(0,9).(0,98)^2$

b) (0,9).(0,98).(0,97)

c) $1 – (0,9).(0,97)^2$

d) $(0,85)^2.(0,9)$

e) $1 – (0,9).(0,98)^2$

Comentários:

Pela figura, podemos observar que:

- A probabilidade do 1º componente do subsistema A funcionar é $P(A_1) = 0{,}90$. Logo, a probabilidade de ele não funcionar é complementar:
$$P(\overline{A_1}) = 1 - 0{,}90 = 0{,}10$$
- A probabilidade do 2º componente do subsistema A funcionar é $P(A_2) = 0{,}80$. Logo, a probabilidade de ele não funcionar é complementar:
$$P(\overline{A_2}) = 1 - 0{,}80 = 0{,}20$$
- A probabilidade do 1º componente do subsistema B funcionar é $P(B_1) = 0{,}80$. Logo, a probabilidade de ele não funcionar é complementar:
$$P(\overline{B_1}) = 1 - 0{,}80 = 0{,}20$$
- A probabilidade do 2º componente do subsistema B funcionar é $P(B_2) = 0{,}90$.

Logo, a probabilidade de ele não funcionar é complementar:

$$P(\overline{B_2}) = 1 - 0{,}90 = 0{,}10$$

- A probabilidade do subsistema C funcionar é $P(C) = 0{,}90$.

Para que o sistema funcione, é necessário que os 3 subsistemas funcionem.

O subsistema A funcionará se 1º componente funcionar OU o 2º componente funcionar.

Logo, a probabilidade de o subsistema funcionar pode ser calculada como o complemento da probabilidade de ele **não** funcionar:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

O subsistema não funcionará se os dois componentes não funcionarem (**interseção**).

Sabendo que os componentes são independentes, essa probabilidade é o produto das probabilidades de mau funcionamento:

$$P(\bar{A}) = P(\overline{A_1}) \times P(\overline{A_2}) = 0{,}1 \times 0{,}2 = 0{,}02$$

Assim, a probabilidade de o subsistema A funcionar é o complemento:

$$P(A) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$$

Similarmente, a probabilidade de o subsistema B funcionar pode ser calculada como o complemento da probabilidade de o subsistema não funcionar:

$$P(B) = 1 - P(\bar{B})$$

A probabilidade de o subsistema não funcionar é o produto das probabilidades de mau funcionamento dos componentes:

$$P(\bar{B}) = P(\overline{B_1}) \times P(\overline{B_2}) = 0{,}2 \times 0{,}1 = 0{,}02$$

E a probabilidade de o subsistema B funcionar é o complemento:

$$P(B) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$$

Então, a probabilidade de os 3 subsistemas funcionarem (interseção) é o produto das probabilidades de funcionamento de cada um:

$$P = P(A) \times P(B) \times P(C) = 0{,}98 \times 0{,}98 \times 0{,}9 = (0{,}9).(0{,}98)^2$$

Gabarito: A

11. (CESGRANRIO/2006 – EPE) A probabilidade de se obter a soma 7 ou a soma 3 na jogada de dois dados de seis lados não viciados é:

a) 6/8

b) 2/9

c) 4/9

d) 2/18

e) 6/36

Comentários:

Para que a soma dos valores dos 2 dados seja 3, as possibilidades são:

- 1 e 2; 2 e 1: 2 resultados possíveis

Para que a soma dos valores dos 2 dados seja 7, as possibilidades são:

- 1 e 6; 2 e 5; 3 e 4; 4 e 3; 5 e 2; 6 e 1: 6 resultados possíveis

Logo, há 2 + 6 = 8 resultados possíveis (união de eventos excludentes).

A probabilidade de obter cada resultado para cada dado é 1/6. Portanto, a probabilidade para cada par de resultados (interseção) é o produto:

$$p = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Assim, a probabilidade dos 8 resultados possíveis é:

$$P = 8 \times \frac{1}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

Gabarito: B

12. (CESGRANRIO/2008 – Petrobras) Dois dados comuns, "honestos", são lançados simultaneamente. A probabilidade do evento "a soma dos valores dos dados é ímpar e menor que 10" é igual a

a) 4/11

b) 17/36

c) 4/9

d) 12/36

e) 3/8

Comentários:

Para que a soma dos valores dos 2 dados seja ímpar e menor que 10, a soma pode ser 3, 5, 7 e 9:

Para que a soma seja 3, as possibilidades são:

- 1 e 2; 2 e 1: 2 resultados possíveis

Para que a soma seja 5, as possibilidades são:

- 1 e 4; 2 e 3; 3 e 2; 4 e 1: 4 resultados possíveis

Para que a soma seja 7, as possibilidades são:

- 1 e 6; 2 e 5; 3 e 4; 4 e 3; 5 e 2; 6 e 1: 6 resultados possíveis

Para que a soma seja 9, as possibilidades são:

- 3 e 6; 4 e 5; 5 e 4; 6 e 3: 4 resultados possíveis

Logo, há 2 + 4 + 6 + 4 = 16 resultados possíveis (união de eventos excludentes).

A probabilidade de obter cada resultado para cada dado é 1/6. Logo, a probabilidade para cada par de resultados (interseção) é o produto:

$$p = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Logo, a probabilidade dos 16 resultados possíveis é:

$$P = 16 \times \frac{1}{36} = \frac{4}{9}$$

Gabarito: C

13. (CESGRANRIO/2006 – EPE) Lançando um dado não tendencioso duas vezes, qual é a probabilidade de o resultado do segundo lançamento ser maior que o do primeiro?

a) 5/6

b) 1/2

c) 17/36

d) 5/12

e) 1/3

Comentários:

O enunciado pede a probabilidade de o resultado do segundo dado ser maior do que o primeiro.

- Se o resultado do primeiro dado for 1, há **5** resultados possíveis (2 a 6) para o segundo dado;
- Se o resultado do primeiro dado for 2, há **4** resultados possíveis (3 a 6) para o segundo dado;
- Se o resultado do primeiro dado for 3, há **3** resultados possíveis (4 a 6) para o segundo dado;
- Se o resultado do primeiro dado for 4, há **2** resultados possíveis (5 e 6) para o segundo dado;
- Se o resultado do primeiro dado for 5, há **1** resultado possível (6) para o segundo dado.

Logo, há 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 resultados possíveis (união de eventos excludentes).

A probabilidade de obter cada resultado para cada dado é 1/6. Assim, a probabilidade para cada par de resultados (interseção) é o produto:

$$p = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Portanto, a probabilidade dos 15 resultados possíveis é:

$$P = 15 \times \frac{1}{36} = \frac{5}{12}$$

Gabarito: D

14. (CESGRANRIO/2010 – IBGE) Lança-se uma moeda honesta três vezes.

Sejam os eventos:

A = {sair duas caras ou três caras} e

B = {os dois primeiros resultados são iguais}

Nessas condições, tem-se que

a) P(A) = 0,25; P(B) = 0,25; A e B não são independentes e não são mutuamente exclusivos.

b) P(A) = 0,25; P(B) = 0,25; A e B são independentes e não são mutuamente exclusivos.

c) P(A) = 0,5; P(B) = 0,25; A e B não são independentes e não são mutuamente exclusivos.

d) P(A) = 0,5; P(B) = 0,5; A e B são independentes e não são mutuamente exclusivos.

e) P(A) = 0,5; P(B) = 0,5; A e B não são independentes e não são mutuamente exclusivos.

Comentários:

Sabendo que uma moeda será lançada 3 vezes, a probabilidade de sair 2 CARAS **ou** 3 CARAS (união de eventos excludentes) é dada pela soma das probabilidades:

$$P(A) = P(2Ca \cup 3Ca) = P(2Ca) + P(3Ca)$$

A probabilidade de sair 3 CARAS corresponde à interseção desses eventos, logo, equivale ao produto das probabilidades:

$$P(3Ca) = P(Ca) \times P(Ca) \times P(Ca)$$

Sabendo que a probabilidade de sair CARA é $P(Ca) = \frac{1}{2}$, então:

$$P(3Ca) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Para que saiam 2 CARAS em 3 lançamentos, podemos ter:

i)	CARA	e	CARA	e	COROA; ou
ii)	CARA	e	COROA	e	CARA; ou
iii)	COROA	e	CARA	e	CARA

Em cada opção, temos a interseção dos eventos (produto das probabilidades) e entre as opções, temos a união dos eventos:

$$P(2Ca) = P(Ca) \times P(Ca) \times P(Co) + P(Ca) \times P(Co) \times P(Ca) + P(Co) \times P(Ca) \times P(Ca)$$

Como a probabilidade de sair CARA é igual à probabilidade de sair COROA $P(Ca) = P(Co) = \frac{1}{2}$, temos:

$$P(2Ca) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Logo, a probabilidade de sair 2 ou 3 CARAS é:

$$P(A) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = 0{,}5$$

Para que saiam 2 resultados iguais (evento B), o primeiro resultado pode ser qualquer lado da moeda e o segundo resultado precisa ser o mesmo lado obtido no primeiro lançamento, cuja probabilidade é:

$$P(B) = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Para saber se os eventos são independentes ou não, devemos calcular a sua interseção. Para eventos **independentes**, temos:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

A interseção dos eventos A (2 ou 3 CARAS) e B (2 primeiros resultados iguais) corresponde aos seguintes resultados:

i) CARA e CARA e CARA; ou
ii) CARA e CARA e COROA.

Em cada opção, temos a interseção dos eventos (produto das probabilidades) e entre as opções, temos a união dos eventos:

$$P(A \cap B) = P(Ca) \times P(Ca) \times P(Ca) + P(Ca) \times P(Ca) \times P(Co)$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{8} = 0{,}25$$

Portanto, temos $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ e, assim, concluímos que os eventos são independentes.

Como a interseção dos eventos não é nula, os eventos não são mutuamente exclusivos.

Gabarito: D

15. (CESGRANRIO/2010 – IBGE) O instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE divulga anualmente a Tábua Completa de Mortalidade. Na tabela a seguir estão as probabilidades de morte entre as idades exatas X e X + 1, $Q(X,1)$, em mil %; as probabilidades complementares 1– $Q(X,1)$, em mil% e as probabilidades complementares acumuladas $\prod_{i=1}^{X}(1 - Q(X,1))$ para o ano de 2007.

Idades exatas (X)	Q(X,1) (em mil %)	1−Q(X,1) (em mil %)	$\prod(1-Q(X,1))$
50	6,6	993,37	0,99337
51	7,1	992,94	0,98635
52	7,6	992,43	0,97888
53	8,2	991,84	0,97090
54	8,8	991,19	0,96234
55	9,5	990,47	0,95317

Disponível em: ftp://ftp.ibge.gov.br/Tabuas Completas de Mortalidade/Tabuas Completas de Mortalidade 2007. Acessado em 13/11/2009.

Dado um indivíduo com 50 anos, a probabilidade de morrer antes de completar 55 anos é de, aproximadamente,

a) 3,8%

b) 4,7%

c) 8,8%

d) 95,3%

e) 96,2%

Comentários:

A coluna Q(X,1) informa as probabilidades em mil% de um indivíduo falecer entre a idade X e a idade seguinte. Por exemplo, a probabilidade de um indivíduo falecer entre 50 e 51 anos é $\frac{6,6}{1000}$.

A coluna 1 – Q(X,1) é o complemento de Q(X,1), ou seja, informa as probabilidades em mil% de um indivíduo não falecer entre a idade X e a idade seguinte. Por exemplo, a probabilidade de um indivíduo não falecer entre 50 e 51 anos é $\frac{993,37}{1000}$.

A última coluna revela a probabilidade complementar acumulada, isto é, a probabilidade de o indivíduo não falecer até o ano seguinte ao ano X (X + 1). Por exemplo, a probabilidade de um indivíduo não falecer até 51 anos é 0,99337.

A questão pede a probabilidade de um indivíduo de 50 anos morrer antes de completar 55 anos é dada por:

$$P(falecer\ até\ 55\ anos|\ 50\ anos) = \frac{P(falecer\ até\ 55\ anos)}{P(50\ anos)}$$

Pela tabela, observamos que probabilidade de um indivíduo não falecer até 55 anos (linha X = 54) é 0,96234. Logo, a probabilidade de um indivíduo falecer até essa idade é complementar:

$$P(falecer\ até\ 55\ anos) = 1 - 0{,}96234 = 0{,}03766 \cong 0{,}38$$

E a probabilidade de um indivíduo ter 50 anos corresponde à probabilidade de ele não ter falecido até então. O valor da probabilidade acumulada para a primeira linha (0,99337) corresponde à probabilidade de o indivíduo não falecer até 51 anos. A probabilidade de ele não falecer até 50 anos será maior ainda, e podemos utilizar a aproximação para 100% = 1.

Logo, a probabilidade de o indivíduo falecer até 55 anos é aproximadamente 0,038 = 3,8%.

Gabarito: A

16. (CESGRANRIO/2011 – Transpetro) A probabilidade de que ocorra o evento X, dado que o evento Y ocorreu, é positiva e representada por P(X/Y). Similarmente, a probabilidade de que ocorra Y, dado que X ocorreu, é representada por P(Y/X). Se P(X/Y) = P(Y/X), os eventos X e Y são

a) ortogonais

b) coincidentes

c) independentes

d) igualmente prováveis

e) mutuamente exclusivos

Comentários:

O enunciado informa que P(X|Y) = P(Y|X). Pela definição de probabilidade condicional, temos:

$$P(X|Y) = P(Y|X)$$

$$\frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)}$$

$$P(Y) = P(X)$$

Ou seja, as probabilidades de X e Y são iguais.

Gabarito: D

17. (CESGRANRIO/2018 – BB) Dentre as atribuições de um certo gerente, encontra-se o oferecimento do produto A, de forma presencial e individualizada, aos seus clientes. A probabilidade de o gerente efetuar a venda do produto A em cada reunião com um cliente é 0,40. Em 20% dos dias de trabalho, esse gerente não se reúne com nenhum cliente; em 30% dos dias de trabalho, ele se reúne com apenas 1 cliente; e em 50% dos dias de trabalho, ele se reúne, separadamente, com exatos 2 clientes. Em um determinado dia de trabalho, a probabilidade de esse gerente efetuar pelo menos uma venda presencial do produto A é

a) 0,54

b) 0,46

c) 0,20

d) 0,26

e) 0,44

Comentários:

A probabilidade de o gerente efetuar pelo menos uma venda pode ser calculada como complemento da probabilidade de ele não efetuar qualquer venda, que podemos indicar por $P(\bar{V})$:

$$P(pelo\ menos\ uma\ venda) = 1 - P(\bar{V})$$

O enunciado informa que a probabilidade de o gerente efetuar uma venda em uma reunião é de 0,4, logo, a probabilidade de ele não efetuar a venda é o complementar:

$$q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$

Então, se ele visitar 1 cliente, a probabilidade de ele não vender é:

$$P(\bar{V}|C1) = q = 0{,}6$$

Se ele visitar 2 clientes, a probabilidade de ele não efetuar venda alguma corresponde à interseção entre ele não vender para o primeiro cliente E ele não vender para o segundo cliente:

$$P(\bar{V}|C2) = q \times q = 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$$

E se ele não visitar cliente algum, a probabilidade de ele não vender é 100%:

$$P(\bar{V}|C0) = 100\% = 1$$

O enunciado informa, ainda, que:

- a probabilidade de ele não se reunir com cliente algum é P(C0) = 20% = 0,2;
- a probabilidade de ele visitar 1 cliente é P(C1) = 30% = 0,3; e
- a probabilidade de ele visitar 2 clientes é P(C2) = 50% = 0,5.

A probabilidade de ele não efetuar venda alguma pode ser calculada pelo Teorema da Probabilidade Total:

$$P(\bar{V}) = P(\bar{V}|C0) \times P(C0) + P(\bar{V}|C1) \times P(C1) + P(\bar{V}|C2) \times P(C2)$$

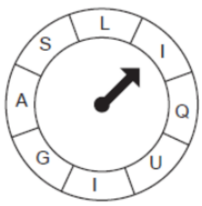
$$P(\bar{V}) = 1 \times 0{,}2 + 0{,}6 \times 0{,}3 + 0{,}36 \times 0{,}5 = 0{,}2 + 0{,}18 + 0{,}18 = 0{,}56$$

Então, a probabilidade de o gerente vender para pelo menos 1 cliente é complementar:

$$P(pelo\ menos\ uma\ venda) = 1 - 0{,}56 = 0{,}44$$

Gabarito: E

18. (Cesgranrio/2018 – LIQUIGÁS) A Figura a seguir mostra um jogo eletrônico no qual, a cada jogada, a seta, após ser girada, para, aleatoriamente e com igual probabilidade, em qualquer uma das oito casas com as letras da palavra LIQUIGÁS.



Um jogador só é vencedor se, em duas jogadas consecutivas, a seta apontar para letras iguais. A probabilidade de um jogador ser vencedor, fazendo apenas duas jogadas, é igual a

a) 4/64

b) 8/64

c) 10/64

d) 14/64

e) 16/64

Comentários:

A probabilidade de uma letra ser selecionada em duas jogadas consecutivas depende da letra, uma vez que a letra I se repete e as outras, não. Por isso, essa questão trabalha com o Teorema da Probabilidade Total:

$$P(V) = P(V|I) \times P(I) + P(V|Ou) \times P(Ou)$$

Considerando que há 2 letras I, dentre 8, a probabilidade de selecionar a letra I é:

$$P(I) = \frac{2}{8}$$

E, dado que a letra I foi selecionada na primeira jogada, a probabilidade de o jogador vencer, ou seja, selecionar novamente a letra I, sabendo que há 2 letras I, dentre 8, é:

$$P(V|I) = \frac{2}{8}$$

Por outro lado, considerando que há 6 letras diversas de I, dentre 8, a probabilidade de selecionar uma letra diversa é:

$$P(Ou) = \frac{6}{8}$$

E, dado que uma letra diferente de I foi selecionada na primeira jogada, a probabilidade de o jogador vencer, ou seja, selecionar **aquela** letra novamente, sabendo que há 8 letras no total é:

$$P(V|Ou) = \frac{1}{8}$$

Logo, a probabilidade de o jogador vencer é:

$$P(V) = \frac{2}{8} \times \frac{2}{8} + \frac{6}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{4}{64} + \frac{6}{64} = \frac{10}{64}$$

Gabarito: C

19. (Cesgranrio/2018 – PETROBRAS) Um banco lança um determinado fundo e avalia a rentabilidade segundo dois cenários econômicos.

- **O primeiro cenário é o de aumento da taxa de juros e, nesse caso, a rentabilidade do fundo é certamente positiva.**
- **No segundo cenário, de queda ou de manutenção da taxa de juros, a probabilidade de a rentabilidade do fundo ser positiva é de 0,4.**

Considere ainda que a probabilidade de a taxa de juros subir seja de 70%. A probabilidade de que a rentabilidade do fundo seja positiva, é de

a) 70%

b) 74%

c) 78%

d) 82%

e) 100%

Comentários:

Essa questão também trabalha com o Teorema da Probabilidade Total porque informa as probabilidades de o fundo ter rentabilidade positiva **condicionada** a cada cenário e pede a probabilidade de o fundo ter rentabilidade positiva, **independentemente** do cenário:

$$P(Pos) = P(Pos|C_1) \times P(C_1) + P(Pos|C_2) \times P(C_2)$$

O enunciado informa que:

- Se a taxa de juros aumentar (primeiro cenário), a rentabilidade do fundo será **certamente** positiva:

$$P(Pos|C_1) = 1$$

- Se a taxa de juros não aumentar (segundo cenário), a probabilidade de a rentabilidade do fundo ser positiva é de 0,4:

$$P(Pos|C_2) = 0{,}4$$

- A probabilidade de a taxa de juros aumentar (primeiro cenário) é de 70%:

$$P(C_1) = 0{,}7$$

Sabendo que há apenas 2 cenários, a probabilidade do segundo cenário é complementar:

$$P(C_2) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$$

Substituindo esses dados da fórmula do Teorema da Probabilidade Total, podemos calcular a probabilidade de o fundo ter rentabilidade positiva:

$$P(Pos) = 1 \times 0{,}7 + 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}7 + 0{,}12 = 0{,}82 = 82\%$$

Gabarito: D

20. (Cesgranrio/2018 – Transpetro) Considere 2 urnas: na primeira urna há 1 bola branca e 1 bola preta; na segunda urna, há 1 bola branca e 2 pretas. Uma bola é selecionada aleatoriamente da urna 1 e colocada na urna 2. Em seguida, uma bola é selecionada, também aleatoriamente, da urna 2. Qual a probabilidade de que a bola selecionada na urna 2 seja branca?

a) 12,5%

b) 25%

c) 37,5%

d) 50%

e) 62,5%

Comentários:

A questão informa que há 1 bola branca e 1 bola preta na urna 1 e que uma dessas bolas será escolhida (aleatoriamente) e colocada na urna 2, que antes possuía 1 bola branca e 2 bolas pretas. E a questão pede a probabilidade de selecionarmos uma bola branca da urna 2.

Essa questão também trabalha com o Teorema da Probabilidade Total, porque fornece informações que nos permitem calcular as probabilidades de selecionar uma bola branca condicionada a cada cenário (retirar uma bola branca ou uma bola preta da urna 1) e pede a probabilidade de selecionar uma bola branca, independentemente do cenário:

$$P(B_2) = P(B_2|B_1) \times P(B_1) + P(B_2|P_1) \times P(P_1)$$

O enunciado informa que a escolha da bola da urna 1 será aleatória, logo, há 50% de chance de escolher a bola branca e 50% de chance de escolher a bola preta da urna 1:

$$P(B_1) = P(P_1) = \frac{1}{2}$$

Considerando que retiramos a bola branca da urna 1, então, na urna 2, haverá 2 bolas brancas e 2 bolas pretas. Nessa situação, a probabilidade de retirar uma bola branca da urna 2 é:

$$P(B_2|B_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Considerando que retiramos a bola preta da urna 1, então, na urna 2, haverá 1 bola branca e 3 bolas pretas. Nessa situação, a probabilidade de retirar uma bola branca da urna 2 é:

$$P(B_2|B_1) = \frac{1}{4}$$

Substituindo esses resultados na fórmula da probabilidade total, podemos calcular a probabilidade de retirar uma bola branca:

Considerando que retiramos a bola branca da urna 1, na urna 2 haverá 2 bolas brancas e 2 bolas pretas. Nessa situação, a probabilidade de retirar uma bola branca da urna 2 é:

$$P(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 37{,}5\%$$

Gabarito: C

21. (CESGRANRIO/2010 – IBGE) Em uma empresa, por experiências passadas, sabe-se que a probabilidade de um funcionário novo, o qual tenha feito o curso de capacitação, cumprir sua cota de produção é 0,85, e que essa probabilidade é 0,40 para os funcionários novos que não tenham feito o curso. Se 80% de todos os funcionários novos cursarem as aulas de capacitação, a probabilidade de um funcionário novo cumprir a cota de produção será

a) 0,48

b) 0,50

c) 0,68

d) 0,76

e) 0,80

Comentários:

O enunciado informa que:

- A probabilidade de um funcionário que tenha feito o curso de capacitação cumprir a sua meta é 0,85, o que podemos representar por $P(M|C) = 0{,}85$;
- A probabilidade de um funcionário que **não** tenha feito o curso de capacitação cumprir a sua meta é 0,4, o que podemos representar por $P(M|\bar{C}) = 0{,}4$;
- 80% dos funcionários fizeram o curso: $P(C) = 0{,}8$.
  Logo, a proporção de funcionários que não fizeram o curso é complementar:
  $$P(\bar{C}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

Assim, a probabilidade de um funcionário cumprir a sua meta pode ser calculada pelo Teorema da Probabilidade Total:

$$P(M) = P(M|C) \times P(C) + P(M|\bar{C}) \times P(\bar{C})$$

Substituindo os dados acima, temos:

$$P(M) = 0{,}85 \times 0{,}8 + 0{,}4 \times 0{,}2 = 0{,}68 + 0{,}08 = 0{,}76$$

Gabarito: D

22. (CESGRANRIO/2010 – IBGE) Segundo a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios – PNAD-2008, aproximadamente 30% dos domicílios brasileiros possuíam microcomputador, sendo que 22% desses tinham acesso à Internet. Restringindo a população aos domicílios com rendimento mensal superior a 20 salários mínimos (que representavam 5% do total), as porcentagens alteraram para 90% e 80%, respectivamente. Selecionando-se aleatoriamente um domicílio dessa amostra, a renda mensal domiciliar observada foi inferior a 20 salários mínimos; então, a probabilidade de ele possuir microcomputador e ter acesso à Internet é

a) 3/95

b) 30/225

c) 30/255

d) 36/234

e) 36/45

Comentários:

O enunciado informa que:

- 30% dos brasileiros possuem computador, o que podemos representar por $P(C) = 0{,}3$;
- Desses, 22% possuem acesso à internet, o que podemos representar por $P(I|C) = 0{,}22$;
  Logo, a proporção de brasileiros que possuem computador **E** acesso à internet (interseção) é o produto:
  $$P(C \cap I) = P(I|C) \times P(C) = 0{,}22 \times 0{,}3 = 0{,}066$$

- 90% dos brasileiros com renda alta possuem computador, o que podemos representar por $P(C|A) = 0{,}9$;
- Desses, 80% possuem acesso à internet, o que podemos representar por e $P(I|C \cap A) = 0{,}8$;
  Logo, a proporção de brasileiros com renda alta que possuem computador E acesso à internet (interseção) é o produto:
  $$P(C \cap I|A) = P(I|C \cap A) \times P(C|A) = 0{,}8 \times 0{,}9 = 0{,}72$$

- 5% dos brasileiros possuem renda alta, o que podemos representar por $P(A) = 0{,}05$;
  Logo, a proporção de brasileiros que não possuem renda alta é complementar:
  $$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0{,}95$$

Assim, a probabilidade de um brasileiro que não possui renda alta ter computador e acesso à internet, $P(C \cap I|\bar{A})$, pode ser calculada pelo Teorema da Probabilidade Total:

$$P(C \cap I) = P(C \cap I|A) \times P(A) + P(C \cap I|\bar{A}) \times P(\bar{A})$$

Substituindo os dados que calculamos anteriormente, temos:

$$0{,}066 = 0{,}72 \times 0{,}05 + P(C \cap I|\bar{A}) \times 0{,}95$$

$$0{,}066 = 0{,}036 + P(C \cap I|\bar{A}) \times 0{,}95$$

$$0{,}03 = P(C \cap I|\bar{A}) \times 0{,}95$$

$$P(C \cap I|\bar{A}) = \frac{0{,}03}{0{,}95} = \frac{3}{95}$$

Gabarito: A

23. (CESGRANRIO/2010 – Petrobras) Na simulação da operação de uma planta industrial, supõe- se que ela pode apresentar dois estados: ou operou normalmente ou operou com alguma anomalia. Se um dia operou normalmente, a probabilidade de apresentar alguma anomalia no dia seguinte é 70%. Quando um dia operou com alguma anomalia, a probabilidade de operar normalmente no dia seguinte é 60%. Independente de como esteja operando atualmente, após muitos dias de operação, a probabilidade de concluir um dia operando normalmente é de, aproximadamente,

a) 42%

b) 46%

c) 51%

d) 56%

e) 60%

Comentários:

O enunciado informa que:

- A probabilidade de a planta apresentar anomalia, dado que operou normalmente no dia anterior é $P(A|N) = 0{,}7$
  Logo, a probabilidade de a planta operar normalmente, dado que operou normalmente no dia anterior é complementar:
  $$P(N|N) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$$
- A probabilidade de a planta operar normalmente, dado que apresentou anomalia no dia anterior é $P(N|A) = 0{,}6$.

A probabilidade de a planta operar normalmente em um dia qualquer pode ser calculada a partir do Teorema da Probabilidade Total:

$$P(N) = P(N|N) \times P(N) + P(N|A) \times P(A)$$

Em que a probabilidade de a planta apresentar anomalia em um dia qualquer é complementar à probabilidade de a planta apresentar anomalia em um dia qualquer:

$$P(A) = 1 - P(N)$$

Substituindo essa equação e os dados que conhecemos:

$$P(N) = 0{,}3 \times P(N) + 0{,}6 \times [1 - P(N)] = 0{,}3.P(N) + 0{,}6 - 0{,}6.P(N)$$

$$P(N) = 0{,}6 - 0{,}3.P(N)$$

$$1{,}3.P(N) = 0{,}6$$

$$P(N) = \frac{0{,}6}{1{,}3} \cong 0{,}46 = 46\%$$

Gabarito: B

24. (CESGRANRIO/2011 – Transpetro) Duas empresas diferentes produzem a mesma quantidade de aparelhos celulares, ou seja, ao se comprar um aparelho celular, a probabilidade de ele ter sido produzido por qualquer uma delas é a mesma. Cada aparelho produzido pela fábrica A é defeituoso com probabilidade 1%, enquanto cada aparelho produzido pela fábrica B é defeituoso com probabilidade 5%. Suponha que você compre dois aparelhos celulares que foram produzidos na mesma fábrica. Se o primeiro aparelho foi verificado e é defeituoso, a probabilidade condicional de que o outro aparelho também seja defeituoso é

a) 13/10.000

b) 13/1.000

c) 13/300

d) 13/100

e) 3/100

Comentários:

O enunciado pede a probabilidade de o segundo aparelho ser defeituoso, dado que o primeiro aparelho é defeituoso, o que pode ser indicado por $P(D2|D1)$, dado por:

$$P(D2|D1) = \frac{P(D1 \cap D2)}{P(D1)}$$

A probabilidade de o primeiro aparelho ser defeituoso, $P(D1)$, que é igual à probabilidade de um aparelho qualquer ser defeituoso, $P(D)$, pode ser calculada pelo Teorema da Probabilidade Total:

$$P(D1) = P(D) = P(D|A) \times P(A) + P(D|B) \times P(B)$$

Em que P(D|A) é a probabilidade de defeito, dado que o aparelho é produzido pela fábrica A e P(D|B) é a probabilidade de defeito, dado que o aparelho é produzido pela fábrica B.

O enunciado informa que:

- A probabilidade de o aparelho ser produzido pela fábrica A é a mesma de ele ser produzido pela fábrica B:

  $$P(A) = P(B)$$

  Como a produção por ambas as fábricas correspondem a todo o Espaço Amostral (não há outras fábricas), temos:

  $$P(A) + P(B) = 1$$

  Considerando ambas as equações, temos:

  $$P(A) = P(B) = 0,5$$

- A probabilidade de defeito da fábrica A é P(D|A) = 0,01;
- A probabilidade de defeito da fábrica B é P(D|B) = 0,05;

Substituindo esses dados na fórmula da Probabilidade Total, temos:

$$P(D1) = P(D) = 0,01 \times 0,5 + 0,05 \times 0,5 = 0,005 + 0,025 = 0,03$$

A probabilidade de ambos os telefones serem defeituosos, $P(D1 \cap D2)$, também pode ser calculada pelo Teorema da Probabilidade Total:

$$P(D1 \cap D2) = P(D1 \cap D2|A) \times P(A) + P(D1 \cap D2|B) \times P(B)$$

Os defeitos nos aparelhos produzidos por cada fábrica são eventos **independentes**, logo, a probabilidade de dois telefones serem defeituosos é o **produto** das probabilidades:

$$P(D1 \cap D2|A) = P(D|A) \times P(D|A) = 0,01 \times 0,01 = 0,0001$$

$$P(D1 \cap D2|B) = P(D|B) \times P(D|B) = 0,05 \times 0,05 = 0,0025$$

Substituindo esses dados na fórmula da Probabilidade Total, temos:

$$P(D1 \cap D2) = 0,0001 \times 0,5 + 0,0025 \times 0,5 = 0,00005 + 0,00125 = 0,0013$$

Assim, a probabilidade condicionada desejada é:

$$P(D2|D1) = \frac{P(D1 \cap D2)}{P(D2)} = \frac{0,0013}{0,03} = \frac{13}{300}$$

Gabarito: C

25. (CESGRANRIO/2008 – ANP) Em um determinado município, 20% de todos os postos de gasolina testados quanto à qualidade do combustível apontaram o uso de combustíveis adulterados. Ao serem testados, 99% de todos os postos desse município que adulteraram combustível foram reprovados, mas 15% dos que não adulteraram também foram reprovados, ou seja, apresentaram um resultado falso-positivo. A probabilidade de um posto reprovado ter efetivamente adulterado o combustível é, aproximadamente

a) 0,62

b) 0,50

c) 0,32

d) 0,20

e) 0,12

Comentários:

O enunciado apresenta as probabilidades de reprovação dos postos (a posteriori), condicionadas à adulteração do combustível (a priori) e pede a probabilidade de adulteração (a posteriori), condicionada à reprovação do posto (a priori). Ou seja, a questão inverte os eventos a priori e a posteriori. Então, devemos utilizar a fórmula de Bayes.

O enunciado informa que:

- 99% dos postos que adulteravam combustível foram reprovados, o que podemos representar por $P(R|A) = 0{,}99$
- 20% dos postos adulteram combustíveis, o que podemos representar por $P(A) = 0{,}2$.
  Logo, a proporção de postos que não adulteram combustíveis é complementar:
  $$P(\bar{A}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$
- 15% dos postos que não adulteram combustíveis foram reprovados, o que podemos representar por $P(R|\bar{A}) = 0{,}15$

Então, a probabilidade de um posto reprovado efetivamente adulterar o combustível, $P(A|R)$ é dada por:

$$P(A|R) = \frac{P(R|A) \times P(A)}{P(R|A) \times P(A) + P(R|\bar{A}) \times P(\bar{A})}$$

$$P(A|R) = \frac{0{,}99 \times 0{,}2}{0{,}99 \times 0{,}2 + 0{,}15 \times 0{,}8} \cong \frac{0{,}2}{0{,}2 + 0{,}12} = \frac{0{,}2}{0{,}32} \cong 0{,}62$$

Gabarito: A

26. (CESGRANRIO/2018 – BB) Três caixas eletrônicos, X, Y e Z, atendem a uma demanda de 50%, 30% e 20%, respectivamente, das operações efetuadas em uma determinada agência bancária. Dados históricos registraram defeitos em 5% das operações realizadas no caixa X, em 3% das realizadas no caixa Y e em 2% das realizadas no caixa Z.

Com vistas à melhoria no atendimento aos clientes, esses caixas eletrônicos passaram por uma revisão completa que:

I - reduziu em 25% a ocorrência de defeito;

II - igualou as proporções de defeitos nos caixas Y e Z; e

III - regulou a proporção de defeitos no caixa X que ficou reduzida à metade da nova proporção de defeitos do caixa Y.

Considerando-se que após a conclusão do procedimento de revisão, sobreveio um defeito, a probabilidade de que ele tenha ocorrido no caixa Y é

a) 40%

b) 35%

c) 20%

d) 25%

e) 30%

Comentários:

O enunciado informa que as proporções originais de defeito eram:

- Para o caixa X: $P_1(D|X) = 5\%$
- Para o caixa Y: $P_1(D|Y) = 3\%$
- Para o caixa Z: $P_1(D|Z) = 2\%$

Em seguida, informa-se que os defeitos foram reduzidos em 25%; igualou as proporções de defeitos de Y e Z; e reduziu o defeito de X para a metade da nova proporção de Y.

Com isso, o novo valor de Z passou a ser:

$$P(D|Z) = 2\% \times 0{,}75 = 1{,}5\%$$

Essa passou a ser a nova proporção de defeito de Y também:

$$P(D|Y) = P(D|Z) = 1{,}5\%$$

E a proporção de X passou a ser a metade desse valor:

$$P(D|X) = 1,5\%/2 = 0,75\%$$

O enunciado informa ainda as probabilidades de uma demanda ser atendida por X, Y e Z, respectivamente:

- Para o caixa X: P(X) = 50% = 0,5
- Para o caixa Y: P(Y) = 30% = 0,3
- Para o caixa Z: P(Z) = 20% = 0,2

Sabendo que ocorreu um erro, podemos calcular a probabilidade de este ter vindo do caixa Y, pelo teorema de Bayes:

$$P(Y|D) = \frac{P(D|Y) \times P(Y)}{P(D|X) \times P(X) + P(D|Y) \times P(Y) + P(D|Z) \times P(Z)}$$

Substituindo os dados, temos:

$$P(Y|D) = \frac{1,5\% \times 0,3}{0,75\% \times 0,5 + 1,5\% \times 0,3 + 1,5\% \times 0,2}$$

$$P(Y|D) = \frac{0,45\%}{0,375\% + 0,45\% + 0,3\%} = \frac{0,45}{1,125} = 0,4 = 40\%$$

Gabarito: A

27. (CESGRANRIO/2011 – Petrobras) Um estudo sobre fidelidade do consumidor à operadora de telefonia móvel, em uma determinada localidade, mostrou as seguintes probabilidades sobre o hábito de mudança:

Probabilidade de um consumidor mudar de (ou manter a) operadora

		A nova operadora é		
		A	**B**	**C**
Se a operadora atual é	**A**	0,50	0,35	0,15
	B	0,20	0,70	0,10
	C	0,40	0,30	0,30

A probabilidade de o 1º telefone de um indivíduo ser da operadora A é 0,60, a probabilidade de o 1º telefone ser da operadora B é de 0,30; e a de ser da operadora C é 0,10.

Dado que o 2º telefone de um cliente é da operadora A, a probabilidade de o 1º também ter sido é de

a) 0,75

b) 0,70

c) 0,50

d) 0,45

e) 0,40

Comentários:

O enunciado fornece as probabilidades associadas ao 2º telefone do indivíduo (a posteriori), condicionadas ao 1º telefone (a priori) e pede a probabilidade associada ao 1º telefone do indivíduo (a posteriori), condicionada ao 2º telefone (a priori). Ou seja, a questão inverte as probabilidades a priori e a posteriori, o que nos leva à fórmula de Bayes:

$$P(A1|A2) = \frac{P(A2|A1) \times P(A1)}{P(A2|A1) \times P(A1) + P(A2|B1) \times P(B1) + P(A2|C1) \times P(C1)}$$

Em que A1 corresponde ao 1º telefone da marca A, B1 corresponde ao 1º telefone da marca B, C1 corresponde ao 1º telefone da marca C e A2 corresponde ao 2º telefone da marca A.

O enunciado informa que:

- A probabilidade de o 1º telefone ser da marca A é P(A1) = 0,60;
- A probabilidade de o 1º telefone ser da marca B é P(B1) = 0,30;
- A probabilidade de o 1º telefone ser da marca C é P(C1) =0,10.

Pela primeira coluna da tabela, observamos que:

- A probabilidade de a nova operadora (2º telefone) ser da marca A, dado que a atual operadora (1º telefone) é da marca A é P(A2|A1) = 0,50;
- A probabilidade de a nova operadora (2º telefone) ser da marca A, dado que a atual operadora (1º telefone) é da marca B é P(A2|B1) = 0,20;
- A probabilidade de a nova operadora (2º telefone) ser da marca A, dado que a atual operadora (1º telefone) é da marca C é P(A2|C1) = 0,40.

Substituindo esses dados na fórmula de Bayes, temos:

$$P(A1|A2) = \frac{0{,}5 \times 0{,}6}{0{,}5 \times 0{,}6 + 0{,}2 \times 0{,}3 + 0{,}4 \times 0{,}1} = \frac{0{,}3}{0{,}3 + 0{,}06 + 0{,}04} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = 0{,}75$$

Gabarito: A

28. (Cesgranrio/2018 – TRANSPETRO) Em uma fábrica existem três máquinas (M1, M2 e M3) que produzem chips. As máquinas são responsáveis pela produção de 20%, 30% e 50% dos chips, respectivamente. Os percentuais de chips defeituosos produzidos pelas máquinas M1, M2 e M3 são 5%, 4% e 2%, respectivamente. Ao se retirar aleatoriamente um chip, constata-se que ele é defeituoso; então, a probabilidade de ele ter sido produzido pela máquina M1 é de, aproximadamente:

a) 0,025

b) 0,032

c) 0,31

d) 0,55

e) 0,78

Comentários:

Essa questão trabalha com o Teorema de Bayes, pois informa as probabilidades de defeito condicionadas às máquinas, e pede a probabilidade associada a uma máquina, condicionada ao defeito, invertendo, portanto, os eventos a priori e a posteriori:

$$P(M_1|D) = \frac{P(M_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|M_1) \times P(M_1)}{P(D|M_1) \times P(M_1) + P(D|M_2) \times P(M_2) + P(D|M_3) \times P(M_3)}$$

O enunciado informa que:

- As máquinas 1, 2 e 3 são responsáveis por 20%, 30% e 50% da produção, respectivamente, logo:

$$P(M_1) = 0{,}2$$
$$P(M_2) = 0{,}3$$
$$P(M_3) = 0{,}5$$

- Os percentuais de defeito das máquinas 1, 2 e 3 são respectivamente 5%, 4% e 2%, logo:

$$P(D|M_1) = 0{,}05$$
$$P(D|M_2) = 0{,}04$$
$$P(D|M_3) = 0{,}02$$

Substituindo esses dados na fórmula de Bayes, temos:

$$P(M_1|D) = \frac{0{,}05 \times 0{,}2}{0{,}05 \times 0{,}2 + 0{,}04 \times 0{,}3 + 0{,}02 \times 0{,}5} = \frac{0{,}01}{0{,}01 + 0{,}012 + 0{,}01} = \frac{0{,}01}{0{,}032} = 0{,}3125 \cong 0{,}31$$

Gabarito: C

29. (Cesgranrio/2021 – CEF) Um analista de investimentos acredita que o preço das ações de uma empresa seja afetado pela condição de fluxo de crédito na economia de um certo país. Ele estima que o fluxo de crédito na economia desse país aumente, com probabilidade de 20%. Ele estima também que o preço das ações da empresa suba, com probabilidade de 90%, dentro de um cenário de aumento de fluxo de crédito, e suba, com probabilidade de 40%, sob o cenário contrário.

Uma vez que o preço das ações da empresa subiu, qual é a probabilidade de que o fluxo de crédito da economia tenha também aumentado?

a) 1/2

b) 1/5

c) 2/9

d) 9/25

e) 9/50

Comentários:

Essa questão também trabalha com o Teorema de Bayes, pois informa a probabilidade de os preços das ações subirem, condicionada ao aumento do fluxo de crédito, e pede a probabilidade de o fluxo de crédito ter aumentado, dado que os preços das ações subiram, ou seja, inverte os eventos a priori e a posteriori.

Vamos representar por C o aumento do fluxo de crédito; por $\bar{C}$ o não aumento do fluxo de crédito; e por A o aumento dos preços das ações:

$$P(C|A) = \frac{P(A|C) \times P(C)}{P(A|C) \times P(C) + P(A|\bar{C}) \times P(\bar{C})}$$

O enunciado informa que:

- A probabilidade de o fluxo de crédito aumentar é:

$$P(C) = 20\% = 0{,}2$$

Logo, a probabilidade de o fluxo de crédito não aumentar é complementar:

$$P(\bar{C}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

- No cenário de aumento do fluxo de crédito, a probabilidade de os preços das ações aumentarem é:

$$P(A|C) = 90\% = 0{,}9$$

- No cenário contrário (qual seja, não aumento do fluxo de crédito), a probabilidade de os preços das ações aumentarem é:

$$P(A|\bar{C}) = 40\% = 0{,}4$$

Substituindo esses dados na fórmula de Bayes, podemos calcular a probabilidade de o fluxo de crédito ter aumentado, dado que os preços das ações aumentaram:

$$P(C|A) = \frac{0{,}9 \times 0{,}2}{0{,}9 \times 0{,}2 + 0{,}4 \times 0{,}8} = \frac{0{,}18}{0{,}18 + 0{,}32} = \frac{0{,}18}{0{,}50} = \frac{9}{25}$$

Gabarito: D

30. (CESGRANRIO/2011 – FINEP – *Adaptada*) Um sistema de detecção de temporais é composto por dois subsistemas, A e B, que operam independentemente. Se ocorrer temporal, o sistema A acionará o alarme com probabilidade 90%, e o sistema B com probabilidade 95%. Se não ocorrer temporal, a

probabilidade de que o sistema A acione o alarme, isto é, um falso alarme, é de 10%, e a probabilidade de que o sistema B acione o alarme é de 20%. Considere que a probabilidade de ocorrer temporal é igual à probabilidade de não ocorrer temporal.

O sistema foi acionado. A probabilidade de que ocorra um temporal é de:

a) 9/19

b) 185/215

c) 855/875

d) 995/1000

e) 995/1275

Comentários:

O enunciado fornece as seguintes informações:

- A probabilidade de o subsistema A acionar o alarme, dado que ocorre um temporal é $P(A|T) = 0{,}9$. Logo, a probabilidade de esse subsistema não acionar o alarme, dado que ocorre um temporal, é o complemento:
$$P(\bar{A}|T) = 1 - P(A|T) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$$

- A probabilidade de o subsistema B acionar o alarme, dado que ocorre um temporal é $P(B|T) = 0{,}95$. Logo, a probabilidade de esse subsistema não acionar o alarme, dado que ocorre um temporal, é o complemento:
$$P(\bar{B}|T) = 1 - P(B|T) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$$

A partir desses dados, podemos calcular a probabilidade de o sistema como um todo acionar o alarme, dado que ocorre um temporal, $P(S|T)$. Tal evento é o **complementar** de o sistema **não** acionar o alarme, dado que ocorreu o temporal:

$$P(S|T) = 1 - P(\bar{S}|T)$$

Dado que ocorre um temporal, o sistema não acionará o alarme, caso o subsistema A não acione o alarme, $P(\bar{A}|T)$, **E** o subsistema B não acione o alarme, $P(\bar{B}|T)$. Como tais eventos são independentes, a probabilidade da interseção é o produto das probabilidades:

$$P(\bar{S}|T) = P(\bar{A}|T) \times P(\bar{B}|T) = 0{,}1 \times 0{,}05 = 0{,}005$$

Então, a probabilidade condicional de o sistema acionar o alarme é:

$$P(S|T) = 1 - 0{,}005 = 0{,}995$$

O enunciado também fornece as seguintes informações:

- A probabilidade de o subsistema A acionar o alarme, dado que **não** ocorre um temporal é $P(A|\bar{T}) = 0{,}1$.
  Logo, a probabilidade de esse subsistema não acionar o alarme, dado que não ocorre um temporal, é o complemento:
  $$P(\bar{A}|\bar{T}) = 1 - P(A|\bar{T}) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$$
- A probabilidade de o subsistema B acionar o alarme, dado que não ocorre um temporal é $P(B|\bar{T}) = 0{,}2$
  Logo, a probabilidade de esse subsistema não acionar o alarme, dado que não ocorre um temporal, é o complemento:
  $$P(\bar{B}|\bar{T}) = 1 - P(B|\bar{T}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

A partir desses dados, podemos calcular a probabilidade de o sistema como um todo acionar o alarme, dado que **não** ocorre um temporal, $P(S|\bar{T})$. Tal evento é o **complementar** de o sistema **não** acionar o alarme, dado que não ocorreu o temporal:

$$P(S|\bar{T}) = 1 - P(\bar{S}|\bar{T})$$

Dado que não ocorre um temporal, o sistema não acionará o alarme, caso o subsistema A não acione o alarme, $P(\bar{A}|\bar{T})$, **E** o subsistema B não acione o alarme, $P(\bar{B}|\bar{T})$. Como tais eventos são independentes, a probabilidade da interseção é o produto das probabilidades:

$$P(\bar{S}|\bar{T}) = P(\bar{A}|\bar{T}) \times P(\bar{B}|\bar{T}) = 0{,}9 \times 0{,}8 = 0{,}72$$

Então, a probabilidade condicional de o sistema acionar o alarme é:

$$P(S|\bar{T}) = 1 - 0{,}72 = 0{,}28$$

A probabilidade de ocorrer um temporal condicionada ao fato de que o sistema acionou o alarme, isto é, com a inversão de eventos a priori e a posteriori, pode ser calculada pelo Teorema de Bayes:

$$P(T|S) = \frac{P(S|T) \times P(T)}{P(S|T) \times P(T) + P(S|\bar{T}) \times P(\bar{T})}$$

Substituindo os dados, temos:

$$P(T|S) = \frac{0{,}995 \times P(T)}{0{,}995 \times P(T) + 0{,}28 \times P(\bar{T})} = \frac{995 \times P(T)}{995 \times P(T) + 280 \times P(\bar{T})}$$

Considerando que $P(T) = P(\bar{T})$, podemos dividir toda a equação por esse valor:

$$P(T|S) = \frac{995}{995 + 280} = \frac{995}{1275}$$

Gabarito: E

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Conceitos Iniciais

1. (CESGRANRIO/2010 – IBGE) A teoria da probabilidade permite que se calcule a chance de ocorrência de um número em um experimento aleatório. Considerando a teoria das probabilidades analise as afirmações abaixo.

I - Experimentos mutuamente excludentes são aqueles cujos elementos integrantes apresentam características únicas e os resultados possíveis não serão previsíveis.

II - Experimento aleatório é aquele cujo resultado é imprevisível, porém pertence necessariamente a um conjunto de resultados possíveis denominado espaço amostral.

III - Qualquer subconjunto do espaço amostral é denominado evento, sendo que, se esse subconjunto possuir apenas um elemento, o denominamos evento elementar.

É(São) correta(s) a(s) afirmativa(s)

a) I, apenas.

b) II, apenas.

c) I e II, apenas.

d) II e III, apenas.

e) I, II e III.

2. (CESGRANRIO/2010 – IBGE) Relacione os conceitos probabilísticos às suas definições

Conceito

I – Experimentos Aleatórios

II – Espaços Amostrais

III – Eventos Mutuamente Exclusivos

Definição

P – Eventos que não podem acontecer ao mesmo tempo; a ocorrência de um elimina a possibilidade de ocorrência do outro.

Q – Conjuntos universo ou conjuntos de resultados possíveis de um experimento aleatório.

R – Eventos cujos elementos participantes não possuem pontos em comum.

S – Fenômenos que, mesmo repetidos várias vezes sob condições semelhantes, apresentem resultados imprevisíveis.

Estão corretas as associações

a) I – S; II – Q e III – P.

b) I – S; II – P e III – Q.

c) I – P; II – Q e III – S.

d) I – R; II – P e III – Q.

e) I – Q; II – P e III – R.

Gabarito

1. LETRA D
2. LETRA A

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Definições de Probabilidade

1. (Cesgranrio/2021 – CEF) Os alunos de certa escola formaram um grupo de ajuda humanitária e resolveram arrecadar fundos para comprar alimentos não perecíveis. Decidiram, então, fazer uma rifa e venderam 200 tíquetes, numerados de 1 a 200. Uma funcionária da escola resolveu ajudar e comprou 5 tíquetes. Seus números eram 75, 76, 77, 78 e 79. No dia do sorteio da rifa, antes de revelarem o ganhador do prêmio, anunciaram que o número do tíquete sorteado era par. Considerando essa informação, a funcionária concluiu acertadamente que a probabilidade de ela ser a ganhadora do prêmio era de

a) 1,0%

b) 2,0%

c) 3,0%

d) 4,0%

e) 5,0%

2. (Cesgranrio/2018 – LIQUIGÁS) Para montar uma fração, deve-se escolher, aleatoriamente, o numerador no conjunto N = {1,3,7,10} e o denominador no conjunto D = {2,5,6,35}. Qual a probabilidade de que essa fração represente um número menor do que 1(um)?

a) 50%

b) 56,25%

c) 25%

d) 75%

e) 87,5%

3. (CESGRANRIO/2018 – BB) Em um jogo, os jogadores escolhem três números inteiros diferentes, de 1 a 10. Dois números são sorteados e se ambos estiverem entre os três números escolhidos por um jogador, então ele ganha um prêmio. O sorteio é feito utilizando-se uma urna com 10 bolas numeradas, de 1 até 10, e consiste na retirada de duas bolas da urna, de uma só vez, seguida da leitura em voz alta dos números nelas presentes. Qual é a probabilidade de um jogador ganhar um prêmio no sorteio do jogo?

a) 1/90

b) 1/30

c) 1/5

d) 1/15

e) 1/20

4. (CESGRANRIO/2011 – Transpetro) Dez participantes de um programa de televisão serão distribuídos aleatoriamente em duas casas, sendo que, em cada casa, haverá o mesmo número de participantes, isto é, 5 em cada uma.

Desses 10 participantes, 3 preferem a casa X e 2 preferem a casa Y. Qual é a probabilidade de as preferências serem atendidas?

a) 1/252

b) 5/252

c) 1/126

d) 5/126

e) 30/126

5. (Cesgranrio/2018 – PETROBRAS) Um programa de integração será oferecido para os 30 novos funcionários de uma empresa. Esse programa será realizado simultaneamente em duas localidades distintas: X e Y . Serão oferecidas 15 vagas em cada localidade. Sabe-se que 8 funcionários preferem realizar o programa na localidade X e 6, na localidade Y. Se a distribuição for feita de forma aleatória, qual é a probabilidade de todas as preferências serem atendidas?

a) $\frac{C_{16}^{7}}{C_{30}^{15}}$

b) $\frac{C_{15}^{8}.C_{15}^{6}}{C_{30}^{15}}$

c) $\frac{C_{30}^{14}C_{16}^{7}}{C_{30}^{15}.C_{30}^{15}}$

d) $\frac{2.C_{15}^{8}.C_{15}^{6}}{C_{30}^{15}}$

e) $\frac{C_{16}^{7}.C_{16}^{7}.C_{16}^{7}}{C_{30}^{15}}$

GABARITO

1. LETRA B
2. LETRA B
3. LETRA D
4. LETRA D
5. LETRA A

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Combinações de Eventos

1. (CESGRANRIO/2005 – Casa da Moeda) A probabilidade $P(A \cup (\bar{A} \cap B))$ é igual a:

a) $P(A) + P(B) - P(C)$

b) $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

c) $P(A) + P(B) + P(A \cap B)$

d) $P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

e) $P(A) - P(B) - P(A \cup B)$

GABARITO

1. LETRA B

Lista de Questões – Cesgranrio

Axiomas de Probabilidade

1. (Cesgranrio/2018 – Transpetro) Uma empresa de transporte marítimo transporta cargas classificadas como "Químico", "Combustíveis" e "Alimentos", e cada um de seus navios transporta apenas um tipo de carga. Essa empresa informa que, dos 350 navios, 180 transportam combustíveis, e 120 transportam alimentos. Ao chegar ao porto, a probabilidade de um navio dessa empresa estar transportando carga "Químico" ou "Alimentos" é, aproximadamente, de

a) 0,14

b) 0,34

c) 0,49

d) 0,62

e) 0,75

GABARITO

1. LETRA C

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Probabilidade Condicional

1. (Cesgranrio/2021 – BB) A relação do cliente com o sistema bancário tradicional vem passando por transformações nos últimos cincos anos com o crescimento dos bancos digitais. Analisar o perfil dos clientes dos bancos digitais, considerando idade, classe social, renda e motivação, é uma tarefa importante para os bancos tradicionais com o objetivo de preservar a posição de principal Banco na relação com o Cliente.

Para tal fim, uma agência bancária analisou os seguintes dados de uma pesquisa amostral sobre bancos digitais:

Em relação a bancos digitais, você...

45% JÁ OUVIU FALAR	19% SABE COMO FUNCIONA	14% POSSUI RELACIONAMENTO	22% NÃO CONHECE

Entre aqueles que têm relacionamento com bancos digitais (14%), os principais motivos para iniciar esse relacionamento foram...

44% Valores das tarifas	39% Pela inovação de ser um banco 100% digital	22% Indicação de amigo / parente / conhecido	16% Por ser diferente de outros bancos	16% Para dividir o dinheiro em várias contas
41% Para resolver tudo pela internet	28% Para ter mais uma fonte de crédito (cartão e limite)	20% Para poder focar em investimentos	12% Por estar insatisfeito com banco atual (não digital)	12% Pela propaganda do banco

Disponível em: <https://www.institutoqualibest.com/wp-content/uploads/2019/06/Finan%C3%A7as-Pessoais-V5-Banking-Fintech-Insights.pdf>. Acesso em: 21 jan. 2021. Adaptado.

Escolhendo-se ao acaso um dos entrevistados dessa pesquisa, qual é, aproximadamente, a probabilidade de esse cliente ter um relacionamento com banco digital e de ter apresentado como motivo para iniciar esse relacionamento a facilidade de poder resolver tudo pela internet?

a) 5,7%

b) 6,2%

c) 6,4%

d) 7,2%

e) 7,8%

2. (CESGRANRIO/2006 – EPE – *Adaptada*) A probabilidade condicional Pr (A|B), se A e B são eventos mutuamente excludentes, é:

a) 0

b) 1

c) 0,5

d) $Pr(A \cup B)$

e) $Pr(B \cup A)$

3. (CESGRANRIO/2016 – IBGE) Sejam dois eventos A e B mutuamente exclusivos definidos num mesmo espaço de probabilidade, tais que $P(A) = p > 0$ e $P(B) = q > 0$.

Então garante-se que

a) $p + q = 1$

b) $P(A \cap B) = p.q$

c) $P(B \mid A) = 0$

d) $P(A \mid B) = p$

e) $P(A \cap B \mid B) = 1$

4. (CESGRANRIO/2010 – Petrobras) Dois eventos de probabilidade positiva são disjuntos, isto é, não podem ocorrer simultaneamente. Em consequência

a) são eventos independentes.

b) têm a mesma probabilidade.

c) a soma de suas probabilidades é igual a 1.

d) sua união tem probabilidade nula.

e) sua intercessão tem probabilidade nula.

5. (CESGRANRIO/2011 – Petrobras) Uma pessoa lança um mesmo dado não viciado duas vezes consecutivas. Como no primeiro lançamento foi obtido o número 5, qual a probabilidade do resultado ser 3 ou 4 no segundo lançamento?

a) 1/3

b) 1/6

c) 1/12

d) 1/18

e) 1/30

6. (Cesgranrio/2018 – PETROBRAS) Um equipamento é aprovado para uso quatro vezes mais frequentemente do que reprovado, quando testado todas as manhãs. Cada manhã o teste é realizado de modo independente. A probabilidade de que, em dois dias seguidos, o equipamento seja reprovado, pelo menos uma vez, é igual a

a) 1/5

b) 4/5

c) 1/25

d) 9/15

e) 6/25

7. (CESGRANRIO/2010 – Petrobras) Três pessoas nasceram em abril. A probabilidade de que as três façam aniversário no mesmo dia é de

a) 1/3600

b) 1/2700

c) 1/900

d) 1/300

e) 1/30

8. (CESGRANRIO/2005 – MPE) Qual a probabilidade de serem obtidos três ases em seguida, quando se extraem três cartas de um baralho comum de 52 cartas se a carta extraída é reposta no baralho antes da extração da próxima carta?

a) 1/169

b) 1/221

c) 1/2197

d) 1/5525

e) 1/140608

9. (CESGRANRIO/2018 – Petrobras) Uma notícia disseminada nas redes sociais tem 2% de probabilidade de ser falsa. Quando a notícia é verdadeira, um indivíduo reconhece corretamente que é verdadeira. Entretanto, se a notícia é falsa, o indivíduo acredita que é verdadeira com probabilidade p.

A probabilidade de esse indivíduo reconhecer corretamente uma notícia disseminada nas redes sociais é

a) 0,02p

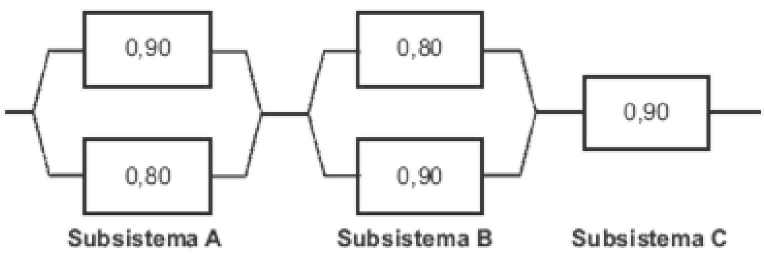
b) 1 – 0,02p

c) 0,98 + 0,02p

d) 0,02 – 0,02p

e) 0,02 – 0,98p

10. (CESGRANRIO/2010 – EPE)



Considere o diagrama acima, formado por três subsistemas, representando a estrutura operacional de um sistema eletrônico. A probabilidade de cada componente operar adequadamente está explicitada no diagrama.

Para que o sistema funcione, é necessário que o subsistema C e pelo menos um dos componentes de cada um dos subsistemas A e B funcionem.

Supondo-se que os componentes operem de forma independente, a probabilidade de que o sistema funcione é

a) $(0,9).(0,98)^2$

b) (0,9).(0,98).(0,97)

c) $1 – (0,9).(0,97)^2$

d) $(0,85)^2.(0,9)$

e) $1 – (0,9).(0,98)^2$

11. (CESGRANRIO/2006 – EPE) A probabilidade de se obter a soma 7 ou a soma 3 na jogada de dois dados de seis lados não viciados é:

a) 6/8

b) 2/9

c) 4/9

d) 2/18

e) 6/36

12. (CESGRANRIO/2008 – Petrobras) Dois dados comuns, "honestos", são lançados simultaneamente.

A probabilidade do evento "a soma dos valores dos dados é ímpar e menor que 10" é igual a

a) 4/11

b) 17/36

c) 4/9

d) 12/36

e) 3/8

13. (CESGRANRIO/2006 – EPE) Lançando um dado não tendencioso duas vezes, qual é a probabilidade de o resultado do segundo lançamento ser maior que o do primeiro?

a) 5/6

b) 1/2

c) 17/36

d) 5/12

e) 1/3

14. (CESGRANRIO/2010 – IBGE) Lança-se uma moeda honesta três vezes. Sejam os eventos:

A = {sair duas caras ou três caras} e B = {os dois primeiros resultados são iguais}

Nessas condições, tem-se que

a) P(A) = 0,25; P(B) = 0,25; A e B não são independentes e não são mutuamente exclusivos.

b) P(A) = 0,25; P(B) = 0,25; A e B são independentes e não são mutuamente exclusivos.

c) P(A) = 0,5; P(B) = 0,25; A e B não são independentes e não são mutuamente exclusivos.

d) P(A) = 0,5; P(B) = 0,5; A e B são independentes e não são mutuamente exclusivos.

e) P(A) = 0,5; P(B) = 0,5; A e B não são independentes e não são mutuamente exclusivos.

15. (CESGRANRIO/2010 – IBGE) O instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE divulga anualmente a Tábua Completa de Mortalidade. Na tabela a seguir estão as probabilidades de morte entre as idades exatas X e X + 1, $Q(X,1)$, em mil %; as probabilidades complementares $1-Q(X,1)$, em mil% e as probabilidades complementares acumuladas $\prod_{i=1}^{X}(1-Q(X,1))$ para o ano de 2007.

Idades exatas (X)	Q(X,1) (em mil %)	1−Q(X,1) (em mil %)	$\prod(1-Q(X,1))$
50	6,6	993,37	0,99337
51	7,1	992,94	0,98635
52	7,6	992,43	0,97888
53	8,2	991,84	0,97090
54	8,8	991,19	0,96234
55	9,5	990,47	0,95317

Disponível em: ftp://ftp.ibge.gov.br/Tabuas Completas de Mortalidade/Tabuas Completas de Mortalidade 2007. Acessado em 13/11/2009.

Dado um indivíduo com 50 anos, a probabilidade de morrer antes de completar 55 anos é de, aproximadamente,

a) 3,8%

b) 4,7%

c) 8,8%

d) 95,3%

e) 96,2%

16. (CESGRANRIO/2011 – Transpetro) A probabilidade de que ocorra o evento X, dado que o evento Y ocorreu, é positiva e representada por P(X/Y). Similarmente, a probabilidade de que ocorra Y, dado que X ocorreu, é representada por P(Y/X). Se P(X/Y) = P(Y/X), os eventos X e Y são

a) ortogonais

b) coincidentes

c) independentes

d) igualmente prováveis

e) mutuamente exclusivos

17. (CESGRANRIO/2018 – BB) Dentre as atribuições de um certo gerente, encontra-se o oferecimento do produto A, de forma presencial e individualizada, aos seus clientes. A probabilidade de o gerente efetuar a venda do produto A em cada reunião com um cliente é 0,40. Em 20% dos dias de trabalho, esse gerente não se reúne com nenhum cliente; em 30% dos dias de trabalho, ele se reúne com apenas 1 cliente; e em 50% dos dias de trabalho, ele se reúne, separadamente, com exatos 2 clientes. Em um determinado dia de trabalho, a probabilidade de esse gerente efetuar pelo menos uma venda presencial do produto A é

a) 0,54

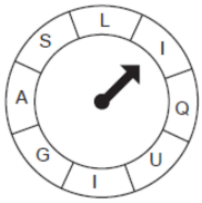
b) 0,46

c) 0,20

d) 0,26

e) 0,44

18. (Cesgranrio/2018 – LIQUIGÁS) A Figura a seguir mostra um jogo eletrônico no qual, a cada jogada, a seta, após ser girada, para, aleatoriamente e com igual probabilidade, em qualquer uma das oito casas com as letras da palavra LIQUIGÁS.



Um jogador só é vencedor se, em duas jogadas consecutivas, a seta apontar para letras iguais. A probabilidade de um jogador ser vencedor, fazendo apenas duas jogadas, é igual a

a) 4/64

b) 8/64

c) 10/64

d) 14/64

e) 16/64

19. (Cesgranrio/2018 – PETROBRAS) Um banco lança um determinado fundo e avalia a rentabilidade segundo dois cenários econômicos.

- **O primeiro cenário é o de aumento da taxa de juros e, nesse caso, a rentabilidade do fundo é certamente positiva.**
- **No segundo cenário, de queda ou de manutenção da taxa de juros, a probabilidade de a rentabilidade do fundo ser positiva é de 0,4.**

Considere ainda que a probabilidade de a taxa de juros subir seja de 70%. A probabilidade de que a rentabilidade do fundo seja positiva, é de

a) 70%

b) 74%

c) 78%

d) 82%

e) 100%

20. (Cesgranrio/2018 – Transpetro) Considere 2 urnas: na primeira urna há 1 bola branca e 1 bola preta; na segunda urna, há 1 bola branca e 2 pretas. Uma bola é selecionada aleatoriamente da urna 1 e colocada na urna 2. Em seguida, uma bola é selecionada, também aleatoriamente, da urna 2. Qual a probabilidade de que a bola selecionada na urna 2 seja branca?

a) 12,5%

b) 25%

c) 37,5%

d) 50%

e) 62,5%

21. (CESGRANRIO/2010 – IBGE) Em uma empresa, por experiências passadas, sabe-se que a probabilidade de um funcionário novo, o qual tenha feito o curso de capacitação, cumprir sua cota de produção é 0,85, e que essa probabilidade é 0,40 para os funcionários novos que não tenham feito o curso. Se 80% de todos os funcionários novos cursarem as aulas de capacitação, a probabilidade de um funcionário novo cumprir a cota de produção será

a) 0,48

b) 0,50

c) 0,68

d) 0,76

e) 0,80

22. (CESGRANRIO/2010 – IBGE) Segundo a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios – PNAD-2008, aproximadamente 30% dos domicílios brasileiros possuíam microcomputador, sendo que 22% desses tinham acesso à Internet. Restringindo a população aos domicílios com rendimento mensal superior a 20 salários mínimos (que representavam 5% do total), as porcentagens alteraram para 90% e 80%, respectivamente. Selecionando-se aleatoriamente um domicílio dessa amostra, a renda mensal domiciliar observada foi inferior a 20 salários mínimos; então, a probabilidade de ele possuir microcomputador e ter acesso à Internet é

a) 3/95

b) 30/225

c) 30/255

d) 36/234

e) 36/45

23. (CESGRANRIO/2010 – Petrobras) Na simulação da operação de uma planta industrial, supõe- se que ela pode apresentar dois estados: ou operou normalmente ou operou com alguma anomalia. Se um dia operou normalmente, a probabilidade de apresentar alguma anomalia no dia seguinte é 70%. Quando um dia operou com alguma anomalia, a probabilidade de operar normalmente no dia seguinte é 60%. Independente de como esteja operando atualmente, após muitos dias de operação, a probabilidade de concluir um dia operando normalmente é de, aproximadamente,

a) 42%

b) 46%

c) 51%

d) 56%

e) 60%

▪

24. (CESGRANRIO/2011 – Transpetro) Duas empresas diferentes produzem a mesma quantidade de aparelhos celulares, ou seja, ao se comprar um aparelho celular, a probabilidade de ele ter sido produzido por qualquer uma delas é a mesma. Cada aparelho produzido pela fábrica A é defeituoso com probabilidade 1%, enquanto cada aparelho produzido pela fábrica B é defeituoso com probabilidade 5%. Suponha que você compre dois aparelhos celulares que foram produzidos na mesma fábrica. Se o primeiro aparelho foi verificado e é defeituoso, a probabilidade condicional de que o outro aparelho também seja defeituoso é

a) 13/10.000

b) 13/1.000

c) 13/300

d) 13/100

e) 3/100

25. (CESGRANRIO/2008 – ANP) Em um determinado município, 20% de todos os postos de gasolina testados quanto à qualidade do combustível apontaram o uso de combustíveis adulterados. Ao serem testados, 99% de todos os postos desse município que adulteraram combustível foram reprovados, mas 15% dos que não adulteraram também foram reprovados, ou seja, apresentaram um resultado falso-positivo. A probabilidade de um posto reprovado ter efetivamente adulterado o combustível é, aproximadamente

a) 0,62

b) 0,50

c) 0,32

d) 0,20

e) 0,12

26. (CESGRANRIO/2018 – BB) Três caixas eletrônicos, X, Y e Z, atendem a uma demanda de 50%, 30% e 20%, respectivamente, das operações efetuadas em uma determinada agência bancária. Dados históricos registraram defeitos em 5% das operações realizadas no caixa X, em 3% das realizadas no caixa Y e em 2% das realizadas no caixa Z.

Com vistas à melhoria no atendimento aos clientes, esses caixas eletrônicos passaram por uma revisão completa que:

I - reduziu em 25% a ocorrência de defeito;

II - igualou as proporções de defeitos nos caixas Y e Z; e

III - regulou a proporção de defeitos no caixa X que ficou reduzida à metade da nova proporção de defeitos do caixa Y.

Considerando-se que após a conclusão do procedimento de revisão, sobreveio um defeito, a probabilidade de que ele tenha ocorrido no caixa Y é

a) 40%

b) 35%

c) 20%

d) 25%

e) 30%

27. (CESGRANRIO/2011 – Petrobras) Um estudo sobre fidelidade do consumidor à operadora de telefonia móvel, em uma determinada localidade, mostrou as seguintes probabilidades sobre o hábito de mudança:

Probabilidade de um consumidor mudar de (ou manter a) operadora

		A nova operadora é		
		A	B	C
Se a operadora atual é	A	0,50	0,35	0,15
	B	0,20	0,70	0,10
	C	0,40	0,30	0,30

A probabilidade de o 1º telefone de um indivíduo ser da operadora A é 0,60, a probabilidade de o 1º telefone ser da operadora B é de 0,30; e a de ser da operadora C é 0,10.

Dado que o 2º telefone de um cliente é da operadora A, a probabilidade de o 1º também ter sido é de

a) 0,75

b) 0,70

c) 0,50

d) 0,45

e) 0,40

28. (Cesgranrio/2018 – TRANSPETRO) Em uma fábrica existem três máquinas (M1, M2 e M3) que produzem chips. As máquinas são responsáveis pela produção de 20%, 30% e 50% dos chips, respectivamente. Os percentuais de chips defeituosos produzidos pelas máquinas M1, M2 e M3 são 5%, 4% e 2%, respectivamente. Ao se retirar aleatoriamente um chip, constata-se que ele é defeituoso; então, a probabilidade de ele ter sido produzido pela máquina M1 é de, aproximadamente:

a) 0,025

b) 0,032

c) 0,31

d) 0,55

e) 0,78

29. (Cesgranrio/2021 – CEF) Um analista de investimentos acredita que o preço das ações de uma empresa seja afetado pela condição de fluxo de crédito na economia de um certo país. Ele estima que o fluxo de crédito na economia desse país aumente, com probabilidade de 20%. Ele estima também que o preço das ações da empresa suba, com probabilidade de 90%, dentro de um cenário de aumento de fluxo de crédito, e suba, com probabilidade de 40%, sob o cenário contrário.

Uma vez que o preço das ações da empresa subiu, qual é a probabilidade de que o fluxo de crédito da economia tenha também aumentado?

a) 1/2

b) 1/5

c) 2/9

d) 9/25

e) 9/50

30. (CESGRANRIO/2011 – FINEP – *Adaptada*) Um sistema de detecção de temporais é composto por dois subsistemas, A e B, que operam independentemente. Se ocorrer temporal, o sistema A acionará o alarme com probabilidade 90%, e o sistema B com probabilidade 95%. Se não ocorrer temporal, a probabilidade de que o sistema A acione o alarme, isto é, um falso alarme, é de 10%, e a probabilidade de que o sistema B acione o alarme é de 20%. Considere que a probabilidade de ocorrer temporal é igual à probabilidade de não ocorrer temporal.

O sistema foi acionado. A probabilidade de que ocorra um temporal é de:

a) 9/19

b) 185/215

c) 855/875

d) 995/1000

e) 995/1275

Gabarito

1. LETRA A
2. LETRA A
3. LETRA C
4. LETRA E
5. LETRA A
6. LETRA D
7. LETRA C
8. LETRA C
9. LETRA B
10. LETRA A
11. LETRA B
12. LETRA C
13. LETRA D
14. LETRA D
15. LETRA A
16. LETRA D
17. LETRA E
18. LETRA C
19. LETRA D
20. LETRA C
21. LETRA D
22. LETRA A
23. LETRA B
24. LETRA C
25. LETRA A
26. LETRA A
27. LETRA A
28. LETRA C
29. LETRA D
30. LETRA E

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.